1
Introdução

1.1.
Considerações Iniciais

Pela Teoria de Seleção de Carteiras, iniciada com o trabalho de Markowitz (1952), a seleção de uma carteira deve levar em consideração os dois primeiros momentos da distribuição de retornos (média e variância) e supõe que os investidores são avessos ao risco.

A análise de desempenho pelos critérios de dominância estocástica leva em consideração todos os momentos da distribuição de retornos e o comportamento diferenciado dos investidores frente ao risco.

As características diferenciadas destes dois tipos de análise podem levar a resultados díspares. A questão principal que este trabalho se propõe a responder é se, para fundos de gerenciamento ativo, existe alguma correlação entre o desempenho medido utilizando-se os índices de média-variância e o desempenho medido pelos critérios de dominância estocástica.

Foram analisados aqui 84 fundos de ações de gerenciamento ativo entre maio de 1999 e abril de 2001, um período de estabilidade no mercado brasileiro. Foram selecionados somente fundos que apresentaram atividades e permaneceram abertos para captação durante todo o período, constituindo assim opções de investimento viáveis. Além disto, foram incluídos na amostra somente os fundos nacionais que possuem como *benchmark* o índice Ibovespa, considerado nesta análise como o *proxy* de mercado.

A análise do desempenho passado de investimentos, segundo Duarte Júnior (1996), deve fazer parte de um processo decisório de investimento por duas razões: primeiro, identificar os pontos fortes e fracos de administradores de recursos e em segundo, analisar a maneira como determinado fundo é gerido.

O gerenciamento ativo de carteiras baseia-se na hipótese da existência de informações superiores às de consenso do mercado que vão possibilitar um ganho superior à média do mercado para o gestor que tiver posse destas informações e souber usá-las. No gerenciamento passivo não há nenhuma informação disponível e o fundo tem como objetivo replicar um índice.

A escolha da análise de fundos de investimentos em ações se deve ao crescente mercado que este setor representa. Isto pode ser analisado observando-se a tabela a seguir, que contém o patrimônio líquido destes fundos ao longo dos últimos meses.

		Fundo de Investimento em Títulos e Valores Mobiliários			
	Período	**R$ Milhões**	**US$ Milhões**	**Quantidade em Funcionamento**	**Número de Quotistas**
2002	**Jan**	22.077,40	9.129,30	517	3.488.770
	Fev	23.252,30	9.902,20	531	3.547.315
	Mar	22.891,00	9.851,50	530	3.598.005
	Abr	22.269,30	9.426,10	515	3.513.648
	Mai	21.721,30	8.612,70	526	3.552.654
	Jun	20.747,60	7.294,20	526	3.396.692
	Jul	19.623,10	5.723,50	524	3.582.171
	Ago	20.432,70	6.760,70	529	3.579.333
	Set	19.229,00	4.937,00	525	3.348.882
	Out	22.001,10	6.036,00	523	3.576.960
	Nov	22.036,10	6.059,70	530	3.579.583
	Dez	28.246,90	7.994,50	539	3.566.645
2003	**Jan**	27.460,50	7.788,40	527	3.551.635
	Fev	26.132,90	7.334,10	522	3.542.312
	Mar	27.593,80	8.229,30	515	3.534.900
	Abr	29.334,00	10.150,90	519	3.533.353
	Mai	29.156,40	9.831,50	515	3.619.672
	Jun	28.552,70	9.941,70	506	3.513.049
	Jul	29.810,30	10.379,60	583	3.958.333
	Ago	31.030,10	10.804,30	572	3.919.892

Tabela 1: Patrimônio, Quantidade de Fundos e de Quotistas em 2002/2003
(Fonte: www.cvm.gov.br)

Pode-se notar um aumento tanto do patrimônio líquido, da quantidade de fundos como do número de quotistas nos últimos meses, sendo que esta variação tem acompanhado a diminuição crescente da taxa de juros no Brasil e a conseqüente queda na procura por investimentos de renda fixa. A estabilidade da moeda brasileira e a queda crescente do risco-Brasil, devido à política econômica que tem sido aplicada pelo governo, também são fatores que contribuirão para o crescimento do mercado de fundos de investimentos no Brasil, tornando importante um estudo acerca deste tema.

A performance dos 84 fundos de gerenciamento ativo será medida pelos quatro índices de desempenho por média-variância mais utilizados no mercado: os índices de Sharpe, Treynor, Modigliani e de Informação (ou IR). Além destes, será estudado também um novo índice proposto por Alexander e Baptista (2003), o de Excesso de Retorno por Valor-em-Risco, ou RVar. Trata-se de mais uma importante ferramenta para a seleção de investimentos, uma vez que o Valor-em-Risco é um dos instrumentos mais populares utilizados por gestores de fundos para calcular, gerenciar e controlar o risco.

Para o cálculo da dominância estocástica de primeira, segunda e terceira ordens será criada uma função em Matlab que, a partir dos retornos dos fundos, irá compará-los entre si e retornará quais os fundos mais dominantes em relação aos outros fundos.

A fim de comparar o desempenho de uma carteira de gerenciamento passivo com o de carteiras de gerenciamento ativo, será otimizada pelo método de Elton, Gruber e Padberg uma carteira contendo ações do Ibovespa. O desempenho relativo desta Carteira Eficiente permitirá fazer inferências sobre a eficiência, tanto pelo critério de média-variância quanto pelo de dominância estocástica, do gerenciamento ativo de carteiras.

Para a comparação entre o desempenho medido pelos índices de média-variância tradicionais e pelos critérios de dominância estocástica será calculada a correlação de Spearman entre estes *rankings*. Será também verificado se os fundos que dominam estocasticamente o Ibovespa em cada subperíodo demonstram também melhor desempenho por média-variância.

No presente estudo serão analisados e comentados uma série de trabalhos relevantes, nacionais e internacionais, na área de análise de performance de fundos de investimentos. O fato de nenhum deles considerar os critérios de dominância estocástica na análise de performance de investimentos justifica ainda mais fortemente a realização do presente estudo.

As limitações deste trabalho se referem aos dados relativos aos fundos de investimentos, já que existiu uma relativa dificuldade em se obter os retornos dos fundos ativos existentes no mercado brasileiro. O período estudado é relativamente curto (2 anos), pois se quis eliminar períodos de instabilidade no mercado. Os fundos incluídos neste trabalho são os que constam no banco de dados da Anbid.

1.2. O Modelo de Seleção de Carteiras de Markowitz

A teoria moderna de carteiras inicia-se com o artigo *Portfolio Selection*, de Markowitz (1952). Nele, Markowitz definiu que para a seleção de carteiras o investidor racional deve levar em conta dois parâmetros: a média e a variância. O assim denominado critério de média-variância determina que o investidor racional deve selecionar aquelas carteiras que oferecerem a mínima variância para um dado retorno ou o máximo retorno para uma dada variância.

Esta teoria afirma também que os investidores racionais, por serem avessos ao risco, não aplicam seus investimentos em ativos que apresentam maior retorno absoluto, mas sim em carteiras diversificadas. Isto porque a diversificação entre ativos de mesma variância (mas que não sejam perfeitamente correlacionados) resulta numa carteira de variância menor que a original.

1.2.1. Os conceitos de Retorno e Risco

O Retorno de uma carteira de ativos é definido simplesmente como a soma ponderada dos retornos de cada ativo que a compõe, sendo que o peso de cada ativo é a fração da carteira nele investida. Assim, para uma carteira com *n* ativos tem-se que:

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{n} X_i \overline{R}_i \qquad (1.1)$$

onde $\overline{R}_p$ é o retorno esperado da carteira p, X_i é a proporção do montante total investido no ativo *i* e $\overline{R}_i$ é o retorno esperado do ativo i.

O risco é medido pela volatilidade (ou variância) dos retornos esperados. O risco de uma carteira p é designado por σ_p^2 e dado pela seguinte expressão:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \text{ , para i diferente de j} \qquad (1.2)$$

onde σ_i^2 é a variância do retorno do ativo i, σ_i é o desvio-padrão do retorno do ativo i e ρ_{ij} é a correlação entre os retornos dos ativos i e j.

1.2.2.
O Risco de um Ativo e o Risco da Carteira

O risco total de um ativo é igual à soma de dois tipos de risco: o sistemático e o não-sistemático.

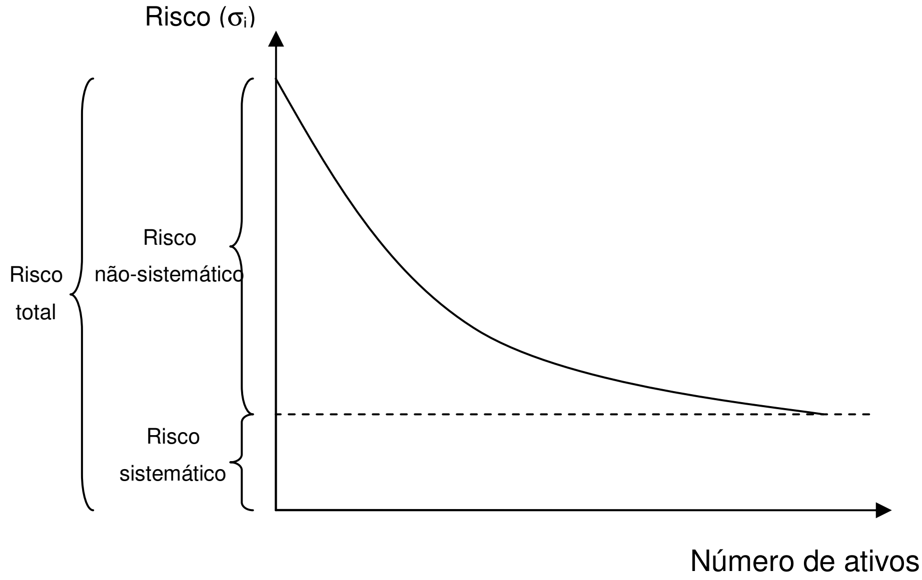

Figura 1: Os três tipos de risco e o efeito da diversificação

O risco não-sistemático é aquele que pode ser eliminado através da diversificação. Ele é também chamado de risco único, diversificável ou específico e é gerado por eventos aleatórios que interferem no valor do ativo.

O risco sistemático, também conhecido como risco de mercado, risco não-diversificável ou risco comum, é aquele que não se pode evitar. Ele é inerente a qualquer ativo que faça parte do mercado e está relacionado, por exemplo, com os riscos econômicos e políticos aos quais o mercado está sujeito.

Segundo Brealey e Myers (1999), para se conhecer a contribuição de um ativo, considerado individualmente, no risco de uma carteira bem diversificada, de nada adianta saber o seu risco isolado. É preciso medir o seu risco de mercado e isto implica em quantificar sua sensibilidade em relação aos movimentos do mercado. O termo beta (β), que quantifica esta sensibilidade, é designado por:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \qquad (1.3)$$

Ou seja, o β do ativo i é dado pela razão da covariância (σ_{im}) entre o ativo i e o mercado e a variância (σ_m^2) do retorno do mercado.

Pode-se classificar o beta de um ativo basicamente de três formas:

- Neutro (β=1);
- Agressivo (β>1): o retorno do ativo varia mais (positivamente ou negativamente) que a variação sofrida pelo mercado;
- Defensivo (β<1): o retorno do ativo sofre uma variação menor (positivamente ou negativamente) que a variação sofrida pelo mercado.

Um caso que raramente ocorre é o de β<0, em que o retorno do ativo varia inversamente à variação do mercado.

A Figura 1 mostra que para um grande número de ativos na carteira o risco não-sistemático tende a zero e o risco total tende ao risco de mercado. Este efeito ocorre pois os retornos dos ativos não são perfeitamente correlacionados. De acordo com Levy e Sarnat (1984), quanto menor a interdependência entre os returnos e quanto maior o número de ativos disponíveis no mercado mais o investidor ganhará com a diversificação.

1.2.3.
As Curvas de Utilidade

As curvas de utilidade são utilizadas para representar as preferências do investidor frente ao risco e ao retorno. Para o caso de um investidor racional (avesso ao risco), suas preferências serão maiores para um maior retorno esperado, conforme cresce o risco do investimento. Assumindo que incrementos adicionais no risco demandam incrementos ainda maiores no retorno esperado, as curvas de utilidade serão convexas. Outra característica importante é que para o investidor racional as curvas não se interceptam.

A curva que representa maior utilidade para o investidor será aquela mais acima e mais à esquerda no gráfico abaixo e será conseqüentemente escolhida pelo investidor racional avesso ao risco.

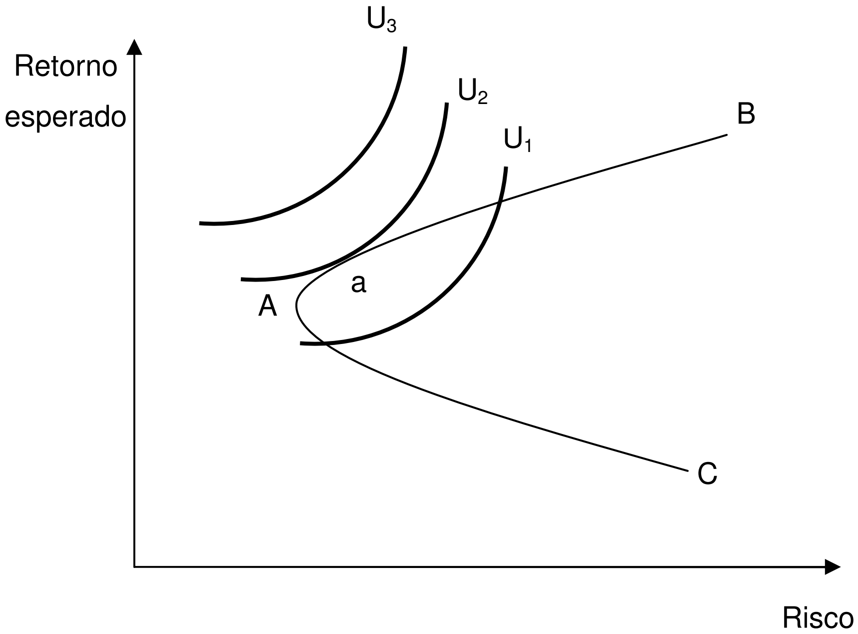

Figura 2: Curvas de Utilidade

A Figura 2 representa as possibilidades de preferências de um investidor para um investimento. As curvas de utilidade estão representadas por U_1, U_2 e U_3 e a curva de investimento é a curva BAC. A sua melhor opção é escolher a opção de investimento *a* dentro do conjunto eficiente AB, ou seja, a opção que tangencia a curva U_2. Nenhum ponto em U_1 pode ser escolhido pois existem curvas de maior utilidade disponíveis. Nenhum ponto em U_3 poderá ser escolhido pois apesar de ter a maior utilidade esta curva está fora das possibilidades de investimento (não intercepta BAC).

1.2.4. A Fronteira Eficiente

O trabalho de Markowitz (1952) mostrou o benefício da diversificação dos ativos de uma carteira. Ele considera que todos os tipos de investimentos estão disponíveis para todos os investidores, ou seja, uma carteira com n ativos pode ser construída de infinitas maneiras diferentes, cada uma combinando em proporções distintas os n ativos. Isto implica que, para um dado nível de risco, existirá uma carteira com maior retorno esperado que todas as outras e que, para um dado nível de retorno esperado, haverá uma carteira de menor risco que todas as outras. A fronteira eficiente é o lugar geométrico onde se localizam os pontos que representam estas carteiras denominadas eficientes ou dominantes.

Cada investidor escolherá a carteira onde deseja investir de acordo com sua curva de utilidade. Os mais agressivos (mais propensos ao risco) desejarão um retorno maior que os mais conservadores (menos propensos ao risco).

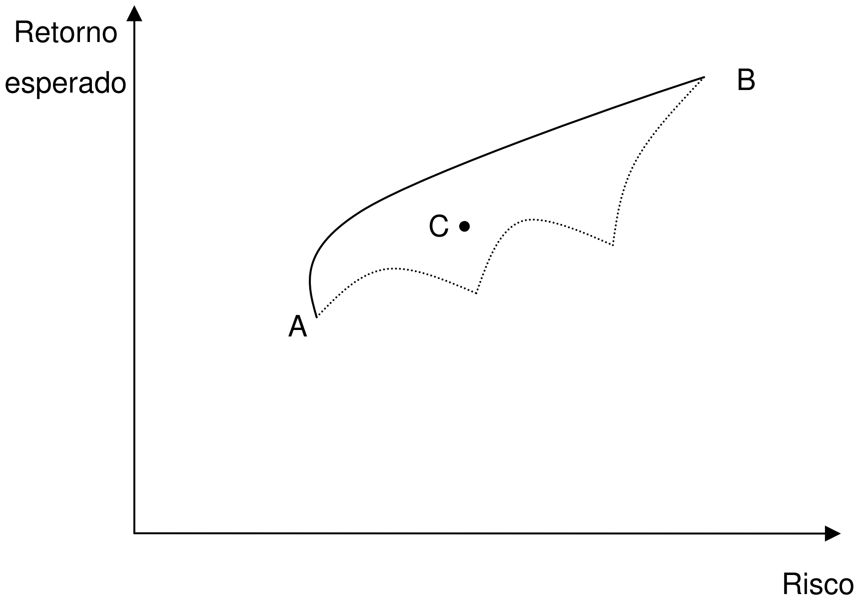

Figura 3: A fronteira eficiente

A fronteira eficiente é o limite factível de combinações de maior benefício risco-retorno, não havendo nenhuma outra combinação além dela. O investidor agressivo escolherá uma carteira mais próxima de B, enquanto o mais conservador escolherá uma próxima de A. O ponto C, situado dentro do conjunto de oportunidades, representa uma carteira dominada, isto é, existe uma carteira localizada em AB que para o mesmo nível de risco promete um retorno maior.

1.2.5.
A Linha do Mercado de Capitais

Suponhamos que todo investidor pode emprestar ou pegar emprestado dinheiro a uma mesma taxa de juros livre de risco r_f. Assim, a representação das relações risco-retorno de todas as possíveis combinações de ativos com e sem risco é feita pela Linha do Mercado de Capitais (LMC), formada por uma reta que parte da taxa r_f e é tangente à fronteira eficiente. A habilidade de determinar a carteira ótima de ativos de risco sem nenhuma informação a respeito das preferências do investidor é o chamado **teorema da separação**:

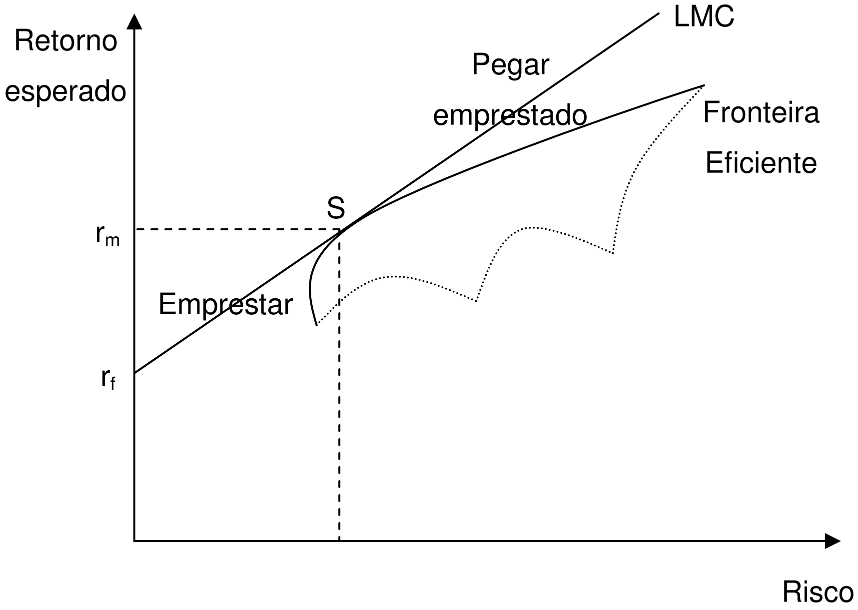

Figura 4: A Linha do Mercado de Capitais

As carteiras sobre a LMC à direita de S estão tomando dinheiro emprestado no mercado à taxa r_f (por isso denominadas **alavancadas**), enquanto as carteiras à sua esquerda estão emprestando dinheiro a esta mesma taxa sem risco. A carteira S, denominada Carteira de Mercado, é a combinação eficiente de todos os ativos com risco encontrados no mercado de capitais. No Brasil ela é representada pelo índice Ibovespa.

O retorno esperado da LMC é dado pela seguinte expressão:

$$\overline{R_p} = r_f + \left[\frac{\overline{r_m} - r_f}{\sigma_m}\right]\sigma_p \tag{1.4}$$

onde $\overline{R_p}$ é o retorno esperado da carteira genérica p, $\overline{r_m}$ é o retorno esperado da carteira de mercado, σ_m é o risco da carteira de mercado e σ_p é o risco da carteira p. A diferença entre a rentabilidade do mercado e a taxa de juros, representado na equação (1.4) por $\overline{r_m} - r_f$, é o chamado **prêmio de risco do mercado**.

1.2.6.
O Modelo de Índice Único (*Single-Index Model*)

Através da observação casual dos preços das ações, pode-se notar que quando o mercado está em alta (e isto pode ser medido por qualquer índice de performance de mercado), o preço da maioria das ações também tende a subir e que quando o mercado se encontra em queda, o mesmo tende a ocorrer com os preços das ações deste mercado. A partir deste princípio, Sharpe[1] desenvolveu uma versão simplificada do processo de geração de retornos de títulos, chamada **modelo de fatores**, que assume que o retorno de um título é sensível ao movimento de vários fatores (ou índices).

A versão mais simples deste modelo considera que os títulos são sensíveis a apenas um índice e portanto é chamado Modelo de Índice Único. Por ele, o retorno de um título é dado pela seguinte equação:

$$R_i = a_i + \beta_i r_m \tag{1.5}$$

onde a_i é a componente do ativo i que é independente da performance do mercado – uma variável aleatória.

A equação (1.5) "quebra" o retorno do ativo em dois componentes: uma parte dependente do mercado (β_i) e outra que independe do mercado (a_i). É interessante dividir o termo a_i em duas partes:

$$a_i = \alpha_i + e_i \tag{1.6}$$

onde α_i é o valor esperado de a_i e e_i representa o elemento aleatório de a_i. O valor esperado de e_i é zero.

---

[1] Sharpe, W. F., *A Simplified Model for Portfolio Analysis*. Management Science, v.9, jan/1963

A equação de retorno de uma ação pode ser escrita como:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i r_m + e_i \tag{1.7}$$

Uma das hipóteses do modelo é a de que:

$$\mathrm{cov}(e_i, r_m) = E[(e_i - 0)(r_m - \overline{r_m})] = 0 \tag{1.8}$$

Isto é, o erro aleatório do título é independente do retorno do mercado. Estimativas de α_i, β_i e σ_{ei}^2 são obtidos através de regressões de séries temporais. A outra hipótese é a de que $E(e_i, e_j)$ = 0, ou seja, dois títulos só variam em conjunto devido a movimentos coordenados com o mercado. Em síntese, tem-se:

1. Retorno médio: $\overline{R}_i = a_i + \beta_i \overline{r}_m$;
2. Variância do ativo: $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2$;
3. Covariância entre os ativos i e j: $\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$

1.2.7. O Capital Asset Pricing Model (CAPM)

O CAPM é um modelo expectacional desenvolvido por Sharpe, Litner e Mossin independentemente e utilizado para se determinar o retorno esperado de ativos. Segundo Sharpe e Alexander (1990), ele se baseia nas seguintes premissas:

1. Os investidores avaliam suas carteiras considerando um horizonte de um período;
2. Tendo que optar entre duas carteiras de mesmo risco, os investidores escolherão a de maior valor esperado;
3. Os investidores são avessos ao risco;
4. A quantidade total de ativos é fixa e todos são perfeitamente divisíveis e transacionáveis no mercado;

5. Existe uma taxa livre de risco pela qual os investidores podem emprestar ou tomar emprestado;
6. Não há taxas nem custos de transação;
7. Todos os investidores possuem o mesmo horizonte de tempo;
8. A taxa livre de risco é a mesma para todos os investidores;
9. A informação é livremente e instantaneamente disponível para todos os investidores;
10. Os investidores têm expectativas homogêneas, ou seja, possuem a mesma percepção ao analisar os retornos esperados, desvios-padrão e covariâncias dos ativos.

A mensagem deste modelo, segundo Brealey e Myers (1999) é a de que, num mercado competitivo, o prêmio de risco esperado varia proporcionalmente ao beta do ativo. Por exemplo, um ativo de beta 0,5 possui metade do prêmio de risco esperado do mercado, que por sua vez tem o beta unitário.

Todo investimento deve estar situado sobre a LMC, ou caso contrário existiriam oportunidades de arbitragem sem risco.

A equação do CAPM pode ser escrita da seguinte forma:

$$\overline{R_i} = r_f + \beta_i(\overline{r_m} - r_f) \qquad (1.9)$$

Ou seja, a taxa de retorno esperado de um ativo é igual a uma taxa livre de risco mais um prêmio de risco. Para o caso em que β=1, o retorno esperado total tenderá a acompanhar o retorno esperado do mercado; se β=0, o retorno esperado tenderá a acompanhar a taxa livre de risco.

Os ativos de beta alto tendem a gerar retornos maiores que os de beta pequeno, o que não significa que sempre o farão. Um beta alto significa uma dispersão maior dos valores esperados, podendo às vezes um ativo obter retornos muito abaixo do esperado.

Pela equação (1.9) pode-se observar que o único fator de risco que influi no retorno de um ativo é o seu beta. Isto está de acordo com a idéia de que um investidor deve ser recompensado somente pelo risco sistemático que ele assume, uma vez que o risco não-sistemático pode ser evitado com a diversificação da carteira.

Graficamente representa-se o CAPM da seguinte maneira:

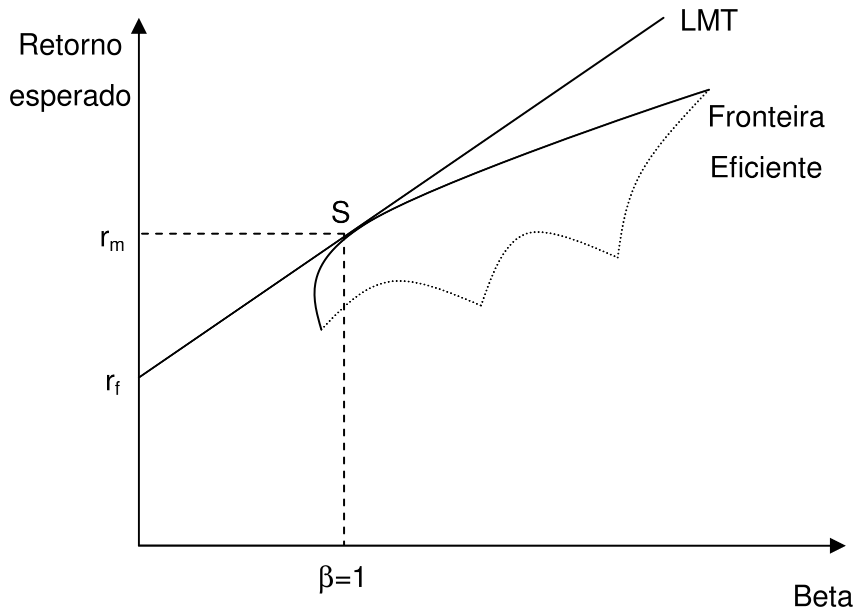

Figura 5: A Linha de Mercado de Títulos (LMT)

A Linha de Mercado de Títulos (LMT) comporta todos os ativos do mercado que estão em equilíbrio. Qualquer ativo localizado acima ou abaixo da LMT geraria uma oportunidade de arbitragem.

Da mesma forma que a LMC representa o equilíbrio para a relação risco-retorno em que o risco é medido pelo desvio-padrão, a LMT representa a mesma relação de equilíbrio, só que com o risco sendo medido pelo beta do ativo, isto é, pelo seu risco sistemático.

1.2.8. Os Índices de Desempenho de Carteiras

Serão apresentadas nesta seção quatro medidas de desempenho (ou de performance) para carteiras de investimentos: o índice de Sharpe, o índice Treynor, o *Information Ratio* e o índice de Modigliani.

1.2.8.1. O Índice de Sharpe

O índice de Sharpe (IS) utiliza a Linha do Mercado de Capitais como padrão de comparação. Ele é calculado dividindo-se o prêmio de risco pelo desvio-padrão da carteira e é dado pela seguinte equação:

$$IS = \frac{\overline{R}_p - r_f}{\sigma_p} \qquad (1.10)$$

onde $\overline{R}_p$ é o retorno médio da carteira p.

Este índice mede o excesso de retorno por unidade de risco de um ativo, sendo este representado pelo seu desvio-padrão. Quanto maior a eficiência do fundo de ações, maior o valor do seu IS.

Sharpe denominou este índice, que categoriza o desempenho do fundo ajustado ao seu risco, de recompensa pela variabilidade (*reward-to-variability*).

Segundo Duarte Jr. (1996), o IS é uma medida de performance muito recomendada para fundos de investimentos e largamente utilizada no mercado financeiro.

Graficamente, o IS pode ser representado no espaço Retorno x Risco. Ele é a inclinação da reta que liga a posição do fundo no espaço ao retorno do ativo livre de risco.

Na Figura 6, o fundo A tem maior IS que o fundo B. Por esta abordagem, A tem um desempenho superior a B.

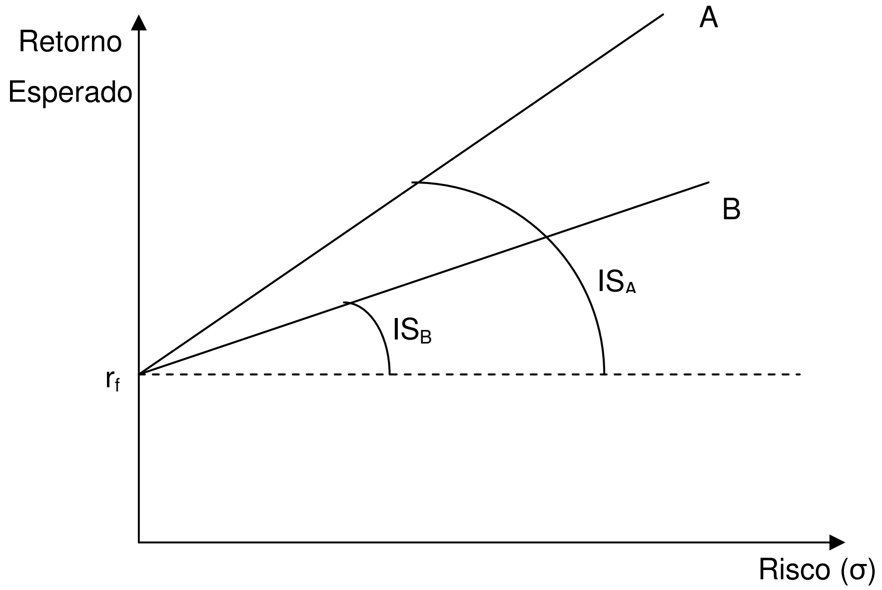

Figura 6: Representação Gráfica do Índice de Sharpe

1.2.8.2.
O Índice de Treynor

Assim como o IS, o Índice de Treynor (IT) mede a recompensa pela variabilidade. Seu valor é dado pela seguinte equação:

$$IT = \frac{\overline{R}_p - r_f}{\beta_p} \tag{1.11}$$

A diferença da equação (1.11) para a (1.10) é a medida de risco empregada. Enquanto o IS utiliza a volatilidade σ, o IT utiliza o beta do ativo pois considera que o investidor possui um conjunto variado de ativos além daquele que está sendo analisado.

Graficamente, o IT é a inclinação de uma reta ligando a posição da carteira com a taxa livre de risco. No exemplo que se segue, a carteira A é preferível à carteira B por apresentar uma inclinação maior.

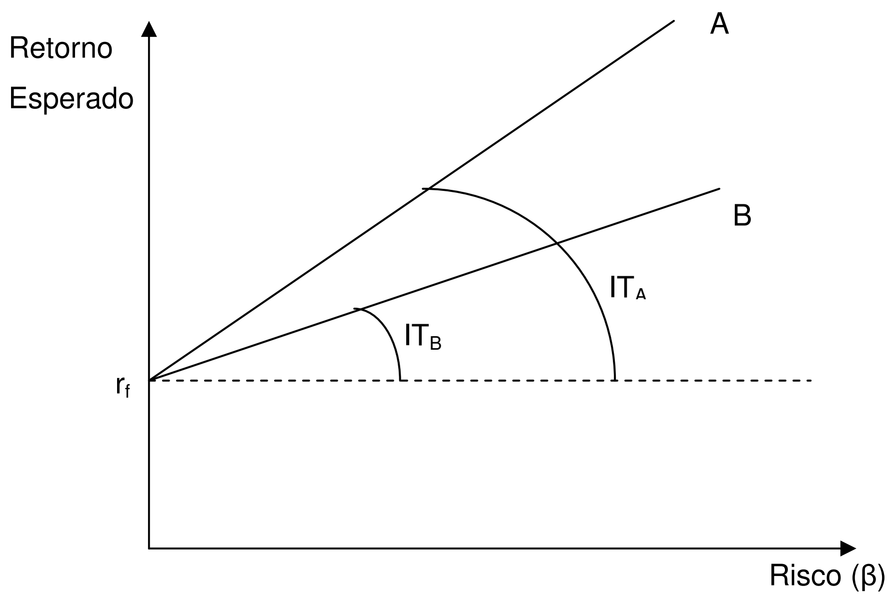

Figura 7: Representação Gráfica do Índice de Treynor

1.2.8.3.
O Índice de Informação ou *Informatio Ratio* (IR)

O IR é uma taxa de retorno residual por risco residual. Analisando os dados *ex post*, o IR é o retorno residual dividido pelo risco residual utilizados para obter aquele retorno. Para melhor apresentar este índice é necessário antes introduzir dois conceitos: o ***benchmark*** e o **alfa (α) de Jensen**.

O gestor ativo tem como objetivo superar o *benchmark.* Esta carteira hipotética muitas vezes é erroneamente chamada de **mercado** quando na verdade ela é apenas uma fração das ações negociadas no mercado, é apenas uma referência de mercado. Como exemplos de *benchmarks*, temos o S&P500 nos E.U.A e o Ibovespa e o IBX no Brasil.

O α de Jensen, ou índice de Jensen, é dado pela diferença entre a taxa de retorno médio da carteira e o retorno médio encontrado no modelo CAPM. Ele mede a diferença entre o retorno da carteira e o retorno de mercado, dado o beta da carteira, e é dado pela seguinte equação de regressão:

$$\alpha = r_p(t) - \beta_p r_b(t) + \varepsilon_p(t) \tag{1.12}$$

onde:

- $r_p(t)$ é o excesso de retorno da carteira em relação ao retorno num investimento livre de risco: $r_p(t) = R_p(t) - r_f$;
- $r_b(t)$ é o excesso de retorno da carteira de mercado em relação ao retorno num investimento livre de risco: $r_b(t) = r_m(t) - r_f$;
- $\varepsilon_p(t)$ é o retorno residual da carteira que o modelo não captura.

Pode-se fazer a seguinte interpretação: quando o desempenho da carteira de ativos está em equilíbrio com o do mercado, α=0; quando o desempenho da carteira de ativos é superior ao do mercado, α>0 e caso contrário, α<0.

Definindo o IR de uma maneira mais formal, tem-se a seguinte equação:

$$\mathrm{IR}_{\mathrm{p}} = \frac{\alpha_p}{w_p} \tag{1.13}$$

onde α_p é o α de Jensen da carteira e w_p é o desvio-padrão do retorno residual (risco diversificável), ou a variabilidade da carteira que não é explicada pela variação do mercado.

O valor de w_p é dado então pela seguinte equação:

$$w_p = \sqrt{\sigma_p^2 - \beta_p^2 \sigma_b^2} \tag{1.14}$$

onde σ_p^2 é o desvio-padrão de $r_p(t)$ e σ_b^2 é o desvio-padrão de $r_b(t)$.

O *Information Ratio* pode ser negativo (e freqüentemente o será), sendo que o IR do *benchmark* é sempre nulo. Quanto mais positivo o valor do IR, melhor o desempenho ativo da carteira e, da mesma forma, quanto mais negativo, pior o desempenho ativo.

O IR pode ser visto também como o excesso de retorno em relação ao *benchmark* (ou **retorno ativo**) dividido pela volatilidade deste excesso de retorno (ou **risco ativo)**. Define-se uma posição **ativa** de uma carteira como qualquer diferença entre os retornos da carteira e do *benchmark*.

1.2.8.4.
Índice de Modigliani

O Índice de Modigliani, também chamado M^2, foi criado recentemente por Leah Modigliani e Franco Modigliani (1997). Trata-se de um índice de desempenho ajustado ao risco de mercado que mede o excesso de retorno do fundo em relação ao retorno de mercado se ambos tivessem a mesma volatilidade. Para se calcular o M^2, deve-se primeiro obter o retorno ajustado, que é igual ao retorno original da carteira somado ao retorno sem risco, ponderados pela diferença de volatilidade do mercado e da própria carteira.

$$r_{pa} = \frac{\sigma_m}{\sigma_p} r_p + \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_p}\right) r_f \tag{1.15}$$

O M^2 é a diferença entre o retorno da carteira ajustada (r_{pa}) e o retorno de mercado (r_m):

$$M^2 = r_{pa} - r_m \tag{1.16}$$

Este índice ajusta a volatilidade do fundo à volatilidade do mercado de modo a verificar qual teria sido o retorno se o fundo tivesse o mesmo nível de risco do mercado ($\sigma_{pa} = \sigma_m$). É fácil mostrar que a volatilidade da carteira ajustada fica igual à do mercado:

$$\sigma_{pa}^2 = \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_p}\right)^2 \sigma_p^2 + \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_p}\right)^2 \sigma_f^{\ 2} \Rightarrow \sigma_{pa} = \sigma_m \qquad (1.17)$$

1.2.9.
A Correlação de Spearman

A Correlação de Spearman é utilizada para se obter a correlação entre dois *rankings* distintos. Por exemplo, quando se tem n pares de observações a correlação r_s é dada pela seguinte equação:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)} \qquad (1.18)$$

onde x_i é a posição de X_i e y_i é a posição de Y_i na observação.

Por exemplo, digamos que se está comparando oito fundos de investimentos (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f, f_6, f_7 e f_8) por dois índices de desempenho diferentes (X e Y). A tabela mostra os *rankings* de 1 a 8, do melhor ao pior, pelos dois índices de desempenho.

Fundos	X	Y	$(x_i - y_{i)})$	$(x_i - y_{i)})^2$
f_1	1	2	-1	1
f_2	2	1	1	1
f_3	3	5	-2	4
f_4	4	3	1	1
f_5	5	4	1	1
f_6	6	7	-1	1
f_7	7	8	-1	1
f_8	8	6	2	4

n = 8	$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_{i)}\right)^2 = 14$

Neste exemplo, tem-se que:

$$r_s = 1 - \frac{6x14}{8\left(8^2 - 1\right)} = +0,83$$

A Correlação de Spearman varia entre -1 e +1. Um valor de r_s = 1 indica perfeita correlação entre os *rankings* de x e y. Um r_s = -1 indica que os dois *rankings* são exatamente opostos.