PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Bruno Rigonato Mundim

Em Torno da Tese de Church e do Intuicionismo Lógico

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós–graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia do Centro de Teologia e Ciências Humanas da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Coorientador: Prof. André da Silva Porto

Rio de Janeiro
Agosto de 2019

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Bruno Rigonato Mundim

Em Torno da Tese de Church e do Intuicionismo Lógico

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós–graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia do Centro de Teologia e Ciências Humanas da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Orientador
Departamento de Filosofia – PUC-Rio

Prof. André da Silva Porto
Coorientador
Universidade Federal de Goiás – UFG

Prof. Oswaldo Chateaubriand Filho
Departamento de Filosofia – PUC-Rio

Prof. Jean-Baptiste Joinet
Université Jean Moulin – Lyon 3

Prof. Abílio Azambuja Rodrigues Filho
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Rio de Janeiro, 26 de Agosto de 2019

Bruno Rigonato Mundim

É bacharel em Filosofia pela Universidade Federal de Goiás (2010), onde também obteve o grau de mestre em Filosofia (2013). Foi bolsista de doutorado pelo CNPq no Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Foi bolsista de doutorado sanduíche pelo Programa CAPES/Cofecub, na Université Paris I – Panthéon Sorbonne, vinculado ao projeto "Provas, Demonstrações e Representação". Tem experiência na área de Filosofia, com ênfase em Lógica, atuando principalmente com temas de filosofia da lógica e da matemática.

Ficha Catalográfica

Mundim, Bruno Rigonato

Em Torno da Tese de Church e do Intuicionismo Lógico / Bruno Rigonato Mundim; orientador: Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira; coorientador: André da Silva Porto. – Rio de janeiro: PUC-Rio, Departamento de Filosofia, 2019.

247 f.: il. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia.

Inclui bibliografia

1. Filosofia – Teses. 2. Tese de Church. 3. Formalização. 4. Intuicionismo. 5. Fenomenologia. I. Pereira, Luiz Carlos Pinheiro Dias. II. Porto, André da Silva. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Filosofia. IV. Título.

CDD: 100

Aos meus pais, apesar de me terem dado a vida, dedico o que possa haver aqui de valor.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Luiz Carlos, pelas excelentes oportunidades que me ofereceu; ao professor André Porto, que acompanha minha trajetória acadêmica desde a graduação; a todos os professores que participaram da banca examinadora; aos professores Jean-Baptiste Joinet, Marco Panza e Oswaldo Chateaubriand, sem os quais o meu período de pesquisa na França seria impossível; à Edna e à PUC-Rio; ao Library Genesis (LibGen), sem o qual a pesquisa no terceiro mundo seria ainda mais difícil; ao auxílio material da CAPES e do CNPq – agências que estão lamentavelmente se extinguindo nestes tempos de obscurantismo, estupidez e violência; ao colega Pedro Muniz, por me ajudar a enfrentar o terrorismo burocrático francês e brasileiro; à Ana Clara Polakof, pelo auxílio nos meus primeiros dias de PUC e de Rio Janeiro; à Narrira, por muitas coisas; à Nayara e à Patrícia; a Amélie, Arryaná, Brunô et Marrí, pelos bons momentos na cidade infinita; aos amigos dasantiga, Aída, Diego, Dyogo, Paula, Pedro, Tiagos; aos panquevéi de Goiânia; à Marina, pela grande companhia; aos meus pais, pelos inestimáveis tempo e silêncio que me proporcionaram; ao demônio, por me levar à terceira margem do rio.
O presente trabalho foi realiado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Mundim, Bruno Rigonato; Pereira, Luiz Carlos Pinheiro Dias; Porto, André da Silva. **Em Torno da Tese de Church e do Intuicionismo Lógico**. Rio de Janeiro, 2019. 247p. Tese de Doutorado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A tese de Church propõe que tanto a noção de computável quanto a de função recursiva (ou equivalentes: máquina de Turing, cálculo lambda) possuem a mesma extensão. Sua peculiaridade, de acordo com as interpretações mais consolidadas, deve-se ao fato de não poder ser matematicamente demonstrada, uma vez que uma das noções envolvidas, a de computável, possui um caráter informal. Neste trabalho, consideraremos diversas críticas à tese de Church, prestando especial atenção às críticas de caráter intuicionista. Acreditamos ter obtido dois resultados, um que diz respeito diretamente à tese de Church, e outro que diz respeito à lógica intuicionista. Quanto ao primeiro, propomos, na contramão de um realismo ingênuo, que os conceitos matemáticos não são imutáveis e que, por essa razão, uma maneira mais adequada de compreender a tese de Church seria levando em consideração a gênese intencional do conceito de computável. Quanto ao segundo resultado, que diz respeito à associação que o intuicionismo faz entre demonstração e verdade, propõe-se uma maneira coerente de conciliar a condição contingente e temporal de posse de uma demonstração com o caráter necessário e atemporal do valor de verdade de proposições matemáticas.

Palavras-chave

Tese de Church; Formalização; Intuicionismo; Fenomenologia.

Resumé

Mundim, Bruno Rigonato; Pereira, Luiz Carlos Pinheiro Dias (Advisor); Porto, André da Silva (Co-Advisor). **Autour de la Thèse de Church et de l'Intuitionnisme Logique**. Rio de Janeiro, 2019. 247p. Tese de doutorado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

La thèse de Church suppose que les notions de fonction calculable et de fonction récursive (ou ses équivalents: machine de Turing, lambda-calcul, etc.) possèdent la même extension. Sa particularité, selon les interprétations les plus consolidées, tient au fait qu'elle ne peut pas être démontrée mathématiquement, car l'une des notions impliquées, celle du calculable, présente un caractère informel. Dans ce travail, nous examinerons plusieurs critiques de la thèse de Church, en accordant une attention particulière aux critiques de caractère intuitionniste. Nous pensons avoir obtenu deux résultats, l'un qui se rapporte directement à la thèse de Church, et l'autre qui concerne la logique intuitionniste. Quant au premier, nous proposons, contrairement à un réalisme naïf, que les concepts mathématiques ne sont pas immuables et que, pour cette raison, une meilleure façon de comprendre la thèse de Church consisterait à prendre en compte la genèse intentionnelle du concept du calculable. Quant au deuxième résultat, qui traite de l'association que l'intuitionnisme effectue entre démonstration et vérité, nous proposons une manière cohérente de réconcilier la condition contingente et temporelle de possession de la démonstration avec le caractère nécessaire et intemporel de la valeur de vérité des propositions mathématiques.

Mots clefs

Thèse de Church; Formalisation; Intuitionnisme; Phénoménologie.

Sumário

A vida é tão desgraçada que para nos livrarmos dela é preciso morrer.

scelerum caput

1

Introdução

Conceitos matemáticos são eternos ou se modificam ao longo do tempo? As definições matemáticas, por meio das quais lidamos linguisticamente com tais conceitos, os descrevem ou os criam? Assumindo que a matemática seja uma ciência composta por verdades necessárias, como associar a verdade de uma proposição à condição empírica e temporal de posse e conhecimento de uma demonstração? De toda demonstração matemática podemos extrair uma estrutura formal e simbólica que represente de maneira explícita e objetiva as inferências que a compõem? Sendo a evidência de uma inferência ratificada por princípios lógicos, como argumentar em defesa de tais princípios, sendo que o princípio em questão pode estar pressuposto na própria argumentação? Tais questões, apesar de não pretendermos tratar cada uma delas exaustivamente, encontram-se no horizonte teórico deste trabalho, e a melhor maneira que encontramos para vislumbrá-lo foi por meio da tese de Church, que entra aqui mais como um meio do que como um fim. Além do mais, orientaremos nossa discussão em direção às críticas à tese de Church que possuem um embasamento intuicionista, para que assim tenhamos a oportunidade de pensar temas do intuicionismo lógico que consideramos relevantes. Façamos então um breve apanhado do que encontraremos nos capítulos que se seguem.

No primeiro capítulo, após uma apresentação sumária dos elementos principais que compõem a história da tese de Church, destacando seu envolvimento com a demonstração da incompletude dos sistemas formais, poremos em questão o fato dela ser uma tese, não uma definição, contrapondo-a a conceitos que no princípio possuíam apenas um caráter intuitivo ou empírico, mas que ao passar dos anos adquiriram o estatuto de definições matemáticas precisas. Analisaremos então duas maneiras de compreender o que significa adequar uma noção pré-formal a um conceito definido formalmente: o conceito formal pode ter a pretensão de identificar uma (única) estrutura matemática subjacente à noção pré-formal; ou pode simplesmente ser proposto como um modelo matemático (possivelmente entre outros) que seja o mais próximo possível da noção pré-formal.

Em seguida, no segundo capítulo, examinaremos alguns argumentos contrários à tese de Church. Para Kalmár, a tese, em última instância, se impõe como uma restrição à noção de computabilidade, pois por circunscrevê-la nos limites de uma noção formal, a relativiza a um momento específico do desenvolvimento da matemática, ou seja, no futuro podem ser revelados procedimentos que aceitemos como computáveis, mas que não se enquadram na definição de função recursiva (ou equivalentes: máquina de Turing, cálculo lambda, etc.).

De acordo com Péter, que assume uma perspectiva construtivista, a tese de Church falha no sentido que diz que toda função recursiva é computável, pois não basta dizer que uma função é computável simplesmente porque se pode demonstrar que existe uma função recursiva que calcula os seus valores, é preciso *demonstrar construtivamente* a existência de tal função. No entanto, isso envolve uma circularidade, tendo em vista que o que distingue uma demonstração construtiva é o fato dela ter um caráter computável – razão pela qual é possível extrair de uma tal demonstração um algoritmo que instrui a construção do objeto que ela alega existir.

Considerando o outro sentido da tese de Church, apresentaremos um contraexemplo que se deve a um argumento atribuído a Kripke. A partir de uma axiomatização da noção de sujeito criador, de Brouwer, o argumento consiste em definir uma função computável que não é recursiva.

Sundholm, que segue a mesma direção das críticas de Péter, alega que, para uma função ser considerada computável, não basta a sua mera caracterização extensional, devemos *conhecer* um algoritmo que diz *como* calcular os seus valores. A partir daí, procuraremos compreender por que no construtivismo toda função e demonstração possuem um caráter computável. Para tanto, examinaremos detidamente noções fundamentais da teoria intuicionista de tipos, de Martin-Löf.

Além disso, na seção *extensão de um algoritmo*, argumentaremos que as divergências entre clássicos e construtivistas a respeito da tese de Church não dizem respeito à tese em si, mas à maneira de se compreender uma função: intensionalmente ou extensionalmente.

O terceiro capítulo lidará com o teorema da incompletude, de Gödel, particularmente como ele é interpretado no contexto do antirrealismo de Dummett. De acordo com este autor, considerando a formalização como uma descrição do uso dos elementos que foram formalizados, e assumindo a tese antirrealista de *sentido como uso*, certas formalizações, devido ao teorema da incompletude, podem apenas nos dar uma compreensão incompleta do sentido do que se formalizou. Para o antirrealismo, isso significa que a incompletude de um sistema formal (i.e., sistemas axiomáticos efetivos, onde as regras de inferência são computáveis, e é possível decidir mecanicamente se uma dada fórmula é um axioma) evidencia a condição de que certos conceitos são *indefinidamente extensíveis*: assim que tentamos caracterizar definitivamente um conceito de tal natureza, ele se impõe, a partir dessa mesma caracterização, com uma extensão mais inclusiva. Nessa direção, a noção intuitiva de demonstração seria um conceito indefinidamente extensível, não podendo, pois, identificar-se a nenhuma classe de demonstrações caracterizáveis a partir de um sistema formal em particular.

Compreendido esse ponto, passaremos a analisar uma citação em que Dummett afirma que a tese de Church não é plausível a partir de uma perspectiva intuicionista, porque, assumindo-a, estaríamos contrariando o teorema da incompletude. Cogburn, que apresenta um argumento tentando decifrar essa citação, afirma que a assunção da tese de Church implica um conflito com o fato de, no antirrealismo, as sentenças verdadeiras da aritmética elementar serem efetivamente enumeráveis. Num primeiro momento, essa alegação sobre a enumeração efetiva das sentenças verdadeiras nos parecerá estranha, contudo, investigando as noções de verificacionismo, manifestabilidade da compreensão, molecularismo e prova canônica, por meio das quais o antirrealismo dummettiano se afirma, argumentaremos pela sua plausibilidade. Ao que tudo indica, as condições para haver uma prova canônica não parecem viáveis fora de um contexto formal.

Talvez uma outra maneira de interpretar a citação de Dummett se daria pelo seguinte argumento: demonstrações construtivas são computáveis – já que delas podemos extrair algoritmos –; pela tese de Church, o que é computável é recursivo; recursividade é uma noção formal, logo, demonstrações construtivas são formalizáveis num sistema de equações recursivas. Desse modo, se um antirrealista não abre mão da tese de Church, ele deve, contra a própria vontade, assumir que a noção intuitiva de demonstração é identificável a uma noção de demonstração caracterizável por um certo sistema formal, consequentemente, estabelece-se um conflito entre o teorema da incompletude e a concepção intuicionista de que não há verdade sem demonstração. Mas, levando em consideração que é a tese de Church que permite que o teorema da incompletude seja generalizado para qualquer sistema formal, não nos parece que uma opção – incompletude ou tese de Church – possa ser escolhida em detrimento da outra. Para um intuicionista, o fato de que nenhum sistema formal é capaz de abranger a totalidade de demonstrações de proposições de uma teoria aritmética significa, entre outras coisas, que a intuição não pode ser encerrada nos limites impostos por um sistema formal. No entanto, se não recorremos à tese de

Church, não temos condições de dizer com precisão o que constitui a totalidade dos sistemas formais, logo, não podemos estabelecer quais são os limites que o intuicionista diz serem ultrapassados pela intuição.

Na retaguarda da discussão sobre os limites dos sistemas formais, investigaremos os trabalhos de Lakatos e Azzouni. O primeiro se posiciona de maneira radical contra as formalizações. Dado que um sistema formal, quando consistente, é completamente fiável, perde-se o que esse autor caracteriza como elementos quase-empíricos, os quais permitiriam o surgimento de contraexemplos e refutações, motores do desenvolvimento do pensamento matemático. Contudo, ao contrário do que Lakatos propõe, acreditamos que não há uma dicotomia excludente entre o formalismo e a prática matemática. Vemos esses contextos como complementares.

Já Azzouni propõe a noção de *indicador de derivação*, a saber, toda demonstração (informal) possui uma derivação subjacente, que consiste na formalização, em algum sistema formal, da demonstração em questão. Nesse sentido, a impossibilidade de indicar uma derivação subjacente seria condição suficiente para se recusar a legitimidade da demonstração que lhe diz respeito. Além disso, a derivação indicada desempenharia um papel importante na verificação de resultados matemáticos, pois com ela poderíamos elucidar e explicitar tudo o que se pressupõe ou se encontra implícito na demonstração. Azzouni ainda argumenta, apelando ao caráter algorítmico das verificações, que com a noção de derivação o convencimento proporcionado por uma demonstração seria mais objetivo, indo além das posições mais empiristas, as quais dizem que a matemática não passaria de uma prática social construída.

Aproveitaremos então para apresentar um argumento devido a Kripke. Com a noção de indicador de derivação, encontramo-nos próximos de uma defesa da tese de Hilbert, que, numa certa interpretação, diz que qualquer passo de uma demonstração matemática pode a princípio ser formalizado numa lógica de primeira-ordem. Assim, tomando como premissa, entre outras, a tese de Hilbert, Kripke demonstra que a tese de Church pode ser derivada como um corolário do teorema da completude.

O quarto capítulo, que contém os principais objetivos alcançados neste trabalho, tem como pano de fundo a questão da historicidade da matemática. Começaremos abordando o modo como Shapiro compreende a tese de Church. Apropriando-se da noção de *textura-aberta* – proposta por Waismann com relação a conceitos empíricos –, ele avança a ideia de que uma noção informal, como a de computabilidade, ganha cada vez mais precisão à medida que o desenvolvimento das pesquisas relacionadas a ela progride. Ele defende a demonstrabilidade da tese de Church, cujo papel não seria o de estabelecer algo sobre uma noção intuitiva inerte, mas o de fazer parte do próprio refinamento dessa intuição. Desse modo, Shapiro desarticula a dicotomia que diz haver de um lado uma noção pré-formal intuitivamente clara e bem delimitada e de outro lado um conceito formal que procura expressá-la da melhor maneira possível. A formalização, ao trazer aspectos que não estavam presentes no âmbito pré-formal, passa a ser constitutiva daquilo que está sendo formalizado, não sendo, portanto, uma mera representação.

Veremos que Smith, um outro autor que analisaremos, apresenta uma perspectiva diferente. De acordo com ele, a noção de computável não é o resultado de um processo evolutivo que se culmina nas atuais noções formais equivalentes. Na própria noção informal já encontraríamos condições suficientes para delimitar precisamente a sua extensão, a qual identificaríamos com a extensão de qualquer uma das noções formais que dispomos, demonstrando assim a tese de Church.

Diante de todas essas considerações, introduziremos, baseando-nos principalmente nos trabalhos de Tieszen e da Silva, a perspectiva teórica da fenomenologia, com a qual acreditamos responder algumas questões tratadas nas seções precedentes. Sugeriremos, à semelhança de Shapiro, que o conceito de computável não atravessa incólume a história, caracterizando-se assim por uma evolução conceitual. Isso se deve à sua história transcendental, constituída pelos atos intencionais a partir dos quais se intui a sua existência. Nessas condições, a tese de Church não pode ser dissociada da gênese intencional constitutiva do conceito de computável. Consequentemente, intencionalidades diferentes, presentes em distintos momentos da história transcendental, seja no passado ou no futuro, podem ser incompatíveis com as definições formais de computabilidade que por ora dispomos. No entanto, agora à semelhança da proposta de Smith, podemos dizer que temos um conceito de computável suficientemente preciso para ser identificado à extensão de uma definição formal, desde que esse conceito seja compreendido a partir de um período da sua gênese intencional, que o postula como um invariante que se preserva em meio a diferentes visadas da consciência – entendida como uma comunidade de egos que possui como horizonte um mundo objetivo comum.

Uma outra questão que a perspectiva fenomenológica nos ajuda a compreender diz respeito ao embate entre platonistas e intuicionistas, o qual, como apresentaremos no decorrer deste texto – e já mencionamos nesta introdução – está por trás de algumas das controvérsias envolvendo a tese de Church. Esse embate pode ser abordado a partir da aceitação ou recusa do princípio lógico de bivalência, que diz que uma proposição arbitrária é verdadeira ou falsa. Platonistas o aceitam, intuicionistas o rejeitam. No entanto, para a fenomenologia, princípios lógicos, pela própria condição de princípio, não podem ser justificados. O que podemos fazer é uma investigação transcendental que elucide as bases em que um princípio se legitima.

Assim, demonstraremos como platonistas e intuicionistas atribuem diferentes sentidos de ser aos domínios que constituem a referência de enunciados significativos, o que necessariamente condiciona a validade ou não do princípio de bivalência.

Além disso, a análise fenomenológica do sentido do ser que os intuicionistas atribuem ao domínio de seus enunciados significativos nos permitirá responder uma questão importante que tem sido debatida nas críticas à lógica intuicionista. Para um intuicionista, a menos que tenhamos a posse de uma prova, não podemos considerar que uma proposição matemática possui algum valor de verdade. Nesse sentido, uma proposição *se torna* verdadeira a partir do momento em que temos a sua prova em mãos. Mas como conciliar esse aspecto temporal e contingente, que se refere à construção de uma prova, com a necessidade e atemporalidade das verdades matemáticas? Nossa proposta, que assume como modelo a teoria intuicionista de tipos, consistirá em dizer que, ao concebermos o sentido de uma proposição, a priori estabelecemos compatibilidades e incompatibilidades entre tipos, as quais determinam a existência possível de uma prova, implicando que toda proposição, independentemente de termos a posse de sua prova, é possivelmente verdadeira.

Como ficará claro, a perspectiva fenomenológica, não obstante elucidar as bases do conflito entre platonistas e intuicionistas, não nos dá condições para eleger uma posição em detrimento de outra, pois, ao invés de justificar se o princípio de bivalência é válido ou não, apenas esclarece as condições que o valida. O mesmo tipo de situação ocorre com a noção de indicador de derivação, de Azzouni. Embora ele pretenda elucidar o que faz os matemáticos objetivamente concordarem sobre uma demonstração, sua solução aparenta apenas deslocar essa questão para um plano mais profundo. Afinal, como lidar com desacordos acerca dos princípios lógicos assumidos pelas derivações subjacentes? A derivação tem a vantagem de deixar explícito quais princípios lógicos uma demonstração pressupõe, revelando, por exemplo, se ela tem um caráter platonista ou intuicionista, mas não nos permite justificar alguma dessas posições.

Levando isso em consideração, introduziremos uma discussão acerca do princípio de *equilíbrio reflexivo* de Prawitz. Gostaríamos de apontar que, diante de um desacordo acerca de princípios lógicos, a saída que nos aparenta mais viável é a que procura estabelecer um equilíbrio entre a prática matemática e os princípios que procuram sistematizá-la em algum sistema lógico. Num primeiro momento, os princípios lógicos, que podem ser vistos como generalizações da prática, guiam e regulamentam esta, todavia, a partir do momento em que nossas práticas entram em conflito com nossos princípios, surge o ensejo destes serem revisados por aquelas, promovendo assim uma revisão de mão dupla entre essas duas instâncias, cujo objetivo é chegar a um equilíbrio reflexivo entre ambas.

2

A Tese de Church

2.1 Antecedente histórico

Sieg (1994, 73) remonta a questão da calculabilidade efetiva a duas tradições na lógica e na matemática, ambas partilhando de um contexto em que se procurava uma solução algorítmica para problemas adequadamente representados num certo simbolismo. Uma dessas tradições se encontra em Leibniz, que viu nas soluções algorítmicas de problemas lógicos e matemáticos um paradigma a ser generalizado a soluções de problemas em geral, o que se evidencia na ideia contida na sua expressão *calculemos!*: baseando-se nas expectativas nutridas por sua *lingua characterica*, uma linguagem universal do pensamento, e por seu *calculus ratiocinator*, um cálculo de raciocínio, Leibniz conclamava os disputantes de qualquer área a resolverem suas controvérsias por meio de um cálculo. A outra tradição, iniciada na segunda metade do século XIX, está ligada às investigações concernentes aos fundamentos da matemática, principalmente no que diz respeito à aritmetização da análise e à axiomatização dos números reais. Nesse contexto, Kronecker e Dedeking, influenciados por Dirichlet, para o qual uma aritmetização sistemática deveria demonstrar que qualquer teorema da álgebra e análise superior pode ser formulado como um teorema sobre números naturais, colocaram em debate posições filosóficas conflitantes que se perpetuaram nas discussões fundacionais subsequentes.

Para Kronecker, considerações matemáticas deveriam se conformar a duas condições metodológicas de caráter restritivo: (1) conceitos devem ser decidíveis numa quantidade finita de passos, ou seja, se após um certo número de passos não se puder demonstrar que um conceito é ou não realizável, tal conceito não foi bem definido; (2) demonstrações de existência devem apresentar o objeto do tipo requerido. Considerando que Kronecker admitia apenas os números naturais como objetos de análise imediata, a partir deles ele construiu os números inteiros, os números racionais e os números reais algébricos (isolados de maneira efetiva como raízes de equações algébricas), contudo, por causa das duas condições restritivas acima, uma noção "completamente geral" de número irracional foi rejeitada:

> Kronecker also protested against Cantor and Dedekind's efforts to establish a completely general theory of irrational numbers. Again, his main objection was the absence of constructions on the basis of arithmetical laws. Edwards argued that here the stress should be laid on the words 'completely general'. Kronecker thought that one should only work with specific irrational numbers; starting to talk about the totality of irrational numbers would mean leaving the foundations on which the irrational number was constructed (HESSELING, 2003, 6).

Mas como Sieg (1994, 73) diz, mais de cem anos mais tarde o redesenvolvimento da análise nas linhas concebidas por Kronecker se revelou menos fantasioso[1] do que se parecia nos anos 1920.

Dedekind, ao contrário de Kronecker, considerava que o fato de um objeto cair ou não sob um conceito era determinado independentemente do nosso conhecimento, além de que, a exemplo da sua definição dos números reais por meio de cortes, empregava conjuntos infinitos de números naturais como sendo objetos matemáticos legítimos. Para que a existência de tais objetos fosse assegurada, Dedekind não argumentava pela restrição sobre objetos e métodos matemáticos, sua proposta consistia em apresentar demonstrações puramente lógicas para a existência de modelos de noções caracterizadas axiomaticamente. Dessa forma, garantia-se a inexistência de contradições internas entre as noções caracterizadas[2].

De acordo com Sieg (1994, 74), a fundamentação lógica dos números naturais proposta por Frege, tanto no que concerne à justificação da indução quanto no que concerne à admissão irrestrita do esquema de compreensão como um princípio lógico, era reconhecida por Dedekind como sendo conforme à sua concepção fundacional. No entanto, enquanto o desenvolvimento da teoria de Dedekind era rigorosa, porém informal, a de Frege se dava no âmbito da sua conceitografia (*Begriffsshrift*), que, em parte realizando algumas das pretensões do projeto de Leibniz, possibilitava a formalização de demonstrações matemáticas. Assim, no sistema Fregiano, todas as premissas e assunções envolvidas numa demonstração são explicitadas, e cada passo inferencial ocorre de acordo com regras especificadas anteriormente, formando assim uma cadeia inferencial sem lacunas, que, para Frege, permitiria julgar a natureza epistemológica daquilo que se demonstra:

> Because there are no gaps in the chains of inference, every 'axiom', every 'assumption', 'hypothesis', or whatever you wish to call it, upon which a proof is based is brought to

[1] [...] most mathematicians do not seem to have put too much weight on Kronecker's radical opinions on these subjects. They were mostly seen as a peculiarity of a temperamental but great man (HESSELING, 2003, 6).

[2] (SIEG, 1994, 74).

> light; and in this way we gain a basis upon which to judge the epistemological nature of the law that is proved (FREGE, 1982, 3).

Sieg ainda observa que no sistema de Frege o fato de se reconhecer uma inferência como sendo correta leva em consideração apenas a forma das sentenças envolvidas, podendo o conhecimento de seus respectivos conteúdos ser negligenciado. Nesse sentido, encontramos aqui a ideia de aplicação mecânica de regras de inferência sobre sentenças tomadas como premissas, como podemos ver na citação de Gödel abaixo, referindo-se a uma *extraordinária característica* dos sistemas de Frege e Peano:

> [...] the outstanding feature of the rules of inference being that they are purely formal, i.e., refer only to the outward structure of the formulas, not to their meaning, so that they could be applied by someone who knew nothing about mathematics, or by a machine. [This has the consequence that there can never be any doubt [[as]] to what cases the rules of inference apply [[to]], and thus the highest possible degree of exactness is obtained.] (GÖDEL, 1995, 45, acréscimos entre chaves por Gödel).

Desse modo, em Frege, fórmulas seriam representações concretas de entidades abstratas, as proposições, sendo que esse caráter concreto possibilitaria a transição de uma fórmula à outra por meio de uma regra de inferência caracterizável algoritmicamente.

Entre os trabalhos de Kronecker, Dedekind e Frege, vemos então surgir a importante figura de Hilbert, que propõe seu projeto fundacionalista articulando elementos daqueles três autores. Como Sieg (1994, 75) observa, contradições podiam ser derivadas nos sistemas de Frege e Dedekind, assim, em 1904, Hilbert propõe uma abordagem "radicalmente nova" concernindo a consistência de teorias matemáticas. Ao invés de estabelecer por meio de modelos que contradições não podem ser derivadas numa certa teoria matemática, ele sugere que esse fato seja estabelecido diretamente, empregando demonstrações matemáticas finitistas.

No início dos anos 20, Hilbert transforma essa questão num problema de aritmética elementar, de maneira que, preservando as concepções de Dedekind sobre o tema, alia os desenvolvimentos originários da lógica formal de Frege com as exigências de Kronecker a respeito do que seria uma matemática genuína. Um outro ponto importante que influenciou o trabalho de Hilbert foi o aperfeiçoamento do método hipotético-dedutivo no interior das matemáticas, que trouxe à tona a separação entre sintaxe e semântica, algo que já era claro para Dedekind[3].

Hilbert, reconhecendo as possibilidades de um sistema formal produzir mecanicamente inferências e solucionar de modo algorítmico alguns problemas (características que Frege aparentemente não considerou como sendo os resultados mais

[3](SIEG, 1994, 75, n. 11).

logicamente significativos de sua conceitografia[4]), conduziu uma investigação programática que tinha como objetivo justificar por meios finitistas o uso de teorias clássicas T para o estabelecimento de sentenças finitistas que não levassem em conta o conteúdo de tais teorias. Tomando Pr_T como o predicado finitista de demonstrabilidade para T, Φ uma sentença finitista e 'Φ' a sua tradução para a linguagem de T, o objetivo da investigação seria equivalente a dar uma demonstração finitista do *princípio de reflexão*:

$$Pr_T(x, \text{`}\Phi\text{'}) \rightarrow \Phi,$$

que, nas palavras de Sieg (1994, 76), "is directly related to the consistency problem, because the reflection principle is equivalent to the consistency statement for T under well-known conditions". Ou seja, teríamos uma teoria formal T onde a prática matemática pudesse ser representada e uma teoria F formulando princípios de matemáticas finitistas. Demonstrar o *princípio de reflexão* em F seria equivalente a reconhecer a verdade das sentenças de F cujas traduções foram derivadas em T, obtendo dessa forma um método capaz de transformar qualquer demonstração de 'Φ' em T numa demonstração de Φ em F, uma teoria finitista cuja justificação filosófica é menos problemática em relação a T. Assim, sendo F consistente, podemos dizer que a sentença que afirma a consistência de T é equivalente ao *princípio de reflexão* enunciado acima, que, no fundo, desempenha o papel de reduzir a consistência de uma teoria a outra [5].

Na sua investigação programática concernindo os fundamentos da matemática, Hilbert se alia aos preceitos teóricos da matemática construtiva de Brouwer e Kronecker, de modo que a matemática finitista tomada como base era coextensiva à parte da aritmética aceita por estes dois autores. A ideia era de que o caráter restritivo das matemáticas finitistas possibilitaria um lugar epistemologicamente menos problemático a partir do qual se poderia justificar, recorrendo apenas a um "conhecimento primitivo intuitivo"[6], o que se passa no que Hilbert denomina *matemática ideal* (onde se encontram os números transfinitos, por exemplo).

Sieg (1994, 76) nos relata como a discussão sobre os fundamentos da análise estava viva no início dos anos 1920, além de apontar fatos que indicam a presença de ideias relacionadas à epistemologia de Kronecker tanto na Alemanha quanto na França. Neste país, por exemplo, podemos mencionar o trabalho de Herbrand, o qual acreditava que uma demonstração finitista de consistência do sistema do *Prin-*

[4](SIEG, 1994, 75).
[5](SIEG, 2013, 121).
[6](BERNAYS, 1998, 216).

cipia Mathematica traria como consequência o fato de que um teorema da aritmética cuja demonstração recorresse a números incomensuráveis ou a funções analíticas poderia ser também demonstrado recorrendo apenas a elementos puros da aritmética, i.e., números inteiros e funções recursivas.

Apesar dos teoremas da incompletude terem abalado o projeto epistemológico finitista subjacente ao programa de Hilbert, os legados dessa empreitada, como o desenvolvimento do formalismo e da metamatemática, abriram domínios de investigação que se estendem até os dias atuais. No livro *Principles of Mathematical Logic* (1928), de Hilbert e Ackermann, podemos encontrar uma descrição de como esses autores viam a ferramenta que ajudaram a desenvolver, a lógica matemática:

> The logical relations which hold with regard to judgments, concepts, etc., are represented by formulas whose interpretation is free from the ambiguities so common in ordinary language. The transition from statements to their logical consequences, as occurs in the drawing of conclusions, is analysed into its primitive elements, and appears as a formal transformation of the initial formulas in accordance with certain rules, similar to the rules of algebra; logical thinking is reflected in a logical calculus. This calculus makes possible a successful attack on problems whose nature precludes their solution by purely intuitive logical thinking (HILBERT; ACKERMANN, 1950, 1).

A transformação de fórmulas de acordo com certas regras pré-estabelecidas (referida por Sieg como tratamento calculatório, termo que se pode encontrar na primeira edição do livro de 1928), a qual é propiciada por um sistema formal, possibilitou o estabelecimento do que ficou conhecido como *o Problema de Decisão*[7] (*Entscheidungsproblem*). Como ressalta Sieg (1994, 77), Herbrand e outros matemáticos da época viram na abordagem de Hilbert a abertura de um novo ramo da matemática. Particularmente, o matemático francês considerou o Problema de Decisão como o "problema mais geral das matemáticas"[8], cuja solução produziria um método geral que se infiltraria em todos os ramos das matemáticas e traria soluções para questões que até então escaparam a um tratamento positivo[9].

A caracterização do Problema de Decisão na sua forma mais conhecida é dada por Hilbert e Ackermann, na seção 11 do livro *Grundzüge der Theoretischen Logik*, de 1928. Tal problema demanda o estabelecimento de um método que possa decidir num número finito de passos a validade/satisfatibilidade de uma dada expressão lógica. Como Sieg (1994, 77) nos indica, Herbrand viu no Problema de Decisão uma via alternativa para se estabelecer a consistência de um determinado sistema[10]. Dada uma teoria T com finitos axiomas $H_1, ..., H_n$, se $\sim \phi$ for um teorema de T,

[7] Por se tratar de um dos mais conhecidos problemas de decisão, escreveremos "Problema de Decisão", com iniciais maiúsculas, toda vez que nos referirmos ao *Entscheidungsproblem*.

[8] (HERBRAND, 1971a, 273).

[9] (HERBRAND, 1971, 214).

[10] "In particular, we would then be able to recognize whether or not the theory is consistent" (HERBRAND, 1971, 213).

segue-se que a validade da fórmula $(H_1 \ \&...\& \ H_n) \rightarrow \phi$ (que para Herbrand significa a sua derivabilidade na lógica de predicados) é equivalente à inconsistência de T.

Os pesquisadores envolvidos com os temas abordados pela escola de Hilbert se deram conta de que uma solução positiva ao Problema de Decisão para a lógica de predicados, mais as hipóteses concernindo a possibilidade de uma axiomatização finita de teorias e a completude (quase-empírica[11]) do sistema do *Principia Mathematica*, teriam como consequência a decidibilidade da demonstrabilidade de qualquer sentença matemática. Justamente em razão disso, alguns não tinham a esperança de que haveria uma solução positiva para o Problema de Decisão. A esse respeito, Sieg (1994, 78) toma von Neumann como exemplo, para o qual a prática matemática perderia todo o seu sentido se houvesse um método geral de decisão, já que seria substituída por uma prescrição mecânica absoluta, permitindo a qualquer um que estivesse munido dela decidir sobre a demonstrabilidade de uma sentença arbitrária. Além disso, von Neumann tem em mente o fato de que resultados matemáticos concernindo a insolubilidade de algum problema são relativos a certos meios considerados admissíveis, como, por exemplo, a impossibilidade de se dobrar o volume de um cubo usando apenas régua e compasso. Nesse sentido, uma solução negativa ao Problema de Decisão exige que respondamos primeiro, de uma maneira matematicamente precisa, em que consiste uma prescrição mecânica absoluta.

2.2 Motivação técnica

2.2.1 O Problema de Decisão

Termos como *prescrição mecânica*, *tratamento calculatório*, *método efetivo*, *procedimento algorítmico* e outros similares procuram designar o que se entende intuitivamente por uma tarefa realizável por uma sequência de passos finitos pré-determinados que não exigem inventividade do agente que os executa, como, por exemplo, a operação de somar ou o procedimento de extrair o maior divisor comum de dois números inteiros (o algoritmo de Euclides). Citando o verbete *The Church-Turing thesis*, da *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, sumariamos as ca-

[11]Entende-se por isso a crença, expressa por Löwenheim e Herbrand, por exemplo, de que o sistema de Russel e Whitehead permitiria a representação de todos os argumentos e sentenças matemáticas: “This transformation of arbitrary mathematical theorems into relative equations can be carried out, I believe, by anyone who knows the work of Whitehead and Russell” (LÖWENHEIM, 1967, 246). “Of course, we have no *a priori* reason to believe that these rules will suffice in every case; but we have a nearly absolute certainty that every argument considered correct up until now in mathematics can be carried out using them” (HERBRAND, 1971, 207).

racterísticas de um método efetivo M da seguinte maneira:

- M é estabelecido em termos de um número finito de instruções exatas (sendo cada instrução expressa por meio de um número finito de símbolos);
- M produzirá num número finito de passos o resultado desejado, se executado sem erros[12];
- M pode (em prática ou em princípio) ser executado por um ser humano sem ajuda de qualquer maquinário, exceto lápis e papel;
- M não requer discernimento, intuição ou engenhosidade da parte do ser humano executando o método.

Um método efetivo nos permite reconhecer a possibilidade de solucionar uma classe infinita contável de questões lógicas ou matemáticas, a qual demanda um "sim" ou "não" como resposta. Por exemplo, existe um método efetivo para a classe de questões "a é um fator de b?", em que a e b são qualquer número inteiro positivo. Trata-se de executar o algoritmo de divisão, i.e., dividir b por a e observar se o resto é 0. O problema de descobrir um método efetivo para uma classe de questões é denominado de o *problema de decisão* para essa classe[13].

Considerando um sistema formal S, podemos colocar as seguintes classes infinitas contáveis de questões: "tal expressão é uma fórmula?", "tal sequência finita de fórmulas constitui uma demonstração?", "tal fórmula é demonstrável?". Assumindo a definição de fórmula presente na caracterização do sistema S, podemos efetivamente verificar se uma expressão arbitrária está em conformidade com tal definição; quanto ao segundo problema de decisão, basta considerar ordenadamente cada fórmula que compõe a sequência dada, examinando se ela é um axioma ou se segue de uma fórmula (ou fórmulas) anterior(es) por meio de uma regra de inferência. É interessante observar que os objetos examinados ao se responder a uma questão proveniente de alguma dessas duas classes de questões são partes constituintes do objeto finito ao qual a questão se aplica, por exemplo, examinamos as fórmulas que compõem a sequência de fórmulas sobre a qual perguntamos se é uma demonstração em S; no que diz respeito ao terceiro problema de decisão, temos algo diferente. Para respondermos se uma dada fórmula é demonstrável, temos que exibir a sua demonstração, no entanto, se tal demonstração existe, ela pode ser constituída por partes que vão além da fórmula examinada, obrigando-nos a olhar além do objeto ao qual a questão se aplica. Como a definição de demonstração

[12]Na seção 3.2, questionaremos a legitimidade desse ponto.
[13](KLEENE, 2002, 223).

não estabelece nenhum limite acerca do tamanho da demonstração, a listagem[14] das sequências de fórmulas que constituem uma demonstração em S não nos fornece um método efetivo para a terceira classe de questões acima, pois se a fórmula cuja demonstrabilidade foi questionada não for demonstrável, esse fato só seria estabelecido se tivéssemos condições de percorrer toda a lista e constatar que a sua demonstração não se encontra nela, algo que não pode ser considerado um método efetivo, uma vez que a lista é infinita[15]. Este terceiro problema de decisão corresponde ao *Entscheidungsproblem*, mencionado acima, ao qual retornaremos em breve.

Ao lado da noção de *problema de decisão*, podemos acrescentar a de *problema de computação*. Se no primeiro caso procuramos por métodos efetivos para uma classe infinita contável de questões que demandam um "sim" ou "não" como resposta, no segundo procuramos por métodos efetivos para uma classe infinita contável de questões que como resposta demandam a exibição de algum objeto. Por exemplo, a classe de questões "Qual é a soma de dois números naturais a e b?" exige para a sua solução um método efetivo cuja execução tenha como resultado o objeto resultante da soma dos números a e b. Se quisermos manter uma regularidade nessas distinções, podemos reservar a expressão *procedimento de computação* para o método efetivo que resolve um *problema de computação*, e *procedimento de decisão* para o método efetivo que resolve um *problema de decisão*[16]. Além disso, é importante mencionar que sempre nos referimos a uma classe infinita contável de questões, pois, pelo menos a partir de um ponto de vista clássico, a solução de um problema de decisão referente a uma classe finita de questões seria trivialmente obtida por meio da preparação de uma lista contendo todas respostas às questões da classe[17].

Quanto a este último ponto, ao qual voltaremos mais tarde, pois envolve uma discussão a respeito da disputa entre clássicos e intuicionistas, considere o seguinte problema de decisão: "É verdadeira alguma proposição do conjunto finito de proposições $\{A, B, C, D, E\}$?" Temos aqui uma classe de cinco questões, uma vez que o conjunto possui apenas cinco proposições. Um método efetivo para essa classe não seria nada mais do que a lista correta de "sins" e "nãos". No entanto, se uma das proposições corresponder a um problema em aberto, a conjectura de Godbach, por exemplo, apenas um clássico consideraria que existe um procedimento de decisão

[14]Dado que temos um método efetivo que responde ao segundo problema de decisão, o conjunto das sequências finitas de fórmulas que constituem uma demonstração é recursivamente enumerável.

[15](KLEENE, 2002, 224).

[16]Em contextos mais gerais, utilizaremos o termo *problema de decisão* para nos referirmos tanto a um problema de decisão quanto a um problema de computação.

[17](KLEENE, 2002, 226).

para essa classe de questões[18].

Como aponta Smith (2013, 340), a noção de método efetivo aparentemente não coloca grandes problemas, uma vez que se pode reconhecer sem dificuldade quando um dado método realiza ou não nossas intuições básicas que ratificariam a sua efetividade. Contudo, se, por um lado, podemos reconhecer sem maiores problemas que estamos de posse de um método efetivo, por outro, trata-se de algo mais complicado afirmar que não existe um método efetivo que possa resolver o problema de decisão de uma dada classe de questões. Retomando o *Entscheidungsproblem*, reconhece-se, devido a um resultado de Löwenheim em 1915, que ele tem uma solução positiva, mas restrita à lógica de primeira-ordem monádica. Para se verificar que o método proposto por Löwenheim soluciona essa parte restrita do Problema de Decisão precisamos reconhecer que tal método é efetivo, além de demonstrar que ele sempre retorna a resposta correta. Quanto ao primeiro ponto, não é preciso fornecer condições necessárias que deveriam ser satisfeitas para que um método seja considerado efetivo, simplesmente o reconhecemos como tal. Em soluções positivas de problemas de decisão, "we just need to be able to say 'Look, here's an algorithm that does the trick"'.

Não obstante, se pretendemos estabelecer que um dado problema de decisão é insolúvel, ou seja, se pretendemos demonstrar que não existe um método efetivo que o solucione, devemos ter condições de demonstrar fatos envolvendo a classe de todos os métodos efetivos possíveis, já que, por ser infinita, não poderíamos percorrê-la e constatar no final que ela não possui o método procurado. Quanto à solução negativa de um problema de decisão, Kleene diz:

> [The] intuitive notion of a computation procedure, which is real enough to separate many cases where we know we do have a computation procedure before us from many others where we know we don't have one before us, is vague when we try to extract from it a picture of the totality of *all possible computable functions*. And we must have such a picture, in exact terms, before we can hope to prove that there is no computation procedure at all for a certain function, or briefly to prove that a certain function is uncomputable. Something more is needed for this (KLEENE, 2002, 231, grifo nosso).

Assim, em tais casos, precisamos de uma caracterização finita e precisa da classe infinita de métodos efetivos, a fim de demonstrar que nenhum método satisfazendo tais características é capaz de solucionar o problema de decisão considerado.

2.2.2 Generalização dos teoremas de incompletude

De acordo com Shapiro (1983, 212), a tentativa de generalizar os resultados de Gödel sobre a incompletude de sistemas formais pode ser vista como mais um contexto em que se demandou uma reflexão abstrata sobre a natureza de um método

[18](KLEENE, 2002, 227).

efetivo. O principal resultado de 1931 de Gödel diz que existe uma sentença expressa na linguagem dos *Principia Mathematica* que é indecidível pelo seu sistema dedutivo, ou seja, não pode ser demonstrada nem refutada. Todavia, os métodos empregados por Gödel para a demonstração desse teorema sugerem a sua generalização: qualquer axiomatização adequada da aritmética seria incompleta. Diante disso, foi levantada uma demanda pela elucidação do que constitui, face ao programa de Hilbert, uma *axiomatização adequada*, a fim de que a generalização do teorema de Gödel pudesse ser clarificada e possivelmente demonstrada.

Um dos papeis desempenhados por um sistema axiomático dedutivo é o de comunicar demonstrações do discurso matemático que foi codificado e representado pelo sistema. Nessa direção, a sintaxe de uma axiomatização adequada deve ser efetiva, i.e., por meio de recursos finitistas devemos ser capazes de determinar se uma sequência de caracteres constitui uma fórmula, se determinadas fórmulas são axiomas, e se uma sequência de fórmulas constitui uma demonstração (algo que, como já mencionado, compõe o que Gödel denominou de "extraordinária característica", referindo-se aos sistemas de Frege e Peano).

Assim, Shapiro (1983, 213) declara nos seguintes termos a generalização que os resultados de 1931 de Gödel sugeriam: "there is no (ω-consistent) *effective* axiomatization of arithmetic in which every sentence is either provable or refutable" (grifo do autor). Formulado dessa maneira, notamos, à semelhança do que vimos ao tratar do Problema de Decisão, a possibilidade de se estabelecer um resultado negativo acerca de métodos efetivos, já que se afirma *não existir* um sistema *efetivamente* axiomatizável da aritmética em que todas as suas sentenças possam ser decididas. Mais uma vez somos conduzidos a refletir sobre o que caracteriza um método efetivo, pois só a partir dessas características teremos condições de demonstrar que nenhum método que as realiza pode solucionar um certo problema de decisão.

No artigo de Gödel de 1934[19], que é uma continuação do artigo de 1931[20], podemos observar, como sugere Shapiro (1983, 213), vários indícios de que questões relacionadas à caracterização de um método efetivo tenham surgido, talvez pela primeira vez, no contexto dos resultados de incompletude. Logo na primeira página, encontramos a exigência de que o sistema axiomático dedutivo seja efetivo:

> We require that the rules of inference, and the definitions of meaningful formulas and axioms, be constructive; that is, for each rule of inference there shall be a finite procedure for determining whether a given formula B is an immediate consequence (by that rule) of given formulas $A_1, \ldots, A_n$, and there shall be a finite procedure for determining whether a given formula A is a meaningful formula or an axiom (GÖDEL, 1965, 41).

Mais adiante, no início da seção 6, cujo título se refere às condições que um sistema

[19](GÖDEL, 1965).
[20](GÖDEL, 1986c).

formal deve satisfazer a fim de que os argumentos precedentes apresentados no artigo possam ser aplicáveis, Gödel escreve:

> [...] the class of axioms and the relation of immediate consequence shall be recursive. This is a precise {condition which in practice suffices as a substitute for the unprecise} requirement of §1 that the class of axioms and relation of immediate consequence be constructive[21].

Vemos aqui a sugestão de adequar a noção intuitiva de método efetivo (ou, na terminologia de Gödel, procedimento construtivo) à noção formal de recurção primitiva[22]. Em seguida, nas páginas 62 e 63, apresenta-se o teorema, semelhante ao do artigo de 1931, de que toda axiomatização recursiva primitiva da aritmética é incompleta. Todavia, como a classe das funções recursivas primitivas não compreende todas as funções computáveis (i.e., calculáveis por um método efetivo), como Gödel (1965, 69, nota 33) observa ao apresentar uma função semelhante a uma função obtida por Ackermann num artigo de 1928, a qual é computável mas não é recursiva primitiva, não se segue que *toda* axiomatização adequada (i.e., efetiva) é incompleta. Nesse sentido, é relevante citar a nota 3 do mesmo artigo de 1934, onde Gödel, após chamar a atenção para o fato de que as funções recursivas primitivas possuem a importante propriedade de serem computáveis, escreve:

> The converse seems to be true, if, besides recursions according to the scheme (2) [i.e., as equações que caracterizam as funções recursivas primitvas], recursions of other forms (e.g., with respect to two variables simultaneously) are admitted. This cannot be proved, since the notion of finite computation is not defined, but it serves as a heuristic principle.

Contando que esse artigo se encerra com a formulação de uma ampliação, a qual Gödel atribui a Herbrand, das funções recursivas primitivas[23], que se mostrou mais tarde coextensiva às funções computáveis por máquina de Turing ou cálculo lambda, não é descabido considerar que Gödel passou perto de formular a tese de Church, além de podermos ver no mesmo artigo a *sugestão* de um resultado negativo concernindo métodos efetivos, o de que *nenhuma* axiomatização efetiva da aritmética é completa.

Diante disso, entretanto, algumas ressalvas precisam ser consideradas. Davis (1965, 40) nos informa que Gödel declara, numa carta, que na época em que as notas de curso que deram origem ao artigo de 1934 foram escritas ele não estava completamente convencido de que seu conceito de recursão englobaria todas as recursões possíveis. Como podemos ler em Kleene (1981, 61), Gödel parece ter-se

[21]Nessa edição, o que se encontra entre chaves se refere a acréscimos e correções feitos pelo próprio Gödel.

[22]O que se chama aqui de recursivo é equivalente ao que hodiernamente entendemos por recursivo primitivo, cf. (SIEG, 1994, 81).

[23]Posteriormente, tais funções ficaram conhecidas como "recursividade geral de Herbrand-Gödel".

convencido da tese de Church apenas após a formulação dada por Turing. De fato, no *postscriptum* ao artigo de 1934, escrito especialmente para a coletânea de artigos editada por Davis, de 1965, Gödel escreve:

> In consequence of later advances, in particular of the fact that, due to A. M. Turing's work, a precise and unquestionably adequate definition of the general concept of formal system can now be given, the existence of undecidable arithmetical propositions and the non-demonstrability of the consistency of a system in the same system can now be proved rigorously for *every* consistent formal system containing a certain amount of finitary number theory (DAVIS, 1965, 71, grifo do autor).

Uma outra questão a ser considerada, levantada por Shapiro (1983, 214), é: os resultados de 1936 de Turing e Church são originários de discussões acerca do programa de Hilbert ou de uma generalização dos teoremas de Gödel de 1931? De acordo com Shapiro, Church e Turing não mencionam explicitamente que seus trabalhos são uma contribuição aos resultados de 1931, ao contrário de Post, que faz tal menção no primeiro parágrafo do seu artigo de 1936[24]. Turing (1936) diz que seus resultados são superficialmente similares ao de Gödel, já Church, cujo artigo de 1936 contém um tratamento das funções recursivas gerais de Herbrand-Gödel, menciona numa nota de rodapé[25] que a possibilidade de uma relação entre recursividade e método efetivo foi levantada por Gödel numa conversação, mas não provê indicações que nos permitam justificar de maneira suficiente que o seu tratamento sobre computabilidade se deve a um desenvolvimento do trabalho de Gödel.

2.3 Apresentação da tese de Church

De acordo com o que vimos, apesar de termos uma noção intuitiva clara que nos permite dizer quando estamos diante de um método efetivo, tal intuição se torna insuficiente quando tentamos a partir dela dizer algo sobre a classe de todos os métodos efetivos. Assim, antes que possamos demonstrar algum resultado que estabeleça algo sobre os limites do que é executável por um método efetivo, devemos ter uma caracterização que nos permita circunscrever a totalidade de todos esses métodos.

Nesse contexto se insere a tese de Church, cuja pretensão é adequar a noção vaga e intuitiva de método efetivo à noção formal de função recursiva. Contudo, como pode ser constado na caracterização informal de método efetivo apresentada acima (seção 2.2.1), tal caracterização carece de rigor, já que um de seus elementos

[24]"The present formulation should prove significant in the development of symbolic logic along the lines of Gödel's theorem on the incompleteness of symbolic logics and Church's results concerning absolutely unsolvable problems."

[25](CHURCH, 1936, 356, nota 18).

chaves, o de que o método não demanda discernimento, intuição ou engenhosidade da parte de quem o executa, é deixado sem explicação[26]. Dessa forma, a tese em si mesma não pode ser demonstrada no sentido rigoroso de uma demonstração matemática, apesar de que, uma vez aceita, ela nos permite demonstrar fatos envolvendo a classe de todos os métodos efetivos.

Diante disso, podemos considerar a tese de Church, como diz Kleene (1974, 318), uma hipótese sobre a noção intuitiva de método efetivo ou uma definição matemática dessa noção. Neste último caso, para que a teoria baseada em tal definição tenha o significado pretendido, o que se tem a fazer é levantar evidências de que a noção formal definida matematicamente não entra em conflito com a noção intuitiva, ou seja, que toda função ratificada por nossa intuição como sendo executável por um método efetivo (i.e., calculável) seja uma função recursiva.

Acompanhamos aqui as evidências levantadas por Kleene (1974, 319), que as dividiu em três grupos principais, (A)-(C), mais um grupo (D), que como ele mesmo diz, pode ser incluído no primeiro grupo.

(A) Evidências heurísticas.

(A1) Não se encontrou até então um contraexemplo que instanciasse o fato de haver uma função calculável mas não recursiva geral. Em maiores detalhes, tem-se demonstrado que todas as funções calculáveis investigadas são funções recursivas gerais, e que todas as operações que obtêm funções calculáveis a partir de funções calculáveis permitem obter funções recursivas gerais a partir de funções recursivas gerais, mesmo diante de uma investigação abrangendo uma grande variedade de tais funções e operações, buscando exaurir todos os tipos que se tem conhecimento.

(A2) Os métodos empregados para demonstrar que uma certa função calculável é recursiva geral se encontram bastante desenvolvidos, a tal ponto que "virtualmente se exclui dúvidas" quanto à capacidade desses métodos de transformar um método efetivo numa função recursiva geral.

(A3) O emprego de diversos métodos com o intuito de produzir uma função fora da classe de funções recursivas gerais apenas se revelou insuficiente em produzir tal função, ou a função produzida não possuía uma definição que a permitisse ser considerada calculável[27].

[26](COPELAND, 2017, §1).

[27]A esse respeito, é curioso ler o que Soare (2014, 486, §8.2) relata sobre os primórdios do cálculo lambda, nos anos de 1931-1934: "In a remarkable discovery, Alonzo Church was the first to notice that the λ-calculus provided a formal definition of the informal notion of effectively calculable function, even though unlike Turing, he did not define the latter notion precisely or convince Gödel that this was a correct formalization. Not even Church's own student, Kleene, was convinced until he tried unsuccessfully to diagonalize out of the class of partial recursive functions, and discovered instead the Kleene fixed point theorem."

(B) Diversas formulações equivalentes.

(B1) Demonstrou-se a coextensão de diferentes caracterizações – igualmente possuindo as evidências heurísticas descritas em (A) – da classe de funções calculáveis. Para citarmos as mais conhecidas, podemos mencionar as seguintes noções, que surgiram de maneira independente por volta do ano de 1936: recursividade geral, definição lambda e computabilidade. A segunda noção se deve a Church e a Kleene (entre 1933-1935), a terceira, a Turing (1936-7) e a Post (1936). Church, Kleene e Rosser demonstraram a equivalência entre as funções λ-definíveis e as funções recursivas gerais; Turing demonstrou a equivalência entre sua noção de computável e funções λ-definíveis. Como ressalta Kleene (1974, 320), o fato de haver diversas noções divergindo drasticamente a partir de um ponto de vista intensional, mas todas elas tendo como extensão uma mesma classe de funções, constitui um forte indício de que tal classe é fundamental. Sumariando, mencionamos outras análises formais de método efetivo que se mostraram extensionalmente equivalentes: definibilidade combinatória (começado por Schönfinkel, em 1924; Curry, 1929, 1930, 1932; e continuado por Rosser, 1935, 1942); calculabilidade (*reckonability*) de Gödel, 1936; os sistemas canônico e normal de Post, 1943, 1946; algoritmos de Markov, 1960; máquinas de registro, Shepherdson and Sturgis, 1963.

Church, referindo-se à equivalência entre funções recursivas gerais e funções λ-definíveis, faz a seguinte declaração, salientando a plausibilidade do que conhecemos como a sua tese (a qual é defendida no artigo que contém a citação abaixo):

> The fact, however, that two such widely different and (in the opinion of the author) equally natural definitions of effective calculability turn out to be equivalent adds to the strength of the reasons adduced below for believing that they constitute as general a characterization of this notion as is consistent with the usual intuitive understanding of it (CHURCH, 1936, nota 3).

Gandy (1995, 72), ademais, informa que Kleene, impressionado por esse argumento, esforçou-se em dar diferentes caracterizações para o seu conceito de *função recursiva de tipo finito*, para então demonstrá-las equivalentes.

Todas essas equivalências conduzem à ideia de que a noção de método efetivo é independente do formalismo que a analisa, uma vez que todas as análises formais se referem à mesma classe de funções. A esse respeito, é importante observar que Gödel, referindo-se ao seu sistema S_1, compreendido numa hierarquia de sistemas $S_i(i = 1,2,3,...)$ que empregam sucessivamente variáveis de tipos superiores, diz:

> It can, moreover, be shown that a function computable in one of the Systems S_i, or even in a System of transfinite order, is computable already in S_1. *Thus the notion 'computable' is in a certain sense 'absolute'*, while almost all metamathematical notions otherwise known (for example, provable, definable, and so on) quite essentially depend upon the System adopted (GÖDEL, 1986d, 399, grifo nosso).

Mais tarde, na mesma direção, encontramos a seguinte afirmação de Gödel, destacando o porquê da importância da noção formal de recursividade geral:

> Tarski has stressed in his lecture (and I think justly) the great importance of the concept of general recursiveness (or Turing's computability). It seems to me that this importance is largely due to the fact that with this concept one has for the first time succeeded in giving an absolute definition of an interesting epistemological notion, i.e., one not depending on the formalism chosen (GÖDEL, 1990, 150).

(C) O conceito de Turing de máquina de computação.

As funções computáveis de Turing representam uma tentativa direta de fazer uma formulação matemática da noção de método efetivo, independentemente de qualquer sistema formal, ao passo que as outras formulações surgiram em outros contextos e apenas posteriormente foram identificadas à noção intuitiva. Assim, a análise de Turing se aproxima mais daquilo que entendemos intuitivamente por método efetivo, dado que ela pretende capturar, oferecendo hipóteses bastante plausíveis[28], o que um computador humano seguindo mecanicamente um conjunto de instruções é, em princípio, capaz de realizar.

Kleene alega que Post (1936) apresentou uma formulação semelhante à de Turing, contudo, é válido mencionar que Sieg (1994, 91) discorda dessa afirmação, sustentada pela maioria, aliás. Turing, ao propor sua noção de computabilidade, parte de uma análise ampla da noção informal de método efetivo e a reduz a uma noção mais restrita, a de computável por uma máquina (de Turing). Por outro lado, Post, por meio da sua *formulação 1*, pretende, a título de uma hipótese em andamento, tomar uma noção formal estreita de método efetivo e ampliá-la, por meio de uma sustentação quase-empírica, à noção informal de método efetivo.

(D) Lógicas simbólicas e algoritmos simbólicos.

Esta evidência se baseia na apresentação que Church (1936, §7) dá de dois métodos, os quais, de acordo com ele, contém os elementos básicos envolvidos na caracterização de um método efetivo. Tais métodos consistem num algoritmo, por meio do qual o valor $F(n)$ de uma função F é obtido, ou numa derivação de $F(m) = n$ a partir de axiomas sobre F num certo sistema formal. A ideia básica de sua argumentação se resume no seguinte: se o que consideramos como método efetivo pode ser caracterizado por esses dois métodos, compostos por passos computáveis de um algoritmo ou por passos dedutivos num sistema formal, e tais passos são recursivos gerais, segue-se que F, como um todo, é uma função recursiva geral. Shapiro faz o seguinte comentário a respeito do argumento empregado por Church:

> He [Church (1936)] takes it as obvious that any elementary operation represents a recursive function and he proves that many ways to combine elementary operations into algorithms do not lead out of the class of recursive functions (SHAPIRO, 1981, 354).

[28]Cf. (TURING, 1936, argumento I, seção 9).

O argumento aparenta conter, ao menos em parte, uma justificação heurística. Se até o momento uma função definida algoritmicamente ou derivada num sistema formal não se apresentou como impassível a uma definição recursiva, mais difícil ainda é imaginar os passos *simples* que compõem tais métodos como não sendo recursivos[29]. Por essa razão que Kleene (1974, 323) diz podermos incluir a evidência (D) sob a categoria de evidências (A).

2.4 Por que uma tese?

Ser um método efetivo diz respeito a uma propriedade cuja caracterização se relaciona, em primeira instância ao menos, a entidades não matemáticas, como dispositivos mecânicos e habilidades humanas. Por essa razão, não se procura demonstrar a tese de Church como se procuraria demonstrar, por exemplo, a conjectura de Goldbach, i.e., extraindo consequências de certos princípios assumidos numa determinada teoria matemática. Nesse sentido, concordando que a tese de Church não se trata de uma questão matemática, o que podemos fazer é oferecer argumentos não matemáticos que procuram sustentá-la ou refutá-la[30].

Por outro lado, se tentarmos argumentar matematicamente a respeito da tese de Church, uma via que podemos tomar é caracterizar axiomaticamente a noção de método efetivo, demonstrando, em seguida, que os axiomas admitidos só podem ser satisfeitos pela classe de funções recursivas[31]. Não obstante, mesmo neste caso, diante da aceitação ou rejeição de certos axiomas, a discussão seria conduzida a um terreno não matemático.

Diante disso, Shapiro (1981, 354) procura argumentar que uma defesa da tese de Church depende, ao menos em parte, de uma consideração filosófica que estabeleça uma relação entre dois tipos de realidade, uma matemática e outra não matemática. Ele apresentará duas considerações: uma faz uma interpretação estruturalista da tese de Church, a outra a toma como um modelo matemático.

Voltemos nossa atenção à primeira consideração. De acordo com o estruturalismo, aqui entendido como uma posição filosófica oriunda da filosofia da matemática, a realidade não matemática exibe uma estrutura matemática subjacente às suas inter-relações. Se adotarmos essa posição filosófica, uma de suas implicações quanto à tese de Church seria que a propriedade de ser um método efetivo teria uma extensão fixa e determinada no conjunto de funções da teoria dos números. Conse-

[29](BRANQUINHO; MURCHO; GOMES, 2006, Verbete *Tese de Church*).
[30](SHAPIRO, 1981, 353).
[31]Shapiro (1981, nota 3) diz que Harvey Friedman elaborou essa proposta numa palestra.

quentemente, como a propriedade de recursividade, pela própria maneira em que foi constituída, também possui uma extensão fixa e determinada no mesmo conjunto de funções, ambas as propriedades seriam necessariamente coextensivas.

Essa coextensão *necessária* é tão menos surpreendente quanto mais temos em vista que o estruturalismo tenta captar uma estrutura matemática subjacente a uma realidade não matemática que se apresenta – que no nosso caso diz respeito à noção de método efetivo. Esta seria então, ainda que informal na superfície, uma noção matemática. Assim:

> [T]he structuralist supposes either that there is a mathematical structure common to all mechanical computation devices or that all minds have a common mathematical structure in virtue of which they have the potentiality to grasp and execute algorithms and, therefore, the ability to compute (SHAPIRO, 1981, 355).

Portano, dizer que uma função é executável por um método efetivo corresponde a lhe atribuir uma propriedade caracterizável a partir de uma das estruturas matemáticas aludidas na citação acima.

Shapiro (1981, 355) dá três exemplos de autores que podem ser interpretados como sustentando uma visão estruturalista da tese de Church: Turing, por ter considerado os processos computacionais como passíveis a um estudo matemático; Myhill, que ao relacionar teoremas de teoria da computabilidade a leis psicológicas, pode ser visto como sugerindo uma estrutura matemática subjacente ao comportamento humano; Post, para o qual a verificação da tese de Church demandaria uma análise psicológica, uma vez que, para esse autor, a mente humana se articularia por meio de processos lógico-matemáticos.

Além disso, a interpretação estruturalista pode ser subdivida em outras duas maneiras de compreendê-la: como (1) identificando a extensão fixa, ainda que não analisada, de uma propriedade matemática pré-formal à extensão de uma propriedade matemática precisa e bem definida; (2) igualmente a (1), exceto pelo fato de que a propriedade pré-formal diz respeito a algo não matemático.

Quanto à primeira subdivisão, Shapiro (1981, 356) nos oferece três exemplos. Hodiernamente, ao contrário do que faziam os matemáticos da Grécia antiga, identificamos magnitudes a números reais, tomados como unidades de uma magnitude. Isso nos permite *definir* a área de um triângulo como sendo a metade da sua base multiplicado pela sua altura; a área de um polígono como sendo a soma das áreas dos triângulos que o constituem; e, em geral, a área de uma figura plana fechada como sendo o limite superior mínimo das áreas dos polígonos que podem ser inscritos em tal figura. Contudo, apesar de Euclides não ter à sua disposição uma definição explícita como a apresentada, isso não o impediu de, por meio de uma noção pré-formal de área, demonstrar, por exemplo, que "se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triangulo" (Livro I, proposição 41). O ponto é que a definição moderna de área é uma análise da noção pré-formal de área (uma noção matemática), já empregada, ainda que de maneira intuitiva, há bastante tempo pela comunidade matemática. Podemos falar assim, como diz Shapiro (1981, 357), de uma *tese de área*, a qual procura identificar a noção moderna de área à noção pré-formal Euclidiana, de modo que, à semelhança da categoria (A)[32] de evidências da tese de Church, há o fato de que todos os teoremas de Euclides envolvendo a noção de área podem ser demonstrados com a definição moderna, não tendo sido encontrado nenhum contraexemplo.

Ainda concernindo a primeira subdivisão, que identifica a extensão de uma propriedade matemática pré-formal à extensão de uma propriedade matemática formal, Shapiro (1981, 357-358) apresenta outros dois exemplos: a análise de Eudoxus da noção pré-formal de igualdade entre razões, a formulação $\varepsilon - \sigma$ de Cauchy-Weierstrass da noção pré-formal de continuidade. Contudo, diferentemente da tese de Church, em tais exemplos as noções pré-formais analisadas – área, proporção, continuidade – fazem parte da matemática, ou seja, não dizem respeito à estrutura de algo que se situa fora do domínio dessa disciplina.

No que concerne à segunda subdivisão que compõe o ponto de vista estruturalista, i.e., a análise de uma noção pré-formal proveniente de um domínio não matemático, Shapiro (1981, 358) diz que também podemos encontrar na história da matemática diversas "teses" constituídas nessas condições. Como exemplo, ele apresenta o tratamento matemático da noção de "definição" – em outras palavras, como se define o que é uma definição? Neste caso, a estrutura a que a noção pré-formal analisada se refere é a estrutura do discurso da prática matemática, a qual, apesar de ser subjacente ao discurso matemático, não integra o domínio da matemática, mas o da lógica matemática, que para um estruturalista "can be construed as the study of the structures behind mathematical discourse – the study of the 'underlying logics' of mathematical practice. From this perspective, the formal treatment of 'definition' is to be related to these underlying structures". Assim, quando a lógica matemática propõe uma caracterização formal da noção pré-formal de definição – tal como ela é comumente empregada no discurso matemático –, estipulando critérios de eliminabilidade, não criatividade, extensibilidade[33], o que se faz é uma análise direta dessa noção, propondo teses a respeito da sua adequação formal. No seu artigo, Shapiro (1981, 358) menciona a definição semântica de definição dada por Corcoran, a qual ele chama de *tese de Corcoran*, e a formalização da noção

[32]Cf. seção 2.3.
[33]Cf. (MATES, 1972, 197).

de definição dada por Lesniewski, que ele chama de *tese de Lesniewski*. Além do mais, tendo em vista a demonstração de Corcoran de que as duas definições são equivalentes, pode-se considerar isso uma evidência do tipo (B) a essas teses.

Tal como Kleene (2002), Shapiro (1981, 359) categoriza os mesmos tipos de evidência que se podem levantar para teses semelhantes à de Church, que por envolverem uma parte pré-formal não podem ser demonstradas num sentido matemático. Analogamente ao que vimos na seção 2.3, temos os seguintes tipos de evidência[34]: (A) exceção de contraexemplo; (C) análise direta; (B) equivalência extensional (argumentos de invariância). Analisando-as de um ponto de vista estruturalista, isso quer dizer que:

(A) Se existe uma estrutura definitiva subjacente a um método efetivo, a qual caracteriza a mesma extensão da noção formal de recursividade, então não deve existir um método efetivo que não possa ser computado por uma função recursiva. Diante de um suposto contraexemplo da tese de Church – um método efetivo não computável por uma função recursiva –, a única maneira de a continuar defendendo consiste em argumentar que o método em questão não é efetivo ou que existe uma função recursiva que o compute. Referindo-se a Kalmár (1967, 193, n. 1), Shapiro diz que a tese de Church seria, num certo sentido, empírica, já que, apesar de não poder ser demonstrada, ela pode ser refutada por uma "observação" futura.

(C) Uma defesa direta de uma tese semelhante às que aqui foram mencionadas consiste em analisar e comparar as características relevantes concernentes à realidade, matemática ou não, sob consideração. Pressupondo que haja uma estrutura matemática fixa e determinada subjacente a tal realidade – sendo este o ponto principal dessa forma de análise –, certas consequências são deduzidas, as quais são comparadas à estrutura bem definida concernente à contraparte formal articulada pela tese em questão.

(B) No caso de uma defesa direta, um problema que se evoca diz respeito à suficiência das características concernentes à realidade analisada: seriam elas suficientes para determinar a estrutura matemática subjacente? Assim, quanto mais se acumulam diferentes análises concentrando em diferentes aspectos da realidade investigada, e tais análises revelam circunscrever uma mesma extensão, maior é a evidência de que se identificou a estrutura matemática correta.

[34]Por uma questão de coerência didática, invertemos propositadamente a ordem da apresentação.

Uma outra maneira de considerar a tese de Church, que como dissemos no início desta seção consiste, para Shapiro, em estabelecer uma relação entre dois tipos de realidade, sendo uma delas não matemática, é interpretá-la como propondo um modelo matemático para a noção de método efetivo. De acordo com essa interpretação, recusa-se a concepção de que haja uma estrutura matemática fixa e determinada subjacente à noção pré-formal de método efetivo, não havendo, portanto, a delimitação de uma extensão que pudesse ser identificada à extensão da noção formal de recursividade. Desse modo, a noção formal, usada como substituto da noção pré-formal, seria empregada como um expediente para obter resultados matemáticos. Nas palavras de Shapiro, a tese de Church encarada como um modelo matemático é descrita da seguinte maneira[35]:

> The precise extension of recursiveness is rather close to the vague extension of computability. The extensions are close enough for many theorems about recursive functions to correspond to facts about computation (SHAPIRO, 1981, 360).

Para ilustrar essa concepção de modelo matemático, Shapiro se refere à teoria dos nós, citando uma passagem do livro *Introduction to Knot Theory* (1963), de Crowell e Fox. Nesta passagem, onde a definição matemática de nó é problematizada, os autores dizem que, apesar de podermos experimentalmente constatar com um pedaço de corda que um *nó de mão* é diferente de um *nó em oito*, já que um não pode ser transformado no outro sem que antes um deles seja atado ou desatado, isso de nada serve a uma demonstração matemática. Para se demonstrar matematicamente que dois nós são distintos, deve-se, antes de mais nada, dar uma definição matemática do que é um nó, pois a matemática não demonstra nada sobre algo que não seja matemático. Nessas condições, procura-se definir um objeto matemático que seja o mais próximo possível do objeto físico em questão, conduzindo ao problema mais geral de apresentar um modelo matemático da situação física à qual se pretende aplicar uma determinada teoria matemática. A qualidade do modelo dependerá de quão bem sucedida é a correspondência entre a matemática e a realidade. Além do mais, tal como observamos a respeito da tese de Church, não se pode *demonstrar* que a definição matemática é uma descrição exata da situação física. Nessa concepção, a tese de Church seria um modelo matemático da noção de método efetivo, onde a demonstração de teoremas no âmbito de uma teoria da recursão revelariam fatos, ainda que de maneira aproximada, a respeito dessa noção.

À semelhança do que vimos na interpretação estruturalista, Shapiro (1981, 361) observa que a partir da interpretação da tese de Church como um modelo matemático podemos notar na história da ciência e da engenharia várias outras *teses*. Assim, além da *tese de Crowell e Fox*, que procura dar uma definição da noção pré-formal

[35]Shapiro utiliza o termo "computabilidade" para se referir à noção pré-formal, o qual corresponde ao termo "método efetivo", que temos dado preferência.

de nó, teríamos, por exemplo, a *tese da mecânica clássica*, que seria um modelo matemático para a noção de atração gravitacional. Isso nos levaria a outras duas sub-teses: "a mecânica clássica é rigorosa o suficiente para a construção de aeronaves" e "a mecânica clássica é rigorosa o suficiente para cálculos interestelares precisos". Estas duas sub-teses não são equivalentes, já que uma é verdadeira, e a outra, falsa. Mas, de acordo com Shapiro, podemos manter uma tese mesmo que exista um outro modelo mais preciso, geralmente porque este é mais complicado de lidar com relação a um determinado propósito que demanda menos precisão. De todo modo, como não se considera a hipótese de que haja uma estrutura fixa subjacente às noções equiparadas pela tese, tais teses não se contradizem. Assim, nesse contexto, não colocaríamos em questão se a tese de Church é verdadeira, mas se a correspondência que ela propõe entre a matemática e a realidade é "boa", ou seja, se a extensão delimitada pela noção de recursividade é "próxima o suficiente" da extensão delimitada pela noção de método efetivo. A tese teria como propósito apenas possibilitar uma correspondência entre teoremas demonstrados no modelo de recursividade e fatos concernindo a noção de método efetivo.

Essa maneira de interpretar a tese de Church nos revelaria, contudo, uma má correspondência no que diz respeito à outra direção da tese – i.e., toda função recursiva é executável por um método efetivo –, que em geral é considerada trivial. Como existem funções recursivas cuja implementação é inviável de um ponto de vista prático, pois sua complexidade pode demandar uma quantidade de tempo e matéria que inviabilize a sua execução efetiva, a teoria da recursão demonstraria teoremas que em nada corresponderiam ao que, *de fato*, um método efetivo é capaz de executar[36].

Para um estruturalista, essa correspondência inadequada não seria uma surpresa, pois seria o reflexo natural da lacuna que existe entre forma e matéria, entre o mundo físico e as estruturas ideais que o formatam, semelhante ao que acontece quando se diz que uma figura geométrica nunca poderia ser instanciada na realidade física. No entanto, como na interpretação por modelo a concepção de uma estrutura matemática subjacente à realidade não se encontra disponível, tais lacunas não podem assim ser elucidadas[37].

Diante disso, Shapiro (1981, 362) conclui que, apesar da teoria da recursão não fornecer um modelo que corresponda adequadamente teoremas *positivos* sobre funções recursivas a fatos sobre computação, tal modelo é adequado quando se trata de estabelecer resultados negativos, pois da demonstração de que uma certa função é recursiva não obtemos garantias da sua viabilidade computacional efetiva, mas,

[36](SHAPIRO, 1981, 362).
[37](SHAPIRO, 1981, n. 11).

em contrapartida, da demonstração de que uma função *não é* recursiva se segue o estabelecimento de um fato relevante, o de que a execução de tal função por um algoritmo é, por princípio, impossível.

Análogo ao que fizemos logo acima com a interpretação estruturalista, analisamos aqui as categorias de evidência (A)-(C) à luz da interpretação que considera a tese de Church como o estabelecimento de um modelo matemático[38]:

(A) Neste contexto, o mais apropriado é falar não da mera inexistência de contraexemplos do modelo, mas da inexistência de contraexemplos relevantes aos propósitos do modelo. Como visto, se o propósito do modelo for reconhecer casos de funções que não são recursivas, e assim estabelecer o que não pode ser executado por um método efetivo, a existência de funções recursivas inviáveis de um ponto de vista prático não pode ser vista como um contraexemplo relevante do propósito do modelo;

(B) Podemos falar de uma evidência por equivalência de diferentes modelos, todavia ela não tem o mesmo peso que esse tipo de evidência tem na interpretação estruturalista. Uma vez que não mais se assume uma estrutura matemática única subjacente à noção de método efetivo, a divergência entre as extensões de dois modelos propostos não conduz necessariamente à rejeição de um deles, seja porque a propriedade de ser um método efetivo é vaga, podendo os modelos propostos se divergirem em casos limites, seja porque cada modelo possui propósitos diferentes, o que se reflete em suas extensões.

(C) Ao contrário da visão estruturalista, a tese de Church interpretada como um modelo matemático não permite uma análise direta da noção de método efetivo, o que ela nos oferece são sugestões de analogias entre as operações envolvidas num método efetivo e operações envolvidas em certas funções matemáticas.

Assim, uma das principais diferenças entre a interpretação estruturalista e a interpretação por modelo matemático é que, enquanto para esta dois modelos divergentes podem conviver mutuamente – tendo em vista que o que se leva em conta é o modelo mais apropriado para um determinado propósito[39] –, para a outra, diferentes análises de uma noção que levam a diferentes extensões são mutuamente

[38](SHAPIRO, 1981, 362).

[39]Como exemplo, Shapiro (1981, 363) comenta sobre os modelos matemáticos que a física utiliza para descrever a luz. Há dois modelos incompatíveis entre si, o modelo que a descreve como onda, e o modelo que a descreve como partícula, contudo: "there is no (*a priori*) conflict between the models as long as they account for different phenomena and have different purposes. It is not a question of which model is correct, but of which model is appropriate for wich purpose".

conflitantes, devendo uma delas ser excluída, dado que só pode haver uma análise que verdadeiramente exprime a estrutura matemática subjacente, que é única.

3

Contra-argumentos à tese de Church

Este capítulo analisará alguns argumentos contrários à tese de Church. À exceção do argumento de Kalmár, todos eles a criticam a partir de uma perspectiva intuicionista, o que conduzirá a um exame das noções básicas do intuicionismo. O ponto de vista de Kalmár, no entanto, será interessante para ilustrar o que temos pra falar, no último capítulo, acerca do *desenvolvimento conceitual* da matemática.

3.1 Kalmár

Consideremos a tese de Church no sentido que diz: se uma função for computável, então ela é recursiva geral. A contraposição dessa proposição, que lhe é equivalente, é: se uma função não for recursiva geral, então ela não é computável. Diante disso, no artigo *An Argument Against the Plausibility of Church's Thesis*, Kalmár (1959, 74), valendo-se de um exemplo, atribuído a Kleene, de uma função não recursiva, pretende argumentar que a não aceitação de que tal função é computável nos leva a consequências estranhas, levantando assim suspeitas a respeito da plausibilidade da tese de Church. O exemplo é o seguinte, onde ϕ é uma função recursiva geral de dois argumentos:

$$\psi(x) = \mu_y(\phi(x,y) = 0) = \begin{cases} \text{o menor número natural } y \text{ para o qual} \\ \quad \phi(x,y) = 0, \text{ se houver um tal } y; \\ 0, \text{ se não houver um número natural } y \\ \quad \text{tal que } \phi(x,y) = 0. \end{cases}$$

Kalmár então alega que, para qualquer número natural p para o qual existe um número natural y tal que $\phi(p,y) = 0$, uma maneira de se computar o menor y

consiste em calcular sucessivamente $\phi(p,0),\phi(p,1),\phi(p,2)...$, dado o fato de que ϕ é recursiva geral, até que se encontre $\phi(p,q)=0$, para um certo número natural q. "On the other hand", Kalmár acrescenta,

> for any natural number p for which we can prove, not in the frame of some fixed postulate system but by means of arbitrary – of course, correct – arguments that no natural number y with $\phi(p,y)=0$ exists, *we have also a method to calculate the value* $\psi(p)$ in a finite number of steps: prove that no natural number y with $\phi(p,y)=0$ exists, which requires in any case but a finite number of steps, and gives immediately the value $\psi(p)=0$ (KALMÁR, 1959, 74, grifo nosso).

Assumindo, contudo, a tese de Church e a demonstração de Kleene de que a função ψ não é recursiva geral, segue-se, por contraposição, que ψ não é computável, logo, nenhum dos métodos acima descrito por Kalmár será suficiente em computá-la. A partir disso, Kalmár (1959, 74) conclui duas coisas, sem deixar de observar que isso representa uma consequência bastante implausível da tese de Church:

(a) Deve existir um número natural p tal que $\sim \exists y(\phi(p,y)=0)$;

(b) O fato (a) não pode ser demonstrado por nenhum *meio correto*.

Se não assumirmos essas duas consequências, eventualmente obteremos o valor de $\psi(p)$, mas isso faria de ψ uma função computável, contrariando a tese de Church. Desse modo, a proposição $\exists y(\phi(p,y)=0)$ deve ser absolutamente indecidível, pois, por um lado, sendo falsa[1] ela não pode ser demonstrada, por outro, sua negação também não pode ser demonstrada, já que isso nos daria o valor 0 para $\psi(p)$.

Kalmár (1959, 75) salienta que a indecidibilidade é absoluta pois não se trata de uma proposição que não é demonstrável nem refutável no contexto de um certo sistema formal, como vemos nos resultados de Gödel, tampouco, como vemos no resultado de indecidibilidade de Church, trate-se de "a problem with a parameter for which no general recursive methods exists to decide, for any given value of the parameter in a finite number of steps, which is the correct answer to the corresponding particular case of the problem, 'yes' or 'no'".

Além disso, apontando para mais uma consequência estranha, e assim melhor justificando o argumento pela sua implausibilidade, Kalmár diz que a tese de Church implica não somente uma proposição absolutamente indecidível, mas uma proposição absolutamente indecidível que pode ser decidida, visto que ela é falsa:

> [T]his "absolutely undecidable proposition" has a defect of beauty: we can decide it, for we know, it is false. Hence, *Church's thesis implies the existence of an absolutely*

[1]Uma vez que $\sim \exists y(\phi(p,y)=0)$ é verdadeira, cf. logo abaixo.

> *undecidable proposition which can be decided viz., it is false, or,* in another formulation, *the existence of an absolutely unsovable problem with a know definite solution*, a very strange consequence indeed (KALMÁR, 1959, 75, grifo do autor).

De fato, as consequências implicadas pela tese de Church, tal como Kalmár as descreve, são estranhas, dando boas razões para desconfiarmos da sua plausibilidade. No entanto, estaria a análise de Kalmár correta? Voltemos nossa atenção à função ψ. Kleene (1974, 317), logo no início do capítulo sobre funções parciais recursivas, apresenta uma função equivalente, mas com o intuito de exemplificar uma função não computável. De acordo com ele, sua não computabilidade se justifica da seguinte maneira: se for o caso de existir um y para o qual $\phi(p,y) = 0$, basta persistirmos o suficiente nos cálculos sucessivos de $\phi(p,0), \phi(p,1), \phi(p,2)...$ que eventualmente encontraremos um q tal que $\phi(p,q) = 0$. Não obstante, se não existir tal y, a persistência calculando suas instâncias sucessivas, por maior que seja, nunca será suficiente para nos assegurar que ele não existe. Como y tem infinitas instâncias, mas só podemos examinar um número finito delas, o fato de não termos encontrado um q tal que $\phi(p,q) = 0$ pode-se dever apenas a um exame incompleto. Nesse sentido, a computabilidade de ψ depende de termos condições de determinar *efetivamente* o valor de verdade da proposição $\exists y(\phi(p,y) = 0)$. Parafraseando Kleene, ψ é computável se e somente se a proposição $\exists y(\phi(p,y) = 0)$ for efetivamente decidível.

O fato do caráter computável de ψ depender da decidibilidade da proposição $\exists y(\phi(p,y) = 0)$ é fundamental para compreender que a análise de Kalmár não afeta a tese de Church. Como visto na citação acima, Kalmár diz que, quando não existe um y tal que $\phi(p,y) = 0$, o método para calcular $\psi(p)$ consiste em demonstrar, num número finito de passos e fora do contexto de um sistema fixo de postulados, que tal y não existe. Contudo, ele não apresenta um método efetivo por meio do qual tal demonstração poderia ser executada. Não havendo um método efetivo, eventualmente, a demonstração de que não existe um y satisfazendo aquelas características pode vir à tona, mas isso dependeria da engenhosidade de alguém que demonstrasse tal resultado. Desse modo, o método proposto por Kalmár não é efetivo justamente porque não tem a característica de ser mecânico, consequentemente, a proposição $\exists y(\phi(p,y) = 0)$ não é decidível, logo, o argumento de que ψ seria computável, acarretando assim a implausibilidade da tese de Church, não tem fundamento[2].

Kleene, que esteve presente no colóquio que deu origem ao artigo de Kalmár,

[2]Na literatura, encontramos diversos artigos e resenhas que criticam a posição de Kalmár, como: (NELSON, 1987), (MENDELSON, 1963), (SZABÓ, 2017), (KLEENE, 1987). Em particular, Moschovakis (1968, 472), à semelhança do que apresentamos aqui, alega que o procedimento apresentado por Kalmár, o de demonstrar por um meio correto arbitrário, não é efetivo. Cabe também mencionar Mendelson (1963, 203), para o qual a argumentação de Kalmár só seria válida se assumíssemos a hipótese de que *"o conjunto de demonstrações por 'meios corretos arbitrários' fosse efetivamente enumerável"*.

faz o seguinte relato[3]:

> I was present at the Amsterdam Colloquium of 1957 when my good friend László Kalmár presented his argument against the plausibility of Church's thesis; I immediately concluded, as fast as I heard it, that he had not given an effective procedure for deciding as to the truth or falsity of $(x)\overline{T}(n,n,x)$. He would not be able to tell me in advance in a finite communication (no matter how long we both should live) what set of atomic rules would completely govern the concrete steps in his search for proofs by "arbitrary correct means" of $(x)\overline{T}(n,n,x)$. I refrained from embarrassing him at the Colloquium by asking him for them on the spot (KLEENE, 1987, 494).

Se considerarmos o que Kalmár entende por calculabilidade efetiva, podemos compreender melhor a sua posição, apesar disso não ser suficiente para validar o seu argumento. Szabó (2017), com bastante detalhes, nos mostra como o entendimento de Kalmár dessa noção está estreitamente vinculado ao seu posicionamento filosófico, que, no que diz respeito ao nosso interesse, pode ser sumariado nestes dois pontos:

(i) Kalmár partilha com Hilbert a convicção de que não há *ignorabimus* na matemática – uma solução sempre pode ser encontrada para um problema bem formulado;

(ii) O desenvolvimento da matemática não tem fim, assim, além de seus fundamentos nunca poderem ser fixados de um vez por todas, novos métodos são constantemente incorporados, permitindo que problemas antes tidos como insolúveis sejam solucionados, ou melhor, "todo problema se tornará solucionável em algum momento"[4].

Diante disso, causa menos estranhamento o fato de Kalmár ter argumentado pela computabilidade de ψ. Em consonância com o seu ponto de vista filosófico, ainda que o valor dessa função não seja no presente conhecido, em algum momento ele se revelará, graças ao incessante desenvolvimento da matemática, que incorpora novos métodos e soluciona problemas até então não resolvidos. É nesse sentido que Kalmár parece empregar o termo "efetivo", i.e., pretendendo dizer que a solução de um problema matemático bem formulado está determinada a ser encontrada:

> We regard as effectively calculable any arithmetical function, the value of which can be effectively calculated for any given arguments in a finite number of steps, irrespective how these steps are and how they depend on the arguments for which the function value is to be calculated. In particular, I do not suppose the calculation method to be 'uniform' (KALMÁR, 1959, 73).

A uniformidade de um método é alcançada após o estabelecimento de uma certa prática ou teoria, unificando o que antes parecia desconexo: "several methods in

[3]Ele emprega aqui o predicado T, o qual é explicado na seção 3.2, abaixo.

[4](SZABÓ, 2017, 2).

algebra, geometry and theory of numbers which are now regarded group-theoretic methods were not considered as uniform before group-theory has been discovered" [5]. Consequentemente, se exigirmos de um método efetivo que ele seja uniforme, ele será relativizado a uma época específica do desenvolvimento da matemática, o que contrariaria a posição filosófica descrita em (ii). De fato, assumindo o ponto de vista de Kalmár, a tese de Church seria uma restrição à noção de calculabilidade efetiva, além de que, por meio dela, poderíamos concluir que existem problemas cuja solução nunca seria alcançada, a despeito de todo desenvolvimento da matemática futuro[6].

No entanto, essa interpretação não corresponde ao que comumente se entende por computável, ou seja, ao que se entende por uma função executada por um método efetivo. De acordo com o que já esclarecemos sobre essa noção, é essencial a um método dito efetivo que a execução que ele descreve possa ser conduzida de maneira mecânica, não basta meramente que o resultado esperado seja determinado após um número finito de passos. E, notoriamente, não há nada de mecânico em contar com o desenvolvimento da matemática para que um problema possa ser solucionado.

3.2 Péter

Péter (1959), ao contrário de Kalmár, argumenta contra o que se chama de sentido *fraco* da tese de Church, i.e., o que diz: se uma função for recursiva geral, então ela é executável por um método efetivo. O ponto central de seu argumento defende a ideia de que não se pode substituir construtivamente a noção intuitiva de função calculável pela noção formal de função recursiva. No seu artigo – comunicado no mesmo colóquio em que se apresentou Kalmár –, após apresentar diversos exemplos de funções recursivas, alegando a importância que a exigência de construtividade exerce na formação do conceito que as caracterizam, ela pergunta: "can the general recursive functions be correctly called all 'effectively calculable', i.e., 'constructive'[7]?" Em seguida, Péter diz o que ela entende por função recursiva geral:

> A general recursive function is indicated by a system of equations, where it is assumed that from any given place *there is* a finite calculation procedure by which the values for the variables and substitutions of identicals by the identicals is established, and clearly

[5](KALMÁR, 1959, 73).

[6](SZABÓ, 2017, 8-9).

[7]Note-se que Péter trata 'construtivo' como sinônimo de 'efetivamente calculável'. Nesse sentido, quando ela fala sobre a definição de construtividade, está falando sobre a definição da noção intuitiva de método efetivo (cf. (MENDELSON, 1963, n. 6)).

provides the value of the contemplated function at the specified place (PÉTER, 1959, grifo nosso).

Chamando a atenção para o existencial que ocorre na caracterização acima, Péter argumenta que duas definições de função recursiva geral estão em jogo, uma na qual aquele existencial é interpretado classicamente, outra na qual é interpretado intuicionisticamente. A partir disso, ela faz a seguinte afirmação:

> Now, the classic concept of the general recursive function is not constructive, and the intuitionistic one contains a vicious circle: here the occurrence of 'there is' in the definition should be constructive – but it was precisely with this definition of general recursiveness that we wanted to exaclty define constructivity.

Para elucidar esse ponto, podemos reconstruir a argumentação da seguinte maneira, destacando as hipóteses envolvidas:

(1) Uma função é recursiva geral se *existe* um sistema de equações que derive, por um procedimento de cálculo finito, seus valores;

(2) O existencial em (1) deve ser interpretado intuicionisticamente. Se assim não o fizermos, haverá funções recursivas gerais não construtivas, i.e., funções para as quais *não conhecemos* um método efetivo que as calcule;

(3) Defini-se a noção de construtividade por meio da de recursividade geral.

Logo, (3) é circular, pois a noção de recursividade geral pressupõe a de construtividade. Numa palavra, a intenção da interpretação intuicionista da noção de recursividade geral era usar esta noção para definir a de construtividade, mas a noção de recursividade geral, se lida intuicionisticamente, envolve a noção de construtividade.

Péter também chama a atenção para a ocorrência de um existencial no teorema da forma normal, de Kleene, o qual estabelece que toda função recursiva geral pode ser concebida numa forma específica. Esse teorema envolve o predicado recursivo primitivo $T(i,a,x)$, que diz o seguinte[8]: i está para o índice de uma máquina de Turing M_i, cuja descrição de seu comportamento foi codificada pela aritmetização de sua sintaxe, dando-nos assim um número natural i; Assim, M_i, quando aplicada a um argumento a, completará no Momento x (mas não antes disso) a computação de um valor $\phi_i(a)$. Dito isso, qualquer função recursiva geral f pode ser representada na seguinte forma normal:

$$f(a) =_{def} U(\mu x T(i,a,x)),$$

[8] Cf. (KLEENE, 2002, 243).

onde U é uma função recursiva primitiva, cujo valor é $\phi_i(a)$, e μ é o operador de busca mínima, que neste caso se refere ao momento x em que M_i *acaba* de completar a computação do valor que diz respeito ao argumento a. Péter atenta então para o fato de que tal forma normal corresponde a uma função recursiva geral apenas no caso de *existir* um x tal que $T(i,a,x)$ seja o caso, por isso

> here, again, we have to deal with this 'there is', which must be constructively construed if one wants to name by it the constructively defined function [...], so here we have the circle again (PÉTER, 1959).

Carnielli e Epstein argumentam que no caso desse existencial o problema da circularidade envolve a questão de podermos prever recursivamente quais computações param, ou seja, se podemos decidir efetivamente (i.e., construtivamente, usando os termos de Péter) se existe o x que ocorre no predicado T. Contudo, de acordo com o que ficou conhecido como O Problema da Parada, pode-se demonstrar, por uma argumentação envolvendo diagonalização, que não é possível construir uma máquina de Turing que compute uma função $\psi_i(a)$ definida de tal modo a retornar o valor 1 se a máquina parar quando tiver a como argumento, ou retornar o valor 0, caso contrário. Assim:

> [O] requerimento de saber antecipadamente que as computações param, a fim de que a função seja julgada computável, não tem força contra a caracterização de processos efetivos (em oposição a funções) como programas recursivos parciais. A significação da insolubilidade do problema da parada é que a noção fundamental é aquela de procedimento efetivo, não de função efetiva: o que é efetivo passo a passo pode não nos conduzir a lugar algum (CARNIELLI; EPSTEIN, 2009, 305).

Reforçando essa posição, os autores citados acima nos remetem à seguinte opinião de Gödel, mencionada por Wang:

> Gödel points out that the precise notion of mechanical procedures is brought out clearly by Turing machines producing partial rather than general recursive functions. In other words, the intuitive notion does not require that a mechanical procedure should always terminate or succeed. A sometimes unsuccessful procedure, if sharply defined, still is a procedure, i.e. a well determined manner of proceeding. Hence we have an excellent example here of a concept which did not appear sharp to us but has become so as a result of a careful reflection. The resulting definition of the concept of mechanical by the sharp concept of 'performable by a Turing machine' is both correct and unique[9] (WANG, 1974, 84).

Considerando isso, é valido notar que $\phi_i(a)$ se trata de uma função parcial[10], pois não estará definida para as variáveis i e a se não existir um x que satisfaça o predicado T acima.

Encontramos outras reações às críticas de Péter. Mendelson (1963, 202) assume um ponto de vista clássico e diz que o existencial que ocorre na tese de Church –

[9]Mosconi (2014, 39), referindo-se à mesma passagem, comenta: "Moreover, this definition avoids debates about the classical vs. constructivist interpretation of the existential quantifier involved in the definition of a total function."

[10](KLEENE, 2002, 244).

o que afirma *existir* um procedimento finito de cálculo – não deve ser interpretado intuicionisticamente, argumentado que para uma função ser computável não precisamos conhecer o procedimento que a calcula:

> [F]or a function to be computable by a system of equations it is not necessary that human beings ever know this fact, just as it is not necessary for human beings to prove a given function continuous in order that the function be continuous.

Quanto ao segundo existencial, Mendelson é da mesma opinião de Carnielli e Epstein: ao se calcular o valor de uma função computável não há um limite sobre o número de passos envolvidos no cálculo, tampouco é preciso saber previamente quantos passos serão utilizados. Assim, argumentando por uma interpretação clássica dos existenciais, não haveria motivo para se preocupar com um problema de definição circular, e não só por isso, Mendelson ainda argumenta que a tese de Church não se trata de uma definição, mas de uma equiparação entre extensões de duas noções distintas:

> Church's Thesis is not a definition; rather it states that the class of general recursive functions has the same extension as the class of effectively computable functions; and the latter class has its own independent intuitive meaning. Thus, there is no vicious circle implicit in Church's Thesis (MENDELSON, 1963, 203).

Moschovakis (1968, 471) também faz um comentário sobre o artigo de Péter. De acordo com ele, no artigo haveria uma confusão entre duas noções distintas, a de "demonstração construtiva" e a de "função computável". A maior parte das sentenças da matemática informal tem sentido para uma diversidade de matemáticos, apesar de que a maneira de compreendê-las está relacionada às bases filosóficas assumidas por cada um. Assim, para um intuicionista, a tese de Church será convincente apenas se ela implicar que o caráter computável de uma determinada função envolve uma demonstração construtiva de que ela é recursiva geral, a qual testemunhará a existência de um sistema de equações que a calcula. Já para um clássico, uma demonstração indireta de recursividade geral envolvendo o princípio do terceiro excluído seria o suficiente para atestar a computabilidade de uma função.

O mesmo autor ainda acrescenta que é de se esperar uma hesitação da parte dos intuicionistas na aceitação da tese de Church, pois além deles terem uma compreensão bastante apurada sobre o que consiste ser computável, a tese demandaria algo bastante forte, a saber:

> [A]ny proof that a proposed algorithm of any kind will always terminate and produce the values of a function will actually yield a set of equations from which the values of the same function can be computed in a canonical way (MOSCHOVAKIS, 1968, 472).

Moschovakis conclui dizendo que, apesar de acreditar que a interpretação intuicionista da tese de Church seja a mais relevante (além de considerá-la verdadeira –

neste caso se opondo à visão de Péter, que a considera circular), ele reconhece que a interpretação clássica também faz sentido.

Aqui nos concentramos nas críticas de Péter e nas reações que daí se originaram. Contudo, é válido deixar registrado que Heyting (1966) também fez o mesmo tipo de crítica concernindo o sentido fraco da tese de Church, ressaltando que, se a demonstração que estabelece que uma determinada função é recursiva geral não for construtiva, não seria legítimo, ao menos a partir de um ponto de vista intuicionista, considerá-la computável.

Tal questão não é desconhecida de Church (1936), que na nota 10 do seu artigo diz que devemos considerar "the existential quantifier which appears in our definition of a set of recursion equations in a constructive sense", tampouco é desconhecida de Kleene (1974, 319): "we should not claim that a function is effectively calculable on the ground that it has been shown to be general recursive, unless the demonstration that it is general recursive is effective". Contudo, nenhum deles parece se dar conta da circularidade aí envolvida[11], sobretudo Kleene, que utiliza o termo "efetivo" tanto para se referir às funções definidas como recursivas gerais, quanto para se referir a como deve ser uma demonstração que estabelece que uma certa função é recursiva geral.

3.3 Extensão de um algoritmo

A seguir, analisaremos, por meio de alguns exemplos, em que medida algumas das críticas dos construtivistas à tese de Church se fundamentam na recusa de se aceitar uma concepção meramente extensional de algoritmo.

Rogers (1967, 9) argumenta que devemos fazer uma distinção entre um algoritmo e uma função computável por um algoritmo, que são funções cuja atribuição de valor a seus argumentos pode ser executada mecanicamente. Nesses termos, funções computáveis são extensões de algoritmos, de modo que uma mesma função pode ser descrita por algoritmos diferentes. Consideremos então as funções g e g' abaixo:

Exemplo 3.3.1.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se uma sequência consecutiva de } \textit{pelo menos } x \text{ dígitos 5} \\ & \quad \text{ocorre na expansão decimal de } \pi; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

[11] Para obter a noção que irá definir o que é um método efetivo, pressupõe-se a noção de método efetivo.

Exemplo 3.3.2.

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se uma sequência consecutiva de } \textit{exatamente } x \text{ dígitos 5} \\ & \text{ocorre na expansão decimal de } \pi; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desse modo, distinguindo um algoritmo da sua extensão, a função g é considerada computável, pois ela necessariamente deve estar inclusa na lista abaixo, composta apenas por funções que podem ser especificadas por um algoritmo[12]:

$h(x) = 1$ para todo x
$h_0(x) = 1$ se $x = 0$; para todos os outros x, $h_0(x) = 0$
$h_1(x) = 1$ se $x = 0$ ou 1; para todos os outros x, $h_1(x) = 0$
$h_2(x) = 1$ se $x = 0$, 1, ou 2; para todos os outros x, $h_2(x) = 0$
$\vdots$
$h_k(x) = 1$ se $x = 0, 1, 2, ...,$ ou k; para todos os outros x, $h_k(x) = 0$
$\vdots$

Se existem sequências arbitrariamente longas de dígitos 5 na expansão decimal de π, então $g = h$; não havendo nenhum dígito 5 na expansão de π, $g = h_0$; e se, de modo geral, existe uma sequência de no máximo k dígitos 5 na expansão de π, $g = h_k$. Em outras palavras, ou g é uma função constante cujo valor para qualquer argumento é 1, ou existe um certo k, tal que:

$$\begin{aligned} & g(x) = 1, \text{ para } x \leq k, \\ \text{e} \quad & g(x) = 0, \text{ para } k < x. \end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que, para cada um desses dois casos – da função constante e de $g(x)$ para um certo k – existe a derivação de uma função recursiva geral, apesar de não sabermos qual derivação lhe corresponde, ou qual algoritmo a tem como extensão.

Quanto à função g', não se conhece nenhum algoritmo que a compute, e como a expansão decimal de π é imprevisível, não podemos apresentar uma lista exaustiva de funções computáveis na qual g' se encontraria.

O que podemos concluir desse exemplo é que um intuicionista não aceitaria, pelo menos nos termos da argumentação acima, que g é uma função computável. A justificação da existência de um procedimento efetivo para computar g se baseou num princípio clássico rejeitado pelos intuicionistas, a saber, a conclusão de que

[12] Cf. (CARNIELLI; EPSTEIN, 2009, 102).

algo existe a partir da demonstração da impossibilidade de que esse algo não possa existir, i.e.:

$$\sim \forall x \sim P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

Na mesma direção, encontramos este exemplo em Enderton (2010, 5):

Exemplo 3.3.3.

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se a conjectura de Goldbach for verdadeira;} \\ 0, & \text{se a conjectura de Goldbach for falsa.} \end{cases}$$

Ele alega que F é uma função total constante, e por essa razão é efetivamente calculável. O fato dela ser constante se justifica pelo emprego do princípio clássico do terceiro excluído: existe ou não existe um número par que é contraexemplo da conjectura. Contudo, ainda que F seja efetivamente calculável, não sabemos qual procedimento (algoritmo) calcula os seus argumentos, o que só retorna 1 como valor, ou o que só retorna 0. Na mesma direção do que já apontamos acima, Enderton afirma que a propriedade de calculabilidade efetiva é extensional, ou seja, há várias maneiras de se descrever F, de lhe atribuir um algoritmo, sendo que o fato de não sabermos qual algoritmo lhe corresponde não interfere na sua propriedade de ser efetivamente calculável:

> For a function to be effectively calculable, there must *exist* (in the mathematical sense) an effective procedure for computing it. That is not the same as saying that you hold such a procedure in your hand. If, in the year 2083, some creature in the universe proves (or refutes) Goldbach's conjecture, then it does *not* mean that F will suddenly change from noncalculable to calculable. It was calculable all along (ENDERTON, 2010, 5, grifo do autor).

Para Bridges, exemplos como esse revelam consequências indesejáveis originárias do uso de princípios clássicos, uma vez que contrariam nossas práticas computacionais, onde o conhecimento de qual algoritmo descreve uma certa função computável é fundamental:

> What would happen to an employee who, in response to a request that he write software to perform a certain computation, presented his boss with two programs and the information that, although one of those programs performed the required computation, nobody could ever tell which one?
> With classical logic, there seems to be no way to distinguish between functions that are computed by programs which we can pin down and those that are computable but for which there is no hope of our telling which of a range of programs actually performs the desired computation (BRIDGES, 2012b, viii-ix).

Imagine então um empregado que apresentasse uma lista infinita de funções computáveis e dissesse que o programa requerido denotaria alguma entre elas, como vimos no caso respectivo à função g.

Exemplos como as funções g e F acima seriam um contraexemplo da tese de Church? Enunciemos a tese nos seguintes termos:

Uma função f é computável se e somente se for uma função recursiva geral.

Uma maneira de falsificar a tese seria apresentar uma função considerada computável – i.e., cuja execução segue um procedimento algorítmico –, mas que não pudesse ser formalizada por nenhuma função equivalente às funções recursivas gerais. Se a tese tivesse sido enunciada propondo uma equivalência entre funções computáveis e *funções recursivas primitivas*, um contraexemplo seria o *exponencial generalizado de Ackermann*, uma função para a qual se tem um algoritmo, mas que não pode ser derivada como uma função recursiva primitiva (ROGERS, 1967, 8). Por essa razão, a tese de Church envolve a noção formal mais abrangente de função recursiva geral.

Voltemos ao nosso exemplo. É conveniente que separemos as duas partes do bicondicional presente na tese:

(1) Se f for uma função computável, então é recursiva geral.

(2) Se f for uma função recursiva geral, então é computável.

Se quisermos considerar g ou F um contraexemplo da tese por meio da falsificação de (1), devemos, antes de mais nada, apresentar quais os algoritmos que as computam, pois, do contrário, não as consideraríamos computáveis (intuitivamente falando). Desde um ponto de vista intuicionista, g e F não são computáveis porque não temos condições de indicar um algoritmo que as execute, logo, elas sequer podem ser consideradas candidatas a um contraexemplo de (1).

Desde um ponto de vista clássico, g ou F são computáveis, contudo não são contraexemplos de (1), dado que podemos demonstrar (classicamente) que existem funções recursivas gerais que as calculam, apesar de não podermos indicar qual é a função recursiva geral em questão. Para que g ou F fossem um contraexemplo de (1), teríamos que mudar nosso ponto de vista clássico ao passar do antecedente para o consequente, ou seja, assumiríamos tais funções como computáveis, mas acabaríamos por dizer que elas não são recursivas gerais, já que não teríamos como indicar *quais* funções recursivas gerais as executam.

Considerando que a personalidade de um clássico é mais duradoura do que a passagem de um antecedente a um consequente, analisemos (2). Um intuicionista não consideraria g ou F recursivas gerais, justamente porque (ainda, talvez) não se demonstrou a existência[13] de uma função recursiva geral que calcule alguma dessas funções, logo, por essa via não temos condições de falsificar (2). Por outro lado, um clássico diria que g ou F são recursivas gerais, argumentando à sua maneira sobre a existência de funções recursivas gerais que as calculam, como vimos na seção anterior. A partir daí, vemos facilmente que as funções apresentadas pelo clássico como candidatas à computação de g ou F não contrariam a nossa noção intuitiva do que consideramos como computável.

Não obstante, alguém por fora da discussão "clássico versus intuicionista" poderia simplesmente alegar: "ora, g ou F não me parecem de modo algum funções que poderíamos chamar de computáveis, e se alguém me disser que existe uma função recursiva geral que compute alguma delas, posicionar-me-ia de maneira bastante suspeita a respeito da existência dessa função". O que temos aqui não é uma refutação da tese de Church no sentido de que possa haver uma função recursiva geral para algo que não consideramos computável, mas uma suspeita a como um clássico concebe a existência de tal função. Nesse sentido, podemos dizer que a tese de Church não está sendo refutada, pelo contrário, ela está sendo utilizada para demonstrar consequências contraintuitivas do pensamento clássico.

Quando se fala, por exemplo, que todas as funções executáveis por uma máquina de Turing são computáveis, o que se pretende dizer é que qualquer tabela de instrução que constitui uma máquina de Turing pode vir a ser referida como a extensão de algum algoritmo, ou seja, trata-se de uma questão puramente extensional, não entra em consideração o *sentido* que uma determinada tabela pode ter – se ela está somando números, ou se os valores de saída representam os valores de verdade de uma certa sentença, por exemplo. É interessante ressaltar que as máquinas de Turing são recursivamente enumeráveis, ou seja, podemos produzir mecanicamente infinitas máquinas de Turing, contudo, *conhecer o sentido* dessas máquinas – o que elas estão computando –, trata-se de uma outra questão. Numa palavra, após definir o que é uma máquina de Turing, podemos dizer: qualquer máquina que venha a ser construída de acordo com essa definição é computável, pois será constituída por uma tabela de instruções que podem ser executadas mecanicamente; ou então: qualquer algoritmo que venha a ter alguma dessas máquinas como extensão terá o seu caráter algorítmico reafirmado.

Argumentos contra a tese de Church que procuram sustentar a ideia de que a classe de funções recursivas gerais é maior do que a classe de funções computáveis, i.e., de que existem funções recursivas gerais não computáveis, ultrapassam o âmbito da compreensão extensional descrita acima. Não poder identificar qual função recursiva geral (ou qual tabela de instruções de uma máquina de Turing) executa

[13]Existencial compreendido intuicionisticamente, não custa lembrar.

uma determinada tarefa demandada pelo sentido colocado por um método ou problema de decisão em nada afeta o caráter computável das funções recursivas gerais. A questão é: diante de qualquer função recursiva geral que nos pudesse ser apresentada, pela maneira como seria construída notaríamos que ela não contrariaria nossas intuições básicas que ratificam o que legitimamos como computável. Neste caso, estamos nos referindo à própria função recursiva geral, não à sua descrição.

Entendemos que é estranho dizer que F é computável (exemplo 3.3.3), algo bem mais contraintuitivo do que dizer que ela não o é. No entanto, o fato de atribuir um caráter computável a F em nada tem a ver com a tese de Church, pois esta não diz respeito à relação entre a extensão de uma função e a sua descrição. A tese de Church no sentido *fraco* diz apenas o seguinte: apresentada uma função recursiva geral (*não a sua descrição*), não temos razões para duvidar de seu caráter computável. Agora, que F (uma mera descrição) seja dita computável pelo fato de existir, apesar de não termos condições de identificar, uma função recursiva geral que a compute é um problema epistemológico relacionado à aceitação do princípio de bivalência, não um problema que diga respeito à tese de Church.

3.4 Kripke

Consideraremos agora um argumento atribuído a Kripke[14], em que, a partir da teoria do Sujeito Criador, de Brouwer, constrói-se uma função computável que não é recursiva geral[15].

Seja f uma função definida da seguinte maneira, onde K é um conjunto recursivamente enumerável, mas não recursivo (como, por exemplo, o conjunto de teoremas de uma lógica de primeira ordem não monádica):

Exemplo 3.4.1.

$$f(n,m) = \begin{cases} 0, \text{ se} & \Box_m n \notin K; \\ 1, \text{ se não é o caso que} & \Box_m n \notin K. \end{cases}$$

A notação $\Box_m p$, concebida com o intuito de formalizar alguns dos princípios da filosofia da matemática de Brouwer, foi formulada por Kreisel e Kripke, que quer

[14]Aparentemente, Kripke nunca publicou esse contraexemplo. Podemos encontrá-lo no artigo *An interpretation of intuitionistic analysis* (1978), de van Dalen, contudo, por conter erros tipográficos, que foram corrigidos na apresentação exposta no artigo *The foundations of mathematics as a study of life: An effective but nonrecursive function* (2008), de van Atten, seguimos este último.

[15]Voltaremos a esse argumento na seção seguinte, analisando algumas críticas feitas por Sundholm.

dizer "O matemático ideal obteve no momento m uma demonstração da proposição p". Assim, podemos formular os seguintes princípios:

1. A proposição matemática p é verdadeira se e somente se foi demonstrada em algum momento pelo matemático ideal:

$$p \leftrightarrow \exists m \Box_m p$$

2. O matemático ideal não esquece o que ele demonstrou (monotonicidade):

$$\forall m \forall n (\Box_m p \rightarrow \Box_{m+n} p)$$

3. Em qualquer momento o matemático ideal é capaz de decidir se uma proposição p foi demonstrada ou não:

$$\forall m (\Box_m p \vee \sim \Box_m p)$$

van Atten analisa a equivalência expressa pelo princípio (1) em suas duas direções. A implicação

$$p \rightarrow \exists m \Box_m p$$

se justifica pelo fato de que, intuicionisticamente, uma proposição só é verdadeira a partir do momento em que pode ser demonstrada. E como uma demonstração se dá por meio de uma experiência matemática – a qual não pode ocorrer fora do fluxo temporal – vivida pelo matemático ideal, este pode construir um número m a fim de indicar o momento em que essa experiência se passou.

Já a implicação

$$\exists m \Box_m p \rightarrow p$$

é justificada pelo fato do matemático ideal não cometer erros, ou seja, a sua experiência de uma demonstração de p é condição suficiente para a sua verdade.

Elucidados esses pontos, podemos agora ver que, juntamente com a definição da função f, segue-se que:

$$n \notin K \leftrightarrow \exists m f(n,m) = 0$$

Assumindo a verdade de $\exists m f(n,m) = 0$ para algum n, temos, pela definição de f, que o matemático ideal possui uma demonstração de $n \notin K$ no momento m, i.e., $n \notin K$ é verdadeira (as demonstrações do matemático ideal são sempre corretas). Por outro lado, assumindo a verdade de $n \notin K$, intuicionisticamente isso quer dizer que o matemático ideal possui a sua demonstração, a qual, de acordo com (1) acima, foi experienciada em algum momento m, logo $\exists m f(n,m) = 0$.

Para o matemático ideal, a função f é computável, dado que, de acordo com (3), ele pode decidir, para qualquer momento dado, se uma proposição foi demonstrada ou não, seja consultado sua memória (monotônica, (2)), se m situar-se no passado, seja conduzindo sua atividade matemática até m, caso este esteja situado no futuro. Contudo, assumindo que f seja uma função recursiva, obtemos uma contradição, vejamos. Um teorema da teoria da recursão, válido tanto classicamente como intuicionisticamente, diz que, se uma relação $R(x,y)$ for recursiva, então o conjunto S definido como $S = \{x|\exists y Rxy\}$ é recursivamente enumerável. Assim, considerando $f(x,y) = 0$ uma relação recursiva, e levando em conta o fato de que $n \notin K \leftrightarrow \exists m f(n,m) = 0$, temos que o complemento do conjunto K é recursivamente enumerável. Ademais, um outro teorema da teoria da recurção afirma que um conjunto S é recursivo se tanto S como o seu complemento forem recursivamente enumeráveis. Como, por hipótese, K é recursivamente enumerável, segue-se que K é recursivo. Todavia, isso nos coloca em contradição com a hipótese de que K não é recursivo, ou seja, f é computável mas não recursiva, pois se a assumimos como tal, somos levados a uma contradição.

3.5 Sundholm

De acordo com a concepção clássica e platonista de função, uma função definida sobre $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é concebida como um conjunto F de pares ordenados $\langle n,m \rangle$, onde não há ms distintos para um mesmo n, i.e., se tivermos os pares $\langle n,m \rangle$ e $\langle n,m' \rangle$, então $m = m'$. Tal conjunto ocorre num nível bem baixo da hierarquia cumulativa de conjuntos (cf. seção 4.1.1), e apenas ordinais finitos de von Neumann – os elementos de $\cup\{\mathscr{V}_n\}$ – ocorrem na primeira posição do par ordenado. Diante disso, Sundholm (2014, 2) chama a atenção para o sentido das palavras *calculate*, *compute* e *reckon*, dizendo-nos que em todas elas se pressupõe um suporte sobre o qual calculamos (computamos, contamos, etc.), sejam dedos, pedras, numerais ou sinais. Contudo, concebendo uma função por meio do conjunto F acima, um objeto situado na hierarquia cumulativa e independente de qualquer notação, a intuição básica de que calculamos sobre algo é perdida.

Consideremos mais uma vez o predicado T de Kleene (cf. seção 3.2), expresso no interior da sentença abaixo:

$$(\exists e : \mathbb{N})(\forall k : \mathbb{N})(\exists n : \mathbb{N})(T(e,k,n) \ \& \ \langle k, U(n) \rangle \in F).$$

Nos três primeiros parênteses, encontramos os quantificadores e a explicitação de seus respectivos domínios; do lado esquerdo da conjunção se encontra o predicado T, com sua interpretação usual; do lado direito, a forma dos pares ordenados pertencentes a F, cujo primeiro elemento consiste no argumento ao qual a máquina M_e se aplica, e o segundo consiste no valor resultante dessa aplicação quando o predicado T é verdadeiro. Lendo essa sentença a partir de uma perspectiva clássica, a sua verdade apenas diz que na ontologia formada pela hierarquia cumulativa de conjuntos existe um número natural e com certas propriedades. Neste caso, nada é dito a respeito da calculabilidade da função cuja extensão seria F, desse modo:

> For calculability to be guaranteed the calculating agent has to *know* that [the sentence] is true, and also understand the codings involved in order to reconstruct the algorithm from the Kleene-code e. Clearly, not just the function graph (extensionally conceived) is relevant for computability: the way in which the function is actually presented to us plays a decisive role here (SUNDHOLM, 2014, 2, grifo do autor).

Saber que a sentença acima é verdadeira envolve apresentar uma máquina de Turing M_e cujo comportamento é descrito por e. Neste contexto, não seria válida uma demonstração (clássica) indireta da existência de e, pois é imprescindível termos em mãos o procedimento que calcula os argumentos k, que consiste na descrição de um método efetivo que toma uma certa expressão e a transforma por meio de uma sequência discreta de passos.

Se nos atermos apenas ao aspecto extensional de uma função, distanciamo-nos da noção de calculabilidade entendida como um método de operar sobre algo, pois poderíamos, como o faz Enderton (2010, 5) ao se referir à função envolvendo a conjectura de Goldbach, expressa no exemplo 3.3.3 acima, ignorar qual o procedimento que calcula seus valores e ainda assim considerá-la calculável. Para Sundholm (2014, 2), por outro lado, uma função como aquela (se ela for uma função – como ele enfatiza) não pode ser valorada hoje: "we have no way of reckoning out a value for, say, [$F(14)$], or indeed for any other argument. The values of a function, when calculable, can perhaps be calculated by means of a certain uniform program or procedure." Assim, enquanto na concepção clássica a descrição do precedimento que calcula os valores de uma função consiste apenas num aspecto linguístico acessório da noção de calculabilidade, na concepção construtivista, é uma característica fundamental.

A citação acima, ao se referir ao que garante a calculabilidade de uma função, menciona um agente calculador que tem conhecimento do algoritmo que conduz a valoração dos argumentos. No entanto, isso não quer dizer que a condição de calculável pressuponha a viabilidade de uma execução prática do algoritmo por parte de um agente, trata-se apenas de uma possibilidade em princípio. Há cálculos que, de um ponto de vista prático, podem demandar recursos que extrapolam os limites da física, mas nem por isso deixam de ser um método efetivo de valoração – caso houvesse recursos suficientes, o cálculo seria levado a cabo. O mais importante a ser compreendido nesse caso diz respeito à questão de *conhecer* o algorítimo. Tanto para um construtivista quanto para um clássico uma função só pode ser considerada calculável se a sua operação é caracterizável por um algoritmo. O que os coloca numa posição divergente está relacionado a como associar a função que se diz calculável ao algoritmo que a define como tal: para um clássico considerar uma função calculável, basta demonstrar que existe um algoritmo que a calcula, mesmo que não tenhamos condições de apresentá-lo. Consequentemente, pode acontecer, como na função F, de um clássico não saber, dado qualquer argumento, como proceder (ainda que em princípio) com a sua valoração, pois o que garante a calculabilidade de F não inclui a posse de um algoritmo, mas apenas uma demonstração indireta de sua existência. Tal condição não é tolerável por um construtivista, por esse motivo se fala de um agente calculador, visando salientar o fato de que ter um algoritmo em mãos, i.e., conhecê-lo, é imprescindível para a noção de calculabilidade construtiva:

> For the Platonist, calculability is, as we already said, 'extensional', and pertains to the function as a mathematical *object*, but in no way as to how, if at all, that object is epistemically given to mathematical agents. A constructivist mathematician, on the other hand, will insist on the algorithm being *known* to define a function, and hence, at least in principle, possible to execute (SUNDHOLM, 2014, 4, grifo do autor).

No contexto do construtivismo, considerando a noção de aplicação como primitiva, dizer que f é uma função de α a β, i.e., sobre $\alpha \to \beta$, significa que podemos aplicar f a qualquer argumento $a \in \alpha$ e obter, por meio de um cálculo que não ignoramos, o valor $f(a) \in \beta$. Adentrando aqui no terreno da teoria intuicionista de tipos (TIT), de Martin-Löf (1984), isso nos dá a explicação do sentido (*meaning explanation*) de um juízo da forma $f : \alpha \to \beta$. Desse modo, *conhecendo* esse juízo, a inferência abaixo é válida por "estipulação"[16]:

$$\frac{a \in \alpha}{f(a) \in \beta}$$

No parágrafo anterior dissemos que podemos aplicar f a *qualquer* argumento $a \in \alpha$, o que nos compromete com uma noção de *função total*. De fato, de acordo com Sundholm (2014, 3), no construtivismo uma função deve ser definida para todos os elementos do seu domínio, o que impõe uma certa compreensão paradoxal à noção de *função parcial*, uma vez que uma função que não se aplica a certos elementos do domínio não seria exatamente uma função. Nesse sentido, "parcial" não seria uma propriedade específica a algumas funções, mas uma caracterização que nos colocaria de fora do próprio terreno das funções. Sundholm alerta então para o

[16](SUNDHOLM, 2014, 3).

fato de que a expressão *função recursiva parcial*, introduzida por Kleene, pode ser enganosa. Se a lemos como "função parcial que é recursiva", deparamo-nos com o problema de falar de uma função não definida para todos os seus argumentos, por outro lado, se a lemos como "função que é parcialmente recursiva", isso pode dar a entender que, apesar de falarmos de uma função total, aconteceria, por algum motivo, dela não ser totalmente recursiva. O melhor então seria falarmos sobre "relações funcionais recursivamente enumeráveis, sejam elas totais ou não"[17].

Voltando à questão sobre a divergência entre um clássico e um construtivista a respeito da noção de calculabilidade, temos que no caso dos primeiros, os quais podemos caracterizá-los como platonistas realistas (para os quais objetos abstratos existem independentemente de serem conhecidos ou não), a condição de um ato epistêmico de conhecimento estar correto se deve a um objeto na ontologia; quanto aos segundos, o próprio ato de conhecer produz o seu objeto de conhecimento[18]. Dadas essas duas concepções divergentes, Sundholm (2014, 5) observa que tanto no contexto do construtivismo como no do não construtivismo podemos encontrar, por exemplo, a função $+$, definida por meio das equações recursivas usuais. No entanto, ele pergunta, trata-se da *mesma* função, só que em contextos diferentes? Haveria uma parte em comum partilhada entre os diferentes contextos, à qual a função $+$ pertenceria? Ou haveria um contexto mais amplo ("possivelmente incoerente") que abrangesse igualmente entidades construtivas e não construtivas? Sua resposta consiste em favorecer uma concepção que considera duas funções distintas, $+_{con}$, $+_{clas}$, cada qual pertencente ao seu respectivo contexto. Nesse caso, para um platonista, a função $+_{clas}$, de maneira independente de suas equações recursivas, corresponderia a um conjunto de ênuplas ordenadas, cabendo à ontologia, à medida que é descrita corretamente, ratificar a validade dessas equações. Sundholm dá a essa concepção o nome de descritivismo ontológico platônico, em que questões sobre sentido, verdade e conhecimento são fundamentadas por uma via realista.

Por outro lado, no contexto do construtivismo, $+_{con}$ não existiria sem a sua definição, neste caso, dada pelas equações recursivas. E há aqui um aspecto temporal importante, pois não teríamos a função $+_{con}$ ainda que fosse logicamente possível que a sua definição tivesse sido obtida num momento anterior ao do seu surgimento efetivo[19]. Além disso, se considerássemos o construtivismo a partir do intuicionismo de Brouwer, estaríamos igualmente no âmbito de um descritivismo ontológico, ou seja, em última instância, no que concerne a questões de sentido, verdade

[17] "recursively enumerable functional relations, whether total or not" (SUNDHOLM, 2014, 3).

[18] "The Platonist realist reduces the rightness of the epistemic act of knowledge to an object in the ontology, whereas for the constructivist the act is *sui generis* and yields the object of knowledge" (SUNDHOLM, 2014, 4).

[19] (SUNDHOLM, 2014, 5).

e conhecimento, a palavra final é da ontologia, contudo o que teríamos seria uma ontologia idealista, constituída a partir de construções mentais:

> Both intuitionism and platonism therefore are versions of ontological descriptivism. In intuitionism, the ontology is idealist, in the sense that its objects are mental constructions, whereas in platonism the ontology is realist, in the sense that the objects are not of our making but self-subsistent (SUNDHOLM; van ATTEN, 2008, 71).

Em todo caso, não aparenta haver um lugar neutro a partir do qual tanto um clássico como um construtivista poderiam falar de uma mesma função $+$, o que caracterizaria o que Quine (1986, 81) denominou de *dilema do lógico desviante* (*deviant logician's predicament*): "when he [the deviant logician] tries to change the doctrine he only changes the subject". Ao se optar por um determinado contexto, diferentes sentidos são atribuídos ao vocabulário subjacente (que, sem as devidas indicações, como os subíndices *clas* e *con*, é comumente partilhado), consequentemente, cada contexto será dotado de uma interpretação distinta, ou seja, os contextos não farão referência aos *mesmos* objetos. É nesse sentido que Sundholm (2014, 5) diz que "[n]either [the classical or the constructive mathematician] would have access to the object of the other". Assim, não havendo um contexto neutro, é preciso ao menos deixar claro o que se entende pelo contexto assumido.

Elucidemos então o que entendemos por uma função construtiva. Para tanto, adotaremos o ponto de vista da TIT, cujo sistema formal procura legitimar-se filosoficamente. Na seção seguinte faremos uma apresentação sucinta sobre os elementos básico da TIT, e a seguir, na seção subsequente, trataremos especificamente da noção de função construtiva compreendida a partir daí.

3.5.1 Proposição, juízo, verdade e outras noções

De acordo com o construtivismo matemático, não podemos legitimamente garantir que algo existe se não oferecermos explicitamente os meios que produzam (ao menos em princípio) um exemplar do que se alega existir. Em outras palavras, uma alegação de existência construtivamente válida envolve a explicitação dos meios de instanciação, os quais mostrarão como construir o objeto do qual se afirma a existência[20]. Na TIT, essa exigência se encontra na elucidação do sentido de um juízo da forma

$$\alpha \text{ existe.}$$

[20](SUNDHOLM, 2014, 7), ou como dizem Bridges e Palmgren (2018): "Constructive mathematics is distinguished from its traditional counterpart, classical mathematics, by the strict interpretation of the phrase 'there exists' as 'we can construct' ".

α é um tipo, seja por ser um tipo básico (como o tipo dos conjuntos[21]), introduzido diretamente pelo axioma

$$\alpha : \text{tipo},$$

seja por ter sido gerado pelas regras que se aplicam a esta forma de juízo, derivando novos tipos. Contudo, isso não garante a existência de α, para tanto é preciso explicitar como obter uma de suas instâncias, o que se dá por meio da demonstração de um juízo da forma $a : \alpha$. Tal forma de juízo ocorre como a conclusão de uma demonstração onde se constrói um objeto a do tipo α, que na TIT pode ser lido como um método que, quando executado, produz um objeto canônico de α. Compreendida essa forma de juízo, a inferência

$$\frac{a : \alpha}{\alpha \text{ existe}}$$

manifesta por si mesma a sua legitimidade, exprimindo a ideia construtivista de que para uma afirmação de existência é imprescindível a apresentação de um procedimento capaz de produzir instâncias do que se afirma existir[22]. Vale lembrar que a noção de existência aqui tratada – a existência de um tipo α – não é a mesma noção de existência proposicional, representada pelo quantificador $\exists$. Na ordem das razões, esta é posterior àquela. Se não houvesse tal distinção, a elucidação do sentido de existência incorreria num círculo vicioso[23].

Isso nos leva à distinção entre proposição e juízo, que por sua vez acarreta uma distinção entre duas noções de verdade, a de verdade de uma proposição e a de verdade de um juízo. Ao contrário do que ocorre no âmbito clássico, no intuicionismo uma proposição não é definida em termos de condições de verdade:

[21](MARTIN-LÖF, 1994, 91).

[22]A princípio, a elucidação do sentido de tais juízos pode dar espaço a uma certa ambiguidade, afinal, o que existe, o tipo α ou o objeto a que o instancia? Incorpora-se aqui, de certa forma, a noção fregiana de que predicações de existência são de segunda ordem, ou seja, não predicamos diretamente de um objeto (entidade impassível de ser insaturada) que ele existe, mas que o conceito sob o qual ele cai é instanciável. Além disso, na TIT, dado um tipo α qualquer, podemos formar o tipo de seus objetos, i.e., objetos(α), o que se exprime pela seguinte regra:

$$\frac{\alpha : \text{tipo}}{\text{objetos}(\alpha) : \text{tipo}.}$$

Assim, mais uma vez, para que possamos asserir o juízo objetos(α) existe, devemos ter condições de asserir a : objetos(α), o que é bastante natural, pois o que se diz é que um tipo constituído por objetos de um certo tipo só existe a partir do momento em que tais objetos possam ser gerados por um método. A conclusão da regra de inferência acima pode ser entendida como refletindo a noção de tipo de indivíduos, retratada por ι:tipo, da teoria simples de tipos de Church (cf. Martin-Löf (1994, 91)).

[23](SUNDHOLM, 2004, 404, n. 6).

> Classically, a proposition is nothing but a truth value, that is, an element of the set of truth values, whose two elements are the true and the false. Because of the difficulties of justifying the rules for forming propositions by means of quantification over infinite domains, when a proposition is understood as a truth value, this explanation is rejected by the intuitionists (MARTIN-LÖF, 1984, 11 (6)).

Baseando-se em Heyting e Kolmogorov, Martin-Löf (1984, 6 (4)) diz que uma das maneiras de conceber intuicionisticamente a noção de proposição é compreendê-la como a expressão de uma expectativa a ser realizada, ou como a expressão de um problema a ser resolvido, de maneira que compreendemos o sentido proposicional quando sabemos quais seriam as condições para realizar a expectativa expressa, ou, nos termos de Kolmogorov, quando sabemos quais seriam as condições para solucionar o problema expresso. Na TIT, isso é elucidado em termos da noção de prova, i.e., uma proposição A exprime as condições que nos permitem reconhecer a existência de uma prova a de A quando nos deparamos com ela:

> a proposition is defined by laying down what counts as a proof of the proposition,
> and that
> a proposition is true if it has a proof, that is, if a proof of it can be given (MARTIN-LÖF, 1984, 11 (6)).

Entendendo uma proposição em termos de condições de prova, podemos associar uma proposição A ao tipo *prova(A)*, habitado por objetos-prova que realizam as condições delimitadas por A. Tal tipo é compreendido em termos de como os objetos-prova canônicos de A podem ser formados e em termos de quando tais objetos são iguais. Isso nos permite a seguinte equação:

$$\text{A proposição } A \text{ é verdadeira} = prova(A) \text{ existe,}$$

onde a noção de existência deve ser lida intuicionisticamente: *prova(A)* existe se temos a posse de uma de suas instâncias, i.e., de um dos elementos que o habita. Dizendo de outra maneira, *asserir* a verdade de uma proposição pressupõe a posse de um objeto-prova que realiza as condições de prova delimitadas pela proposição[24].

Além de uma proposição ser aquilo sobre o qual atribuímos verdade ou falsidade, ela constitui o que combinamos por meio das constantes lógicas. Assim, a partir das proposições A e B, podemos formar, por exemplo, a proposição $A \wedge B$, que exprime a expectativa de obter um objeto-prova a de A e um objeto-prova b de B, i.e., tal proposição é verdadeira desde que tenhamos condições de obter um objeto-prova c que tenha ou se reduza à forma $< a, b >$, um par ordenado constituído pelos objetos-prova das respectivas proposições componentes da conjunção.

[24](MARTIN-LÖF, 1994, 94).

Entendidas as noções de proposição e de verdade de uma proposição, a noção de juízo se impõe de imediato. Uma proposição, por si só, não tem força assertiva, ela apenas veicula um conteúdo que pode ser verdadeiro ou falso, deixando a um juízo o papel de se comprometer com um desses valores de verdade. O esquema abaixo elucida esse ponto[25]:

$$\underbrace{\underbrace{A}_{\text{proposição}} \quad \overset{\vdots}{\text{é verdadeira}}}_{\text{juízo}}$$

Tal como há proposições de diferentes formas, obtidas a partir da articulação das diferentes constantes lógicas, a TIT também possui diferentes formas de juízo[26]. O sentido de um juízo é elucidado em termos do que devemos *conhecer* a fim de podermos justificá-lo, o que lhe atribui um caráter primordialmente epistêmico. No caso do juízo acima, para sabermos que *A é verdadeira* devemos conhecer uma prova que realiza a expectativa expressa por A, ou nos termos da associação apresentada cima, devemos conhecer um objeto-prova habitante do tipo $prova(A)$. Isso elucida, em termos proposicionais, a seguinte regra de inferência, análoga à que tratamos na ocasião em que falamos da existência de um tipo:

$$\frac{a : prova(A)}{A \text{ é } verdadeira}$$

Ou seja, a proposição A é verdadeira porque o conjunto $prova(A)$ existe, cuja existência se deve à posse de um de seus habitantes.

Mas como obtemos o conhecimento necessário para justificar um juízo? Por meio de uma demonstração, a qual consiste num encadeamento de raciocínio que conduz à evidência do juízo demonstrado, i.e., o juízo que figura como conclusão da demonstração. No que concerne a forma de juízo acima, o ato de demonstrar culmina na construção do objeto-prova cuja existência legitima a veracidade do juízo *A é verdadeira*. Para salientarmos a distinção da noção de verdade aqui envolvida, diremos que um juízo é correto, ao invés de dizermos que ele é verdadeiro. Assim, temos: uma proposição é verdadeira quando existe um objeto-prova que realiza a sua expectativa, ao passo que um juízo da forma *A é verdadeira* é correto se po-

[25](MARTIN-LÖF, 1987, 409).

[26]"[...] there are also hypothetical judgements, or consequences, general judgements, and hypothetico-general judgements, which all have their own characteristic forms. [...] as we cannot limit in advance our logical operations, we cannot limit in advance our forms of judgement" (MARTIN-LÖF, 1998b, 104). Para as diferentes formas de juízo da TIT, cf. (MARTIN-LÖF, 1984, 5 (3)).

demos conclui-lo de uma demonstração na qual se evidencia como construir um objeto-prova de A.

No esquema acima, que ilustra o envolvimento entre proposição e juízo, os pontos na vertical estão para uma demonstração. Enquanto uma proposição ocorre no interior de um juízo, este ocorre apenas como premissa ou conclusão de uma demonstração, e dado que esta se caracteriza por ser um ato de conhecimento, juízos, produtos do ato de demonstrar, são alegações de conhecimento[27]. Procurando então fixar uma terminologia, distinguiremos entre objeto-prova, proposição, verdade, demonstração, juízo e correção: uma proposição estabelece o que seria um objeto-prova que a tornaria verdadeira; um juízo assere que uma certa proposição é verdadeira, estando correto quando a demonstração que o tem como conclusão nos faz conhecer a construção do objeto-prova que realiza as condições delimitadas pela proposição cuja verdade é asserida pelo juízo em questão.

Além das noções acima, precisamos ainda elucidar as noções de consequência, implicação e inferência. Na TIT, essas noções assumem formas e justificações de validade ou de valores de verdade distintas. Uma *consequência* não é uma proposição, mas um juízo envolvendo proposições, onde a verdade de uma delas depende da suposição da verdade de outra (ou outras, no caso de um contexto abrangendo mais de uma hipótese). Como lemos em Sundholm (2012, 951), tal como obtemos a forma de juízo

$$A \text{ é verdadeira}$$

empregando a forma

$$\ldots \text{ é verdadeira}$$

à proposição A, a forma de juízo

$$B \text{ é verdadeira sob a condição de que } A \text{ é verdadeira}$$

é obtida empregando a forma de juízo *dependente*

$$\ldots \text{ é verdadeira sob a condição de que } A \text{ é verdadeira}$$

à proposição B. Na TIT, representamos essa forma de juízo por

$$B \text{ é verdadeira } [A \text{ é verdadeira}].$$

Deve-se notar que temos aqui um juízo hipotético, ou, como também podemos cha-

[27](MARTIN-LÖF, 1987, 417). Observe-se que um juízo básico, que pode ser introduzido diretamente como premissa numa derivação, é considerado como uma demonstração de si mesmo.

mar, uma consequência aberta[28], dado que a dependência da hipótese de que A é verdadeira não foi anulada por nenhuma regra inferencial pertinente ou por uma demonstração que evidenciasse a correção do juízo A *é verdadeira*.

Por outro lado, uma *implicação* é uma proposição de forma $A \to B$. Para que tenhamos o direito de asserir que uma proposição dessa forma é verdadeira, devemos ter condições de construir uma função, definida por abstração lambda, que transforma os objetos-prova de A em objetos-prova de B:

$$\dfrac{\begin{array}{c} x:A\ [x:A] \\ \vdots \\ b:B \end{array}}{\lambda x.b(x) : A \to B}$$

Assim, da hipótese de que a proposição A é verdadeira[29], que foi feita assumindo um objeto-prova x, construímos o objeto-prova b da proposição B. Dizemos que este objeto-prova é *dependente*, uma vez que ele depende da hipótese em aberto $[x : A]$. Dito de outro modo, a verdade da proposição B depende da verdade hipotética da proposição A, i.e., a esta altura, temos a relação de consequência vista acima. Contudo, pela operação de abstração-lambda propiciada pela regra de introdução da implicação, construímos o objeto-prova *independente* $\lambda x.b(x)$, em que $b(a)$ é um objeto-prova de B desde que a seja um objeto-prova de A. Nisso temos uma derivação fechada da verdade da implicação $A \to B$, já que a dependência da hipótese de que a proposição A é verdadeira foi anulada ao se introduzir a constante lógica da implicação e ao se fazer a abstração-lambda sobre o objeto-prova x.

Por último, temos a noção de inferência, caracterizada por um ato que permite obter um juízo a partir de outro(s). Note-se que se tratam de juízos, ou seja, a verdade das proposições constitutivas dos juízos que ocorrem como premissas é conhecível, e por meio do ato inferencial adquirimos um novo conhecimento: um juízo feito, que corresponde à conclusão da aplicação de uma inferência à(s) premissa(s). Isso concorda com a seguinte concepção fregiana:

An inference [...] is the pronouncement of a judgment made in accordance with logical

[28]Sundholm (2006, 631) fala também de uma “asserção categórica de um enunciado condicional”, mas preferimos, a fim de evitar confusões, reservar a expressão “asserção categórica” apenas aos casos em que não há nenhuma dependência a hipóteses.

[29]De fato, derivamos o juízo hipotético $x : A\ [x : A]$ – que diz que a verdade de A depende de que A seja verdadeira – da premissa A *é uma proposição* (cf. abaixo). Em dedução natural, exceto pelo fato de não haver juízos de formação, temos algo semelhante. A demonstração

$$A$$

consiste na demonstração da fórmula A a partir da hipótese A. Desde que A não seja um teorema, tal demonstração se encontra em aberto (cf. (THOMPSON, 1999, 9)).

> laws on the basis of previously passed judgments. Each of the premises is a determinate thought *recognized as true*; and in the conclusion, too, a determinate thought is recognized as true (FREGE, 1984, 318, grifo nosso).

Sundholm afirma que tal concepção inferencial, em que premissas e conclusões são compostas por juízos conhecíveis, não contraria o uso que se faz de hipóteses nas derivações em dedução natural:

> In general these derivations depend on open assumptions: accordingly the endfomula of a derivation-tree will express a proposition that is not true outright, but only dependently true, that is, true, *given* the truth of the propositions expressed by the assumption-formulae (SUNDHOLM, 2012, 946, grifo do autor).

Desse modo, num sistema de dedução natural uma das formas de juízo que constitui os passos inferenciais é esta:

$$C \text{ é verdadeira desde que } A_1, \ldots, A_n \text{ sejam verdadeiras,}$$

de maneira que uma inferência possa ser efetuada sobre juízos hipotéticos. Tratam-se de juízos porque a noção de conhecimento da verdade está envolvida, neste caso, conhecimento de uma relação condicional.

A esta altura, é importante ressaltarmos uma distinção que se dá entre dois modos de um juízo ocorrer numa derivação. Vejamos o exemplo abaixo:

$$\frac{A}{A \vee B}$$

A premissa A, a menos que seja um teorema, trata-se de um juízo hipotético, o juízo que afirma a verdade hipotética de A. Nesse sentido, a demonstração da conclusão $A \vee B$ se encontra em aberto. Há duas maneiras de fechar a demonstração: ou apresentamos uma demonstração da verdade da proposição A, de modo que tenhamos um juízo categórico; ou anulamos a dependência da hipótese de que A é verdadeira, por meio da regra de introdução da implicação[30]:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee B}}{A \rightarrow (A \vee B)}\ 1,\ i{\rightarrow}$$

Na TIT, onde a distinção entre juízo e proposição é explícita, e uma proposição pode ser entendida como o conjunto de seus objetos-prova, o juízo hipotético de que a proposição A é verdadeira se exprime pela seguinte forma

[30] O juízo A entre colchetes, com o respectivo índice, serve para sinalizar em qual passo inferencial a dependência subordinada ao juízo hipotético em questão foi anulada. Há também outras regras inferenciais que anulam hipóteses, como a de eliminação da disjunção, e a de eliminação do existencial.

$$x : A \ [x : A],$$

o qual diz que o conjunto de objetos-prova A não é vazio. Como se trata de uma hipótese, não temos a posse de um objeto-prova atual, por isso o emprego da variável x, que faz o papel de um nome indeterminado de um objeto-prova da proposição (entendida como um conjunto) A. Além disso, como na TIT temos, além das regras de introdução e eliminação, as regras de formação (de conjuntos, tipos, proposições), introduzimos tal variável x a partir da premissa de que A é um conjunto, pois para termos condições de enunciar a forma de juízo *A é um conjunto*, devemos saber como seus elementos canônicos são formados[31]. Assim, temos a seguinte regra de inferência:

$$\frac{A \textit{ é um conjunto}}{x : A \ [x : A]}$$

A respeito dela, Petersson e Smith fazem o seguinte esclarecimento:

> Applying the assumption rule on the premise A *set* gives us the judgement $x : A \ [x : A]$. We can see the variable x as a name of an indeterminate proof-element of the proposition A. One way to discharge the assumption $x : A$ is to find an element a in the set A and substitute it for all free occurrences of x (NORDSTRÖM; PETERSSON; SMITH, 1990, 37, adaptamos a notação à nossa)[32].

Como lemos na citação, uma maneira de eliminar a dependência subordinada à hipótese $[x : A]$ é encontrar um elemento a do conjunto A e fazer as substituições devidas nas ocorrências de x, o que corresponde a obter uma demonstração do juízo categórico $a : A$. Outra maneira da hipótese ser eliminada, como já afirmamos, seria pela regra de introdução da implicação.

De acordo com Sundholm e van Atten, ao empregarmos a variável x num juízo hipotético da forma $x : A \ [x : A]$, manifestando a intenção de assinalar que não temos a posse atual de um objeto-prova para a proposição A, isso não quer dizer que construções hipotéticas estão sendo introduzidas:

> In natural deduction, a derivation commonly begins with assuming that a proposition A is true. One then shows that under this assumption, certain propositions are also

[31](MARTIN-LÖF, 1984, 8 (5)).

[32]Estamos utilizando o símbolo ":" tanto para os casos em que exprimimos a condição de um objeto pertencer a um conjunto como para os casos de um elemento habitar um tipo, evitando assim usar o símbolo "∈" para exprimir a primeira condição. Desde que A seja um conjunto, podemos formar o tipo dos elementos de A, sendo que os elementos que habitam esse tipo são os mesmos objetos que pertencem a A, o que nos permite a seguinte definição (cf. (NORDSTRÖM; PETERSSON; SMITH, 1990, 139)):

$$a \in A \ \equiv \ a : El(A).$$

De fato, usando ":" para tudo, resta apenas ao contexto determinar se num juízo da forma $x : A$ a expressão A se trata de um tipo ou de um conjunto.

> true, for instance B, and may continue by concluding that the proposition $A \to B$ is true outright, discharging the assumption that A is true. In terms of proof constructions, it might seem (and it did to Griss) as if we had to start this derivation by introducing a hypothetical construction for A. This semblance, however, is spurious, as a careful analysis reveals that all constructions involved are actual (SUNDHOLM; van ATTEN, 2008, 69).

Os autores mencionados elucidam este ponto apelando a uma distinção entre duas noções de função – e aqui retornamos ao foco de nossa atenção. Numa delas, chamada por eles de *função no sentido antigo*, uma função consiste numa expressão analítica numa variável livre, ou numa expressão "insaturada"[33] – utilizando a terminologia fregiana –, em que a obtenção dos valores ocorre por meio de substituições das variáveis por argumentos adequados. Desse modo, a construção

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbb{N}\ \textit{é um conjunto}}{x : \mathbb{N}\ [x : \mathbb{N}]}}{Sx : \mathbb{N}\ [x : \mathbb{N}]}}{SSx : \mathbb{N}\ [x : \mathbb{N}]}$$

demonstra que $x+2 : \mathbb{N}$, desde que $x : \mathbb{N}$, i.e., a consequência aberta expressa pelo juízo hipotético $x+2 : \mathbb{N}\ [x : \mathbb{N}]$. Como Sundholm e van Atten (2008, 69) alegam, a função $x+2$ não é um objeto hipotético, a construção acima demonstra que ele goza de uma existência atual, apesar de dependente: "Functions in the old-fashioned sense are dependent objects of lowest level. Such dependent objects are not hypothetical, but enjoy a perfectly actual existence". Fala-se aqui de "nível inferior" em razão do contraste com a noção de função a seguir, em que há uma abstração sobre a variável onde se faz a substituição de argumentos.

A outra noção de função, que exprime a noção moderna de mapeamento, consiste num objeto independente, obtido por uma abstração lambda que elimina o caráter dependente da função que figura numa consequência aberta. A obtenção de seus valores se dá por meio do que no cálculo lambda chamamos de redução beta. Assim, utilizando o mesmo exemplo, podemos construir o objeto, também atual, $\lambda x.(x+2)$, que figura no juízo $\lambda x.(x+2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, derivado da conclusão acima por meio da regra de introdução da implicação.

Voltando à derivação de $A \to (A \vee B)$, analisada anteriormente, na TIT teríamos:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A\ \textit{é um conjunto}}{x : A\ [x : A]}}{i(x) : A \vee B\ [x : A]}\ i\vee}{\lambda x.i(x) : A \to (A \vee B)}\ i\to$$

[33](SUNDHOLM, 2012, 954).

Se A for um conjunto básico da teoria, como, por exemplo, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, cuja formação não depende de nenhuma premissa, temos uma derivação fechada. Se não o for, o juízo *A é um conjunto* é hipotético[34]:

$$\begin{array}{c} Conjunto\ tipo \\ \hline A : Conjunto\ [A : Conjunto] \\ \hline El(A)\ tipo\ [A : Conjunto] \\ \hline x : El(A)\ [A : Conjunto,\ x : El(A)], \end{array}$$

de maneira que o fechamento da derivação depende da eliminação das hipóteses $[A : Conjunto,\ x : El(A)]$. Cabe também mencionar que $\lambda x.i(x)$, construído pela regra de introdução da implicação, não é, desde que a derivação seja fechada, um nome indeterminado de um objeto-prova elemento de $A \rightarrow (A \vee B)$, tampouco um objeto-prova dependente, garantindo-nos assim o direito de fazer o juízo categórico

$$A \rightarrow (A \vee B)\ \textit{é verdadeira.}$$

E o mais notório é que $\lambda x.i(x)$, um objeto-prova atual, estabelece uma relação entre objetos-prova elementos de A e objetos-prova elementos de $A \vee B$, *mesmo que não tenhamos a posse atual de nenhum objeto-prova de A*. Em todo caso, vemos que o preceito fregiano se mantém: numa inferência sempre passamos do conhecimento da verdade de um juízo ao conhecimento da verdade de outro, apesar de que em alguns casos o que temos é um conhecimento hipotético da verdade.

Vale ressaltar que o que carateriza de modo determinante uma inferência hipotética não é a inferência em si, mas o fato de haver, nas premissas sobre as quais se aplica a regra inferencial, a ocorrência de ao menos uma proposição cuja verdade não é conhecida ou dependa de uma demonstração que garanta a correção do juízo que assere a sua verdade. Numa inferência aplicada a premissas compostas de proposições conhecidas ou aceitas como verdadeiras, a conclusão obtida, além de ser categórica, não precisa ser relativizada a termos condicionais que apontam o caráter em aberto da correção das premissas. A natureza hipotética de uma inferência repousa sobre o conhecimento que se tem das proposições que constituem as premissas envolvidas, não sobre a ligação que se estabelece entre estas e a conclusão. Assim, ainda que avancemos um argumento que recorra a uma forma condicional – "se... então..." –, isso não é suficiente para considerá-lo hipotético[35].

A proposição condicional *se a expansão decimal de* π *tivesse o segmento inicial* $3,123$*, então ela teria o segmento inicial* $3,12$, derivada por uma regra de introdu-

[34]Cf. (NORDSTRÖM; PETERSSON; SMITH, 1990, 142).

[35](RESCHER, 1964, 2).

ção da implicação, ilustra bem a condição de que, numa inferência hipotética, não precisamos ter a posse atual de um objeto-prova que garanta a verdade da proposição que ocorre na premissa. De fato, o antecedente *a expansão decimal de* π *tem o segmento inicial* $3,123$ é sabidamente falso, i.e., um contra-factual. Contudo, ainda assim podemos asserir categoricamente a implicação acima, pois podemos construir o seu objeto-prova, que consiste numa simples operação de remover dígitos de uma sequência. A existência atual desse objeto-prova poderia ser viabilizada pelo princípio de "transitividade da contenção de sequência de dígitos"[36].

Elucidados esses pontos, podemos ter uma melhor compreensão da citação seguinte:

> [T]he truth of an implicational proposition, which is reduced to the existence of a (canonical) introductory proof-object, and this in turn depends on the existence of a dependent proof-object for a hypothetical truth. This in turn is dependent upon the validity of a number of inferences, that is, mediate acts of judgment. Thus, the validity of the act of demonstration is here the linch-pin, and not that of propositional truth (SUNDHOLM, 1997, 211).

Lendo-a com vistas ao nosso exemplo: a verdade da proposição $A \to (A \vee B)$ depende da construção do objeto-prova $\lambda x.i(x)$, obtida por meio da aplicação da regra de introdução da implicação sobre o objeto-prova dependente $i(x)$, constitutivo do juízo hipotético $i(x) : A \vee B\ [x : A]$, que por sua vez depende dos outros juízos que lhe antecedem no encadeamento das inferências[37].

Feitas essas elucidações, examinemos agora especificamente a noção de função construtiva.

3.5.2 A noção construtiva de função

Tendo em conta que uma função acompanhada de um método (sob nossa posse) que instrui como manipular seus argumentos é uma função calculável, uma vez que, dado um argumento x qualquer, *sabemos* como processá-lo por meio da execução do método em questão, na matemática construtiva todas as funções são calculáveis. Isso porque, nesse contexto, a existência de uma função deve ser garantida pela instanciação explícita de um certo espaço funcional, representado por um tipo da

[36](van ATTEN, 2009b, 130).

[37]Não podemos esquecer que, sendo a derivação fechada, não diríamos "this in turn *depends* on the existence of a dependent proof-object for a hypothetical truth", dado que a regra de introdução da implicação torna $\lambda x.i(x)$ um objeto independente. De fato, para Martin-Löf (1994), quando temos condições de asserir um juízo categórico da forma $a : A$, tal juízo é analítico, ou seja, para evidenciarmos a sua correção não precisamos recorrer à demonstração que o tem como conclusão, ela se elucida pelo próprio sentido dos elementos que o compõem, isso porque, na teoria intuicionista monomórfica de tipos (cf. (MUNDIM, 2013, 87)), o objeto-prova não passaria de uma representação linear da demonstração que deriva o juízo em questão.

forma $\alpha \to \beta$. Nesse sentido, diríamos que uma função não se dissocia do método que calcula seus argumentos, ela é o próprio método, o que vai de encontro à noção clássica de função, em que podemos colocar a função de um lado e demonstrar (mesmo indiretamente) a existência de um método que calcularia seus argumentos.

Na TIT isso se dá de maneira explícita. Para demonstrarmos a existência de um espaço funcional $A \to B$, devemos realizar as condições impostas pelo sentido do conectivo $\to$. Sendo assim, é preciso construir um objeto c que se reduza à forma canônica $\lambda x.b(x)$, em que $b(x) : B$ está sob a condição de que $x : A$, i.e., uma função que toma argumentos em A e produz valores em B. Juntamente com a constante Ap, temos $\mathsf{Ap}(c,a)$, que consiste em aplicar c a um argumento $a : A$, dando-nos $\mathsf{Ap}(\lambda x.b(x),a)$, de acordo com a definição de c. A execução de Ap é definida pela regra de igualdade associada ao conectivo $\to$, que neste caso se assemelha a uma conversão-β, ou seja, $\mathsf{Ap}(\lambda x.b(x),a) = b[a/x] : B$. Em outras palavras, o que pretendemos dizer é que os critérios construtivos exigidos na demonstração do juízo $c : A \to B$ são suficientes para garantir que c é calculável, pois o demonstramos quando tomamos conhecimento de um método para computar os argumentos $x : A$.[38]

A partir disso, Sundholm (2014, 8) afirma que uma maneira de se obter uma função não admissível pelos critérios construtivistas seria fazendo uso de uma separação entre casos indecidíveis, como na função F do exemplo 3.3.3, que de modo geral pode ser retratada da seguinte maneira:

Exemplo 3.5.1.

$$F'(x) = \begin{cases} \mathbf{t}, \text{ se } A \text{ for verdadeira;} \\ \mathbf{f}, \text{ se } A \text{ for falsa;} \end{cases}$$

onde **t** e **f** são valores de verdade, habitantes do tipo **Bool**, e não se tem uma demonstração construtiva do juízo:

$$(A \vee \sim A) \textit{ é verdadeira.}$$

Um construtivista, além de não considerar F' computável, sequer a consideraria uma função bem definida[39]. Um clássico, por sua vez, pode considerar F' não computável, a exemplo da função g' (exemplo 3.3.2), que pode ser vista como um caso particular. De todo modo, ele não vê em tais exemplos nenhum caso de

[38](SUNDHOLM, 2014, 7).

[39]"I would say that $[F']$ has not been properly defined" (SUNDHOLM, 2014, 10).

função mal definida, de fato, sua posição se justifica pela aceitação irrestrita da validade do princípio do terceiro excluído: mesmo que não *saibamos* calcular nenhum argumento dado, seu valor já se encontra determinado, **t** ou **f**.

Ao comentar sobre as funções recursivas gerais totais, i.e., a menor classe de funções que inclui as funções iniciais – i.e., função sucessora, função constante e funções de projeção – e é fechada pelas operações de composição, recursão primitiva e busca mínima ilimitada regular[40], Sundholm (2014, 11) argumenta que para garantir a totalidade da função ϕ, a saber:

$$\phi(x) =_{def} \mu_y(\psi(x,y) = 0),$$

pressupõe-se a verdade da proposição

$$(\forall x : \mathbb{N})(\exists y : \mathbb{N})(\psi(x,y) = 0).$$

E em nota (n. 21), ele continua:

> The need for the *known* truth of the presupposition here constitutes another argument against classical mathematical practice: unless known, mere truth of the totality presupposition does not entitle one to introduce the minimalization in question as a function.

Trata-se aqui da mesma crítica que analisamos na seção 3.2. Como argumentamos naquela ocasião, um clássico não se incomoda com o fato de conviver com funções recursivas gerais *parciais*, ou seja, funções para as quais a pressuposição da verdade da proposição existencial acima não entra em questão. Nessa perspectiva, o que é mais relevante ao caráter computacional de uma função é a caracterização precisa do procedimento que constitui o seu modo de operar, não o resultado dessa operação, pois ela pode mesmo não ter fim. De fato, essa crítica ao clássico se funda na recusa de alguns matemáticos construtivistas[41] a darem legitimidade a funções parciais, algo que se exprime na seguinte característica da TIT:

> Each function definable in the theory is total and computable. Intuitionistic type theory is thus a typed functional programming language with the unusual property that all programs terminate (DYBJER; PALMGREN, 2016, §1).

[40] Uma função $g(x_1,...,x_n,y)$ é regular se e somente se for total e para todos os argumentos $x_1,...,x_n$ existe um y tal que $g(x_1,...,x_n,y) = 0$. Assim, dizemos que a operação μ de busca mínima ilimitada é regular quando $\mu_y g(x_1,...,x_n,y)$ retorna o menor y para o qual o valor da função regular g é 0. Em suma, tratando-se de funções recursivas gerais totais, a operação de busca mínima não pode envolver funções parciais.

[41] Aparentemente, para Sundholm (2014, 3), no contexto construtivista todas as funções devem ser totais: "Since we discuss issues in constructivism our functions are *total*" (grifo do autor). Mas em (DUMMETT, 2000, 276), lemos: "In intuitionistic mathematics, an operation or function, to be recognized as such, must be effective. [...] But it is not required that the operation or function be total, in the sense of being defined for every element of some species *D*".

Cabe ressaltar que podemos demonstrar, por um argumento de diagonalização, que as funções recursivas primitivas (que são totais) não compreendem todas as funções computáveis: enumerando todas as funções recursivas primitivas de apenas um argumento, obtemos uma lista $f_0, f_1, f_2, \ldots$. A partir daí, definimos a função diagonal $d(x) = f_x(x) + 1$. Contudo, por d ser diferente de todas as funções que se encontram na lista, ela não pode ser considerada recursiva primitiva, apesar de que a maneira como foi definida legitima o seu caráter computável. Por outro lado, não podemos enumerar efetivamente as funções recursivas gerais totais, pois não há um método efetivo capaz de decidir se uma função recursiva geral arbitrária é total ou não. Em outras palavras, a proposição acima, cuja verdade garantiria a regularidade da operação de busca mínima ilimitada, não é decidível. Não obstante, as funções recursivas gerais parciais (das quais as funções recursivas gerais totais são um subconjunto) são efetivamente enumeráveis, já que não precisamos distinguir entre elas as que são totais. A partir disso, temos:

1) O resultado (naturalmente esperado) de que nem todas as funções numéricas são computáveis. Sendo o conjunto destas últimas (i.e., todas as funções de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$) inumerável, ao passo que o conjunto das funções recursivas gerais parciais é efetivamente enumerável, segue-se, pela tese de Church, que há mais funções numéricas do que funções computáveis;

2) A indefinição do argumento sobre o qual a função da diagonalização se aplica, após a enumeração das funções recursivas gerais parciais, impede que surja uma contradição, assim, não se pode usar a diagonalização para dizer que a função computável da diagonal não se encontra na lista das funções recursivas gerais parciais. Quanto a este último ponto, Enderton explica:

> What if we try to "diagonalize out" of the class of general recursive functions, as we did for the primitive recursive functions? As will be argued later, we can again make a tidy list $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ of all the one-place general recursive partial functions. And we can define the diagonal function $d(x) = \phi_x(x) + 1$. But in this equation, $d(x)$ is undefined unless $\phi_x(x)$ is defined. The diagonal function d is indeed among the general recursive partial functions, and hence is ϕ_k for some k, but $d(k)$ must be undefined. No contradiction results[42] (ENDERTON, 2010, 20).

Sundholm (2014, 13), agora voltando-se ao sentido da tese de Church que diz que toda função recursiva[43] é computável, diz que estaríamos sendo apressados se, baseando-nos no fato de que as próprias equações recursivas constituiriam um algoritmo para o calculo da função recursiva em questão, a considerássemos trivial. Como temos dito, um intuicionista discordaria do caráter computável de uma função cuja única evidência de sua computabilidade repousa sobre uma demonstração

[42]Cf. também: (CARNIELLI; EPSTEIN, 2009, 174) e (SMITH, 2013, 294).

[43]Utilizaremos a expressão "função recursiva" para nos referir às funções recursivas gerais (i.e., funções recursivas primitivas mais a operação de busca mínima), sejam elas parciais ou totais.

não construtiva da existência de um algoritmo (ou uma equação recursiva) que representa a sua operação:

> When the demonstration that a function is general recursive is itself non-constructive, it may well be that the function will not be computable. [...] *a non-constructive demonstration that an algorithm (or code of algorithm) exists does not ensure calculability*. [...] the value of $F(14)$ cannot be calculated, whether by classical or constructive means. Hence, the classically defined function F, which is considered recursive by the classical mathematician, is not calculable (SUNDHOLM, 2014, 13, grifo do autor. Alteramos a notação para se adaptar à nossa).

Mas vale lembrar que não se trata aqui de aceitar como computável apenas as funções para as quais se pode demonstrar construtivamente que existe uma função recursiva que represente a sua operação, pois isso estaria de certo modo pressupondo a tese de Church, além de implicar que nossa intuição não seria suficiente para ratificar se uma dada função é computável ou não. Assim, um intuicionista não diria:

(a) "Só admito como computável as funções para as quais se tem uma demonstração construtiva da existência de um esquema de equações recursivas que a calcula,"

mas diria:

(b) "Não admito como computável uma função para a qual a única evidência de sua computabilidade é uma demonstração não construtiva de que existe um esquema de equações recursivas que a calcula."

Em todo caso, seria legítimo atribuir a um intuicionista a seguinte fala:

(c) "Só admito uma função como computável se a sua existência for devida a uma demonstração construtiva,"

desde que não se considere a noção de *demonstração construtiva* como restrita a noções formais.

Assim, não se trata de admitir o caráter computável de uma função em virtude de haver uma demonstração construtiva da existência de uma equação recursiva que calcula os seus valores – ou seja, não se pretende definir a noção de computável pela de recursividade. Uma função é computável simplesmente porque sua existência foi demonstrada construtivamente. No intuicionismo, todas as funções são computáveis, pois elas herdam essa propriedade do caráter construtivo das demonstrações que as produzem, como vimos na TIT.

É nesse sentido que Sundholm (2014, 14) questiona se a noção de função recursiva pode substituir a noção de função empregada no contexto do construtivismo. Como já comentamos (cf. seção 3.2), tal substituição implicaria um círculo vicioso, pois uma demonstração *construtiva* da existência de uma certa função recursiva pode pressupor a noção de método efetivo que seria definida pela própria função cuja existência estaria sendo demonstrada. Na TIT isso é particularmente claro. Nela, se quisermos empregar o operador de busca mínima para definirmos uma nova função, devemos primeiro derivar a verdade da proposição $(\forall x : \mathbb{N})(\exists y : \mathbb{N})(\psi(x,y) = 0)$, contudo, nesta derivação está envolvida o objeto-prova que consiste num *método efetivo* que mapeia um elemento arbitrário $x : \mathbb{N}$ à tripla $(y,(p,q))$, onde $y : \mathbb{N}$, p é o objeto-prova que evidencia a verdade de $\psi(x,y)$, e q o objeto-prova que evidencia a verdade de $(\psi(x,y) = 0)$. Ou seja, a menos que a noção de método efetivo seja primitiva, o argumento se torna circular.

3.5.3 Os axiomas do sujeito criador

Na seção 3.4 vimos um exemplo, baseado na teoria do sujeito criador e atribuído a Kripke, onde se apresenta uma função computável mas não recursiva, contrariando assim a tese de Church. Neste momento, a partir da elucidação das noções discutidas na seção anterior, propomos repensar os resultados daquela seção.

Por meio da noção de *sujeito criador*, cuja aparição podemos reportar à obra *Essentialy Negative Properties*, de 1948, Brouwer faz referência a um matemático ideal, o qual desenvolve sua atividade ao longo do tempo. Com esse artifício, as características da noção de verdade intuicionista são contempladas, uma vez que a verdade de uma proposição não é independente da atividade de tal matemático, que constrói a sua demonstração num determinado estágio do desenvolvimento do seu conhecimento.

No que concerne ao seu caráter abstrato, a noção de sujeito criador é análoga à noção teórica de computação, onde questões sobre performance e complexidade são desconsideradas em favor da de possibilidade em princípio. O sujeito criador, por exemplo, não enfrenta limitações de tempo e memória, além de que não comete erros em suas construções matemáticas:

> The mind of the ideal mathematician is like ours, but perfect; contingent limitations are abstracted from. For example, the idealization is made that any finite construction process can be completed. A large finite number such as 10^{10} then is accepted as a construction for this reason (van ATTEN, 2008, 42).

Empregando tal noção, Brouwer desenvolveu métodos para criar contraexemplos de proposições classicamente válidas, que ficaram conhecidos como *contra-exemplos fracos* e *contraexemplos fortes*. Os primeiros, apesar de não refutarem uma proposição classicamente válida, revelam que num dado momento não há condições para que possamos aceitá-la como demonstrada, pois o matemático ideal não teria evidência de sua verdade; quanto aos segundos, de fato se refuta um princípio clássico, como a demonstração de

$$\sim \forall x \in \mathbb{R}(\sim\sim x > 0 \ \rightarrow \ x > 0),$$

onde o princípio de eliminação da dupla negação é negado[44].

Consideremos então os axiomas que procuram formalizar a compreensão que Brouwer tinha do *sujeito criador*. Devemos tal axiomatização a Kripke e Kreisel, sendo posteriormente explorada de maneira sistemática por Myhill. De acordo com Sundholm (2014, 16), a teoria do sujeito criador ganhou impulso a partir da introdução, por Kreisel, da expressão

$$\Sigma \vdash_m A$$

à linguagem da análise intuicionista. Sendo $m : \mathbb{N}$, e estando a letra grega Σ para o *sujeito criador*, Kreisel (1967, 159) propõe a seguinte leitura dessa expressão: "o sujeito (pensante) possui evidência para asserir A no momento m"[45].

Nos axiomas abaixo, a expressão Σ, ao contrário do que vemos no artigo de Kreisel, não desempenha o papel de uma variável, e como sugere Sundholm (2014, 16), é melhor concebida se a lermos como sendo parte integrante do símbolo $\vdash$. Assim, temos:

(CS1) Para qualquer proposição A, $\Sigma \vdash_x A$ é uma função proposicional decidível de A, ou seja, $(\forall x : \mathbb{N})(\Sigma \vdash_x A \vee \ \sim \Sigma \vdash_x A)$;

(CS2) $(\forall x : \mathbb{N})(\forall y : \mathbb{N})(\Sigma \vdash_x A \ \rightarrow \ \Sigma \vdash_{x+y} A)$;

(CS3) $(\exists x : \mathbb{N})(\Sigma \vdash_x A) \leftrightarrow \ A$.

E considerando a contrapositiva da direção

(CS3)$'$ $A \ \rightarrow \ (\exists x : \mathbb{N})(\Sigma \vdash_x A)$

do axioma (CS3), Sundholm (2014, 16) também apresenta o axioma que ficou conhecido como o *axioma da caridade cristã*:

[44]Cf. (BROUWER, 1975f).

[45][T]he (thinking) subject has evidence for asserting A at time m.

(CC) $\sim (\exists x : \mathbb{N})(\Sigma \vdash_x A) \rightarrow \sim A$.

Podemos fazer a seguinte leitura discursiva dessa formalização[46]:

(CS1) O sujeito criador sabe se possui ou não uma prova de A num dado estágio $x : \mathbb{N}$ de sua atividade matemática;

(CS2) Nos estágios subsequentes, o sujeito criador não perde a posse das provas que já possui (ou poderíamos dizer: seu conhecimento tem um caráter cumulativo);

(CS3) Direção da esquerda pra direita: se o sujeito criador possui uma prova de A, então A é verdadeira, i.e., não se tem uma prova de uma proposição falsa; direção (CS3)$'$: se A for verdadeira, então existe um estágio $x : \mathbb{N}$ no qual o sujeito criador possui a sua prova[47];

(CC) Se é impossível (absurdo) que o sujeito criador possua uma prova de A, então A é falsa.

Apresentados os axiomas, Sundholm (2014, 16-21) dá início a uma série de ponderações concernindo a elucidação do sentido da expressão $\Sigma \vdash_m A$. Ele trata $\Sigma \vdash$ como um conectivo lógico, sugerindo que a leitura dele proposta por Kreisel não é adequada. Uma de suas críticas consiste em dizer que devemos distinguir entre dois usos da palavra "evidência": "evidência para" (*evidence for*) e "evidência de" (*evidence of*). Em geral, um filósofo anglófono interpreta essa palavra de acordo com o sentido envolvido no primeiro uso, tendência que pode ser atribuída ao emprego dela no âmbito jurídico, onde se apresentam evidências *para* comprovar um certo fato. No entanto, por essa via é admissível a ideia de uma evidência insuficiente, ou seja, de que existem evidências inconclusivas para a comprovação de um fato, configurando assim um uso não compatível com o que se dá na matemática, pois ao apresentarmos uma demonstração como evidência para se asserir uma proposição matemática, tal demonstração deve ser conclusiva. Quando se trata do

[46]Cf. (LARGEAULT, 1993, 102), (TROELSTRA, 1969, 95), (TROELSTRA; DALEN, 1988, 236).

[47]Troelstra e Dalen (1988, 236), sobre (CS3), afirmam: "[T]he solipsistic principle is assumed: *true* is, for the IM [idealized mathematician], only what he discovers to be true in the course of his own mathematical activity" (grifo dos autores). Além disso, vemos em (TROELSTRA, 1969, 96) a proposta de uma "teoria fraca", na qual se empregaria o axioma

$$A \rightarrow \sim\sim (\exists x : \mathbb{N})(\Sigma \vdash_x A)$$

no lugar de (CS3)$'$, elucidado da seguinte maneira: "I am completely free in making deductions. Hence if there is a proof of A, it is absurd that I would be able to prove that I will never find a proof of A (at no stage will have evidence for A)".

segundo uso, que se refere àquilo que é evidente – que tem a qualidade de ser evidente –, um anglófono costuma empregar o termo "autoevidente" (*self-evident*), não obstante, o que é autoevidente constitui apenas uma parcela daquilo que pode ser considerado como tendo a qualidade da evidência, ou seja, nem tudo que é evidente é autoevidente. Na matemática, por exemplo, um teorema, que consiste numa proposição cuja verdade foi demonstrada, é evidente, mas nem sempre essa evidência se manifesta pela análise do teorema em si, é preciso recorrer a uma demonstração, composta por uma estrutura discursiva de inferências, as quais constituem uma cadeia de evidências que culminam na evidência do teorema demonstrado. Assim, a leitura mais adequada do conectivo de Kreisel seria a que compreendesse o termo "evidência" no sentido manifestado pelo uso da expressão "evidência de". Como observa o próprio Sundholm, Kreisel (1967, 179) já teria de certo modo se antecipado a essa problemática ao fazer a observação seguinte:

> Very little of the 'thinking subject' is used [...] Instead of writing $\Sigma \vdash_n$, I could write $\Sigma_n \vdash A$ and read it as: the *n*th proof establishes *A*. In other words, the essential point would not be the individual subject, but the idea of proofs arranged in an ω-order.

Todavia, no que concerne à acusação de que o emprego de "autoevidente" como sucedâneo do sentido de "evidência de" é inadequado, acreditamos que Sundholm acaba por serrar o próprio galho em que estava sentado. Ele diz:

> In the case of a *propositio per se nota*, its evidence is grounded in the *propositio* itself and then *self*-evidence will be apt. When the evidence is *mediate*, rather than immediate, though, *self*-evidence clearly is out of place, since its evidence is not grounded in the claim itself, but in that of other claims (SUNDHOLM, 2014b, 206, grifo do autor).

Mas logo adiante, no mesmo parágrafo, lemos:

> Something self-evident need not be at all *obvious* or patent. [...] Considerable experience might be needed in order to familiarize oneself with the concepts in question before the self-evident status [...] is grasped. It is not for nothing that the scholastics, for instance Thomas Aquinas in *Summa Theologica*, Q II, Article 1, considers propositions that are *per se nota (in se)*, *per se nota ad nos* and *per se nota ad sapientes*. We might perhaps render this tripartite Thomistic distinction as *self-evident*, self-evident *to us*, and self-evident *to the learned* (SUNDHOLM, 2014b, 206, grifo do autor).

Ou seja, se a "considerável experiência" de que ele fala significa que a evidência envolvida não é imediata, isso apenas conta em favor de que o termo "autoevidente" é adequado para se referir, também, ao que tem a qualidade de ser evidente de maneira mediata. O que mais nos importa, entretanto, é destacar as nuanças do termo evidência, que podem passar despercebidas numa tradução ou uso inapropriados.

Na literatura, encontramos diversas outras propostas de como poderíamos formalizar o sujeito criador, por vezes também referido como sujeito criativo ou matemático ideal:

(i) Troelstra (1969, 95, §16): $\vdash_m A$, "[O] sujeito criativo tem uma prova de A no estágio m, ou melhor, o sujeito criativo tem evidência para A no estágio m";

(ii) van Atten (2008, 43): $\Box_n p$: "O matemático ideal obteve no momento n uma prova da proposição p (cf. a seção 3.4);

(iii) van Dalen e van Atten (2002, 522): $\Box_n A$: "O sujeito criador experiencia A (tem evidência completa para A) no momento n";

(iv) van Rootselaar (1968, 188): $P(\sigma, m, A)$: o sujeito criativo σ tem evidência para asserir A no estágio m, onde σ é uma variável que está para sujeitos criativos.

Sundholm (2014, n. 32) menciona que van Atten também apresenta a seguinte leitura: "o sujeito experienciou A em m", a qual refletiria o preceito brouweriano que diz que experienciar uma verdade é experienciar o êxito de uma construção. No entanto, tal leitura aparenta ambiguamente colocar no mesmo plano a condição de experienciar uma proposição e a de experienciar a verdade de uma proposição, ou seja, nos termos da TIT, não haveria diferença entre fazer um juízo de formação (*A é uma proposição*) e fazer um juízo que assere a verdade de uma proposição. Quanto à noção de *evidência completa* que aparece em (iii), isso seria para evitar a concepção de uma evidência insuficiente, como vimos há pouco.

Sundholm considera todas essas expressões como se tratando de conectivos proposicionais, alegando que, caso não o fossem, não poderiam ser usadas com os quantificadores e conectivos que formam as proposições presentes nos axiomas, pois tal como apresentamos na seção anterior, proposições consistem naquilo sobre o qual as operações das constantes lógicas incidem. Mas sendo assim, deve-se admitir que os conectivos introduzidos para formalizar o Sujeito Criador carecem de uma explicação-de-sentido (*meaning-explanation*), tal como vemos na semântica BHK[48] ou na TIT:

> [N]either Kreisel, or Van Rootselaar, nor, to the best of my knowledge, anyone else, has offered a suggestion towards a 'BHK' account for what canonical proof-objects might be for propositions built by means of such 'Creating Subject' connectives, and it is by no means obvious how to provide one (SUNDHOLM, 2014, 18).

Nessa direção, a formalização proposta por van Rootselaar possui ainda um agravante. Sendo σ uma variável sobre "sujeitos criativos", uma leitura construtivista da quantificação determinaria a especificação de um domínio D para essa variável, todavia, na formalização sugerida não há nenhuma indicação de como seriam os elementos canônicos de D.

[48] Sobre a semântica BHK, cf. (TROELSTRA; DALEN, 1988, 9).

Um outro ponto levantado por Sundholm (2014, 18) é que em tais formalizações a noção de prova envolvida seria "muito comprometedora de um ponto de vista epistemológico": não poderíamos assumir hipoteticamente a existência de uma prova de uma proposição A a fim de obter, sob a dependência dessa condição, uma prova de uma proposição B, uma vez que assumir a existência hipotética de tal prova seria o mesmo que tomar a verdade de A como sendo conhecida. A esse respeito, Sundholm analisa (CS3)$'$, que por ser uma implicação, diz que a partir da *suposição* de que A é verdadeira, o sujeito criador teria condições de obter uma prova (atual) de A. Mas como vimos na seção 3.5.1, isso não seria uma compreensão adequada de uma implicação, dado que esta apenas estabelece uma relação entre objetos-provas, i.e., sua verdade é verificada por um objeto funcional que transforma objetos-prova do antecedente em objetos-prova do consequente, mesmo que esses objetos não existam, não dando, portanto, nenhuma garantia de que um objeto-prova para o consequente será, de fato, obtido. Assim:

> [(CS3)$'$] is simply wrong to my mind. It does not hold as an implication, or equivalently as a consequence, but at most as a rule of proof, going from a known judgement to a novel judgement that gets known in this inference.
> [...] Verification of the truth of an implication, or the holding of a consequence, be they logical or not, involves the construction of certain function(-object)s that transform proofs of antecedents into proofs of consequent, *irrespective of whether there actually are any proofs of A*; only a relation between the respective proof-conditions is involved, but not their being actually fulfilled (SUNDHOLM, 2014, 19, grifo do autor).

O ponto é que, da mera suposição de que A é verdadeira, não há nada que garanta que o sujeito criador efetuará alguma construção que o levará a *conhecer* a verdade de A. Como se trata de uma suposição, pode ser o caso de A ser de fato falsa, o que impossibilitaria a demonstração de sua verdade em qualquer estágio que seja. Nessas condições, a validade de (CS3)$'$ só seria legítima quando o antecedente fosse categórico, pois, dado o envolvimento entre prova e verdade no intuicionismo, realmente teríamos uma prova de A, a qual teria sido obtida em algum estágio da atividade matemática do sujeito criador[49].

Para um melhor esclarecimento, Sundholm (2014, 20) sugere que consideremos (CS3)$'$ em termos da seguinte derivação formal (usando, todavia, a notação de van Dalen e van Atten, para que não haja confusão com o símbolo $\vdash$, o qual indica que o que está à sua esquerda é uma hipótese):

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash (\exists m : \mathbb{N})(\Box_m A).}$$

[49]"'If a statement is true, then there is a moment t at which the creating subject proves it'. As an implication this is highly problematic, but as a principle about demonstrations it is clear: given a demonstration by the subject of a statement, the subject can indicate the moment t at which it arrived at that demonstration" (SUNDHOLM; van ATTEN, 2008, 9, nota 14).

Mas uma vez não sendo vazio o conjunto de hipóteses Γ, tal inferência não é válida[50], tendo em vista que negligenciaria o fato de que o objeto-prova de A pode ser meramente hipotético, não dando assim condições ao sujeito criador de afirmar que possui um objeto-prova (atual) de A no estágio m, como expressa o conectivo $\Box_m$.

Uma forma válida de inferência envolvendo esse conectivo poderia ser:

$$\frac{\vdash A}{\vdash (\exists m : \mathbb{N})(\Box_m A),}$$

elucidada da seguinte maneira por Sundholm (2014, 20): "When the Creating Subject knows that A is true he does so on the basis of a possessed proof-object, and this proof-object is obtained at a certain stage that can be determined by introspection". Todavia, o mesmo autor ressalva que, neste caso, se trata de uma regra formal, composta por fórmulas a serem interpretadas. Num cálculo interpretado, em que a sintaxe não se dissocia da semântica, como no sistema de Martin-Löf, as objeções acima concernindo a elucidação do sentido do conectivo $\Box_m$ se manteriam.

Reforçando o mesmo ponto, Sundholm (2014, 21) argumenta que o paradoxo de Fitch[51], o qual diz "se qualquer verdade pode ser conhecida, então toda verdade é de fato conhecida" – geralmente empregado como uma refutação ao antirrealismo –, poderia ser ignorado por um antirrealista , dado que um dos axiomas que o sustenta, a saber,

$$A \text{ é verdadeira} \;\rightarrow\; \text{é possível saber que } A \text{ é verdadeira,}$$

não pode ser considerado em geral válido a partir de um ponto de vista construtivista. A argumentação pela sua invalidade se respalda pelas mesmas observações anteriores: tratando-se de uma implicação, o único elemento a respeito do qual podemos assegurar uma posse efetiva é o objeto-prova que transforma um *possível* objeto-prova de A num objeto-prova de *A dependente*[52]. Em outras palavras, a mera suposição da verdade de A não implica a obtenção de um objeto-prova atual de A, i.e., não implica que a verdade de A possa ser conhecida – como visto, pode até

[50]Temos aqui algo análogo ao que se passa na lógica modal, em que só podemos inferir que uma proposição A é necessária quando a demonstração de A não depende de nenhuma hipótese (a não ser que sejam axiomas lógicos), refletindo assim a noção intuitiva de que o que pode ser demonstrado apenas por raciocínio lógico é necessariamente verdadeiro.

[51](FITCH, 1963, 139), contrapositiva do teorema 5.

[52]A terminação verbal ao enunciar uma implicação é importante e esclarecedora: se *existisse* um objeto-prova do antecedente, *existiria* um objeto-prova do consequente. No fundo, isso quer dizer que a verdade de uma implicação não se compromete com a existência atual de nenhum objeto-prova das proposições envolvidas pela implicação.

mesmo se dar o caso de A ser falsa. A não observância dessa condição equivaleria, em dedução natural, a ignorarmos a distinção entre assumir uma premissa para a qual temos uma derivação fechada, e assumirmos uma premissa hipotética com vistas a posteriormente anular a dependência por ela provocada – seja pelo uso de uma regra de inferência adequada, seja por uma derivação que tenha a premissa em questão como conclusão.

E à semelhança do que foi feito anteriormente, a crítica à verdade da implicação acima expõe a condição de que a inferência abaixo só é válida desde que nenhuma proposição esteja sob a dependência de uma hipótese[53]:

$$\frac{\vdash A \text{ é verdadeira}}{\vdash \text{ é possível saber que } A \text{ é verdadeira.}}$$

Tendo em vista todas essas dificuldades a respeito de uma elucidação adequada da formalização da teoria do sujeito criador, Sundholm coloca em dúvida a legitimidade da função definida por Kripke (seção 3.4), a qual se apoia nos axiomas (CS1)-(CS3) e se propõe como um contraexemplo da tese de Church, i.e., uma função computável mas não recursiva:

> In view of my doubts both as to the meaningfulness and validity of the Kreisel-Kripke axioms, I am not at all convinced by the interpretation of the Kripke result that makes a computable function out of G, and instead I prefer to view this result as a version of the classical theorem that there are non-recursive functions (G é a função f do exemplo 3.4.1) (SUNDHOLM, 2014, 24).

Sundholm chega a propor, na TIT, uma definição do conectivo $\Sigma\vdash$, mas com uma ressalva, vejamos. Um dos propósitos de criar a teoria do sujeito criador foi formalizar os *contraexemplos fortes* de Brouwer. Kripke, no entanto, se deu conta de que o mesmo propósito poderia ser obtido por meio do que hoje conhecemos como *esquema de Kripke*[54]:

$$\exists\alpha(A \leftrightarrow \exists n(\alpha(n) = 1)),$$

[53] Acreditamos que Sundholm (2014, 21) utiliza o símbolo $\vdash$ apenas com o propósito de salientar que a ausência de uma proposição do lado esquerdo indica que não há nenhuma dependência a hipóteses. Caso ele fosse utilizado com o propósito de expressar a asserção da proposição que ocorre à sua direita, teríamos a redundância de afirmar *A é verdadeira é verdadeira* (cf. (MARTIN-LÖF, 1984, 4 (3))).

[54] Não se sabe ao certo quando o *esquema de Kripke* foi proposto. Sundholm (2014, n. 43) alega que ele já teria sido pressagiado no artigo (KRIPKE, 1963), de todo modo, numa carta de Moschovakis a Church (que pode ser encontrada no apêndice a (SUNDHOLM, 2014)), datada de março de 1968, encontramos uma referência explícita ao *esquema*. Dummett (2000, 244) diz que o *esquema de Kripke* apresenta a vantagem de não fazer um uso explícito do conectivo $\Sigma\vdash$, além de que a partir dele todas as aplicações da teoria do sujeito criador podem ser derivadas.

onde α é a função definida abaixo:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0, \text{ se } \sim \Sigma \vdash_n A \\ 1, \text{ se } \Sigma \vdash_n A. \end{cases}$$

Por (CS1), α é uma função cuja separação de casos é decidível.

Assim sendo, Sundholm (2014, 22), por meio do formalismo da TIT, deriva a seguinte versão do *esquema de Kripke*, atribuindo-lhe um objeto-verificador[55] c:

$$\text{(BKP)} \quad (X : \mathbf{prop})\text{Proof}((\exists \alpha \in \mathbb{N} \to \mathbf{Bool})(X \leftrightarrow (\exists x : \mathbb{N})(\alpha(x) \neq_{\mathbf{Bool}} \mathbf{f})))$$

Nesta circunstância, todavia, a função α é definida por uma separação de casos indecidíveis, como a função F' acima. A partir de (BKP) Sundholm define explicitamente o conectivo $\Sigma \vdash$ como uma proposição na TIT, no entanto, dado que o objeto-verificador de (BKP) depende de assumir a validade do princípio do terceiro excluído, tendo em vista os casos indecidíveis envolvidos em α, trata-se ainda de uma questão em aberto se a existência de c pode ser construtivamente demonstrada[56].

[55]Para Sundholm (2014, 23), (BKP) não tem um caráter proposicional, mas funcional, por isso prefere usar a expressão *objeto-verificador*, reservando *objeto-prova* às proposições.

[56](SUNDHOLM, 2014, 25).

4

Sistemas Formais e Incompletude

O fenômeno da incompletude dos sistemas formais está intrinsecamente ligado à tese de Church. Um sistema formal é um método efetivo de produzir fórmulas a partir da aplicação de regras de inferência num conjunto inicial de fórmulas. Desse modo, se no âmbito das definições formais de método efetivo pudermos demonstrar certos limites – limites do que uma função recursiva (máquina de Turing, etc.) pode calcular –, por meio da tese de Church tais limites podem ser generalizados aos sistemas formais. A seguir, examinaremos como Dummett compreende a incompletude. Na sequência, apresentaremos uma tentativa de interpretar uma afirmação que ele faz acerca da plausibilidade da tese de Church no âmbito do intuicionismo. Por meio de Lakatos e Azzouni, veremos argumentos que são contra e pró as formalizações, respectivamente. Por fim, analisaremos um outro argumento de Kripke, dessa vez visando demonstrar a tese de Church.

4.1 Formalização e uso de enunciados aritméticos

No artigo *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem*[1], Dummett procura avaliar qual o significado epistemológico que se pode atribuir ao teorema da incompletude, o qual é por ele compreendido da seguinte maneira: em qualquer sistema formal intuitivamente correto da aritmética elementar existe um enunciado U, cuja forma é $\forall x A(x)$ – sendo $A(x)$ um predicado decidível –, que pode ser expresso no sistema mas não pode nele ser demonstrado. Além disso, tal enunciado "não é apenas verdadeiro, mas pode ser reconhecido por nós como sendo verdadeiro"[2]. Assim, o problema central nesse artigo pode ser enunciado na seguinte

[1]Publicado pela primeira vez em 1963.
[2](DUMMETT, 1978b, 186).

pergunta: se nos restringirmos à condição de que entender o sentido da expressão 'número natural' corresponde a compreender a atribuição do predicado 'é verdadeiro' a enunciados da aritmética, o que o teorema de Gödel pode nos esclarecer quanto a isso?[3]

Para Dummett, se a sua compreensão do teorema for legítima, uma das consequências é que a nossa noção de *número natural* não pode ser completamente expressa por nenhum sistema formal. Pelo fato do enunciado U não poder ser demonstrado nem refutado, segue-se que ele não pode ser verdadeiro em todos os modelos. Quando falamos então que reconhecemos a verdade de U, isso quer dizer que o enunciado é verdadeiro na interpretação *pretendida* para o sistema, indicando assim, de acordo com Dummett, que temos, quando falamos de números naturais, uma noção intuitiva clara da estrutura matemática a que nos referimos. Contudo, tal noção intuitiva jamais poderá ser completamente caracterizada por meio de asserções sobre números naturais derivadas num sistema formal.

Assim, fazer asserções sobre um conceito que temos intuitivamente bem definido pode não ser suficiente para caracterizá-lo completamente. Por exemplo, precisamos caracterizar o que entendemos pela totalidade dos números naturais se quisermos chamar a atenção para o fato de que qualquer modelo para um sistema formal em que o enunciado U seja falso conterá elementos não pertencentes a essa totalidade. Nesse caso, teremos que empregar expressões como 'conjunto' e 'finitamente frequente', no entanto, como Dummett (1978b, 187) nos adverte, ao estipularmos as asserções que gostaríamos de fazer envolvendo tais expressões, para assim determinar seus respectivos sentidos, podemos acabar nos enredando num sistema formal onde a definição de 'número natural' possa ser dada, logo, tendo em vista que o teorema da incompletude é derivável em qualquer sistema formal que contenha a aritmética elementar, teremos mais uma vez um enunciado da aritmética exprimível mas indecidível pelo aparato dedutivo do sistema em questão, apesar de reconhecermos a verdade de tal enunciado – ratificada por nossa intuição a respeito da estrutura dos números naturais. Consequentemente, a caracterização do conceito de 'número natural' empreendida não pode ser considerada como bem sucedida. Numa palavra, um sistema apto para definir o conceito de 'número natural' nutre as próprias condições para que essa definição seja caracterizada de maneira insuficiente. Diante disso, Dummett afirma:

> Those who accept this view of the matter readily draw the conclusion that the expression 'natural number' is a counter-example to the thesis that the *meaning* of an expression is to be explained in terms of its *use* (DUMMETT, 1978b, 187, grifo do autor).

Isso porque, se o uso dos enunciados da aritmética pura for concebido a partir

[3](DUMMETT, 1978b, 189).

dos enunciados da aritmética que "estamos preparados para asserir" e das formas de inferência no interior da aritmética que "estamos preparados para aceitar", segue-se, do que acabamos de ver, que o sentido do conceito de número natural não pode ser completamente caracterizado:

> Everyone who is familiar with the expression 'natural number' has a perfectly clear intuitive grasp of its meaning; but its meaning is such (on this view) that no account of our – or any possible – use of this expression can exhaustively explain what it is for it to have that meaning (DUMMETT, 1978b, 187).

Se o sentido da expressão 'número natural' não pode ser exaurido pela descrição do seu uso – o qual se manifestaria publicamente –, não nos encontraríamos então na difícil circunstância em que jamais se saberá se o sentido que uma pessoa atribui a essa expressão é o mesmo sentido atribuído pelo seu interlocutor, uma vez que nenhum dos interlocutores tem acesso à mente do outro[4]? Como diz Dummett (1978b, 188), tradicionalmente, a filosofia se demonstrou concernida com a análise das *ideias* consideradas em si mesmas, as quais constituiriam o sentido das palavras. As sentenças ou sinais que as expressariam não passariam de um meio que viabilizaria a comunicação: não podendo pensamentos ser transmitidos diretamente, devemos codificá-los de alguma maneira, que na maior parte dos casos se dá por meio de sinais auditivos ou visuais. A filosofia mais recente, no entanto, tem preferido uma outra abordagem. Ao se ensinar uma linguagem a uma criança, a noção de que isso consistiria em associar símbolos ao que eles se referem parece pouco plausível, sobretudo quando a referência se trata de algo imaterial como um conceito. Por essa razão, a outra abordagem que se propõe se baseia na noção de *uso*. Ao ensinarmos uma nova palavra a uma criança, o que fazemos é usar uma sentença em que ela ocorre, provocando na criança a imitação de tal uso, assim:

> Since we judge whether the child has learned the sense of the word by whether he uses it as we do, it seems proper to *identify* possession of the concept with the ability to make a correct use of the word (or a range of associated words). The code analogy thus drops out as misleading (grifo do autor).

Por que a concepção de linguagem como codificação da referência seria enganadora? De acordo com essa concepção, cada indivíduo detém a posse privada do sentido das palavras que são utilizadas num ato comunicativo, de maneira que a comunicação realizaria o seu papel à medida que pudéssemos induzir no interlocutor o mesmo sentido que atribuímos às palavras que compartilhamos. Os interlocutores teriam assim uma palavra em comum, manifestada numa comunicação, mas o sentido atribuído a essa palavra por cada um faria parte de uma posse privada, sendo que a comunicação só seria bem sucedida a partir do momento em que os interlocutores atribuíssem o mesmo sentido a tal palavra. O problema dessa concepção é

[4](DUMMETT, 1978b, 187).

que ela se pauta, como diz Dummett (1978b, 190), por uma "fé cega", pois como o sentido atribuído à palavra compartilhada é privado, ele só pode ser reconhecido em nós mesmos, não passando de um ato de fé a crença de que o interlocutor atribui o mesmo sentido à palavra compartilhada na interlocução.

Assim, no presente contexto, em que se pretende investigar o que o teorema da incompletude pode dizer a respeito da compreensão do sentido da expressão 'número natural', encontramo-nos na seguinte situação: se o sentido dessa expressão não pode ser reduzido ao seu uso, ele só poderá ser reconhecido em nós mesmos; por outro lado, se adotamos uma teoria semântica em que o sentido é dado pela descrição do seu uso, e, além disso, consideramos que a formalização da aritmética constitui uma descrição do uso de seus enunciados, podemos concluir, por meio do teorema da incompletude, que não temos uma caracterização exaustiva do sentido da expressão 'número natural', visto que, apelando a uma compreensão intuitiva do sentido dessa expressão sempre temos condições de reconhecer como verdadeiros enunciados cuja verdade não seria reconhecida se recorrêssemos apenas à descrição do seu uso. Apesar disso, Dummett não considera o teorema de Gödel um contraexemplo da concepção de sentido como uso, alegando que o abandono dessa concepção – que aparentemente se mostra impassível a uma caracterização geral e não problemática para cada termo a ela suscetível[5] – equivaleria a por fim à esperança de prover uma explicação do sentido:

> [A]lthough the thesis that meaning reduces to use is in itself so thin, any apparent counter-example to it must prove to be spurious. The identification of meaning with use is a small but necessary first step: progress is to be made by asking, for each case, what use consists in and how it is to be described. To reject the identification is a retrograde move, which renders further progress impossible and induces only mystification (DUMMETT, 1978b, 190).

A esta altura, a argumentação de Dummett pode ser resumida nos seguintes termos: assumamos uma teoria que reduz o sentido de uma expressão ao seu uso; entendamos a formalização da aritmética como uma "descrição do uso de enunciados aritméticos"[6]; o teorema da incompletude diz que qualquer formalização consistente da aritmética nos coloca diante da condição de haver um enunciado U cuja verdade reconhecemos intuitivamente – por termos uma compreensão clara da estrutura dos números naturais –, mas que não pode ser decidido pelo sistema dedutivo pertinente à formalização em questão; consequentemente, o sentido da expressão 'número natural' não pode ser reduzido ao uso, i.e., a uma formalização da aritmética elementar; mas a não redução do sentido ao uso leva a consequências bastante indesejáveis, como uma concepção de sentido que não ultrapassaria o âmbito do privado, logo, deve haver algo de errado com relação a essa compreensão do

[5](DUMMETT, 1978b, 189).
[6](DUMMETT, 1978b, 190).

significado do teorema de Gödel. Isso será esclarecido na seção 4.1.2, abaixo, mas antes de chegarmos lá, precisamos passar pelo tópico seguinte.

4.1.1 Conceitos indefinidamente extensíveis

Desde de um ponto de vista realista, a conjectura de Goldbach é verdadeira ou existe um número natural par maior do que 2 que não é a soma de dois números primos. Nessa concepção epistemológica está pressuposta a ideia de que existe uma realidade matemática – neste caso, a realidade constituída pelos números naturais – que subsiste independentemente do conhecimento que façamos dela, o que quer dizer que, mesmo que nunca venhamos a saber qual dos disjuntos acima é o caso, há um fato matemático que faz um deles ser a sua descrição correta. Apoiado nessa concepção, um matemático clássico encontra a sua disposição em assumir para as sentenças matemáticas a validade do princípio do terceiro excluído. De fato, como adverte George e Velleman (2002, 92), considerando o exemplo da conjectura de Goldbach, aparenta mesmo ser irrazoável não admitirmos o terceiro excluído. Levando em conta a extensão da propriedade *número par maior do que 2*, temos a coleção de elementos $\{4,6,8,...\}$, infinita e determinada. Assim, independentemente do que conhecemos ou venhamos a conhecer, isso não altera a condição de que todos os elementos dessa coleção são a soma de dois primos, ou pelo menos um não o é, implicando, desse modo, que a conjectura de Goldbach ou a sua negação seja verdadeira.

Não obstante, nem sempre uma compreensão realista da matemática tem um apelo intuitivo como nesse caso. Consideremos a *hierarquia cumulativa de conjuntos* descrita pela teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Os axiomas dessa teoria descrevem uma coleção $\mathscr{V}$ de conjuntos construídos por um processo iterativo, que começa pelo conjunto vazio e a cada estágio produz um novo conjunto constituído apenas por conjuntos criados nos estágios anteriores[7]. Denotando por $\mathscr{V}_n$ a coleção de todos os conjuntos construídos no estágio n, temos no estágio 0, onde nenhum conjunto foi construído:

$$\mathscr{V}_0 = \emptyset$$

Seguindo a construção, temos que a coleção de conjuntos do estágio $\mathscr{V}_{n+1}$ terá como elementos todos os subconjuntos do estágio $\mathscr{V}_n$, i.e., o conjunto potência $\mathscr{P}(\mathscr{V}_n)$:

[7]Cf. (GEORGE; VELLEMAN, 2002, 50) e (GOLDREI, 1996, 96).

$$\mathscr{V}_{n+1} = \mathscr{P}(\mathscr{V}_n),$$

o que particularmente nos dá:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{V}_0 = \emptyset,\\
&\mathscr{V}_1 = \{\emptyset\},\\
&\mathscr{V}_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\\
&\mathscr{V}_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},\\
&\ldots
\end{aligned}$$

A construção continua. Podemos reunir todos os estágios $\mathscr{V}_n$ no conjunto:

$$\cup\{\mathscr{V}_n\} = \mathscr{V}_0 \cup \mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2 \cup \ldots$$

Por conseguinte, referindo-se a esse conjunto por X, construímos os conjuntos:

$$X, \mathscr{P}(X), \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))), \ldots,$$

permitindo-nos formar a união disso com todos os conjuntos anteriores:

$$\cup\{\mathscr{V}_0, \mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2, \ldots, X, \mathscr{P}(X), \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))), \ldots\},$$

que por sua vez nos dá a possibilidade de formarmos novos conjuntos potências e seguirmos sucessivamente o mesmo processo. Como diz Goldrei (1996, 97), qualquer conjunto passível de ser descrito pelos axiomas de ZF irá eventualmente aparecer como elemento de algum conjunto dessa hierarquia. Além disso, cada estágio desse processo pode receber uma designação, a qual é útil em identificar um ordenamento da hierarquia cumulativa de conjuntos. Isso é feito por meio dos números ordinais

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \omega\cdot 2+2, \ldots$$

Dessa forma, $\mathscr{V}_\omega$ contém todos os conjuntos finitos $\mathscr{V}_n$:

$$\mathscr{V}_\omega = \mathscr{V}_0 \cup \mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2 \cup \ldots$$

O primeiro estágio a conter um conjunto infinito é o $\mathscr{V}_{\omega+1}$, que contém $\mathscr{V}_{\omega}$ como elemento:

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\omega+1} &= \mathscr{P}(\mathscr{V}_{\omega}),\\ \mathscr{V}_{\omega+2} &= \mathscr{P}(\mathscr{V}_{\omega+1}),\\ &\ldots\end{aligned}$$

Continuando, temos:

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{\omega\cdot 2} &= \mathscr{V}_0 \cup \mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2 \cup \ldots \cup \omega \cup \omega+1 \cup \omega+2 \cup \ldots,\\ \mathscr{V}_{\omega\cdot 2+1} &= \mathscr{P}(\mathscr{V}_{\omega\cdot 2}),\\ \mathscr{V}_{\omega\cdot 2+2} &= \mathscr{P}(\mathscr{V}_{\omega\cdot 2+1}),\\ &\ldots\end{aligned}$$

Diante disso, citamos a seguinte observação de George e Velleman (2002, 52), a qual nos remonta à questão mencionada há pouco sobre a legitimidade do apelo intuitivo da concepção realista da matemática: "It is difficult to say how long this process is to continue. To say that it goes on 'forever' is inadequate, since by the time we reached $\mathscr{V}_{\omega}$ the process had already gone on forever, and yet we continued."

Antes de prosseguirmos, façamos a seguinte consideração: em ZF, o axioma da separação não permite que se forme o conjunto $R = \{x : x \notin x\}$, que dá origem ao paradoxo de Russell[8], uma vez que o princípio de abstração – para qualquer predicado P existe um conjunto A cujos membros satisfazem P – deixa de ser completamente irrestrito, assumindo a seguinte forma: dado qualquer conjunto A e um predicado P, existe um subconjunto B de A contendo como membros exatamente os elementos que satisfazem P. Todavia, podemos formar o conjunto $R_A = \{x \in A : x \notin x\}$, desse modo[9],

$$x \in R_A \;\leftrightarrow\; (x \in A \wedge x \notin x).$$

Assim, assumindo a verdade de $x \in A$, asserimos

[8]Se supusermos que o próprio conjunto R pertence a si mesmo (não pertence a si mesmo), concluímos que ele não pertence a si mesmo (pertence a si mesmo), ou seja, deparamo-nos com a condição contraditória de que $R \in R \;\leftrightarrow\; R \notin R$.

[9](GEORGE; VELLEMAN, 2002, 54), (SMULLYAN; FITTING, 2010, 17).

$$x \in R_A \leftrightarrow x \notin x$$

para todo $x \in A$. Logo, se R_A pertencesse a A, teríamos $R_A \in R_A \leftrightarrow R_A \notin R_A$, mas como isso é impossível, segue-se que R_A não pertence a A, ainda que seja um subconjunto de A – o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a si mesmos. Isso demonstra que, por meio da argumentação envolvida no paradoxo de Russell, dado qualquer conjunto A, podemos demonstrar que existe um subconjunto R_A de A que não pertence a A. E não apenas isso. Se supuséssemos que A fosse um conjunto universal, i.e., um conjunto que possuísse todos os conjuntos como elementos, demonstraríamos que a existência de tal conjunto não é possível, já que haveria ao menos um conjunto que não lhe pertenceria, R_A.

Constatada essa condição, consideremos o conceito de *conjunto*[10]. Referindo-se à sua extensão por $\mathscr{V}$ – a coleção de todos os conjuntos –, a teoria ZF diz que $\mathscr{V}$ não pode ser um conjunto, já que seria o conjunto de todos os conjuntos. Não obstante, se repararmos como a hierarquia cumulativa de conjuntos foi construída, parece perdermos uma certa isonomia quando nos deparamos com o impedimento de se formar o conjunto de todos os conjuntos $\mathscr{V}$, ou, como dizem os autores já mencionados, há algo de misterioso nessa circunstância. Na construção da hierarquia cumulativa, obtemos o conjunto $\mathscr{V}_\omega$ *após* coletarmos os infinitos conjuntos $\mathscr{V}_0, \mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$... dos estágios anteriores. Nesse ponto, se objetarmos a um realista a estranheza dessa condição, pois ela dá a entender, ao empregarmos o termo "após", que uma tarefa infinita foi completada, ele nos diria que, apesar de não podermos fazer isso na prática, de um ponto de vista lógico o poderíamos[11]. No entanto, o mesmo realista não estaria disposto a admitir a possibilidade de reunir todos os conjuntos formados em todos os estágios, para assim se formar o conjunto de todos os conjuntos, sendo que a sua única justificativa para tal seria que, num caso, a união de conjuntos infinitos perpassando a hierarquia cumulativa implica uma contradição, ao passo que em outros casos, não:

> To say that in the one case, but not in the other, there are "too many" stages to collect across is of no help: in both cases, an infinite number of stages are involved, and there is nothing more to say about what makes the one infinite process contain "too many" steps beyond the fact that contradiction rears its head if we imagine completing a process of that length. There is no explanation here at all (GEORGE; VELLEMAN, 2002, 93).

George e Velleman (2002, 93) nos convidam a considerar isoladamente o passo da demonstração em que se estabelece que a coleção $\mathscr{V}$ de todos os conjuntos não é um conjunto. A partir da hipótese

[10](GEORGE; VELLEMAN, 2002, 92).

[11]Como diz Russell (1935, 143): "Miss Ambrose says it is *logically* impossible to run through the whole expansion of π. I should have said it was *medically* impossible".

(1) existe um conjunto $\mathscr{V}$ que contém todos os conjuntos,

criamos o conjunto $R_{\mathscr{V}}$, que não pertence a $\mathscr{V}$, chegando assim à situação contraditória de haver um conjunto de todos os conjuntos, com ao menos um conjunto que lhe falta. Logo, por redução ao absurdo, rejeitamos a hipótese (1), concluindo que não existe um conjunto de todos os conjuntos. De acordo com os autores, no contexto do realismo, (1) é rejeitada porque $\mathscr{V}$ não é um conjunto, dada sua existência contraditória. Para um realista, há uma realidade matemática determinada e independente do nosso conhecimento, de maneira que cada conceito a divide em duas, estabelecendo as entidades que caem e que não caem sob o conceito. Isso inclui o conceito de *conjunto*, para o qual existe uma coleção fixa de conjuntos que lhe corresponde. Esse seria o motivo do matemático clássico fazer "uma misteriosa distinção bruta entre coleções que são conjuntos e coleções que não o são"[12], levando-o assim a colocar a coleção $\mathscr{V}$ ao lado de entidades que não são conjuntos.

Na teoria de conjuntos NBG (acrônimo para Von Neumann-Bernays-Gödel), por exemplo, há uma distinção técnica entre *classes* e *conjuntos*. Todo conjunto é uma classe, mas nem toda classe é um conjunto. Como diz Enderton (1977, 6), existem coleções de conjuntos que são "muito grandes" para serem consideradas conjuntos, como a coleção de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos, nesse casso, tais coleções são denominadas de *classes próprias*, cuja característica essencial consiste no fato de não serem membros de nenhuma outra classe[13]. Assim, na concepção realista, existe uma realidade determinada onde se encontram circunscritas as entidades que são conjuntos, distinguindo-as das demais entidades, permitindo barrar condições paradoxais como as implicadas pela hipótese (1):

> The class of all ordinal numbers and the class of all sets both exist, but both are proper classes. Thus the Burali-Forti and Cantor paradoxes cannot be constructed, for they require these classes to be members of other classes. Similar remarks aplly to Russell's paradox (SUPPES, 1972, 12).

Mas podemos imaginar uma alternativa[14]. Ao invés de, à maneira realista, concluirmos que $\mathscr{V}$ não compõe a parte da realidade cujas entidades caem sob o conceito de *conjunto*, concluiríamos que a hipótese (1) deve ser rejeitada porque não existe uma coleção que contenha todos os conjuntos, ou seja, não existe uma parte *fixa, completa e determinada* da realidade matemática que corresponda à extensão do conceito de *conjunto*. A partir desse ponto de vista, a realidade, frente ao conceito de *conjunto*, não seria concebida como dividia em duas simplesmente porque

[12](GEORGE; VELLEMAN, 2002, 94).

[13]"Informally, a class A is a set if it is included in some level $\mathscr{V}_\alpha$ of our hierarchy (and then is a member of $\mathscr{V}_{\alpha+1}$). Otherwise it is not a set, and can never be a member of a set" (ENDERTON, 1977, 10)

[14](GEORGE; VELLEMAN, 2002, 94).

não seria possível fixar a parte que compõe a sua extensão. Em suma, temos duas maneiras de compreendermos a negação da hipótese (1): a negamos porque consideramos que $\mathscr{V}$ não é um conjunto, posição que exprime um ponto de vista realista, ou a negamos porque consideramos que não existe uma coleção à qual possa pertencer todos os conjuntos.

Antes de introduzirmos a noção que aparecerá no próximo parágrafo, gostaríamos de chamar a atenção para mais uma coisa. Num certo sentido, podemos atribuir a manifestação do paradoxo de Russell à condição de concebermos uma realidade determinada pré-existente, que é o ponto de vista constitutivo da concepção realista da matemática. A princípio, não há aparentemente nada de irrazoável concebermos o conceito de *conjunto que não é um elemento de si mesmo* e, ao aplicá-lo, formarmos o conjunto R, contendo os elementos de sua extensão. Teríamos em R, por exemplo, o conjunto de todos os conjuntos finitos. Tal conjunto é infinito – pois conteria como elementos, e.g., os conjuntos $\{0\}, \{1\}, \{2\}, ...$ –, e exatamente por essa razão não conteria a si mesmo. Contudo, na concepção realista, o conjunto R *já* existiria, não é algo que se formaria à medida que instanciássemos o conceito mencionado acima, logo, o próprio R se colocaria como candidato a instanciar o conceito em questão, levando, desse modo, ao paradoxo. A conclusão disso é que:

> Russell's Paradox can be thought of as resulting from the assumption that if it is possible to collect some objects together to form a set, then the collecting is actually unnecessary; the set containing those objects *already exists*. [...] This assumption leads to a circularity in which R plays a role in its own formation, and this circularity then leads to the paradox (GEORGE; VELLEMAN, 2002, 45, grifo nosso).

Dito isso, o que pretendemos com essa discussão é introduzir a noção de *conceito indefinidamente extensível*. Um conceito como *número primo menor que 100* possui uma extensão fixa – o que cai sob ele é completamente determinável. Por outro lado, com outros conceitos, como o de conjunto, sempre que estabelecemos uma coleção que procura unir todos os elementos que lhe correspondem podemos definir um novo elemento não pertencente à coleção originariamente concebida – apesar desse elemento cair sob o conceito em questão –, por isso são chamados de indefinidamente extensíveis[15].

Aparentemente, foi Dummett quem cunhou a expressão *conceito indefinidamente extensível*, no artigo *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem*. Anos mais tarde[16], ele diz que esse termo expressa a ideia contida na seguinte passagem de Russell:

> [T]he contradictions result from the fact that, according to current logical assumptions, there are what we may call *self-reproductive* processes and classes. That is, there are

[15](GEORGE; VELLEMAN, 2002, 94).
[16](DUMMETT, 1991b, 317, n. 5).

> some properties such that, given any class of terms all having such a property, we can always define a new term also having the property in question. Hence we can never collect all the terms having the said property into a whole; because, whenever we hope we have them all, the collection which we have immediately proceeds to generate a new term also having the said property (RUSSELL, 1906, 36, grifo do autor).

Nas palavras de Dummett, a definição se dá nos seguintes termos:

> A concept is indefinitely extensible if, for any definite characterisation of it, there is a natural extension of this characterisation, which yields a more inclusive concept; this extension will be made according to some general principle for generating such extensions, and, typically, the extended characterisation will be formulated by reference to the previous, unextended, characterisation (DUMMETT, 1978b, 195).

Tal noção exerce um papel importante na filosofia da matemática de Dummett no que diz respeito à circunscrição dos domínios de quantificação. Como ele observa[17], uma das dificuldades de lidar com objetos matemáticos é concebê-los de maneira que sua existência não dependa de objetos da realidade empírica, fazendo que, nesse sentido, as teorias matemáticas sejam puras. Não se trata apenas de distinguir objetos concretos de objetos abstratos, mas de distinguir os objetos matemáticos de todos os outro. Objetos abstratos podem existir de maneira contingente, como a linha do Equador ou a razão entre duas quantidades obtidas empiricamente, uma vez que ambos dependem da existência de objetos concretos. Com os objetos da matemática, por outro lado, pretende-se que existam de maneira independente de qualquer objeto concreto que o mundo possa conter, e que satisfaçam axiomas garantindo uma quantidade suficiente de objetos que possibilite qualquer aplicação que possamos fazer das teorias matemáticas.

Para atribuir um sentido adequado ao uso de um termo em enunciados envolvendo quantificações existenciais e universais, precisamos de um critério de aplicação ("o termo tal se aplica ao objeto tal?") e um de identificação ("no que consiste ser o objeto a que o termo se aplica, como distingui-lo dos demais?"). Com tais critérios em mãos, podemos, por exemplo, determinar a extensão do termo "estrela", ou a extensão do termo "número primo", desde que também nos sejam dados os domínios a que tais termos possam se aplicar – o domínio dos objetos concretos, no primeiro caso, o domínio dos números naturais, no outro. De fato, o que a aplicação de um termo faz é apenas distinguir, *num domínio previamente dado*, os objetos que lhe correspondem. Dessa maneira, quando se trata de termos matemáticos em que eles próprios determinam um domínio de quantificação, como os termos "número natural" ou "número real", o seu uso impõe uma exigência adicional, diferenciando-se de termos cujo domínio é composto por objetos concretos:

> [W]e should 'grasp' the domain, that is, the totality of objects to which the term applies, in the sense of being able to circumscribe it by saying what objects, in general, it comprises – what natural numbers, or what real numbers, there are.

[17](DUMMETT, 1996c, 436).

> [...] For any kind of concrete object, or of abstract object whose existence depends upon concrete objects, external reality will determine what objects of that kind there are; but what mathematical objects there are within a fundamental domain of quantification is supposed to be independent of how things happen to be in the world, and so, if it is to be determinate, *we* must determine it (DUMMETT, 1996c, 437, grifo do autor).

Assim, para termos que se aplicam a objetos concretos, a posse dos critérios de aplicabilidade e identidade são suficientes para determinar a sua extensão, dado que podemos de antemão contar com a realidade externa, a qual circunscreve o domínio correspondente ao tipo de objeto a que tais termos se aplicam. Contudo, assumindo a completa independência da matemática ante a realidade empírica, se quisermos estabelecer a extensão de um termo matemático, devemos determinar, além de seus critérios de aplicabilidade e identidade, o domínio a que tal termo possa ser legitimamente aplicado.

Para que isso seja bem compreendido, deve-se ter em conta a perspectiva intuicionista pressuposta nas considerações de Dummett. Um platonista (que adota uma epistemologia realista sobre a matemática) não encontraria nenhum empecilho em falar de uma realidade externa de objetos abstratos que constituiria o domínio de aplicação de termos matemáticos, desempenhando assim um papel análogo ao que a realidade empírica exerce no que diz respeito a termos que se aplicam a objetos concretos. Desse modo, se considerarmos que para a matemática não há uma realidade externa e independente de objetos abstratos, cabe a nós mesmos determinar os domínios de objetos que propiciarão um sentido adequado aos seus termos – condição que se coaduna com o preceito intuicionista de que objetos matemáticos são construções mentais.

Uma das consequências dessa concepção é um contraste entre a determinação dos valores de verdade de enunciados envolvendo termos gerais no contexto empírico e enunciados envolvendo termos gerais no contexto matemático. Sem problematizar o realismo que concerne a realidade física, Dummett (1996c, 438) diz que, por não haver na matemática uma realidade externa independe e determinada à qual se referir, seus enunciados – ao contrário de enunciados cujos termos, em última instância, referem-se a objetos concretos – nem sempre terão condições de verdade determinadas, i.e., nem sempre serão determinadamente verdadeiros ou falsos. Tal condição se manteria ainda que, de acordo com o que concluímos no parágrafo anterior, determinássemos nós mesmos os domínios de quantificação das teorias matemáticas, isso porque, conforme o mesmo autor, nenhum domínio infinito pode ser circunscrito de uma maneira satisfatória[18].

Essa conclusão se funda na noção já mencionada de *conceitos indefinidamente extensíveis*. Dummett (1996c) a exemplifica por meio da investigação de três do-

[18]Cf. a interpretação de Velleman (1993, 68).

mínios distintos, o domínio dos conjuntos, o dos números reais e o dos números naturais. A análise do domínio dos conjuntos conduz aos mesmos resultados que apresentamos acima, que basicamente diz: o domínio dos conjuntos é indefinidamente extensível porque dado qualquer conjunto A podemos criar o conjunto R_A que não lhe pertence. Quanto ao domínio dos números reais, Dummett se apoia no argumento da diagonal, de Cantor, o qual "tem precisamente a forma do princípio de extensão de um conceito indefinidamente extensível"[19]. O que o argumento demonstra é que, dada uma coleção contável de números reais, podemos nela empregar o método da diagonalização e obter um número diferente de todos os números membros da coleção que tomamos como ponto de partida, estendendo-a. Vale a pena observar que, dependendo das hipóteses que assumirmos, as quais legitimam um ponto de vista clássico ou intuicionista, tal diagonalização implicará diferentes conclusões. Um clássico naturalmente assumiria que os números reais "formam uma totalidade determinada englobando tudo o que devemos alguma vez reconhecer como um número real"[20], permitindo-o concluir, por meio da diagonalização, que os números reais formam uma totalidade não enumerável. Para um intuicionista, contudo, sua conclusão seria apenas de que nenhuma coleção contável pode conter todos os números reais[21], ou seja, o conceito *número real* é indefinidamente extensível – não se conclui nada a respeito de uma *totalidade* não enumerável. Dummett acrescenta que tratar um conceito indefinidamente extensível como se não o fosse, i.e., como um conceito definitivo, que não se estende, não leva a nenhuma inconsistência, apenas estaríamos supondo ter uma ideia definitiva quando, na verdade, não a temos, além do mais:

> This hypothesis explains the lameness of our attempts at a characterization of the supposed determinate totality of all real numbers, and relieves us of the embarrassment resulting from the apparent need for such a characterization; for the characterization of an indefinitely extensible concept demands much less than the once-for-all characterization of a determinate totality (DUMMETT, 1996c, 441).

Consideremos agora o conceito *número natural*, o qual é relevante para o que temos investigado no início do capítulo, tendo em vista que a extensão desse conceito constitui o modelo pretendido da aritmética elementar, teoria que se toma como parâmetro no que concerne à derivação do teorema da incompletude. Para Dummett (1996c, 441), temos aqui também um conceito indefinidamente extensível. Seu argumento se baseia numa observação sobre como Frege argumenta pelo fato de que todo número natural tem um sucessor. De acordo com Frege, para qualquer segmento inicial finito de números naturais, i.e., para qualquer segmento $0,1,2,...,n$, o número de termos que o compõe é o número natural $n+1$. Dummett vê nessa

[19](DUMMETT, 1996c, 441).
[20](DUMMETT, 1996c, 441).
[21](VELLEMAN, 1993, 71).

condição uma semelhança com a argumentação sobre a extensão indefinível do conceito *conjunto não pertencente a si mesmo*, ou seja, dado qualquer conjunto $C = \{0, 1, 2, ..., n\}$, o número de elementos membros de C é um número que não pertence a C, levando-nos assim a totalidades cada vez mais inclusivas. Dummett então sugere que o argumento de Frege seja interpretado como a demonstração de que o conceito *número natural* é indefinidamente extensível. Alguém poderia objetar que, ao se obter a totalidade dos números naturais, o princípio de extensão relatado acima não mais se aplicaria, pois o número dos números naturais constitutivos dessa totalidade não seria ele próprio um número natural. Diante disso, o que Dummett oferece como contra-argumento é um apelo ao aspecto anti-intuitivo de se considerar compreensível a *totalidade* dos números naturais. A única compreensão clara que temos é a de que dado qualquer número natural podemos passar para o seu sucessor, que nada mais é do que o que caracteriza o princípio de extensão indefinida: "The totality of natural numbers contains what, from our standpoint, are enormous numbers, and yet others relatively to which those are minute, and so on indefinitely; do we really have a grasp of such a totality?" A seção seguinte nos trará esclarecimentos sobre essa pergunta.

4.1.2 O sentido da expressão 'número natural'

Na seção 4.1, propomos investigar a questão central levantada no artigo *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem*, a qual problematiza a relação entre o teorema da incompletude e o sentido da expressão "número natural", na medida em que a elucidação deste envolve compreender o predicado 'é verdadeiro' quando atribuído a enunciados da aritmética. Vimos que, se entendermos a formalização como a descrição do uso de tais enunciados, o sentido da expressão "número natural" não poderia ser reduzido ao seu uso, dado que o teorema de Gödel produz, em qualquer formalização consistente da aritmética, uma sentença não demonstrável mas intuitivamente reconhecida como verdadeira. Porém, assumindo a inviabilidade da redução do sentido ao uso, a concepção semântica mais próxima que nos restaria se basearia, em última instância, a uma posse privada do sentido. Assim, a fim de que uma das consequências a ser tirada do teorema da incompletude não seja a de um contra-argumento à concepção semântica de sentido como uso, Dummett introduz a noção de conceito indefinidamente extensível, a qual tratamos detidamente na seção anterior. Vejamos agora qual o papel dessa noção na reinterpretação do teorema de Gödel e na manutenção da concepção semântica privilegiada por Dummett.

Com o intuito de argumentar em favor da concepção semântica de sentido como uso, o teorema de Gödel não pode ser entendido como demonstrando que qualquer descrição formal dos enunciados da aritmética[22] é insuficiente diante da noção intuitiva que temos deles, que é dada pela nossa compreensão da estrutura do conjunto dos números naturais, i.e., nossa compreensão do modelo pretendido de tais enunciados. Nessa direção, Dummett argumenta que a caracterização de um modelo só pode ser dada por meio de uma descrição, e se não for possível apresentar uma descrição que nos permita compreender de maneira completa a estrutura de tal modelo, não será a nossa intuição, ou qualquer outro meio, que nos habilitará essa opção, ou seja, a caracterização do modelo manifestará ainda um aspecto incompleto. É dessa maneira que lemos o trecho que se segue:

> The account of Gödel's theorem we are considering [...] operates with the notion of a model as if it were something that could be given to us independently of any description: as a kind of intuitive conception which we can survey in its entirety in our mind's eye, even though we can find no description which determines it uniquely. This has nothing to do with the concept of a model as that concept is legitimately used in mathematics. There is no way in which we can be 'given' a model save by being given a description of that model. If we cannot be given a complete characterisation of a model for number theory, then there is not any other way in which, in the absence of such a complete description, we could nevertheless somehow gain a complete conception of its structure (DUMMETT, 1978b, 191).

Não seria legítimo, portanto, falar que o teorema da incompletude demonstra que há, de uma lado, uma intuição completa e definitiva a respeito dos números naturais e, do outro, os sistemas formais, insuficientes em caracterizar tal intuição. A que se deve então a assimetria demonstrada pelo fenômeno da incompletude, que num certo sentido diz reconhecermos verdades aritméticas que não podemos demonstrar formalmente? A explicação disso se deve à noção de conceito indefinidamente extensível.

Como podemos ler na resposta que Dummett (1994b, 338) dá ao artigo de Wright (1994c), no texto *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem* podemos concluir os dois pontos seguintes:

a) um critério que nos permite asserir algo sobre *todos os objetos* que caem sob um determinado conceito não é dado juntamente com um critério que nos permite distinguir se *um dado objeto* cai sob este mesmo conceito;

b) no que diz respeito ao conceito *número natural*, um critério que nos permita asserir algo sobre todos os números naturais é indefinidamente extensível.

Sendo assim, Dummett vê duas vias na caracterização de um conceito, uma que diz respeito à sua correta aplicabilidade a instâncias particulares, i.e., dado um

[22]Como temos argumentado, assumimos a hipótese de que a formalização dos enunciados da aritmética corresponde à caracterização do uso de tais enunciados.

certo domínio, podemos distinguir entre os seus objetos aqueles que caem sob o conceito em questão; outra que diz respeito à aplicação do conceito a *todos* os objetos que caem sob ele. Tal distinção é necessária porque, apesar de no primeiro caso a aplicação do conceito se mostrar completamente definida, o mesmo não ocorre no segundo caso, já que podemos estar diante de um conceito indefinidamente extensível, de modo que a sua aplicação universal o envolve numa vagueza inerente, impedindo-nos de concebê-lo numa totalidade acabada:

> Even in the case of a finite totality, the conception of that totality is not completely characterised by the way in which an object is recognised as belonging to that totality: for two people might agree in their dispositions to recognise something as belonging to the totality, and still differ on the criteria they accepted for asserting something to be true of all the members of the totality. Still more is this true if the totality is infinite (DUMMETT, 1978b, 193).

Também lemos no texto de resposta a Wright:

> A concept is not [...] to be characterised solely by the criterion for its application, that is, for judging whether an object with which we are presented falls under it, but also by the criterion for saying that something holds good of everything falling under it (DUMMETT, 1994b, 336).

É importante frisar que um conceito indefinidamente extensível é vago apenas no que concerne à sua aplicabilidade universal, quanto à sua aplicação a instâncias particulares, ele é caracterizável por um critério completamente definido, distinguindo-se assim da noção de vagueza tratada em certas teorias filosóficas, a qual se refere à incerteza da aplicação de conceitos em casos limites[23].

Com isso, Dummett está dizendo que nem sempre podemos determinar de maneira suficiente o sentido de um quantificador por meio do critério de aplicação do predicado cuja extensão é percorrida pelo quantificador em questão. Há duas maneiras, portanto, de compreender o sentido da expressão "número natural", uma que corresponde a um critério que permite distinguir quando um termo se refere a um número natural, outra que corresponde a um critério para asserir algo sobre todos os números naturais. Neste último caso, deparamo-nos com o princípio de indução sobre propriedades bem definidas, cuja maneira mais natural de compreendê-lo é considerando-o como um princípio que possibilita a asserção de enunciados sobre *todos* os números naturais[24]. Contudo, a partir do momento em que esse princípio entra em cena, o sentido da expressão "número natural" se torna vago, pois passa a embutir um conceito indefinidamente extensível.

Se compreendermos o sentido da expressão "número natural" apenas a partir de um critério que forneça a sua correta aplicação a instâncias particulares, não o envolvendo com algo que possa se referir a *todos* os números naturais:

[23](DUMMETT, 1994b, 336).

[24]De fato, para Dummett (1978b, 195), o princípio de indução com relação a propriedades bem definidas faz parte do sentido ordinário da expressão "número natural".

> [A]n understanding of the expression ‘natural number’ will be insufficient to determine the criterion by which something is recognised as a ground for asserting that something is true of all the natural numbers: and it is precisely the concept of such a ground which is shown by Gödel’s theorem to be indefinitely extensible; for any definite characterisation of a class of grounds for making an assertion about all natural numbers, there will be a natural extension of it (DUMMETT, 1978b, 194).

Desse modo, ou o sentido da expressão “número natural” não ultrapassa o critério de distinguir instâncias particulares, e assim o seu entendimento não nos proporciona condições suficientes que permitam reconhecer algo como uma justificativa (*ground*) para asserir sentenças gerais sobre os números naturais; ou o sentido dessa expressão envolve critérios para asserirmos sentenças gerais sobre os números naturais, mas ao custo de adquirir um caráter inerentemente vago, uma vez que o teorema da incompletude demonstra que a classe que circunscreve as justificativas (*grounds*) de tais sentenças é indefinidamente extensível.

Feitos tais esclarecimentos, retomemos a questão da apreensão intuitiva de um modelo padrão da aritmética. Dummett (1994b, 335) afirma que se o conceito *número natural* fosse completamente definível, ou seja, não possuísse a vagueza inerente constatada acima, o aspecto do uso das sentenças da aritmética relacionado à nossa capacidade de reconhecê-las como verdadeiras poderia ser encapsulado num sistema formal, algo que o teorema da incompletude demonstra não ser possível. Em razão dessa impossibilidade, somos induzidos – sendo exatamente contra isso que Dummett procura opor-se – à concepção de que a compreensão do conceito *número natural* se daria por meio de uma “apreensão mental interna do ‘modelo padrão”’ da aritmética elementar, apreensão essa que passaria ao largo de qualquer formalização, assim:

> The conclusion drawn from this is that there is just one standard model *which we all have in mind*, despite our inability to characterise it completely by formal means. My argument has been, not that there is no such one standard model, still less that there is any uncertainty about which particular objects we shall recognise as natural numbers, but that the notion of ‘model’ here used is incoherent (DUMMETT, 1978b, 193, grifo nosso).

Por que, diante da condição de uma caracterização formal incompleta da aritmética, seria incoerente apelarmos a um modelo padrão, do qual teríamos uma intuição clara? A resposta de Dummett é que isso seria circular, pois a noção de modelo padrão a que poderíamos nos referir teria que ser também caracterizada por uma descrição, de modo que essa descrição envolveria os mesmos elementos para os quais procuramos obter uma descrição apelando a um modelo padrão:

> It is, however, circular to think that, since what we mean when we speak of the natural numbers cannot be fully explained by reference to the incomplete formal characterisation, it must therefore be explained instead by reference to the conception of the standard model. For this conception must be given to us by means of some description, and this description will itself make use either of the notion of ‘natural number’, or of some closely related notion such as ‘finite’ (DUMMETT, 1978b, 191).

E após discursar sobre a alegada plausibilidade de interpretar o sentido da expressão 'número natural' por meio de uma apreensão intuitiva de um modelo para os números naturais, Dummett, na passagem abaixo, reitera a posição que acabamos de citar:

> [S]ince [...] a framework within which a model for the natural numbers can be described will itself involve either the notion of 'natural number' or some equivalent or stronger notion such as 'set', the notion of a model, when legitimately used, cannot serve to explain what it is to know the meaning of the expression 'natural number' (DUMMETT, 1978b, 193).

Gostaríamos então de apontar a seguinte conclusão: para não cairmos na concepção que faz apelo a uma intuição interna independente de caracterizações verbais e, consequentemente, implica o problema da posse privada do sentido (cf. seção 4.1), Dummett se apoia na extensibilidade indefinida envolvida no conceito de *número natural* e propõe que o fenômeno da incompletude seja consequência desse fato. Em razão disso, sempre que definimos uma coleção de elementos que proporciona a justificação (*ground*) de uma asserção sobre todos os números naturais, criam-se ao mesmo tempo as condições para se estender tal coleção. Por essa via abandonamos a ideia de que a incompletude se deve a um desajuste entre os sistemas formais e uma intuição privada, em que esta compreenderia verdades que aqueles não conseguiriam demonstrar.

Neste momento, vale a pena olharmos mais de perto o que propriamente torna o sentido de "número natural" vago. Podemos abordar isso de maneira particular por meio do conceito *ser um enunciado verdadeiro do sistema formal*, o qual está intrinsecamente envolvido com a noção de consistência. Tal noção, como empregada por Dummett, não é a formulada em termos puramente sintáticos, mas a que se deriva a partir da noção de correção[25] (*soundness*). Para chegarmos lá, primeiramente precisamos definir a propriedade *ser um enunciado verdadeiro do sistema formal*:

$\forall x D(x)$ é verdadeiro se todos os enunciados $D(0), D(1), D(2), \ldots$ forem verdadeiros, e falso se ao menos um não o for;

$\exists x D(x)$ é verdadeiro se ao menos um dos enunciados $D(0), D(1), D(2), \ldots$ for verdadeiro, e falso se nenhum deles o for.

Para enunciados sem quantificadores, a definição da propriedade acima é dada pela tabela-de-verdade do respectivo operador sentencial. Feito isso, assumindo-se que os axiomas do sistema formal em questão são verdadeiros e que a suas regras de

[25] Se um enunciado D for demonstrável, então D é verdadeiro, ou, por contraposição, se D for falso, então D não é demonstrável.

inferência não produzem conclusões falsas a partir de premissas verdadeiras, temos que todos os seus teoremas são verdadeiros, logo, se um enunciado D do sistema for um teorema, segue-se que $\sim D$ é falso, consequentemente, pela correção, $\sim D$ não é demonstrável, ou seja, não é um teorema. Assim, para qualquer enunciado D, se ele for um teorema, $\sim D$ não o é, o que nos permite obter a consistência do sistema, ou seja:

> Hence we may establish by an inductive argument on the length of formal proofs that each proof in the system has a true conclusion, and by another inductive argument on the number of logical constants in a statement that no statement is both true and false; concluding from this that the system is consistent (DUMMETT, 1978b, 195).

Como já observamos, para Dummett, o sentido mais usual da expressão "número natural" envolve a validade do princípio de indução para qualquer propriedade bem definida. Sendo a formalização da aritmética uma descrição do uso dessa expressão, a demonstração de consistência dada há pouco seria intuitivamente correta, tendo em vista que a propriedade *ser um enunciado verdadeiro do sistema formal* é bem definida. Contudo, considerando o sistema formal a partir dele mesmo, só podemos tomar o princípio de indução como válido para propriedades expressas *no* sistema. Aplicar o princípio de indução a propriedades não expressas no sistema mas que a ele fazem referência não é ilegítimo, porém nos leva a conclusões que o sistema não pode demonstrar, como é o caso da propriedade aqui tratada. De fato, estamos diante de um conceito indefinidamente extensível, o conceito *propriedade bem definida*[26]: em particular, a propriedade bem definida *ser um enunciado verdadeiro do sistema formal* inicialmente tem como domínio para a sua aplicação todos os enunciados demonstráveis no sistema formal, mas tão logo a caracterização das condições de sua aplicabilidade se consolidam, esse domínio se expande a sentenças indecidíveis pelo sistema.

A relação que Dummett propõe estabelecer parece ser então a seguinte: a validade do princípio de indução para qualquer propriedade bem definida é constitutiva do sentido da expressão "número natural", i.e., se alegamos compreender essa expressão, ao mesmo tempo assumimos a validade do princípio acima. Todavia, como o conceito de propriedade bem definida é indefinidamente extensível, essa característica agrega de modo inerente uma vagueza ao sentido da expressão "número natural".

Uma questão natural que se levanta diz respeito a como um conceito vago pode ser apreendido pelo seu uso: como esse tipo de semântica lida com tais conceitos? Compreender que um conceito indefinidamente extensível é vago faz parte de compreendê-lo bem. A vagueza, nesse caso, não diz respeito a uma ambiguidade ou

[26] "[T]he notion of a well-defined property is itself indefinetely extensible" (DUMMETT, 1994b, 337).

má compreensão, mas a uma característica inerente à própria correta compreensão do conceito e da sua aplicabilidade[27]. De fato, tomar um conceito indefinidamente extensível como circunscrevendo uma totalidade acabada seria a manifestação de que ele não foi bem compreendido:

> It ought here to be remarked that from the fact that a concept possesses any kind of vagueness, it cannot be inferred that there is any vagueness attaching to the notion of grasping this concept; the question whether someone understands the meaning of a certain expression may be a perfectly definite one, even though the meaning of the expression in question is itself vague (DUMMETT, 1978b, 195).

A esse respeito, Dummett apresenta os número ordinais como exemplo. Como visto na seção 4.1.1, sempre que especificamos uma coleção de números ordinais, podemos, por meio das operações de união e potência, gerar indefinidamente coleções cada vez mais inclusivas. Apesar de nunca chegarmos a uma totalidade completa, final, podemos formar uma compreensão clara a respeito do conceito *número ordinal*:

> This situation we are not tempted to interpret as if, in thus recognising the possibility of indefinitely extending any characterisation of the ordinals so as to include new ordinals, we were approaching ever closer to a perfectly definite ('completed') totality of all possible ordinal numbers, which we can never describe but of which nevertheless we can form a clear intuitive conception. We are content, in this case, to acknowledge that part of what it is to have the intuitive concept of 'ordinal number' is just to understand the general principle according to which any precise characterisation of the ordinals can be extended (DUMMETT, 1978b, 196).

No caso do conceito *número natural*, não há nenhuma indefinição no que concerne a determinar se um dado termo se aplica ou não a um número natural[28]. Todavia, essa *não vagueza* concernente a aplicações particulares do conceito não se estende a aplicações gerais, envolvendo *todos* os números naturais. Sobretudo, não implica uma noção definida de justificativa (*ground*) para asserir algo como sendo verdadeiro a respeito de todos o números naturais. E compreender isso, tal vagueza, é compreender o sentido de "número natural".

Assim, o fato de uma expressão ser inerentemente vaga não se coloca como um problema à concepção semântica de *sentido como uso*. Podemos sintetizar a justificativa dessa conclusão em dois pontos: o primeira é que a vagueza de expressões é um fenômeno recorrente na linguagem, sendo a noção de *vagueza inerente* apenas uma sub-variedade[29]; o segundo é que a descrição do uso de uma expressão vaga não é, ela mesma, vaga, ou seja, podemos compreender a vagueza inerente de expressões como "número natural" e "número ordinal", por exemplo, e fazermos

[27] Confrontar com a seção 5.1.

[28] "Whereas we can describe objects for which there is no definite answer, out of context, whether the word 'ordinal' should be applied to them or not, we cannot describe an object in such a way as to leave it indeterminate whether the expression 'natural number' should be applied to it" (DUMMETT, 1978b, 197).

[29] (DUMMETT, 1978b, 198).

um uso adequado delas, apenas temos que nos dar conta de que a caracterização do uso de tais expressões deve envolver o princípio por meio do qual ela pode ser estendida. Recusar isso seria apelar a um intuição inefável capaz de conferir um limite mítico à extensão indefinida de um conceito que não permite uma descrição completa[30].

Resumindo o que abordamos nesta seção, temos: para Dummett, o sentido das sentenças aritméticas é entendido como uso, o qual pode ser publicamente manifestado. O uso, por sua vez, seria descrito pela formalização. Contudo, o teorema de Gödel demonstra que a formalização é insuficiente para exprimir tudo o que intuitivamente reconheceríamos como verdadeiro. Nossa primeira reação seria então admitir uma intuição interna de modelo impassível de ser caracterizada formalmente, o que nos levaria a uma concepção semântica subjetivista. Contra isso, a sugestão de Dummett consiste em propor que o conceito *número natural* é inerentemente vago (tal vagueza não impõe um empecilho à noção de sentido como uso, vale lembrar), consequência do fato de que a classe de justificações (*grounds*) para asserir algo sobre todos os números naturais é indefinidamente extensível.

Além disso, Dummett (1978b, 199-201) esboça algumas conclusões sobre como a sua proposta se enquadra no contexto do intuicionismo matemático. Um intuicionista considera que uma demonstração matemática consiste numa construção mental, a qual pode ser representada num sistema simbólico, mas não pode a ele ser identificado. Isso quer dizer que em geral não há um isomorfismo entre as demonstrações obtidas em alguma teoria matemática e as demonstrações obtidas num certo sistema formal (entendido como "totalidades de estruturas simbólicas especificadas de maneira determinante"). Mas de acordo com o mesmo autor, seria exatamente isso o que o teorema de Gödel ratifica, i.e., que nem todos os princípios de demonstração que aceitamos intuitivamente podem ser suscetíveis a uma formalização num determinado sistema. Dessa forma, se pretendemos que o sentido de um enunciado matemático seja caracterizável em termos do que seria a sua demonstração, devemos nos referir à noção "inerentemente vaga de demonstração intuitivamente aceitável", não à de demonstração num dado sistema formal.

A perspectiva proposta por Dummett nos sugere que, na interpretação do teorema da incompletude de um ponto de vista intuicionista, a realidade matemática é tida como inacabada. Assumindo-se que sempre pode ser estendida, tal realidade é construída indefinidamente. Por outro lado, colocando-se numa posição diametralmente oposta, a interpretação realista do teorema da incompletude diz que o que se encontra inacabado são os sistemas formais, pois mesmo estendendo-os indefinidamente nunca serão suficientemente completos para capturar toda a realidade

[30](DUMMETT, 1978b, 198).

matemática, que neste caso é considera determinada, perfeita.

Para um realista, nosso conhecimento é incompleto, mas o expandimos à medida que fazemos *descobertas* sobre uma realidade – fixa e já determinada – que se revela para nós. Por outro lado, para um intuicionista, o conhecimento se expande à medida que constrói, por meio de seus critérios, a realidade que justifica a sua verdade. Não havendo, portanto, uma realidade independe que, por insinuar regiões desconhecidas, estabeleceria uma defasagem de conhecimento, no intuicionismo, o que se conhece sempre se constitui daquilo que pode justificar a si mesmo: não há uma realidade e um conhecimento incompleto diante dela, ou seja, essas duas categorias se encontram sempre no mesmo nível (o que não conhecemos não existe). Não obstante, o conhecimento, nesses termos, não pode ser considerado uma totalidade completa, já que é indefinidamente extensível. É por essa via que podemos conceber a ignorância – o desconhecido –, uma vez que ignoramos o que a extensão do conhecimento pode alcançar.

Nesses termos, um intuicionista poderia ser acusado de que, na sua concepção, o conhecimento é arbitrário, visto que, num certo sentido, quem busca o conhecimento é o mesmo que constrói a realidade que o justifica. Por outro lado, um realista se encontra sempre sob a suspeita de que o conhecimento que acredita ter não corresponde à realidade.

4.2 A tese de Church no contexto antirrealista

Nesta seção, analisaremos uma citação na qual Dummett afirma que, se assumirmos a tese de Church mais o princípio antirrealista de que a demonstração de uma dada sentença de uma certa teoria matemática é efetivamente reconhecível, contrariamos o teorema da incompletude.

A tese de Church propõe a identificação extensional entre a noção informal de computável e a noção formal de função recursiva. Levando em consideração a noção de conjunto, se possuirmos um método efetivo que nos possibilite dizer quando um objeto arbitrário pertence a um certo conjunto, dizemos que tal conjunto é computável, o que nos permite afirmar, por meio da tese de Church, que um conjunto é computável se e somente se ele for recursivo. Uma outra noção empregada é a de *conjunto efetivamente enumerável*, que diz respeito aos conjuntos cujos elementos podem ser computavelmente listados – uma propriedade mais *fraca* que a anterior, no sentido de que, a despeito de se poder listar todos os elementos do conjunto, não é possível, diante de um objeto arbitrário, afirmar por meio de um procedimento computável se ele pertence ou não ao conjunto em questão. Assim, mais uma vez pela tese de Church, temos que um conjunto arbitrário Γ é efetivamente enumerável se e somente se ele for recursivamente enumerável:

(1) (Γ é efetivamente enumerável) $\leftrightarrow$ (Γ é recursivamente enumerável).

Devido a um teorema atribuído a Craig, temos que se um conjunto de sentenças for recursivamente enumerável, segue-se que esse conjunto é axiomatizável:

(2) (Γ é recursivamente enumerável) $\rightarrow$ (Γ é axiomatizável).

Supondo "Γ é efetivamente enumerável", a partir dessas duas premissas destacamos "Γ é axiomatizável". Eliminando essa hipótese por meio da regra de introdução da implicação, obtemos:

(3) (Γ é efetivamente enumerável) $\rightarrow$ (Γ é axiomatizável).

Recorrendo ao teorema da incompletude, de Gödel, podemos dizer que os axiomas da aritmética elementar são insuficientes em derivar todas as sentenças verdadeiras dessa teoria, ou seja, o conjunto composto por essas sentenças, que denotaremos por N, não é axiomatizável:

(4) $\sim$ (N é axiomatizável).

Aplicando *modus tollens* às proposições 3 e 4, além de considerar a substituição de Γ por N, já que aquele símbolo compõe uma proposição de caráter esquemático, segue-se:

(5) $\sim$ (N é efetivamente enumerável).

O objetivo de concluir isso[31] é apontar que a proposição (5) entra em conflito com o intuicionismo de Dummett (ao qual também nos referiremos como antirrealismo), que, de acordo com Cogburn (2002, 5), implica que o conjunto das sentenças verdadeiras da aritmética elementar é efetivamente enumerável.

Seu argumento se apoia em três noções centrais da filosofia de Dummett: (a) verificacionismo, (b) manifestabilidade da compreensão e (c) molecularismo. De modo geral, essas noções podem ser sumariadas da seguinte maneira: (a) uma asserção matemática é verdadeira desde que se possa apresentar a sua demonstração;

[31] Cf. (COGBURN, 2002, 4-7) e teoremas 6.1, 6.2 e 26.5 em (SMITH, 2013).

(b) compreendemos o sentido de uma sentença matemática quando sabemos reconhecer a sua demonstração[32]; (c) duas condições estão envolvidas nessa noção, a propriedade de subfórmula e a propriedade de extensão conservativa, configurando assim o anti-holismo do programa dummettiano, que se opõe à ideia de que uma sentença possa ser demonstrada apenas numa teoria mais rica que a teoria onde a sentença foi originalmente formulada[33]. A primeira propriedade requer que, numa demonstração de uma fórmula Q a partir das premissas $P_1,...,P_n$, toda fórmula ocorrendo nessa demonstração deve ser uma subfórmula de Q ou de alguma das premissas $P_1,...,P_n$ – vale lembrar que uma fórmula é subfórmula de si mesma. Quanto à outra propriedade, ela requer que as regras que operam as constantes lógicas que ocorrem no argumento $P_1,...P_n$, *então* Q sejam suficientes para a sua demonstração.

A enumeração efetiva das sentenças verdadeiras da aritmética se daria da seguinte maneira: começamos enumerando todas as sequências de fórmulas da aritmética; pelo princípio de manifestabilidade da compreensão, segue-se que sabemos reconhecer, diante de uma sequência arbitrária, se ela constitui ou não uma demonstração da fórmula que lhe ocorre como último elemento; percorrendo ordenadamente as sequências enumeradas e tomando nota das fórmulas demonstradas, conseguimos listar todas as sentenças verdadeiras, permitindo-nos assim concluir que o conjunto N é efetivamente enumerável[34].

Cogburn considera algumas objeções à possibilidade de fazer tal enumeração efetiva, das quais ele se esquiva lançando mão das duas outras noções ((a) e (c)) que sustentam o intuicionismo de Dummett. Poder-se-ia alegar, com efeito, que, existindo demonstrações corretas não contempladas em nenhuma das sequências enumeradas, N seria apenas um subconjunto do conjunto que conteria *todas* as sentenças aritméticas verdadeiras. Tal condição, todavia, não seria viável no âmbito do antirrealismo. Consideremos P uma sentença verdadeira da aritmética, mas que não é demonstrada por nenhuma das sequências enumeradas. Isso se daria ou porque (1) P é uma sentença verdadeira indemonstrável; ou porque (2) a demonstra-

[32]Ou seja, sendo P uma sentença matemática, e p uma demonstração que é dita ser de P, conhecemos o sentido desta – e o manifestamos – quando sabemos dizer se p pode ou não ser considerada a sua demonstração.

[33]"When an expression, including a logical constant, is introduced into the language, the rules of its use should determine its meaning, but its introduction should not be allowed to affect the meaning of sentences already in the language. If, by its means, it becomes possible to derive certain such sentences from other such sentences, then either their meanings *have* changed, or those meanings were not, after all, fully determined by the use made of them. [...] The introduction of the new constant has created new criteria for the truth of statements not containing it" (DUMMETT, 1991, 220, grifo do autor).

[34]Nas palavras de Cogburn e Megill (2010, 4): "this procedure will ultimately yield an effective enumeration of the set of truths of elementary arithmetic. That is, the Dummettian inferentialist, committed as she is to the manifestation requirement, must hold that the human mind can effectively enumerate the set of truths of elementary arithmetic".

ção de *P* exige recursos que não se encontram disponíveis na teoria da aritmética elementar. A primeira opção é inviável devido ao princípio verificacionista, que equaciona verdade e demonstrabilidade, i.e., uma sentença não pode ser verdadeira se não possuímos a sua demonstração: "a core tenet of Dummett's inferentialism is the verificationist identification of truth with provability. For the Dummettian, one is a Platonist precisely to the extent that one countenances unprovable truths"[35]. Quanto à segunda opção, Cogburn e Megill (2010, 8) nos convidam a considerar o seguinte exemplo: seja *P* uma sentença que faz uma alegação no âmbito da aritmética elementar, mas cuja demonstração envolve pesquisas avançadas em topologia. Consequentemente, de acordo com o princípio de manifestabilidade, a compreensão de *P* exigiria a capacidade de reconhecer demonstrações avançadas em topologia, a despeito da sentença consistir apenas numa alegação concernindo a aritmética elementar. Esse modo de conceber o sentido de *P* imporia uma forma de holismo não admitida pelo intuicionismo dummettiano:

> [H]olism admits no way of explaining, in terms of the structure of a given statement, how a proof of it is to be recognised as such. [...] For the holist, our understanding of the statement, in so far as we understand it fully, simply *resides* in the knowledge we possess of the whole of mathematics. For the intuitionist, it does not. [...] It therefore reflects only our understanding of the constituents of that particular statement, rather than a piece of background knowledge which, as a whole, informs our understanding of every mathematical statement (DUMMETT, 1991, 226-227, grifo do autor).

Tal anti-holismo se ratifica pelo princípio de molecularismo, que como vimos, uma de suas características é dada pela propriedade de conservação extensiva. No exemplo dado há pouco, sendo *P* demonstrável apenas numa teoria topológica, isso revela que a linguagem desta teoria não seria uma conservação extensiva da linguagem da aritmética.

Chegamos, por fim, à seguinte conclusão: a tese de Church, o teorema de Craig e o teorema da incompletude implicam que o conjunto *N* das sentenças verdadeiras da aritmética não é efetivamente enumerável, o que entra em contradição com a conclusão obtida a partir dos princípios que compõem o programa intuicionista de Dummett, a saber, que o conjunto *N é* efetivamente enumerável. Logo, para assumirmos esse programa, alguma das premissas que sustentam a enumerabilidade efetiva de *N* deve ser negada. Como os resultados de Craig e Gödel são teoremas da lógica, a opção que resta é negar a tese de Church. Assim, por introdução da negação, compõe-se um argumento demonstrando que o intuicionismo de Dummett implica a falsidade da tese de Church[36].

Cogburn (2002, 3) acredita que esse é o argumento que está por trás da seguinte citação elíptica de Dummett, a qual diz que a assunção da tese de Church no

[35](COGBURN; MEGILL, 2010, 5).

[36]Cf. (COGBURN, 2002), (COGBURN, 2003, nota 3) e (COGBURN; MEGILL, 2010).

contexto intuicionista nos colocaria em conflito com o teorema da incompletude:

> As for Church's Thesis, this is not particularly plausible from an intuitionistic standpoint. The assumption that we can effectively recognize a proof of a given statement of some mathematical theory, say elementary number theory, lies at the basis of all intuitionistic mathematics; but to hold that there is any recursive procedure for recognizing proofs of arithmetical statements would be to run foul of Gödel's Incompleteness Theorem (DUMMETT, 2000, 264).

Como indício de coerência da posição de Dummett com relação a essa interpretação, Cogburn e Megill (2010, 9, n. 4) ainda destacam que não se deve tratar de uma questão acidental o fato dele, a despeito da tese de Church ser empregada como premissa em alguns argumentos intuicionisticamente válidos, procurar meios que não utilizam essa premissa.

Apresentado o argumento de Cogburn, devemos reconhecer que, à primeira vista, ele parece se sustentar por uma premissa bastante implausível, a que diz que podemos enumerar efetivamente todas as sequências de fórmulas da aritmética. O próprio autor reconhece isso numa nota de rodapé:

> Petr Hájek noted (p. c.) that one might interpret (DUMMETT, 1978b) as an argument that the sentences of number theory are not themselves recursively enumerable; and hence for the Dummettian no such enumeration might be possible. As I argue below, in the context of my argument, this would run afoul of Dummett's other commitments. More importantly though, holding that the language of number theory is not recursively enumerable would itself involve denying Church's Thesis, as long as one believed that *the human mind possesses a procedure by which to tell whether a given sentence is a sentence of number theory*. Thus, this objection blocks the argument only at the price of affirming its conclusion (COGBURN, 2002, 5, n. 7, grifo nosso).

Concordamos com os dois primeiros períodos da citação, mas discordamos com o restante dela. A nosso ver, a resposta presente na nota supracitada possui um equívoco semelhante ao cometido por Kálmar (cf. a seção 3.1). Na ocasião da seção que dedicamos a esse autor, vimos que o método que ele sugere para "computar" a função Ψ se caracteriza por procedimentos não mecânicos, os quais pressuporiam a evolução da pesquisa matemática ao longo dos anos. Desse modo, uma vez não se tratando de um método efetivo, seu argumento contra a tese de Church cai por terra. Podemos fazer aqui a mesma crítica. O fato da mente humana ser capaz de reconhecer sentenças da teoria dos números não garante, por si só, que esse reconhecimento se dá por um procedimento que possa ser dito efetivo. Logo, podemos negar a enumerabilidade recursiva de sequências de fórmulas da teoria dos números, ainda que acreditemos que a mente humana é dotada de um procedimento não efetivo capaz de reconhecer sentenças aritméticas. Em outras palavras, a negação da tese de Church alegada na citação acima se daria apenas se o procedimento que a mente humana possui de reconhecer sentenças da teoria dos números fosse *efetivo*[37].

[37] É interessante observar em (GÖDEL, 1990b), numa pequena nota intitulada *A philosophical error in Turing's work*, o seguinte comentário:

De fato, uma das conclusões do artigo de Dummett sobre o teorema de Gödel consiste em dizer que o que podemos reconhecer como uma demonstração matemática não se reduz a representações de demonstrações em sistemas formais:

> [A] mathematical proof or construction is essentially a mental entity, something that may be capable of being *represented* by an arrangement of symbols on paper, but cannot be *identified* with it. [...] the class of intuitively acceptable proofs is an indefinitely extensible one; but it is clear that the intuitionists are right in claiming that, if the sense of mathematical statements is to be given in terms of the notion of a mathematical proof, it should be in terms of the inherently vague notion of an intuitively acceptable proof, and not in terms of a proof within any formal system (DUMMETT, 1978b, 200-201, grifo do autor).

Nesse sentido, se no intuicionismo não podemos reduzir a noção intuitiva de demonstração a uma noção formal, a hipótese do argumento de Cogburn que diz que as sequências de fórmulas da aritmética são efetivamente enumeráveis é de pronto inviabilizada, dado que a noção intuitiva de demonstração extrapola o âmbito de sistemas axiomáticos efetivos, onde poderíamos ter a enumeração efetiva de suas sequências de fórmulas. Cremos que essa tenha sido a observação de Petr Hájek.

Assim, para que o argumento se sustente, é preciso argumentar que os princípios de verificacionismo, manifestabilidade da compreensão e molecularismo, alicerces do programa dummettiano, nos conduzem inevitavelmente a um formalismo, ou, ao menos, à possibilidade de enumerar efetivamente sequências de fórmulas da aritmética. Isso parece ser o que o segundo período da nota de rodapé citada diz. A seguir, indo além do que encontramos nos textos de Cogburn, tentaremos tornar plausível essa hipótese.

Acima, o princípio de manifestabilidade da compreensão foi proposto como sendo a capacidade de reconhecer o que verifica aquilo que uma dada sentença afirma. O termo "manifestabilidade" induz a ideia de que o conhecimento do sentido deve manifestar-se publicamente, o que se atesta pela circunstância de um falante da linguagem onde a sentença foi formulada poder dizer, *diante* do que é *apresentado* como uma verificação da sentença, se tal verificação é ou não correta. Restringindo esse princípio ao âmbito da matemática, dizemos que compreendemos o sentido de uma dada sentença quando, diante do que se propõe como a sua demonstração, somos capazes de reconhecê-la como tal:

> Turing in his [(TURING, 1936, 250)], gives an argument which is supposed to show that mental procedures cannot go beyond mechanical procedures. However, this argument is inconclusive. What Turing disregards completely is the fact that *mind, in its use, is not static, but constantly developing*, i.e., that we understand abstract terms more and more precisely as we go on using them, and that more and more abstract terms enter the sphere of our understanding. There may exist systematic methods of actualizing this development, which could form part of the procedure (grifo do autor).

Acreditamos que Gödel interpretou Turing de maneira equivocada. Este não pretendia identificar procedimentos mentais, como um todo, a procedimentos mecânicos. Tal identificação se restringe apenas aos procedimentos mentais que consideramos como correspondentes a um ato humano, ainda que idealizado, de calcular (cf. (SHAGRIR, 2006), que também sugere isso como uma interpretação possível). Assim, Kalmár e, agora, Cogburn parecem cometer o mesmo tipo de engano, o de desconsiderar que nem todo procedimento executado pela mente humana é mecânico.

> [O]ur understanding of a mathematical statement does not reside in our grasp of what it is for the statement to be true, independently of any proof of it, but rather in our capacity to recognise a proof or a disproof of the statement when we see one (DUMMETT, 1978d, 361).

Todavia, como observa Koss (2013, 64), o vínculo entre a compreensão de uma sentença e a capacidade de reconhecer a sua verificação nem sempre é tão plausível quanto inicialmente pode parecer. A esse respeito, o autor sugere que tomemos como exemplo a sentença que exprime o que ficou conhecido como o último teorema de Fermat:

$$\sim \exists a \exists b \exists c \exists n\ (n > 2\ \wedge\ a^n + b^n = c^n).$$

Todas as suas variáveis têm como domínio o conjunto dos números naturais. A despeito da sentença poder ser expressa de modo tão simples na linguagem da aritmética elementar, a sua demonstração, devida ao matemático britânico Andrew Wiles, é enormemente complexa, a qual foi apresentada num artigo de 109 páginas, cuja compreensão está restrita a um seleto grupo de profissionais avançados da matemática. Desse modo, de acordo com o princípio de manifestabilidade da compreensão, apenas esse grupo restrito de matemáticos seria capaz de compreender o sentido da sentença acima, já que somente eles poderiam reconhecer aquela demonstração. No entanto, isso soa estranho, tendo em vista que é difícil negar que qualquer matemático seria capaz de compreender o que a sentença exprime, dada a sua formulação bastante elementar.

Uma implausibilidade semelhante também insurge contra o princípio de manifestabilidade quando nos referimos a somas de números muito grandes, que extrapolariam a capacidade da mente humana de pensá-los ou escrevê-los. Como não podemos reconhecer os cálculos de tais números e o respectivo resultado, nossa compreensão sobre o que seria somá-los seria colocada em questão, "and it is a mistake to make one's understanding of addition contingent on the computational resources of the human mind"[38].

O que podemos notar a partir desses casos é que o princípio de manifestabilidade da compreensão se torna problemático se o entendermos como exigindo que a compreensão de uma sentença matemática está relacionada à capacidade de reconhecermos *qualquer* demonstração correta a ela vinculada que possamos nos deparar. Assim, de acordo com Koss (2013, 65), o melhor que poderia ocorrer a um intuicionista que assume esse princípio seria poder restringi-lo a um tipo particular de demonstração, cujo reconhecimento esteja intrinsecamente ligado à compreensão do sentido da sentença por ela demonstrada, ou seja, para cada sentença mate-

[38](KOSS, 2013, 65).

mática em particular seria possível identificar uma *única* demonstração que serviria de referência para nos dizer se compreendemos ou não a sentença em questão.

Dummett se volta a esse problema ao reconhecer que uma demonstração construtivamente válida – tal como encontramos escrita numa publicação matemática – não emprega explicitamente suas palavras e símbolos com o mesmo sentido em que eles são empregados na semântica construtiva das constantes lógicas, i.e., as demonstrações usuais que um matemático lida, ainda que possam ser válidas de um ponto de vista construtivo, não se conformam de maneira imediata às cláusulas BHK:

> Are we, then, to say that any (constructively) valid written proof, such as might appear in an article in a mathematical journal or in a textbook, is, considered relative to the intended meanings of the words and symbols employed, a proof in the sense in which this word is used in the explanations of the logical constants? It seems to follow from the character of those explanations themselves that we are not (DUMMETT, 2000, 270).

Isso leva Dummett a propor uma distinção entre *demonstração* e *prova canônica*. Esta realiza de maneira explícita as características elucidadas pelas cláusulas BHK, ao passo que uma demonstração se adéqua (indiretamente) a tais cláusulas apenas quando nos fornece meios efetivos de construirmos uma prova canônica. Numa demonstração, um enunciado da forma $A \vee \sim A$ pode ser asserido em um de seus passos, não porque se tem uma demonstração de um desses disjuntos, como requer a cláusula BHK referente a esse conectivo lógico, mas pelo fato de possuirmos um método efetivo que nos forneça a demonstração de uma das sentenças componentes, como no caso em que A é decidível. Na mesma direção, podemos encontrar a asserção de $\exists x\, A(x)$ numa demonstração, não porque demonstramos diretamente $A(c)$, em que c está para um elemento do domínio, mas em virtude da demonstração fornecer um método efetivo que nos permita identificar um elemento que realize $A(x)$:

> We thus appear to be forced to acknowledge a distinction between a proof, in the strict sense of the word, and a mere demonstration, the latter being related to the former by the fact that *a demonstration supplies an effective means of constructing an actual proof*. [...] the primary notion is that of a proof in the strict sense, which we shall refer to as a canonical proof: the notion of a demonstration is a secondary one, definable in terms of that of a canonical proof; and it is by reference to the notion of a canonical proof that the logical constants are to be explained (DUMMETT, 2000, 271, grifo nosso).

Com a noção de prova canônica, o problema envolvendo o princípio de manifestabilidade pode ser contornado. A compreensão do sentido de uma sentença não estaria mais vinculada à capacidade de reconhecermos *qualquer* demonstração concernindo tal sentença, mas apenas à capacidade de reconhecermos a sua prova canônica. Nesta, todos os seus passos dedutivos são articulados de maneira explícita, de modo que a evidência de cada inferência repousa nela mesma, sem a pressuposição de um conhecimento que vá além do que está sendo inferido. Além do mais, a validade de cada regra inferencial empregada numa prova canônica pode ser diretamente verificada, bastando apenas confrontar a sua aplicação com a cláusula BHK que lhe diz respeito. Nessas condições:

> Ultimately, canonical proofs are what matter for the semantic antirealist's theory of meaning and understanding. In order for the antirealist to allow that somebody can understand Fermat's Last Theorem without understanding Wiles's complicated demonstration of it, he must have recourse to the existence of a canonical proof of the theorem, which proof can be extracted from the demonstration by an effective method. Understanding a statement of the theorem can then be taken to consist in the ability to recognize this canonical proof as a correct proof of the statement (KOSS, 2013, 66).

Em suma, a noção de prova canônica se revela importante para o princípio de manifestabilidade porque possibilita que a relação entre uma sentença e uma alegada prova seja decidível, i.e., dada uma sentença e uma prova canônica, podemos afirmar por meio de um método efetivo se essa sentença pode legitimamente ocorrer como conclusão dessa prova[39].

Mas não só do princípio de manifestabilidade vive a noção de prova canônica, a teoria do sentido proposta por Dummett precisa dela para se livrar de outros problemas. Orientando-nos pelo artigo de Weiss (1997, 268-269), identificamos os três pontos seguintes, todos eles relacionados à questão da molecularidade e ao risco de nos envolvermos com alguma forma de holismo:

(a) Circularidade: na elucidação semântica do conectivo $\rightarrow$, por exemplo, diz-se que possuímos uma demonstração de $A \rightarrow B$ desde que tenhamos um método que transforme *qualquer* demonstração de A numa demonstração de B. Temos assim uma quantificação envolvendo *todas* as demonstrações do antecedente, logo, não havendo nenhuma restrição sobre a complexidade das sentenças envolvidas em tais demonstrações, a própria sentença sendo demonstrada pode estar sendo pressuposta numa delas. Em última instância, isso implica que o sentido do condicional não seria dado em termos de um fragmento da linguagem, rompendo dessa forma com o princípio de molecularidade[40].

(b) Vacuidade: tomemos mais uma vez a implicação como exemplo. Se não houver nenhuma restrição sobre o que conta como uma demonstração desse conectivo, pode-se dar o caso vácuo de utilizarmos *modus ponens* da seguinte maneira: empregamos a demonstração de $A \rightarrow B$ como o método que transforma qualquer demonstração de A numa demonstração de B, i.e., seja p a

[39] Sundholm (1986, 493), quanto à decidibilidade da noção de prova canônica, se exprime da seguinte maneira: "Is it in fact true that the notion of proof is decidable? On our presentation at least this much is true: if we already have a proof it is decidable if it is in canonical form".

[40] Cf. (DUMMETT, 2000, 269-270).

construção que demonstra $A \to B$, assim, basta aplicar p à construção que demonstra A para, por meio de *modus ponens*, obtermos a construção que demonstra B[41].

(c) Suplementação: por vezes precisamos de um argumento suplementar que nos convença que uma alegada construção cumpre os requisitos para que ela seja considerada uma demonstração. Desse modo, a capacidade de reconhecer uma construção que demonstra uma certa sentença dependeria, também, da capacidade de seguir tal argumento suplementar, o qual pode não se enquadrar nas restrições envolvidas nas caracterizações das demonstrações estipuladas na elucidação do sentido das constantes lógicas, comprometendo-nos assim com alguma forma de holismo:

> Of certain operations, we may be able to recognize immediately that they carry any proof of A into a proof of B, and then they can by themselves serve as proofs of $A \to B$: but, for other operations, it may not be obvious that they do this, although it is possible to give a proof that they do; and, in such a case, what constitutes the proof of $A \to B$ will not be just the operation on its own, but it together with the proof that carries any proof of A into a proof of B (DUMMETT, 1977, 399).

De acordo com Dummett, se o sentido de uma constante lógica for compreendido por meio do que seria a prova canônica da sentença em que ela ocorre, as dificuldades acima podem ser superadas. Tal noção de prova canônica tem como base a noção de demonstração normal, oriunda dos sistemas de dedução natural. Uma demonstração normal consiste numa derivação onde não ocorrem *fórmulas máximas*, i.e., uma fórmula inferida por uma regra de introdução e imediatamente submetida a uma regra de eliminação concernindo a constante lógica recém-introduzida. Um importante resultado em dedução natural é o de que toda demonstração pode ser normalizada – a ocorrência de qualquer fórmula máxima pode ser eliminada por um procedimento de *redução*[42]. Como corolário desse resultado, tem-se a propriedade de subfórmula que mencionamos acima: toda fórmula que ocorre na derivação é subfórmula da conclusão ou de alguma de suas premissas[43]. Com isso, medindo a complexidade de uma sentença por meio do número de constantes lógicas que nela ocorrem, as quais são introduzidas ou eliminadas pelas regras de introdução

[41]No caso do quantificador universal, o problema se manifestaria de modo semelhante: "Whatever we chose to accept as being a proof of $\forall x\, A(x)$, it would, provided that it itself conformed to the canons of ordinary informal proof, supply us with an effective means of finding, for any term t, a proof of $A(t)$, namely by simply appending to the proof of $\forall x\, A(x)$ a single application of universal instantiation" (DUMMETT, 2000, 271). Cf. também (DUMMETT, 1978c, 241). Para uma crítica ao argumento de Dummett, cf. (FERNÁNDEZ-DÍEZ-PICAZO, 1997, 138-139).

[42]Cf. (PRAWITZ, 2006, capítulos II e III).

[43]Se a fórmula concluída for uma verdade lógica, toda fórmula presente na derivação é subfórmula da conclusão, tendo em vista que verdades lógicas não dependem de nenhuma premissa não descartada.

ou eliminação, sua complexidade não ultrapassa a complexidade da conclusão ou da premissa mais complexa que compõe a demonstração da qual faz parte, permitindo assim que as demonstrações normalizadas sejam ordenadas por uma relação de ordem parcial. Tal ordenação resolve o problema da circularidade:

> The threat that the intuitive explanations of the logical constants may be viciously circular can be averted if it is found to be possible to impose on canonical proofs a hierarchy, according to their complexity, such that the complexity of the proof matches the complexity of the statement proved. Then if any given statement can be proved at all, it can be proved by a canonical proof whose complexity does not exceed a bound depending on the structure of the statement (DUMMETT, 2000, 272).

Assim, no caso de um condicional $A \to B$, ao se falar de um método que transforma qualquer demonstração de A numa demonstração de B, restringimos o domínio de aplicação desse método a demonstrações cuja complexidade seja limitada pela complexidade da sentença A, impendido dessa maneira que o próprio condicional – mais complexo que o antecedente – esteja envolvido em alguma das demonstrações presentes no domínio do método em questão. Garantido isso, o princípio de molecularidade se mantém válido, pois a compreensão de uma dada sentença poderá se limitar à compreensão de um fragmento da linguagem que não contém sentenças mais complexas do que a sentença que se pretende compreender[44].

O segundo problema é resolvido pela condição relacionada ao fato de que toda prova canônica se conclui com uma regra de introdução. Como a vacuidade se deve às regras de eliminação, ela se torna inviável quando o sentido das constantes lógicas é dado em termos de provas canônicas[45].

Quanto ao último problema, Dummett nos remete à sua discussão sobre o teorema da barra, de Brouwer. Neste caso, uma elucidação intuicionista da implicação exige que, para cada sentença A, devemos ter condições de enunciar um axioma que tenha a forma "$A \;\to\;$ existe uma demonstração de A de tal ou tal tipo". Tal axioma, conforme a estrutura de A, imporia certas restrições na forma da demonstração, explicitando todas as condições exigidas pela demonstração de um condicional[46]. Desse modo, para cada sentença C, teríamos uma sentença C^*, um condicional cujo consequente é C, e cujo antecedente é composto por uma conjunção de axiomas da forma "$A_i \;\to\;$ existe uma demonstração de A_i de tal ou tal tipo", onde cada A_i é uma sentença que compõe a sentença C. Assim, ao invés de considerarmos as normalizações das demonstrações que constituem o conjunto de demonstrações de C, consideraríamos as normalizações do conjunto de demonstrações de C^*, o que nos possibilitaria a seguinte conclusão: "There is now no obstacle to regarding a

[44](DUMMETT, 1977, 395).

[45](WEISS, 1997, 269).

[46]De maneira análoga, esse recurso seria empregado em sentenças envolvendo o quantificador universal, com a diferença de que os axiomas seriam utilizados para estabelecer a estrutura do domínio de quantificação.

canonical proof of C as analogous to a normalized proof of C^* (rather than of C itself). There will therefore still be a bound on the complexity of canonical proofs of any given statement" (DUMMETT, 1977, 400). Concluindo, por vezes precisamos recorrer a um argumento suplementar para garantirmos que, de fato, qualquer demonstração do antecedente é transformável numa demonstração do consequente, pois, como Weiss (1997, 270) observa, de acordo com a compreensão intuicionista de um condicional[47], uma demonstração de A a partir de B consiste numa demonstração de B a partir de um conjunto de demonstrações possíveis de A, não a partir da mera hipótese de A. Nesse sentido, apelando ao recurso de considerar as demonstrações de uma sentença como C^*, onde para cada uma de suas sentenças constituintes há um axioma da forma descrita acima, o argumento suplementar se daria numa complexidade e estrutura previsíveis, permitindo sua normalização e consequente equiparação a uma prova canônica de C. Em última instância, demonstrar C por meio de uma demonstração de C^* permite que a estrutura da demonstração desta esteja relacionada à estrutura da própria sentença C^*, permitindo, portanto, a manutenção da concepção antirrealista de que compreendemos uma sentença quando sabemos reconhecer o que seria a sua demonstração.

O próprio Dummett admite que todas essas considerações sobre a noção de prova canônica possuem um caráter "altamente programático"[48], e que, até então, nem mesmo para a aritmética de primeira ordem uma noção detalhada de prova canônica havia sido proposta. Além disso, ele ressalta a seguinte condição conflitante: se uma concepção detalhada da noção de prova canônica for obtida, e por meio dela se fundar a elucidação intuicionista das constantes lógicas, obteremos uma "axiomatização completa da matemática intuicionista"[49], o que iria de encontro ao resultado de Gödel sobre a incompletude dos sistemas formais, que, como vimos neste capítulo, é interpretado pelo intuicionismo como dizendo que a noção de demonstração intuitiva não pode ser reduzida à de demonstração num certo sistema formal.

Nesse ponto, Dummett recorre mais uma vez à sua noção de conceitos indefinidamente extensíveis, agora aplicando-a ao conceito de demonstração:

> [T]he totality of methods of proof, within a given mathematical theory, is likely to be an indefinitely extensible one: certain methods of reasoning intuitively acceptable to us can be carried out only after we have achieved a formulation of some range of methods of proof not including them (DUMMETT, 1977, 401).

[47] Pelo menos no intuicionismo dummettiano, diríamos. Cf. nossa discussão sobre juízos hipotéticos acima (seção 3.5.1). É difícil dizer exatamente qual é a posição de Dummett, mas pelo que Weiss (1997, 270) sugere, ele aparentemente contraria a ideia de que, na demonstração de um condicional, a posse *atual* do objeto-prova do antecedente não é necessariamente pressuposta.

[48] (DUMMETT, 1977, 400).

[49] (DUMMETT, 1977, 401).

Disso, ele conclui que, desde de um ponto de vista construtivista – que se refere à própria atividade matemática enquanto tal, não a uma realidade independente do conhecimento, como seria no platonismo –, o sentido atribuído aos enunciados matemáticos está submetido a um processo de constante mudança, tendo em vista que ele se constitui a partir dos métodos de demonstração que *atualmente* temos posse. Como vimos, apelando a um recurso como o de invocar os axiomas presentes na sentença da forma C^*, pretende-se que a forma de uma sentença e a estrutura da demonstração que poderemos reconhecer como sendo de fato a sua demonstração estejam relacionados. Contudo, dado que o advento de novos métodos de demonstração nos faz rever o sentido das constantes lógicas, o que num dado momento poderia ser considerado a demonstração de uma certa sentença pode deixar de ser visto como tal num momento posterior:

> [P]rovability is not a stable property: we cannot think of an addition to our stock of methods of proof as merely allowing us to prove more than we could before, while all the proofs we had already given remain intact, since such an addition may lead to a rejection of certain earlier proofs. [...] mathematics become a subject whose results are fallible and liable to revision, like those of other sciences (DUMMETT, 1977, 402).

Em todo caso, apesar do sentido das sentenças matemáticas flutuar, porque o que seria a sua prova canônica se modifica de acordo com o progresso da matemática, Dummett insiste que não devemos identificar o sentido a algum modo de raciocínio que incidentalmente possamos no futuro reconhecer como válido. Assim, para cada estágio do desenvolvimento da matemática, o sentido de uma sentença deve referir-se a uma noção de demonstração disponível e adequada a tal momento, ou seja, ainda que uma sentença tenha o sentido alterado ao longo desses estágios, *em cada um deles* o seu sentido é específico.

Prawitz (1987, 158-159) critica Dummett. Ele considera estranho e contrário à nossa experiência a alegação, consequente da noção acima de prova canônica, de que o surgimento de novas formas de raciocínio na matemática colocaria em dúvida as demonstrações já obtidas. Além do mais, acrescenta Prawitz, Dummett estaria no final das contas adotando uma concepção holista da linguagem[50]: o teorema da incompletude diz que, apesar de uma certa sentença poder ser indecidível num sistema formal capaz de exprimir a aritmética elementar, nada impede que ela possa vir a ser demonstrada por meio da introdução de conceitos e princípios alheios à teoria formalizada, de forma que "não podemos de modo algum estabelecer qualquer restrição formal sobre como tal sentença pode ser demonstrada". Desse modo, se concordamos com Dummett, cada vez que tais conceitos e princípios novos são introduzidos, as contantes lógicas ganham um novo sentido e as restrições formais são

[50]"[T]o say that the meaning of $\rightarrow$ and $\forall$ changes because of the new mathematical developments seems implausible in general; and in particular, it is to adopt a kind of holistic picture of language, after all" (PRAWITZ, 1987, 159).

rearticuladas, ou seja, o holismo se manifesta no sentido de que, cada vez que o formalismo encontra seus limites, há toda uma nova linguagem a ser considerada, que submetida a uma formalização, estabelecerá uma outra noção de prova canônica:

> The charge of holism appears credible in virtue of the fact that the notion of canonical proof is explicated by reference to a formalism of the whole of the language. So when the formalisation is transcended wholesale changes of meaning occur: we have a new language which, considered as a whole, must again be the subject of formalisation. It now looks as if the meaning of an expression depends essentially upon its embedding in the language *as a whole* (WEISS, 1997, 271, grifo do autor).

No capítulo destinado a responder os cometários, Dummett não desenvolve esse ponto da crítica de Prawitz, limitando-se a responder que, além de também se sentir desconfortável com a conclusão de que as demonstrações e verdades matemáticas seriam instáveis, isso levaria a uma longa discussão[51]. Na segunda edição de *Elements of Intuitionism*, publicada em 2000, vinte e três anos após a primeira edição, toda a parte que falava sobre a instabilidade das demonstrações e sobre a flutuação do sentido das sentenças matemáticas foi suprimida. Aparentemente, Dummett abandona a ideia de que poderíamos, recorrendo ao recurso das sentenças da forma C^*, presumir estruturas de demonstrações[52] – para que a relação entre uma sentença e a sua prova canônica pudesse ser decidível –, pois isso levaria à conclusão, agora rejeitada na segunda edição, de que as provas canônicas deveriam ser específicas a etapas do desenvolvimento da matemática:

> [M]eaning and even proof itself would be unstable. As mathematics advances, we become able to conceive of new operations and to recognize them and others as effectively transforming proofs of B into proofs of C: and so the meaning of $B \to C$ would change, if a grasp of it required us to circumscribe such operations in thought. Moreover, an operation which would transform any proof of $B \to C$ available to us now into a proof of D might not so transform proofs of $B \to C$ which became available to us with the advance of mathematics: and so what would now count as a valid proof of $(B \to C) \to D$ would no longer count as one (DUMMETT, 2000, 274).

Como então conciliar as exigências antirrealistas de manifestabilidade da compreensão e molecularismo (este também referido por "princípio de composicionalidade" ou "separabilidade"), as quais demandam que certas estruturas sejam fixadas de antemão, sem contrariarmos nossas intuições a respeito dos avanços matemáticos? Quanto a isso, Dummett nos dá apenas uma resposta elusiva, não nos deixando detalhes de como o seu programa poderia ser efetivamente levado a cabo:

> These fears are groundless. In order to recognize an operation as a proof of $(B \to C) \to D$, we must think of it as acting on anything we may ever recognize as a proof of $B \to C$.

[51](DUMMETT, 1987, 285).

[52]"We cannot, however, hope to generate, for any but the simplest type of mathematical statement A, an axiom with antecedent A and consequent an existential statement specifying the form a canonical proof of A must take. We cannot do so because, if A is a conditional or a universally quantified statement, we cannot circumscribe the effective operations that might serve as a proof of it. Such an operation might be recognized as efficacious only in the light of various known mathematical results, or of some intricate reasoning" (DUMMETT, 2000, 273).

> Of such a proof, we know in advance only what is specified by the intuitive explanation of $\rightarrow$: namely, that we recognize it as an effective operation, and as one that will transorm any proof of B into a proof of C. We need not survey or circumscribe possible such operations in advance in any more particular way than this. And so the compositionality of the intuitionistic account of the meanings of mathematical statements is secured, and, with it, the stability of that account and the stability of intuitionistic proof (DUMMETT, 2000, 274).

Contudo, não seria isso negligenciar os princípios que fundamentam a concepção antirrealista da matemática? Como falar de "anything we may ever recognize as a proof" sem não corrermos o risco de contrariarmos o princípio de extensão conservativa ou de nos comprometermos com alguma forma de holismo? Mas voltemos à questão que deu ensejo a esta seção.

O argumento de Cogburn sobre a invalidade da tese de Church no âmbito do antirrealismo dummettiano se sustenta sob a premissa de que as sentenças da aritmética são efetivamente enumeráveis. Isso só seria possível no interior de um sistema formal, onde há um vocabulário determinado e regras efetivas que regimentam a sua correta manipulação. Tendo em conta que um intuicionista está primeiramente preocupado com construções mentais, não com a representação delas em algum sistema formal, que pode ser incompleta, como atesta o teorema de Gödel, a premissa acima não se aplicaria e, consequentemente, o argumento seria inviabilizado. Todavia, acreditamos que o antirrealismo se funda em princípios impossíveis de se manterem fora de um sistema formal, recuperando assim a premissa que estava dificultando a argumentação de Cogburn.

Vários autores ressaltam que o princípio de manifestabilidade da compreensão e a noção de prova canônica por ela implicada exigem uma articulação em termos formais. Vemos isso em Weiss:

> So, if intuitionistic arithmetic depends for its coherence on an elucidation of the notion of canonical proof and if, as Dummett argues, this depends on the notions of normalised and fully analysed proofs in appropriate formalizations, then we have an argument from general considerations about the nature of understanding to the view that intuitionistic arithmetic depends for its coherence on its complete formalizability (WEISS, 1997, 271).

Em Pagin, onde na citação abaixo ele alega que o princípio de molecularidade talvez só teria lugar na lógica de primeira-ordem:

> Normalization does not, however, offer a general solution to the recognition problem[53], for the subformula principle does not in general hold outside first-order logic. [...] the conditions for being a proof of A are not in general concerned with properties of *parts* of proofs of A. In short, parts of conditions on being a proof of A are not in general conditions on being part of a proof of A (PAGIN, 2009, 723, grifo do autor).

E se referindo à passagem em que Dummett sugere como evitar a circularidade na demonstração de condicionais, que seria limitando a complexidade das demonstra-

[53] I.e., a condição de reconhecermos uma demonstração quando estamos diante dela.

ções do antecedente, Pagin (2009, 724) afirma: "This indeed holds in first-order logic. But first-order logic is the exception rather than the rule".

Shapiro diz que, com relação a sentenças *estritamente analíticas*[54], não está disponível a um antirrealista a "manobra" intuicionista que considera o teorema da incompletude como uma confirmação do fato de que a noção intuicionista de demonstração não é formalizável. Diante da incompletude, um intuicionista pode continuar mantendo a concepção que identifica verdade e demonstração justamente porque o descompasso entre essas duas noções só ocorre se nos restringirmos a uma noção formal de demonstração:

> [T]he intuitionist's maneuver is not available to a Dummettian when it comes to logical terminology and *strict* analyticity. On Dummett's view, a subject who understands the meaning of a term must be able to make this understanding fully manifest. In light of separability, this understanding cannot depend on the subject's grasp of any other terms. Recall also that the Dummettian holds that the meaning of logical terminology is constituted by introduction and elimination rules. If the introduction and elimination rules are not formalizable, then the extension of the term is not recursively enumerable. How can a subject grasp such rules, let alone manifest his grasp of the rules? It is extremely counterintuitive for there to be a logical term whose meaning-constituting rules are manifestable but not formalizable (SHAPIRO, 1998, 614).

Para dar um último exemplo, vemos em Prawitz que a perda da propriedade de extensão conservativa é característico da noção informal de demonstração[55]:

> [A]lthough the general form of the condition for something to be a canonical proof of a sentence $A \to B$ is formally stated in the table above[56] in which only the subsentences A and B are mentioned, there is no formal system generating all the procedures that transform canonical proofs of A to canonical proofs of B, and it is left open what more complicated sentences can be involved in such procedures. For instance, such a procedure may be definable in an extension of a certain language without being definable in the language itself, and hence, in this respect, the extension of a language obtained by introducing new logical constants may not be a conservative extension of the original language (PRAWITZ, 1977, 29).

Em outros termos, se não há uma formalização que circunscreva todos os procedimentos de demonstração relacionados a uma certa constante lógica, não há garantias de que a linguagem empregada nesses procedimentos seja uma extensão conservativa da linguagem originária da constante lógica em questão.

[54]Uma sentença é estritamente analítica se e somente se a sua verdade pode ser determinada a partir do sentido de seus próprios termos, sem a necessidade de recorrer a mais nenhum outro; e se em tal sentença ocorrer apenas termos lógicos, ela é estritamente analítica se e somente se a sua verdade pode ser determinada a partir das regras de introdução e eliminação que dizem respeito aos termos que a compõem (Cf. (SHAPIRO, 1998, 611)). Shapiro emprega essa definição para poder argumentar a respeito de uma certa concepção logicista, de acordo com o qual as sentenças da aritmética são estritamente analíticas.

[55]Cf. (SHAPIRO, 1998, 614, nota 9).

[56]Prawitz se refere à seguinte condição: "To form a canonical proof of $A \to B$ it is necessary and sufficient to have a procedure which applied to a canonical proof of A yields a canonical proof of B" (PRAWITZ, 1977, 26). É válido notar que somente na elucidação do sentido das constantes $\to$ e $\forall$ que aparece a noção de *aplicar um certo procedimento*. As observações nesta citação são analogamente adaptáveis ao quantificador universal.

Vimos assim que uma maneira de interpretar a citação elíptica em que Dummett fala sobre a implausibilidade da tese de Church no contexto intuicionista envolve uma argumentação sinuosa, que precisa examinar os preceitos que fundamentam o antirrealismo. Gostaríamos então de propor o argumento que se segue, mais direto, que acreditamos também ser uma interpretação viável.

Entendemos aqui o antirrealismo como um forma particular de construtivismo, tendo em comum com esta concepção a condição de que os objetos matemáticos não são ontologicamente independentes, ou seja, eles existem desde que tenhamos condições de construí-los. Dada essa característica, demonstrações construtivas possuem um caráter computacional, das quais podemos extrair algoritmos:

> Constructivism in general is concerned with constructive mathematical objects and reasoning. From constructive proofs one can, at least in principle, extract algorithms that compute the elements and simulate the constructions whose existence is established in the proof (IEMHOFF, 2016, §4).

Em algumas apresentações da interpretação BHK, a qual procura estabelecer a semântica das constantes lógicas construtivas, vemos explicitamente o uso do termo "algoritmo", como a seguir[57]:

$\rightarrow$ (implies): a proof of $P \rightarrow Q$ is an algorithm that converts any proof of P into a proof of Q;

$\forall$ (for each/all): a proof of $\forall x \in S\ P(x)$ is an algorithm that, applied to any object x and to the data proving that $x \in S$, proves that $P(x)$ holds.

Também é comum o emprego dos termos "método", "construção", "função", todos eles se referindo a alguma operação de caráter algorítmico. Além disso, nas apresentações da semântica BHK, frequentemente encontramos a observação de que tanto tais noções – as de método e equivalentes – quanto a de prova são informais:

> This explanation is quite informal and rests itself on our understanding of the notion of construction and, implicitly, the notion of mapping (TROELSTRA; DALEN, 1988, 9);
>
> There is an informal constructive interpretation of the intuitionist connectives, usually known as the Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation. It uses the notion of a "construction", which you may think of as a constructive proof. (We don't use "proof" in the BHK interpretation so as not to get confused with the notion of a derivation in a formal proof system.) Based on this intuitive notion, the BHK interpretation explains the meanings of the intuitionistic connectives (Open Logic Project, 2018, 616).

O que gostaríamos de ressaltar é que, sendo essas noções construtivas, é imprescindível que tenham um caráter algorítmico. A propósito, não é sem importância ressaltar que nos primórdios do que viria a ser a atual teoria da computação o termo "construtivo" era às vezes empregado como sinônimo de "computável",

[57](BRIDGES, 2018, §2).

como acima vimos em algumas das citações de Gödel (p. 26) e Péter (p. 44 e nota 7). Assim, se assumimos a tese de Church, todas essas noções, até então consideradas informais, podem passar a ser tratadas formalmente. Mas isso seria estranho a um intuicionista – e esse parece ser o ponto levantado por Dummett –, já que a alegação de que demonstração e verdade se identificam[58] seria lida como "demonstração formal e verdade se identificam", contrariando, portanto, o teorema da incompletude.

Isso estabelece um dilema, pois não nos parece que podemos assumir o teorema da incompletude enquanto recusamos a tese de Church, ou vice-versa. Por um lado, vimos que a tese de Church implica a formalização das demonstrações construtivas, conduzindo à incompletude. Por outro, sem a tese de Church o teorema da incompletude perde a sua generalidade, pois poderíamos apenas vagamente generalizá-lo a sistemas *semelhantes* ao do *Principia Mathematica*, como de fato Gödel alega na primeira apresentação do seu teorema (cf. seção 2.2.2). Kennedy denomina *scope problem* a questão acerca do alcance do teorema da incompletude:

> Gödel was among the first to suggest the problem of isolating the concept of effective computability. His interest in the question was driven, at least in part, by the need to give a precise definition of the notion of "formal system" – an important piece of unfinished business as far as the Incompleteness Theorems are concerned, in that it was not clear at the time to which formal systems the theorems apply, outside of *Principia Mathematica* (KENNEDY, 2017, 72).

Dessa forma, para que compreendamos a dimensão da afirmação intuicionista de que demonstrações matemáticas são construções mentais que, apesar de serem passíveis de uma representação simbólica, não podem ser identificadas a uma *totalidade específica* de estruturas simbólicas[59] – que é o que a noção de sistema formal define –, devemos ter condições de definir precisamente essa totalidade, pois, do contrário, não saberíamos identificar o limite a partir do qual as construções mentais perderiam sua representação em tais estruturas.

Por fim, uma última observação: considerando o princípio antirrealista de "efetivamente reconhecer a demonstração de um dado enunciado"[60], não seria o caso desse "efetivamente reconhecer" não ser compreendido em termos de um procedimento mecânico? Dizendo de outra maneira, não pode ser o caso de, dado um enunciado P e uma demonstração p arbitrários, sabermos sempre dizer se p é ou não uma demonstração de P, ainda que esse reconhecimento não se dê por um procedimento mecânico? Isso se assemelharia, por exemplo, ao fato de que "efe-

[58]Como vimos na citação de Dummett (1978b) na página 109 e podemos ver de maneira explícita nas seguintes palavras de Martin-Löf (1984, 11 (7)): "Thus, intuitionistically, truth is identified with provability, though of course not (because of Goödel's incompleteness theorem) with derivability within any particular formal system".

[59](DUMMETT, 1978b, 200).

[60]Cf. a citação de Dummett (2000) na p. 108.

tivamente" reconhecemos diferentes *tokens* como sendo pertencentes a um mesmo *type*, a despeito desse reconhecimento não se dar por um procedimento mecânico. Ou seja, talvez seja preciso qualificar melhor a noção antirrealista de efetivamente reconhecer uma demonstração.

No entanto, mesmo apresentando essas possíveis relações entre a incompletude e a tese de Church, não é implausível também conceber o intuicionismo passando ao largo dessas noções. Podemos imaginar que para um intuicionista sequer faria sentido tentar estabelecer um isomorfismo entre construções mentais e representações formais. Nesse caso, o teorema da incompletude seria encarado apenas como um mero sintoma de algo que já era tido como pressuposto. Quanto à tese de Church, ela seria desdenhada pelo fato de que toda função ou operação é computável por natureza, sendo irrelevante (ou circular, como vimos) uma definição que tenha o objetivo de distinguir funções computáveis de não computáveis.

4.3 O antiformalismo de Lakatos

As últimas seções ensejaram uma discussão a respeito dos limites de uma demonstração formal. Nesta seção, discutiremos as críticas de Lakatos direcionadas às concepções formalistas da matemática. Em contrapartida, na seção seguinte veremos a proposta de Azzouni de que a objetividade de uma demonstração informal pressupõe uma demonstração formal subjacente.

Podemos dizer que um dos objetivos principais do livro *Proofs and Refutations*[61] é apresentar uma metodologia que dê conta de descrever o desenvolvimento da matemática sem negligenciar os altos e baixos que compõem a história dessa disciplina – suas inovações, crises, hesitações, reviravoltas. Tal objetivo se afirma, sobretudo, como uma contra-argumentação ao predomínio da escola formalista na filosofia da matemática do século XX, à qual Lakatos se refere da seguinte maneira:

> I shall refer to the school of mathematical philosophy which tends to identify mathematics with its formal axiomatic abstraction (and the philosophy of mathematics with metamathematics) as the 'formalist' school (LAKATOS, 1976, 1).

De acordo com esse autor, o principal problema em identificar a matemática à sua abstração axiomática formal é tornar a história dessa ciência vazia[62], como se o seu desenvolvimento ao longo da história pudesse ser concebido linearmente, à semelhança de um sistema dedutivo, onde cada resultado se segue infalivelmente por meio de uma cadeia dedutiva:

[61](LAKATOS, 1976).

[62]"[T]he philosophy of mathematics, turning its back on the most intriguing phenomena in the history of mathematics, has become empty" (LAKATOS, 1976, 2).

> Formalism denies the status of mathematics to most of what has been commonly understood to be mathematics, and can say nothing about its growth. None of the 'creative' periods and hardly any of the 'critical' periods of mathematical theories would be admitted into the formalist heaven, where mathematical theories dwell like the seraphim, purged of all the impurities of earthly uncertainty (LAKATOS, 1976, 2).

É preciso, no entanto, investigar em que medida essa identificação entre a matemática e a sua abstração axiomática formal se dá. A última instância dessa medida seria ignorar a prática matemática. Mas devemos ver assim os formalistas, assumindo uma posição tão radical, como se a formalização fosse um movimento único e definitivo? Por que não vermos a formalização como o acompanhamento das etapas do desenvolvimento da matemática ou até mesmo como uma contribuição para esse desenvolvimento? Não seria antes a formalização um procedimento de fundamentação e verificação – em constante evolução – dos resultados *já obtidos* da matemática, sem a pretensão de substituir a força criativa desta? Ainda que um formalista faça uso de um sistema formal ou de uma metamatemática, isso não quer dizer que ele desdenha a matemática informal. Neste caso, a formalização seria apenas uma ferramenta de análise, não uma substituição da matemática, como o texto de Lakatos sugere.

Pólya distingue a matemática apresentada em sua forma final, composta de raciocínios demonstrativos, do trabalho matemático em desenvolvimento, composto de raciocínios plausíveis, os quais eventualmente culminarão – após um processo criativo envolvendo tentativas, erros, suposições – numa demonstração:

> You have to guess a mathematical theorem before you prove it; you have to guess the idea of the proof before you carry through the details. You have to combine observations and follow analogies; you have to try and try again. The result of the mathematician's creative work is demonstrative reasoning, a proof; but the proof is discovered by plausible reasoning, by guessing (PÓLYA, 1954, vi).

Numa perspectiva mais ampla, vemos em Dieudonné também uma distinção entre um resultado matemático e as oscilações que o precedem. Ele argumenta que, uma vez estabelecida as bases de uma teoria matemática, os teoremas nela demonstrados não são objetos de contestação. Nesse sentido, se alguns resultados aparentam ser incertos, isso se deve a alguma imprecisão ocasionada por uma teoria ainda em formação:

> On connaît aussi les erreurs commises par des hommes aussi célèbres que Cauchy et Riemann dans les questions touchant à la notion de limite, avant que Weierstrass n'ait introduit en Analyse une démarche parfaitement rigoureuse. Plus près de nous, la Géométrie algébrique italienne, malgré ses remarquables découvertes, a longtemps souffert du manque de précision dans les définitions et démonstrations, qui a suscité des controverses, même entre les meilleurs de ces géomètres ; là aussi, tout est rentré dans l'ordre une fois les bases solidement assises (DIEUDONNÉ, 1980, 7).

Tomando isso como base, Dieudonné faz críticas contundentes à obra *Proofs and Refutations*. De acordo com ele, as inúmeras demonstrações falsas e incompletas que compõem a história do teorema de Euler – narrada na obra mencionada (cf. p. 156) – não desfazem a imagem da matemática como uma ciência constituída por verdades perfeitas e imutáveis, pois o que Lakatos fez foi contar a história de um ramo da matemática ainda em formação, que seria a topologia algébrica. Assim, Dieudonné critica Lakatos por ter tomado a exceção pela regra, pois sugeriu um paradigma de compreensão do desenvolvimento da matemática a partir de um exemplo excepcional:

> Lakatos n'avait qu'une connaissance sommaire des mathématiques du XIXème siècle, et ne semble jamais avoir connu celles qui ont été découvertes ultérieurement. Même dans les branches traditionnelles, la plus grande partie, comme la Théorie des nombres, 1'Algèbre, la Géométrie différentielle et une part importante de l'Analyse, n'ont jamais connu les hésitations et tâtonnements que Lakatos voudrait faire passer pour la norme du développement des mathématiques ; dans tous ces domaines, mis à part les cas d'erreurs matérielles (tels qu'une faute de signe ou une confusion de lettres), un théorème une fois démontré n'a jamais donné lieu à contestation (DIEUDONNÉ, 1980, 7).

De fato, o formalismo negligencia vários aspectos que compõem o desenvolvimento da matemática. Todo o processo heurístico de descoberta de um certo resultado passa despercebido quando viramos as costas à sua história. Mas como o objetivo principal de um formalista é evidenciar na argumentação matemática certas estruturas que condicionam o encadeamento de suas proposições, a história dessa disciplina, que pode revelar as oscilações que precederam os resultados alcançados, se torna um elemento secundário. A investigação histórica se colocaria em primeiro plano a partir do momento em que revelasse padrões de raciocínios legitimados pelos matemáticos ao longo da história. Todavia, uma vez abstraídos tais padrões, todo o processo heurístico por trás de suas origens foge do escopo de uma investigação formalista, que se preocupa em analisar raciocínios dedutivos a partir de critérios formais já estabelecidos ou em estabelecer novos critérios a partir de raciocínios tidos como válidos. Fora isso, seria interessante questionar: a investigação histórica levada a cabo por Lakatos trouxe à tona alguma forma de raciocínio nova, algum princípio lógico que seria estranho aos sistemas formais consagrados? Em várias ocasiões, Lakatos aparenta hostilizar o formalismo, no entanto, acreditamos que esta concepção filosófica não deve ser repelida, mas complementada pelas investigações que têm como objeto a heurística matemática.

A citação acima diz que no paraíso formalista a matemática é purgada de todas as impurezas provenientes de suas incertezas terrenas. Mas não seria isso um sintoma mais do que esperado ao se filosofar sobre um determinado tema? De maneira análoga, não poderíamos fazer essa mesma observação a uma filosofia política, por exemplo? Certamente, não entra no *paraíso abstrato* da filosofia política de Rousseau as *impurezas* e *incertezas* que permeiam os sistemas políticos mundanos, todavia, sua filosofia não deixa de estabelecer critérios a partir dos quais possamos melhor julgar e compreender o que se passa no âmbito da realidade prática. Não vemos em *Proofs and Refutations* a identificação de certos padrões lógicos observados ao longo do desenvolvimento da matemática, constituindo assim uma *lógica da descoberta matemática*? Mesmo uma investigação que se volta à história e à prática de uma ciência constrói um terreno livre de impurezas e incertezas, desde que procure estabelecer uma metodologia que identifique e generalize certos padrões.

Lakatos, após apresentar duas citações de Tarski onde se procura definir o que seria a metodologia das ciências formais, propõe a seguinte conclusão:

> [W]hile the first formulation stated that the subject matter of metamathematics is the formalised deductive disciplines, the second formulation states that the subject-matter of metamathematics is confined to formalised deductive disciplines only because non-formalised deductive sciences are not suitable objects for scientific investigation at all (LAKATOS, 1976, 3, nota 6).

Aparentemente, o que Tarski afirma é que, antes de ser feita uma análise metamatemática, é preciso preparar o objeto dessa análise – da mesma maneira que, diríamos, antes de executar um computador para que verifique uma certa demonstração matemática é preciso preparar essa demonstração de modo que possa ser lida pela execução do verificador. Estaria assim Tarski recusando os processos heurísticos envolvidos no trabalho matemático? Não nos parece, tais processos apenas não são passíveis de uma análise metamatemática, uma vez que esta só pode lidar com objetos formais.

Por um lado, é certo que o que não se encontra na forma de uma disciplina dedutiva formal não é passível de uma investigação metamatemática, mas, por outro, dizer que o que não se apresenta como um objeto formalizado não é passível de *nenhuma* investigação científica[63] parece extrapolar o que encontramos num dos textos de Tarski mencionado por Lakatos, onde lemos:

> At any rate the methodology of empirical sciences constitutes an important domain of scientific research. The knowledge of logic is of course valuable in the study of this methodology, as it is in the case of any other dicipline. It must be admited, however, that logical concepts and methods have not, up to the present, found any specific or fertile applications in this domain (TARSKI, 1995, xi).

Tarski diz apenas que as ciências empíricas não seriam tão adequadas a um tratamento metamatemático – que se apoia num emprego de conceitos e métodos formais – como são as ciências dedutivas. Em outras palavras, afirmar que as ciências dedutivas são mais adequadas a um tratamento metamatemático não é afirmar que não se pode estabelecer uma metodologia das ciências empíricas ou que o que não

[63] Lakatos baseia seu argumento nesta citação: "Naturally not all deductive disciplines are presented in a form suitable for objects of scientific investigation" (TARSKI, 1956b, 60). No entanto, considerando outros textos de Tarski (cf. a citação a seguir) e o próprio parágrafo, como um todo, da passagem citada, acreditamos que o que Tarski quis dizer com "investigação científica" foi "investigação metamatemática".

for passível de formalização não pode ser objeto de uma investigação científica. De fato, *Proofs and Refutations* é um tratamento metodológico da matemática em sua condição não formal, no entanto, não se trata da metodologia das ciências dedutivas, i.e., não é um tratamento metamatemático da maneira como compreendemos esse termo em Hilbert. *A lógica da descoberta matemática*, como diz o subtítulo do livro, não é a lógica formal de que Tarski fala, não contrariando, portanto, o que este autor disse, ou seja, Lakatos refutaria a opinião de Tarski desde que apresentasse um tratamento metamatemático de uma ciência não formalizada.

Lakatos insiste no fato de que os formalistas se fechariam em seus sistemas, como se a matemática pudesse ser completamente substituída por sistemas axiomáticos. Tomando isso como pressuposto, ele acusa que a matemática assim concebida teria a mesma esterilidade de um sistema formal: "According to formalists, mathematics is identical with formalised mathematics. But what can one *discover* in a formalised theory?"[64] Respondendo a essa pergunta, Lakatos descreve dois tipos de descoberta proporcionadas por teorias formais. A nosso ver, tais descrições são tendenciosas quanto ao ponto de vista que ele procura defender. Um tipo de descoberta diz respeito a soluções de problemas que uma máquina de Turing seria capaz de resolver. No entanto, uma vez que tais problemas são solucionados por meio de uma prescrição de procedimentos mecânicos, eles são pouco interessantes. O outro tipo de descoberta envolve soluções de problemas "where one can be guided only by the 'method' of 'unregimented insight and good fortune'"[65], tal como descobrir se uma certa fórmula de uma teoria não decidível é um teorema ou não.

Quanto ao segundo tipo, não acreditamos que os resultados obtidos por meio de uma teoria formal sejam frutos da sorte e de uma intuição desordenada. Tais sistemas exigem de um matemático uma capacidade intelectual semelhante à exigida na prática matemática. Quanto a isso, podemos nos apoiar nas seguintes palavras de Rosser, que se seguem após a afirmação de que na lógica simbólica as demonstrações dependem apenas da forma dos enunciados, não de seus conteúdos:

> This does not mean that it is now any easier to discover a proof for a difficult theorem. This still requires the same high order of mathematical talent as before. However, once the proof is discovered, and stated in symbolic logic, it can be checked by a moron (ROSSER, 2008, 7).

Assim, poderíamos dizer que a pretensão dos formalistas talvez não seja tão contundente como Lakatos dar a entender, a saber, ignorar completamente o que se dá na prática matemática, identificando-a à sua formalização. Cremos que os formalistas empregam a metodologia formal sobretudo como uma ferramenta para elucidar o que se encontra estabelecido pela prática. E como dissemos há pouco,

[64](LAKATOS, 1976, 4, grifo do autor).
[65](LAKATOS, 1976, 4).

o objetivo principal de uma teoria formal não é o de promover avanços e descobertas concernentes à área de conhecimento da teoria formalizada[66], mas analisar e verificar os resultados já obtidos por tal teoria. Isso explica por que na base de diversos programas de fundamentação da matemática – como vemos em Frege, Russell, Hilbert – se encontram concepções formalistas.

Não obstante, a posição de Lakatos é mais radical, não dá espaço para uma complementaridade entre o formalismo e a heurística:

> The history of mathematics and the logic of mathematical discovery, i.e. the phylogenesis and the ontogenesis of mathematical thought, cannot be developed without the criticism and *ultimate rejection of formalism* (LAKATOS, 1976, 4, grifo nosso).

Por que seria impossível uma coexistência pacífica entre o formalismo e a lógica situacional? – a lógica que procura descrever a heurística da matemática. Tomando o formalismo como uma adequação formal de raciocínios informais, aquele se desenvolveria juntamente com estes, sem contar com o fato de que a formalização nos pode fazer rever nossas práticas[67]. Contudo, Lakatos não vê o formalismo senão como indissociável de uma pretensão de substituir a heurística, o que conduziria à negligência de aspectos importantes da prática matemática.

Na introdução ao livro *The Philosophy of Mathematical Practice*, Mancosu relata sobre duas tradições na filosofia da matemática contemporânea, uma ligada aos programas de fundamentação, onde podemos incluir o logicismo, o programa de Hilbert e o intuicionismo; outra constituída como uma reação a tais programas, encabeçada por Lakatos e levada adiante por filósofos como Kitcher, Tymoczko, entre outros, alcunhada por Aspray e Kitcher (1988, 17) de tradição dissidente ("maverick tradition"). Enquanto os filósofos da primeira tradição voltam sua atenção para questões sobre os fundamentos da matemática, os da segunda, num tom reativo, demandam uma filosofia da matemática que seja mais fiel ao desenvolvimento histórico e à prática efetiva desta ciência.

Como Mancosu ressalta, a atitude iconoclasta dos *filósofos dissidentes* contribuiu para que as suas ideias não exercessem uma influência mais significativa, pois os filósofos da outra tradição – mais difundida e com diversos resultados assentes – "sentiram que os 'dissidentes' estavam jogando fora o bebê junto com a água do banho"[68]. Diante disso, é importante observar que os fundacionalistas (onde se encontram os formalistas criticados por Lakatos) não viram as costas à prática matemática, ao menos não como o grupo dos *dissidentes* nos tenta fazer crer:

> The general spirit of the tradition originating from Lakatos as well as Maddy's naturalism requires extensive attention to mathematical practice. This is not to say that

[66]Não que isso não seja possível, como veremos logo adiante.
[67]Trataremos especificamente desse ponto na seção 5.3.
[68](MANCOSU, 2008, 6).

> classical foundational programs were removed from such concerns. *On the contrary, nothing is further from the truth*. Developing a formal language, such as Frege did, which aimed at capturing formally all valid forms of reasoning occurring in mathematics, required a keen understanding of the reasoning patterns to be found in mathematical practice. Central to Hilbert's program was, among other things, the distinction between real and ideal elements that also originates in mathematical practice. Delicate attention to certain aspects of mathematical practice informs contemporary proof theory and, in particular, programs such as reverse mathematics[69] (MANCOSU, 2008, 7, grifo nosso).

Ainda que não concordemos com a maneira polêmica de como Lakatos se refere aos formalistas, consentimos com a sua crítica de que uma investigação sobre a heurística matemática merece a mesma atenção filosófica que o formalismo tem recebido. Podemos entender isso melhor por meio da distinção *contexto de descoberta* e *contexto de justificação*, teorizada pelos positivistas:

> The initial state, the act of conceiving or inventing a theory, seems to me neither to call for logical analysis not to be susceptible of it. The question how it happens that a new idea occurs to a man –whether it is a musical theme, a dramatic conflict, or a scientific theory – may be of great interest to empirical psychology; but it is irrelevant to the logical analysis of scientific knowledge. This latter is concerned not with questions of fact (Kant's quid facti?), but only with questions of justification or validity (Kant's quid juris?). Its questions are of the following kind. Can a statement be justified? And if so, how? Is it testable? Is it logically dependent on certain other statements? Or does it perhaps contradict them? [...] *Accordingly I shall distinguish sharply between the process of conceiving a new idea, and the methods and results of examining it logically.* As to the task of the logic of knowledge – in contradistinction to the psychology of knowledge – I shall proceed on the assumption that it consists solely in investigating the methods employed in those systematic tests to which every new idea must be subjected if it is to be seriously entertained (POPPER, 2002, 7-8, grifo nosso).

No livro *Proofs and Refutations*, a distinção entre contexto de descoberta e contexto de justificação só aparece duas vezes, sendo que uma delas se encontra no prefácio escrito por Mancosu, a qual citamos a seguir:

> Rejecting the positivist distinction between context of discovery and context of justification, he [Lakatos] claimed that mathematical practice and its history are not the domain of the irrational but rather display an objectivity and rationality that any philosophy of mathematics worth its name should account for (em (LAKATOS, 1976, vii)).

O outro momento em que a distinção aparece se encontra numa nota de rodapé escrita para o seguinte parágrafo:

> Some who defend deductivist style claim that deduction is the heuristic pattern in mathematics, that the logic of discovery is deduction. Others realise that this is not true, but draw from this realisation the conclusion that mathematical discovery is a completely non-rational affair. Thus they will claim that although mathematical discovery does not proceed deductively, if we want our presentation of mathematical discoveries to proceed rationally, it must proceed in the deductivist style (LAKATOS, 1976, 152).

[69]Cf. também: "Ordinary mathematical proofs are not presented in formal systems, so there are choices to be made in the formal modeling. In addition, the general metamathematical tools have to be tailored and adjusted to yield the information that is sought in particular domains. Thus the work requires a deep understanding of both the proof-theoretic methods and the domain of mathematics in question" (AVIGAD, 2018, 187).

Na nota (a de número 4), Lakatos afirma que os formalistas fazem a distinção entre contexto de descoberta e contexto de justificação quando falam sobre o processo de descoberta envolvido numa ciência. A distinção serviria para salientar que o contexto de descoberta deve ser relegado a um análise psicológica, cabendo à lógica apenas se inserir no contexto de justificação. Lakatos diz isso se referindo à posição de Reichenbach, R. B. Braithwaite's e K. R. Popper's. Além disso, ainda na mesma nota, ele aponta que o livro *The Logic of Scientific Discovery*, de Popper, possui um título paradoxal, pois o livro diz que não existe uma lógica da descoberta científica, argumentando assim contra Bacon e Descartes, mas, ao mesmo tempo, diz que a lógica da descoberta científica é a lógica de conjecturas e refutações. Lakatos então defende a sua posição:

> The solution of this paradox is at hand: (*a*) there is no *infallibilist* logic of scientific discovery, one which would infallibly lead to results; (*b*) there is a fallibilist logic of discovery which is the logic of scientific progress. But Popper, who has laid down the basis of *this* logic of discovery, was not interested in the metaquestion of what was the nature of his inquiry and he did not realise that this is neither psychology nor logic, it is an independent discipline, the logic of discovery, heuristic (LAKATOS, 1976, 152, n. 4, grifo do autor).

Como já dissemos, propor o formalismo (ou a metamatemática) como uma maneira de fazer filosofia da matemática não necessariamente implica ignorar o processo heurístico. À medida que a matemática se desenvolve, novos sistemas formais são criados[70] para que possam representar adequadamente as formas de raciocínio matemático em voga. De modo semelhante, a proposta de Lakatos de fazer uma lógica da heurística, que seria o seu método de demonstrações e refutações, pode ser vista como uma refutação à posição que relega o contexto de descoberta a um psicologismo, contudo isso não implica necessariamente uma rejeição da distinção contexto de descoberta/justificação. Não seria legítimo, além do mais, a partir do contexto de justificação, investigarmos a metodologia proposta por Lakatos? Avigad (2008, 303) afirma que tanto o contexto de descoberta como o de justificação devem ser levados em conta no que se tem chamado de *matemática experimental*, uma metodologia da matemática na qual há um uso significativo de procedimentos computacionais – ou seja, estamos no âmbito do formalismo. Primeiramente, ele cita a seguinte lista, que relaciona alguns dos usos da computação na matemática experimental:

1. Gaining insight and intuition.
2. Discovering new patterns and relationships.
3. Using graphical displays to suggest underlying mathematical principles.
4. Testing and especially falsifying conjectures.

[70]Cf. Avigad (2006), onde o autor apresenta novos modelos formais de demonstração, os quais são mais apropriados do que os modelos tradicionais no que diz respeito a elucidar o *entendimento* proporcionado por uma demonstração ordinária.

5. Exploring a possible result to see if it is worth a formal proof.
6. Suggesting approaches for formal proof.
7. Replacing lengthy hand derivations with computer-based derivations.
8. Confirming analytically derived results.

Em seguida, afirma:

> In philosophical discourse it is common to distinguish between discovery and justification; that is, to distinguish the process of formulating definitions and conjectures from the process of justifying mathematical claims as true. Both types of activities are involved in the list above (AVIGAD, 2008, 303).

Isso contraria a concepção de que a formalização de uma teoria não pode exercer nenhuma contribuição sobre os avanços da teoria formalizada.

Vale ainda acrescentar que, se, por um lado, um certo uso do formalismo pode não conduzir a nenhuma descoberta concernente à teoria formalizada, por outro, considerando o formalismo como um ramo da matemática, os avanços pertinentes ao próprio formalismo configurariam um avanço matemático. No prefácio ao artigo *The Axiomatic Thought* – de Hilbert, que com o seu programa foi uma peça fundamental no movimento formalista –, escrito pelo editor da coletânea de textos *From Kant to Hilbert*, encontramos:

> Hilbert viewd axiom systems instrumentally, as a powerful tool for mathematical research, a tool to be employed when a field had reached a point of sufficient ripeness. But he nowhere suggests that the whole of mathematics can simply be identified with the study of formal systems; and indeed in his proof-theoretical writings he took considerable pains to point out that the genuine mathematics – *inhaltliche Mathematik* – takes place, not in the formalism, but in the metalanguage (EWALD, 1996, 1107).

Nesta passagem, notamos três coisas interessantes. A primeira diz respeito ao fato de que um sistema axiomático é uma ferramenta que se emprega *após* um determinado domínio de investigação ter atingido uma maturidade suficiente: em primeiro lugar, temos a matemática na sua prática ordinária, só em seguida os sistemas axiomáticos entram em cena como uma ferramenta de pesquisa. A segunda questão interessante é a observação de que Hilbert se recusaria a identificar a matemática com o estudo de sistemas formais, que é o ponto onde se concentra boa parte das críticas de Lakatos. Por último, chamamos a atenção para a observação que vê os sistemas axiomáticos como instrumentos poderosos à disposição da pesquisa matemática, contrastando assim à imagem estéril atribuída a eles por Lakatos. Ewald aponta alguns avanços que a pesquisa com sistemas axiomáticos trouxe à matemática:

> His [Hilbert's] study of the axiomatic foundations of geometry had yielded a rich harvest of mathematical results – non-Archimedean geometries, a new topological characterization of the plane, new theorems on the nature of continuity – and there was every reason to hope that the same powerful tool would prove equally useful in the other branches of mathematics and physics mentioned in this article (EWALD, 1996, 1106).

Dieudonné também é da opinião de que os sistemas formais têm um papel na contribuição do desenvolvimento do pensamento matemático:

> The work of systematication of mathematics is certinaly not a very exciting one, but it sometimes has its rewards. In trying to make new ideas and methods clearer and more understandable, one is almost invariably led to think of other possible approaches, which sometimes open ways of thought and paths of research unsuspected by the originator of the theory (DIEUDONNÉ, 1973, 17).

Por fim, vejamos a passagem abaixo, onde Lakatos deixa explícito o objetivo principal de seu livro:

> The core of this case-study will challenge mathematical formalism [...]. Its modest aim is to elaborate the point that informal, quasiempirical, mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but through the incessant improvement of guesses by speculation and criticism, by the logic of proofs and refutations (LAKATOS, 1976, 5).

Insistiríamos que tal posição questionaria o formalismo apenas se este promovesse a identificação sugerida por Lakatos, mas, pelo que temos argumentado até aqui, isso não parece ser o caso. Acreditamos que a distinção contexto de descoberta/justificação não deve ser negligenciada e que a filosofia da matemática tem muito a ganhar voltando-se para o primeiro contexto, com a possibilidade de desenvolver uma metodologia que não seja criticada por possuir um viés psicologista ou sociológico. A lógica da descoberta matemática, de Lakatos, é um exemplo. Contudo, diferentemente do que este autor sugere, o predomínio do formalismo na filosofia da matemática reflete, a nosso ver, simplesmente uma contingência histórica – por uma razão ou outra o formalismo ganhou destaque na comunidade filosófica –, não o êxito de um projeto que visasse eliminar as metodologias que têm como objeto o contexto de descoberta.

4.4 Azzouni: indicador de derivação

Dando continuidade à nossa discussão sobre formalização, trataremos aqui da distinção entre demonstrações formais e informais, que nos conduzirá à concepção, proposta por Azzouni, de que toda demonstração informal deve ser capaz de indicar uma demonstração formal subjacente, a qual garante a objetividade e comunicabilidade daquela. A partir daí, aproveitamos para apresentar na seção seguinte uma demonstração, devida a Kripke, da tese de Church. Tal demonstração toma como premissas o teorema da completude e a tese de Hilbert (i.e., todo argumento matemático pode ser formalizado numa lógica de primeira-ordem), estreitamente vinculada à noção de indicador de derivação.

Rav emprega os termos *demonstração* e *derivação*, a fim de demarcar a diferença respectiva entre demonstrações matemáticas – tal como elas são compreendidas de maneira informal na prática habitual dos matemáticos – e demonstrações formais – concebidas a partir de sistemas recursivos, que possuem a caracterização explícita do seu alfabeto, regras de formação de fórmulas, regras de inferência, etc.: "Let us fix our terminology to understand by *proof* a conceptual proof of customary mathematical discourse, having an irreducible semantic content, and distinguish it from *derivation*, which is a syntactic object of some formal system"[71].

O propósito de Rav ao fazer essa distinção é argumentar pelo aspecto semântico irredutível de uma demonstração, o qual, de acordo com ele, não pode ser adequadamente representado por uma derivação. O que encontramos nesta em quase nada reflete o *conhecimento* matemático que se revela numa demonstração, cujo principal papel consiste em estabelecer métodos de solução de problemas, que além de expandirem ou criarem novas teorias, estabelecem conexões com outras ideias matemáticas:

> [T]he correctness of a derivation in a formal system, depending just on the *shape* of the symbols contrasts sharply with the age-old habitual process of understanding and following the demonstrative component of an ordinary mathematical proof, a process that depends on the *meaning* of the mathematical terms and the conceptual interconnections that are brought out by proofs (RAV, 2007, 301, grifo do autor).

Por essa razão, não é incomum que resultados já estabelecidos sejam demonstrados de diferentes maneiras, pois a demanda que um determinado problema faz pelo estabelecimento de novos métodos e conexões pode ser mais importante do que o resultado em si[72]. Caso as demonstrações fossem reduzidas a derivações, o movimento estéril que nestas liga a conclusão às premissas seria insuficiente em elucidar a dinâmica e a origem do conhecimento matemático, como é possível perceber nas práticas demonstrativas usuais.

A partir dessa distinção caracterizada por Rav, que, pelo menos no que toca a prática matemática, privilegia as demonstrações em relação às derivações, pois estas, constituindo-se de estruturas sintáticas vazias de conteúdo, não possuem a relevância semântica daquelas, Azzouni (2005, 141) propõe desenvolver dois pontos: (a) não é necessário que a prática matemática se comprometa com a existência de objetos matemáticos – assim, os que criticam a concepção formalista pelo fato dela se basear apenas em derivações vazias de conteúdo teriam um argumento a menos a seu favor[73]; (b) ainda que as demonstrações sejam indispensáveis à prática matemática, o acordo social entre matemáticos que ratifica ou não o convencimento

[71](RAV, 1999, 11).

[72](RAV, 2007, 294). Cf. também (DAWSON JR, 2006).

[73]Este ponto é oportuno ao nominalismo que Azzouni (2005, cap. 8) defenderá mais adiante em seu livro, cujos detalhes não nos dizem respeito.

proporcionado por uma determinada demonstração se deve à possibilidade de indicar uma derivação que lhe é pertinente num ou outro sistema algorítmico.

De acordo com o último ponto, para cada demonstração existe uma derivação subjacente codificada num certo sistema algorítmico, permitindo que uma demonstração seja concebida como um *indicador de derivação*. Assim, Azzouni (2005, 142) argumenta que, se o fato dos matemáticos serem bem sucedidos em concordarem entre si que uma demonstração convincentemente estabelece a asserção de um teorema se deve à derivação indicada pela demonstração, isso tem a sua razão de ser baseada em duas condições: a primeira é que a validade de uma derivação pode ser, em princípio, mecanicamente verificada; a segunda é que o sistema algorítmico empregado para codificar uma derivação é implícita ou explicitamente reconhecível pelos matemáticos.

Apelando à noção de indicador de derivação, Azzouni almeja dar uma explicação mais objetiva a respeito de como os matemáticos concordam entre si sobre a legitimidade de uma demonstração, propondo dessa maneira uma via alternativa às teorias que atribuem tal concordância a fatores unicamente sociais:

> Any approach focusing on (purely) social constraints on behavior can't explain how mathematicians agree on the status of proofs [...]; and this is because social factors, even when they induce conformity at a time, can't (and don't) prevent *substantial* diachronic change (AZZOUNI, 2005, 143, grifo do autor).

É importante ressaltar que Azzouni não pretende com a sua concepção sugerir que as demonstrações, tais como são empregadas na prática matemática usual, sejam substituídas por derivações. Ele próprio reconhece isso como sendo "completamente implausível"[74]. É muito pouco provável que um matemático esteja ciente das derivações que subjazem a suas demonstrações. De fato, Azzouni (2005, 119) sugere que, durante a maior parte da existência da matemática, os matemáticos, ao teorizarem sobre as demonstrações, não compreenderam esse ponto. Na prática, o reconhecimento de que uma demonstração é bem sucedida está sobretudo relacionado à impressão de compreender a relação semântica entre os passos dedutivos, a qual se baseia no conteúdo das sentenças envolvidas. O autor ainda levanta três pontos que destacam como a experiência de compreensão proporcionada por uma demonstração se difere da experiência proporcionada por uma derivação (ademais, ele observa que tais pontos são comumente encontrados na literatura):

> (a) Understanding an ordinary proof seems to proceed by the grasping of mathematical concepts, grasping the nature of the objects those concepts are about, and recognizing what follows from these – not by the recognized application of (explicitly formulated) rules. (b) Related to this, ordinary mathematical proof seems to be topic-specific, its transitions governed by insights into the subject-matter of the proofs. [...] in general, (c) when an ordinary proof (in the vernacular) is translated into one or another formal

[74](AZZOUNI, 2005, 143).

> language, comprehension and certitude decline. One – almost always – understands (and is convinced by) the ordinary mathematical proof much better than (by) formalized cousins (AZZOUNI, 2009, 11).

Diante de tudo isso, parece não ter sentido levar adiante a noção de indicador de derivação. No entanto, em defesa de seu programa, Azzouni apela ao que considera uma evidência empírica a seu favor: o sucesso do programa logicista em regimentar demonstrações matemáticas em sistemas algorítmicos baseados numa lógica de primeira-ordem[75], revelando que o desenvolvimento da matemática até o final do século XIX teve a lógica clássica como uma estrutura tácita atuando por trás das demonstrações[76]. Ou seja, tal fato evidencia que toda a prática matemática desenvolvida durante esse período, a despeito da infinidade de conceitos e ferramentas constantemente introduzidos nesse espaço de tempo, preservou a relação de indicação a derivações.

Podemos assim resumir nas seguintes palavras a tese proposta por Azzouni (2005, 121): toda demonstração matemática ordinária está correlacionada a uma derivação, e é por conta dessa correlação que as demonstrações são bem sucedidas. E dado que a sua tese "não pode ser demonstrada por um exame sofisticado do que o matemático experiencia quando estabelece demonstrações"[77], o que Azzouni levanta em suporte a ela é a evidência empírica estabelecida no parágrafo anterior. Além do mais, o autor observa que não é necessário que as derivações façam parte da prática matemática, sequer é preciso que tenham uma existência atual:

> [A]ll that's required is that the mathematician's practice be in accord – as it were – with a theory of such things; that is, that his or her ability to recognize phenomenally when *B* follows from *A* accords with (a formal proxy of) *B* being derivable from (a formal proxy of) *A* in the context of some appropriate algorithmic system (AZZOUNI, 2005, 121).

Isso quer dizer que, mesmo que os matemáticos não se deem conta das derivações subjacentes a suas demonstrações, não negam a possibilidade delas serem representadas de maneira mais explícita por derivações pertencentes a um ou outro sistema algorítmico. Nesse sentido, uma demonstração seria uma espécie de abreviação de uma derivação, contendo passos com pressuposições passíveis de serem analisadas em passos subsidiários: "One thing I *do* claim is that the mathematician *does* sense that any traditional proof can be expanded so that 'no steps are missing'"[78]. Em última instância, o relevante não é trazer à tona a derivação indicada pela demonstração, mas assentir ao fato de que a impossibilidade de atribuir uma derivação a

[75]Cf. (AZZOUNI, 2005, 119 e 143). O mesmo autor também apresenta uma série de argumentos defendendo a ideia de que, para a construção das derivações subjacentes, não é preciso nada além de uma lógica de primeira-ordem. Não nos deteremos aqui sobre a defesa desse ponto.

[76](AZZOUNI, 2005, 136).

[77](AZZOUNI, 2005, 121).

[78](AZZOUNI, 2005, 122).

uma demonstração é condição para que não consideremos esta como bem sucedida, ainda que seja convincente aos olhos dos matemáticos[79].

Azzouni nomeia de "fixação benigna da prática matemática"[80] o fato dessa disciplina ser uma prática social que, apesar de se caracterizar por uma conformidade substancial, prescinde de ferramentas sociais coercitivas responsáveis por tal conformidade. Um dos motivos dessa condição se deve à maneira sólida de como um erro descoberto é notoriamente percebido, o que exige a sua correção e a consequente reestruturação dos elementos por ele afetados:

> Mathematical practice is *so* robust that even if a mistake eludes detection for years, and even if many later results presuppose that mistake, this won't provide enough social inertia – once the error *is* unearthed – to prevent changing the practice back to what it was originally: In mathematics, even after lots of time, the subsequent mathematics built on the "falsehood" is repudiated (AZZOUNI, 2005, 128, grifo do autor).

Assim, devido à robustez da prática matemática, a lógica subjacente aos raciocínios matemáticos permaneceu implícita à medida que não houve nenhuma mudança nos procedimentos de demonstração – ao que se pode também atribuir o sucesso mencionado acima relacionado ao programa logicista. Isso explica por que a matemática contemporânea, com áreas conduzidas sobre bases lógicas alternativas, deve de algum modo assumir uma formalização a fim de que se saiba o que nela é demonstrável. Ou seja, a adoção de um procedimento de demonstração novo necessariamente se reflete na explicitação dos princípios lógicos empregados, o que corresponde a revelar a derivação indicada por uma demonstração[81].

Os sistemas algorítmicos nos quais as derivações indicadas são construídas não estão limitados a uma lógica em particular, a uma área específica da matemática ou a uma determinada linguagem, admitindo-se até mesmo que esta seja substituída por diagramas ou algo de caráter pictorial. Dessa forma, toda prática demonstrativa, ou, por assim dizer, todo método matemático, seria caracterizado como uma estrutura de sistemas algorítmicos. E como a matemática contemporânea envolve pesquisas numa variedade enorme de tipos de sistemas, cada qual estruturando uma família de sistemas algorítmicos, a única exigência que se faz é que as derivações indicadas sejam, em princípio, mecanicamente reconhecíveis[82].

[79]Como vemos enfaticamente nesta passagem: "The nonexistence of a formal analogue *does* rule out the status of a purported ordinary mathematical proof being a successful proof, regardless of the felt convictions of mathematicians about this" (AZZOUNI, 2009, 14, grifo do autor). Cf. também este trecho, onde Prawitz atribui um teor psicologista à noção de convencimento: "Some writers, e.g. Chateaubriand (1999), point out that a flawless sequence of inferences may fail to carry conviction while a geometrical drawing may convince us completely of the truth of an alleged theorem. As long as this is a psychological question about what subjectively convinces us, I am not concerned with it here" (PRAWITZ, 2015, 71, n. 7).

[80](AZZOUNI, 2005, 129).

[81](AZZOUNI, 2005, 145).

[82](AZZOUNI, 2005, 137 e nota 33; 144).

Após notar que certas relações lógicas entre sentenças são reconhecidas ao serem expressas em algo decidível, a despeito de que a expressividade da linguagem natural – incluindo a que ocorre na matemática – ultrapasse qualquer coisa que seja dita decidível, Azzouni (2005, 146) faz três observações sobre a relação entre a lógica empregada pela matemática e a sintaxe da linguagem natural: (a) não é incomum que os princípios lógicos empregados na matemática sejam invisíveis. Resultados mais antigos em teoria dos números eram obtidos por meio apenas da linguagem natural, sem o emprego de um vocabulário técnico, ocultando os algoritmos subjacentes; (b) a invenção de uma terminologia matemática, ainda que usada para facilitar a demonstração de resultados obtidos sem o emprego dela, não é necessariamente uma representação de ferramentas psicológicas utilizadas anteriormente pelos matemáticos – além de que uma investigação a esse respeito seria empírica, não concernindo à lógica ou à matemática. Por exemplo, a notação Arábica não deve ser tomada como uma explicitação de como os matemáticos psicologicamente representavam os números; (c) na mesma direção, a despeito de que as derivações subjacentes à "matemática madura"[83] tenham sido explicitadas em sistemas axiomáticos expressos em linguagens de primeira-ordem, isso não implica que tais sistemas são as melhores representações dos *métodos algorítmicos psicologicamente disponíveis* aos matemáticos. Tais sistemas algorítmicos podem portar um certo conteúdo matemático, o qual provavelmente está vinculado à área da matemática sob consideração, sendo que o que consideramos como inferência lógica ainda permanece implícito.

Azzouni acrescenta que a descoberta da lógica subjacente à matemática madura só foi possível por causa do emprego de uma linguagem artificial, por isso os procedimentos efetivos de demonstração se mantiveram tácitos até a invenção desta. Não basta apenas um certo vocabulário técnico, incorporado à linguagem natural, que torne explícito alguns padrões de raciocínio, é preciso "abandonar completamente a linguagem ordinária"[84]. Isso explicaria por que Frege revelou a lógica subjacente à matemática ao mesmo tempo em que criou uma linguagem artificial que a exprimisse. Para Azzouni, o fato disso ter-se dado simultaneamente não é uma contingência histórica, mas revelador da condição de que a explicitação de procedimentos de derivação requer o abandono da linguagem natural.

Há outros detalhes na relação entre demonstrações e derivações aos quais vale a pena voltarmos nossa atenção. Critica-se que a prática matemática não pode ser pensada a partir de sistemas algorítmicos, uma vez que, de modo geral, os mate-

[83] Azzouni emprega essa expressão para se referir ao período da história da matemática que vai um pouco antes de Euclides e se estende até o início do século XX. Ela se contrapõe à expressão "matemática contemporânea", que temos utilizado. Cf. (AZZOUNI, 2005, 133).

[84] (AZZOUNI, 2005, 147).

máticos sequer se dão conta das regras envolvidas em tais sistemas. No entanto, tal crítica não caberia à concepção de indicador de derivação, pois da mesma maneira que não pressupomos que o bom sucedimento na comunicação entre falantes de uma língua natural se deve a um conhecimento explícito de regras gramaticais, a concepção de indicador de derivação não pressupõe que um matemático, na prática habitual de sua atividade, esteja ciente de todas as regras que constituem o sistema algorítmico sobre o qual trabalha tacitamente[85].

Um outro ponto é que não há nenhuma exigência quanto à permanência no sistema algorítmico sobre o qual o matemático trabalha enquanto estuda uma certa área da matemática, i.e., ele não precisa se restringir a um único sistema, podendo ultrapassá-lo e embuti-lo em sistemas mais fortes. A derivação indicada pode assim pertencer a um sistema algorítmico mais robusto do que o inicialmente envolvido, ainda que contenha termos se referindo a este. Azzouni enfatiza:

> It doesn't much matter exactly where in the family of algorithmic systems we take "the" derivation indicated by a proof to be located. The reason for this is that the transliteration of the ordinary proof into its derivational proxy relies on making explicit tacit assumptions in the proof – and there is intrinsic vagueness in precisely what's tacitly relied on in an ordinary mathematical proof (AZZOUNI, 2005, 154).

Essa vagueza se articula entre dois limites. Existe uma quantidade mínima de conceitos representados numa derivação, estabelecendo dessa maneira um limite inferior: todos os conceitos explicitamente empregados na demonstração; havendo uma derivação em que os conceitos explícitos da demonstração não aparecem, isso quer dizer que tais conceitos eram redundantes – e aquele que construiu a demonstração não havia se dado conta disso. Por outro lado, podemos falar de um limite superior: devido a assunções tácitas envolvidas numa demonstração, nem sempre é viável obter uma derivação que a represente apenas a partir da representação de conceitos explícitos; a fim de viabilizá-la, conceitos que não se encontram explicitamente presentes na demonstração são introduzidos, limitando-se apenas pelo critério de não introduzir conceitos que são claramente estranhos a ela. Todos esses acréscimos podem resultar numa derivação não examinável (*surveyable*, em inglês),"but this isn't a problem since mathematicians aren't understood as – psychologically speaking – *grasping* such derivations (when they survey the ordinary proof correlated with such derivations)"[86].

Temos assim um guia não muito preciso a respeito da relação entre uma demonstração e a sua correspondente derivação. Essa imprecisão reflete a condição de que nem sempre é muito claro identificar quais conceitos operam tacitamente numa demonstração. De qualquer forma, dado que os sistemas algorítmicos podem

[85](AZZOUNI, 2005, 153).
[86](AZZOUNI, 2005, 154, grifo do autor).

ser embutidos uns nos outros, preservando os resultados dos sistemas precedentes, tal condição não aparenta implicar grandes problemas, pois basta expandir um sistema algorítmico para que ele abrigue conceitos recém explicitados[87].

Ademais, o fato dos sistemas algorítmicos poderem ser expandidos preservando os resultados já obtidos, algo que Azzouni particularmente denomina "ligação de sistemas algorítmicos"[88], é utilizado por ele para explicar a prática utilizada pelos matemáticos de introduzir "objetos" novos em contextos antigos, com o objetivo de obter resultados sobre a área da matemática originariamente levada em consideração: "the 'objects' referred to by mathematical terms can act as guides to fruitful ways of augmenting algorithmic systems – introducing fresh axioms, that is"[89]. O autor coloca a palavra "objeto" entre aspas com o intuito de insinuar a sua posição nominalista[90], de acordo com a qual termos matemáticos não se referem a objetos abstratos. Para ele, o que é aparentemente tido como a introdução de um novo objeto nada mais seria do que embutir um sistema algorítmico em outro.

Quanto à preocupação de que há uma ambiguidade na indicação de uma derivação, Azzouni (2005, 155) não parece afetar-se muito por tal questão. Apenas afirma que não há razão para que um matemático tenha uma derivação específica em mente, ainda que seja apenas inconscientemente, e que o simples fato de haver a indicação de uma derivação, sem uma preocupação com a sua unicidade, já seria suficiente para a prática matemática, pois o objetivo não é estabelecer a "forma lógica" de uma dada demonstração, mas somente indicar *alguma* derivação subjacente[91].

Voltando à questão nominalista, da mesma maneira que termos matemáticos não se referem a objetos abstratos, a derivação indicada por uma demonstração não deve ser vista como um referente desta. Nesse sentido, "indicar" quer dizer que uma demonstração, com sua forma e complexidade, contém alusões a detalhes suprimidos que *mostram* que uma certa derivação existe:

> Consider, as a first illustration of the phenomenon, an ordinary mathematical proof **P** that is (say) an abbreviation of a derivation **D**. **P** indicates **D** *not* by containing terms that refer to **D** but by virtue of the fact that anyone familiar with the process of "deabbreviating" proofs knows how to exhibit **D** on the basis of **P**. [...] Notice that this can hold in principle even if the actual construction of the derivation is (because of limits

[87](AZZOUNI, 2005, 154).

[88](AZZOUNI, 2005, 148).

[89](AZZOUNI, 2005, 157-158).

[90]The absence of relata for mathematical terms doesn't deprive them of 'content' with important roles. [...] In any case, the content – I'll continue to use this term – of the sentences of ordinary mathematical proofs is similar in its abilities to that of the sentences about purely fictional objects in this respect: Neither is 'meaningless', but neither – *on the nominalist view I favor* – describes anything that exists either (AZZOUNI, 2005, 157, grifo nosso).

[91]"It's not, after all, that the derivation(s) indicated are (somehow) the "logical form" of a proof in ordinary mathematics; it's that some derivation (or other) is indicated, and that hardly requires the uniqueness of the said derivation" (AZZOUNI, 2005, 154).

in time and energy) impossible (AZZOUNI, 2005, 158-159).

Com isso, Azzouni também objetiva demonstrar, respeitando critérios nominalistas, que a validade de uma demonstração não tem como base um suposto conteúdo semântico referido pelas sentenças que a compõem, mas uma derivação por ela indicada:

> The elements of a traditional proof enable it to be correlated to a formal derivation, where all the aspects of the traditional proof that seem to rely on the properties of objects referred to have been replaced by explicit axioms. Thus the promissory note that a semantic relation always seems to offer (reference to an object) is here discharged by "disinterpretation" – that relation dissolving into explicit axioms sufficient for the construction of a mechanically recognizable derivation (AZZOUNI, 2005, 119).

A essa altura, convém apresentarmos algumas críticas direcionadas à noção de indicador de derivação. Rav observa que, quando nos deparamos com uma alegação de que um certo enunciado A se segue de um enunciado B, às vezes precisamos preencher algumas lacunas, recorrendo a alegações intermediárias que nos permitam compreender como tal consequência pôde ser estabelecida. No entanto:

> There is no theoretical reason to warrant the belief that one ought to arrive at an atomic claim $C \to D$ which does not allow or necessitate any further justifying steps between C and D. This is one of the reasons for considering proofs as *infinitary objects*[92] (RAV, 1999, 15).

Tal condição toca diretamente na noção de indicador de derivação, pois acarreta que um passo numa demonstração pode corresponder a uma derivação de tamanho indefinido.

Azzouni, tentando elucidar esse problema, apresenta o que seria uma maneira de abordar a compreensão de um conceito: o conteúdo deste seria capturado por um conjunto de axiomas, o qual esgotaria todas as verdades a seu respeito. Não obstante, aplicando essa abordagem a conceitos matemáticos, sabe-se, devido ao teorema da incompletude, que alguns conceitos, como o de número natural, não podem ter o seu conteúdo axiomaticamente capturado[93]. Sendo assim, uma derivação que seria *indicada* por uma demonstração que extrai B como uma consequência de A pode estar aberta a uma análise infinita, tendo em conta que a incompletabilidade dos sistemas axiomáticos que tentam capturar os conceitos envolvidos em A e B demandaria indefinidamente sistemas cada vez mais ricos[94].

No entanto, Azzouni defende que isso não apresentaria problema algum à noção de indicador de derivação. De fato, há duas perspectivas a partir das quais se

[92]A seta em $C \to D$ não simboliza a constante lógica que se refere à implicação, apenas simboliza um caminho lógico informal de C a D. O que Rav denomina "proof" corresponde ao que denominamos "demonstração" no âmbito da distinção entre demonstração e derivação, vale lembrar.

[93]Como visto na seção 4.1.1, há casos de conceitos indefinidamente extensíveis.

[94](AZZOUNI, 2005, 161-162).

pode compreender a prática comum entre matemáticos de introduzir novos conceitos numa determinada área, a fim de facilitar a demonstração sobre antigos objetos. Do ponto de vista dos sistemas algorítmicos, isso se reflete no embricamento cumulativo de um sistema em outro, onde conceitos novos são introduzidos e os resultados concernentes aos conceitos antigos são preservados. Por outro lado, assumindo a perspectiva da prática matemática, a visão mais comum que se tem é a de que o conteúdo dos conceitos é ilimitado, i.e., estamos sempre *descobrindo* coisas novas a respeito de conceitos antigos, assim:

> [O]ur ability to grasp such concepts in mathematical practice allows us to generate an open-ended set of results about those concepts that can't be connected to any *particular* algorithmic system; furthermore, when analyzing a step in a proof, there is always more to say, because there is always more to say about the concepts that licensed the inference (AZZOUNI, 2005, 162, grifo nosso).

Azzouni contesta, todavia, a última perspectiva, afirmando que o mais natural não seria conceber um aprofundamento no conteúdo de conceitos dados, mas um aumento de conceitos como uma consequência da expansão dos sistemas algorítmicos, que além de conservarem os resultados já obtidos, não imporiam dificuldades sobre a possibilidade de falarmos dos *mesmos* conceitos, ainda que em momentos distintos trabalhemos em sistemas diferentes[95].

Quanto a este último ponto, sobre a identidade de um conceito, pode-se levantar o problema de que esta está atrelada ao sistema algorítmico do qual o conceito é originário, de maneira que uma mudança de sistema implicaria uma mudança nos conceitos, que, por sua vez, traria como consequência a condição de que teoremas provenientes de sistemas diversos não poderiam ser identificados entre si. A resposta de Azzouni consiste em dizer que implicitamente estipulamos identificações correferenciais entre termos presentes em diferentes sistemas, proporcionando uma identificação entre sentenças e conceitos que os atravessariam. Nessas condições, pode-se afirmar que:

> When mathematicians accept a proof of a theorem, they have recognized a derivation (of that theorem) as located somewhere in a family of algorithmic systems; and so it's located in every algorithmic system that algorithmic system is embedded within (AZZOUNI, 2005, 164).

Numa outra crítica, Rav (2007, 306) nos convida a considerar a situação de que uma demonstração foi completamente formalizada, de modo que a validade

[95]Deve-se notar, contudo, que a base do argumento de Azzouni consiste somente em reivindicar um estranhamento com a perspectiva oposta, oferecendo, para tanto, apenas uma comparação com a posição nominalista que adota: "Just as it's sensible for us to deny apparent commitments to mathematical objects that we're supposed to somehow (magically) reach out to from a family of algorithmic systems, so too it's sensible for us to deny that we continually pull out new content from the infinitely deep concepts that we've been gifted with, as opposed to the (humanly available) picture that we just continually augment our concepts by consistently augmenting the algorithmic systems that such concepts arise from" (AZZOUNI, 2005, 162).

da derivação – agora explicitada – possa ser verificada por um computador. Surgem então as seguintes questões: se a verificação concluir que a derivação não é válida, recusamos a validade da demonstração[96] que lhe corresponde, ou concluímos que há algum erro na formalização ou no programa que executa a verificação? Por outro lado, se a conclusão da verificação for positiva, reafirmamos nossa confiança na demonstração, ou concluímos que a formalização e a verificação foram bem executadas? Rav, apoiando-se na sua proposta de que as demonstrações possuem um caráter semântico irredutível, bem como nas críticas (a)-(c) direcionadas à noção de derivação (citadas acima, p. 133), defende apenas a segunda opção nessas duas perguntas. Sua posição é que a palavra final sobre a credibilidade de um determinado resultado repousa sobre uma demonstração, lugar onde efetivamente o conhecimento matemático é exercido e vislumbrado, sendo, portanto, o ponto a partir do qual se julga uma derivação, e não vice-versa.

Nessa direção, Rav (2007, 309) nos remete à seguinte citação de Feferman, onde ele questiona o ganho epistêmico envolvido na laboriosa tarefa de verificar formalmente uma demonstração matemática no sistema AUTOMATH, de de Bruijn:

> One of de Bruijn's goals [was the] possible use of such formal representation as a means for systematic mechanical checking of long and complicated proofs. The obvious question to be raised about this concerns the need to have humans as intermediaries in order to convert informal mathematics into a language such as AUTOMATH in a form to be submitted to a machine. Is such a conversion of really difficult and subtle proofs possible without the human agent understanding in all details what is to be converted? And if he does understand 'in all details' isn't the battle over (since complete understanding subsumes checking)? (FEFERMAN, 1979, 22).

Numa palavra, a verificação mecânica de uma demonstração não aumentaria nossa confiabilidade nesta, pois o trabalho prévio que viabiliza tal verificação nos proporciona um exame meticuloso da demonstração em questão, tornando inócuo o resultado que a verificação mecânica possa apresentar.

Além disso, Rav (2007, 307, n. 23) observa que mesmo que admitamos que a verificação mecânica seja um critério determinante no julgamento da legitimidade de um certo resultado, a confiabilidade depositada numa demonstração (informal) ainda seria maior, uma vez que não podemos, sob o risco de incorrermos num regresso ao infinito, verificar mecanicamente a correção da regimentação formal da demonstração. Ou seja, ainda que, ao formalizar uma demonstração, obtenhamos uma derivação válida, não podemos verificar mecanicamente se a derivação é uma transcrição fiel do que se pretendia dizer com a demonstração, pois, para tanto, seria preciso verificar se a transcrição que permite a verificação mecânica da transcrição é, também, fidedigna, e assim sucessivamente.

[96]Dizer que uma demonstração não é válida consiste apenas num modo de dizer que o que considerávamos ser uma demonstração não o consideramos mais como tal, dado que uma "demonstração inválida" é uma contradição em termos, pois ou temos uma demonstração ou não temos.

Mas Azzouni não se dobra diante de tais críticas:

> [F]ormalized proofs have become the norms of mathematical practice. And that is to say: should it become clear that the implications (of assumptions to conclusion) of an informal proof cannot be replicated by a formal analogue, the status of that informal proof as a successful proof will be rejected (AZZOUNI, 2009, 14).

Como mencionamos em outra ocasião, a questão principal não está em de fato verificar formalmente uma demonstração, mas em constatar que a impossibilidade de se revelar uma derivação subjacente é condição determinante para que uma demonstração seja deslegitimada.

As críticas acima dão a entender que a proposta de Azzouni é formalizar todas as demonstrações com as quais possamos nos deparar, para assim torná-las convincentes. Nossa interpretação é outra: a explicitação de uma derivação é necessária apenas quando há uma discórdia sobre um determinado ponto de uma demonstração. De fato, acreditamos que a citação de Feferman pode ser usada em favor da tese de Azzouni. Ora, se para formalizar é preciso conhecer todas as sutilezas da demonstração, é no processo de formalização que elas são reveladas, justamente o ponto levantado por Azzouni[97]. Diante de uma controvérsia a respeito da validade de uma demonstração, sua formalização, que exige uma inspeção de todos os seus detalhes, elucidará qual ponto está causando discórdia entre os que discutem a sua validade. O ganho epistêmico está em *efetuar* uma formalização, uma vez que essa atividade pode trazer à tona princípios com os quais até então não tínhamos nos dado conta que estávamos comprometidos. A questão não é colocar a demonstração e a sua derivação correspondente lado a lado e comparar as virtudes epistêmicas entre elas. Além do mais, não faz sentido formalizar uma demonstração cuja validade não esteja em disputa, a não ser por questões tangenciais, como a sua implementação numa certa linguagem de programação. E isso não quer dizer que os matemáticos resolverão suas disputas no âmbito formal, apenas que, ao se revelar os detalhes mais finos de uma demonstração, começamos a nos envolver com a sua derivação subjacente.

[97]As seguintes palavras de Rav (2007, 308), concebidas para criticar a noção de indicador de derivação, também acabam por defendê-la: "The point of such an exercise [formalization] is normally for didactic/expository purposes, *not* in order to gain in reliability beyond the original informal proof. For in general it is clear that in order to formalize a given proof, one has first to ascertain, line-by-line, that the given (informal) proof is correct; after all, one cannot formalize (intelligently) a flawed proof!" (grifo do autor). Mais uma vez, isso seria o próprio ponto defendido por Azzouni: a derivação indicada por uma demonstração não possui mais credibilidade, contudo, a impossibilidade de (em princípio) obtê-la deslegitima a validade da demonstração. Numa palavra, demonstrações inválidas não possuem uma derivação subjacente.

4.4.1 Tese de Hilbert e tese de Church

Importa-nos a seguir mencionar uma conexão interessante que pode ser estabelecida entre a noção de indicador de derivação e a tese de Church. Kripke (2013), tomando como premissa o que se denomina *tese de Hilbert*, propõe uma demonstração da tese de Church, percorrendo, no entanto, um caminho diferente das demonstrações propostas por Gandy (1980) e Sieg (2002), por exemplo, cujo método consiste em dar uma caracterização axiomática do que intuitivamente se considera a execução de uma computação por um ser humano – ainda que este seja idealizado.

Primeiramente, vejamos nas citações adiante como a tese de Hilbert se assemelha a aspectos centrais do programa de Azzouni. Barwise a elucida da seguinte maneira:

> Many logicians would contend that there is no logic beyond first-order logic, in the sense that when one is forced to make all one's mathematical (extra-logical) assumptions explicit, these axioms can always be expressed in first-order logic, and that the informal notion of *provable* used in mathematics is made precise by the formal notion *provable in first-order logic*. Following a sugestion of Martin Davis, we refer to this view as *Hilbert's Thesis* (BARWISE, 1977, 41, grifo do autor).

Tal passagem, além de revelar uma semelhança com a alegação de que toda demonstração possui uma derivação subjacente, revela uma semelhança com uma outra proposta de Azzouni, a de que a lógica de primeira-ordem é suficiente pra exprimir tais derivações[98]. Um outro ponto em comum consiste na menção ao fato de que o que sustenta a tese de Hilbert é uma evidência empírica, tal como Azzouni afirma que o sucesso do programa logicista em formalizar a matemática madura é uma evidência empírica a favor da noção de indicador de derivação:

> The first part of Hilbert's Thesis, that all of classical mathematics is ultimately expressible in first-order logic, is supported by empirical evidence. It would indeed be revolutionary were someone able to introduce a new notion which was obviously part of logic. The second part of Hilbert's Thesis would seem to follow from the first part and Godel's Completeness Theorem. Thus Hilbert's Thesis is, to some extent, accepted by many mathematical logicians (BARWISE, 1977, 41).

Kripike, porém, toma como premissa do seu argumento uma versão mais fraca da tese de Hilbert. Ele não convoca toda a noção de *demonstrabilidade*. Em sua versão, exige-se apenas que qualquer enunciado matemático possa ser expresso numa linguagem de primeira-ordem, de maneira que os passos de qualquer argumento possam ser dados nessa linguagem:

> Now I shall state another thesis, which I shall call "Hilbert's thesis", namely, that the steps of any mathematical argument can be given in a language based on first-order logic (with identity). The present argument can be regarded as either reducing Church's thesis to Hilbert's thesis, or alternatively as simply pointing out a theorem on all computations whose steps can be formalized in a first-order language (KRIPKE, 2013, 81).

[98]Cf. p. 134, nota 75.

Ademais, esta última oração impõe uma cautela. Não se trata de demonstrar a tese de Church para qualquer coisa que se considere computável, mas de demonstrá-la apenas com relação a computações cujos passos são formalizáveis em linguagem de primeira-ordem – o que inclui, diga-se de passagem, todos os algoritmos até então conhecidos[99]. Nessa direção, encontramos uma outra premissa assumida por Kripke, a que alega que computações podem ser vistas como casos especiais de derivações, não sendo nada mais do que uma forma particular de argumento matemático:

> [A] computation is a special form of mathematical argument. One is given a set of instructions, and the steps in the computation are supposed to follow – follow deductively – from the instructions as given. *So a computation is just another mathematical deduction, albeit one of a very specialized form.* In particular, the conclusion of the argument follows from the instructions as given and perhaps some well-known and not explicitly stated mathematical premises (KRIPKE, 2013, 80, grifo do autor).

A partir disso, montamos o seguinte argumento:

(1) "Os passos de qualquer argumento matemático podem ser dados numa linguagem baseada numa lógica de primeira-ordem (com identidade)"[100];

(2) "Uma computação é uma forma especial de argumento matemático"[101];

Logo:

(3) Os passos de qualquer computação podem ser dados numa linguagem baseada numa lógica de primeira-ordem (com identidade).

Com isso temos a transformação de procedimentos computáveis em argumentos formais válidos.

Acrescentando mais dois passos ao argumento acima, podemos alcançar o objetivo de demonstrar a tese de Church. O primeiro deles consiste numa aplicação do teorema da completude. Kripke se exprime nos seguintes termos:

> Suppose one has any valid argument whose steps can be stated in a first-order language. It is an immediate consequence of the Gödel completeness theorem for first-order logic with identity that the premises of the argument can be formalized in any conventional formal system of first-order logic (KRIPKE, 2013, 81).

Ou seja, o teorema da completude nos garante que para cada computação – que foi formalmente expressa em primeira-ordem num argumento válido – há uma derivação correspondente.

[99]"First-order algorithms happen to include all known algorithms, whether done by human or machine" (KRIPKE, 2013, 93).
[100](KRIPKE, 2013, 81).
[101](KRIPKE, 2013, 80).

Vale a pena aqui inserirmos um parêntese. Como já observamos, a maneira pela qual Kripke compreende a tese de Hilbert se difere um pouco da de Barwise, pois diz tratar-se antes de uma questão de enunciabilidade do que de demonstrabilidade: "Thus, it is about statability, rather than provability. For the purposes of the present paper, it could be restricted to steps of a computation"[102]. No entanto, como Kahle (2018, 6) adverte, uma diferença entre o que pode ser enunciado e o que pode ser demonstrado ocorrerá somente em casos de incompletude, ou seja, desde que estejamos num contexto de completude semântica da lógica de primeira-ordem, a versão da tese de Hilbert proposta por Kripke é apenas "aparentemente mais fraca".

Diante disso, uma pergunta natural que surge é: por que o primeiro teorema da incompletude não afetaria a tese de Hilbert, implicando que nem todo argumento matemático encontre uma derivação correspondente numa lógica de primeira-ordem? A incompletude só surge quando *se fixa* um certo sistema formal, i.e., para qualquer sistema axiomático de primeira-ordem (com um certo poder expressivo) que seja fixado, existe uma sentença verdadeira que nele não pode ser derivada. Como sempre podemos eleger diferentes sistemas axiomáticos para as demonstrações que pretendemos formalizar, nada impede, a princípio, que os teoremas concluídos de tais demonstrações sejam formalmente derivados. Kahle se refere a isso como uma versão *não uniforme* da tese de Hilbert, evocando para a sua compreensão a noção de *textura aberta* utilizada por Shapiro[103]:

> In its non-uniform form, "Hilbert's Thesis" speaks about first-order logic, which is open to add non-logical axioms, and, thus, allows for a set of highly different theories (like Peano-Arithmetic or Zermelo-Fraenkel Set Theory). This gives it an *open texture*, and, in particular, makes it immune to counter arguments using Goödel's First Incompleteness Theorem: albeit that there is, for every concrete first-order axiomatic theory, an unprovable true sentence, we may always switch to a stronger – but still first-order – theory, which decides this sentence (KAHLE, 2018, 16).

Voltando ao argumento acima, o outro passo a ser inserido diz respeito ao fato da relação de derivabilidade ser computável por uma máquina de Turing, no sentido que lemos a seguir:

> If the notation of the Hilbert functional calculus is modified so as to be systematic, and so as to involve only a finite number of symbols, it becomes possible to construct an automatic machine $\mathscr{K}$, which will find all the provable formulae of the calculus (TURING, 1936, 252).

Esquematizando mais uma vez, construímos o seguinte argumento:

Por (3) e o teorema da completude, temos:

(4) Toda computação é derivável numa lógica de primeira-ordem;

[102](KRIPKE, 2013, 97, n. 21).

[103]Veja nossa análise dessa noção na seção 5.1.

Pelo teorema de Turing (citação acima):

(5) A relação de derivabilidade é computável por uma máquina de Turing;

Logo, por (4) e (5), demonstra-se a tese de Church:

(6) Toda computação pode ser executada por uma máquina de Turing[104].

Nas palavras de Kripke:

> Granted that the proof relation of such a system [first-order logic] is recursive (computable), it immediately follows in the special case where one is computing a function (say, in the language of arithmetic) that the function must be recursive (Turing computable) (KRIPKE, 2013, 81).

Em síntese, o argumento de Kripke se delineia da seguinte maneira: a partir da hipótese de que computações são formas especiais de argumentos matemáticos, emprega-se uma versão fraca da tese de Hilbert, que nos permite formalizar os passos de tais argumentos na linguagem do cálculo de predicados de primeira-ordem (com identidade), constituindo assim argumentos formais válidos; por sua vez, recorrendo ao teorema da completude, temos a garantia que esses argumentos válidos são deriváveis num sistema lógico de primeira-ordem; por fim, sendo tais derivações executáveis por uma máquina de Turing, segue-se que toda computação pode ser executada por uma máquina de Turing.

Um ponto que Kripke insiste é que a demonstração da tese de Church que propõe se segue como um corolário especial do teorema da completude, particularmente denominado por ele de *teorema de algoritmo de primeira-ordem*:

> [C]omputation is a special form of deduction. If we restrict ourselves to algorithms whose instructions and steps can be stated in a first-order language (first-order algorithms), and these include all algorithms currently known, the Church-Turing characterization of the class of computable functions can be represented as a special corollary of the Gödel completeness theorem (KRIPKE, 2013, 94).

O único porém é que essa demonstração da tese de Church se restringe a algoritmos formuláveis em linguagens de primeira-ordem. *Até o momento*, isso engloba todos os algoritmos que temos conhecimento. Assim, desde que não exista um algoritmo que não possa ser expresso em primeira-ordem, temos uma demonstração da tese de Church, caso contrário, temos um teorema de alcance menor, o teorema de algoritmo de primeira-ordem.

Uma vez que a tese de Church foi demonstrada tendo a tese de Hilbert como premissa, é interessante analisar esta última à luz dos tipos de evidência (A)-(D) (cf. seção 2.3), empregados com o intuito de justificar a plausibilidade da tese de Church[105]:

[104](COPELAND, 2017, §1.8) nos foi de grande valia para a compreensão do argumento de Kripke.
[105]Apresentamos aqui os argumentos de Kahle (2018, §4).

(A) Evidência Heurística

Em sua versão não uniforme, a tese de Hilbert possui uma evidência heurística maior do que a tese de Church, pois esta se refere à noção de computabilidade, que possui uma história recente, cerca de 100 anos, ao passo que a tese de Hilbert se refere a mais de 1000 anos da história da matemática, não havendo nenhum exemplo que a contradiga ao longo desse período.

(B) Equivalência entre formulações distintas

Argumentar pela confluência de diferentes formalizações de sistemas de primeira-ordem como um suporte à tese de Hilbert é menos significativo do que no caso da tese de Church. Enquanto nesta as formalizações foram estabelecidas independentemente umas das outras, sendo a equivalência entre elas demonstrada apenas posteriormente, no caso da tese de Hilbert, considerando os sistemas de Frege, Whitehead-Russel, Hilbert e Gentezen, por exemplo, notamos que seus respectivos desenvolvimentos se deram muitas vezes pela análise e superação das deficiências dos demais.

(C) O conceito de Turing de máquina de computação

Poderíamos considerar o sistema gentzeniano de dedução natural como algo similar à análise que Turing fez da noção de computação, mas em relação à noção informal de demonstração matemática. Todavia, ainda que o trabalho de Gentzen pressuponha uma análise de demonstrações matemáticas, sua preocupação maior é com os raciocínios lógicos aí envolvidos, os quais são comumente suprimidos em tais demonstrações. Ademais, a noção formal de demonstração se distancia enormemente da sua contraparte informal, além de que o objetivo daquela se concentra em representar o resultado final de uma demonstração, não a maneira como um matemático ordinariamente a executa.

(D) Lógicas simbólicas e algoritmos simbólicos

Quanto a esse tipo de evidência, não teríamos algo análogo para que pudéssemos comparar, uma vez que, no que concerne a tese de Hilbert, seria circular qualquer referência a sistemas simbólicos.

Para concluir, ao contrário do que Lakatos dá a entender com suas críticas à formalização, Azzouni não propõe que a matemática seja reduzida ao âmbito formal. Para o último autor, a noção de demonstração é indispensável à prática matemática, e a de derivação, latente na primeira noção, é reivindicada com o intuito de defender dois pontos: uma concepção nominalista da matemática; um critério mais objetivo para elucidar o fato de uma demonstração ser convincente, opondo-se assim a concepções que sustentam que "mathematical proving is merely a 'socially constructed' practice"[106].

Todavia, a proposta de Azzouni aparenta apenas resolver um problema de superfície, pois como lidar com conflitos acerca dos princípios lógicos que constituem as derivações subjacentes? As críticas direcionadas às teorias que reduzem o convencimento proporcionado por uma demonstração a uma prática socialmente construída não poderiam agora ressurgir no âmbito das derivações? Ou seria Azzouni um pluralista, sendo seu objetivo não resolver disputas, mas apenas apontar os princípios que estão na origem de conflitos que eventualmente se revelam na prática matemática? Essas questões serão retomadas no final do próximo capítulo.

[106](AZZOUNI, 2005, 142).

5

Desenvolvimento Conceitual

Apresentaremos neste capítulo os dois resultados que acreditamos ter obtido com este trabalho. Com o auxílio do aparato conceitual da fenomenologia, propomos: uma maneira de compreender como os conceitos matemáticos evoluem; uma maneira de conciliar de forma coerente, no âmbito do intuicionismo, as noções de demonstração e verdade. Outro ponto que veremos é que a fenomenologia, apesar de elucidar as diferenças entre platonismo e intuicionismo, legitimando-os internamente, trata a disputa entre essas posições como sendo dogmática e impossível de ser superada. No entanto, pensamos que o princípio de equilíbrio reflexivo possa ser uma via que permita tomar uma posição nesse embate, por isso lhe dedicaremos uma seção.

5.1 Shapiro: textura aberta

As seções 5.1 e 5.1.1 estabelecem um contraponto entre duas maneiras de compreender a adequação formal da noção pré-formal de computável. De acordo com a primeira, as próprias tentativas de formalização modificam e constituem a maneira de compreendermos a noção pré-formal. Já de acordo com a outra seção, a formalização não interfere na compreensão da noção pré-formal, que é clara o suficiente para ter a sua extensão identificada à extensão de uma noção formal. Aproveitando esse contraponto, na seção 5.2.1 interpretamos a tese de Church por meio da noção de gênese conceitual, que, num certo sentido, é uma mescla desses dois pontos de vista.

Como já observamos, diversos autores compartilham da concepção de que a tese de Church não pode ser demonstrada matematicamente. O argumento mais representativo dessa posição alega que isso se daria em virtude da tese propor uma equivalência envolvendo uma noção pré-formal, ou como diz Kleene (1974, 317), uma noção vaga e intuitiva. A citação abaixo sintetiza essa posição:

> Church's thesis is not a mathematical theorem which can be proved or disproved in the exact mathematical sense, for it states the identity of two notions only one of which is mathematically defined while the other is used by mathematicians without exact definition (KALMÁR, 1959, 72).

Um outro argumento pela não demonstrabilidade matemática da tese de Church toma como justificativa a condição de que a noção informal de computabilidade não seria propriamente uma noção matemática, estando antes relacionada a propriedades concernindo habilidades humanas ou dispositivos mecânicos:

> Computability is a property related to either human abilities or mechanical devices, both of which are at least prima facie non-mathematical. It is therefore widely agreed that the question of Church's thesis is not a mathematical question, such as the Goldbach conjecture [...] That is to say, mathematicians do not seek to show either that CT follows from accepted laws of number theory or that it contradicts such laws. Nevertheless, both mathematicians and philosophers have offered various non-mathematical arguments either for or against the thesis[1] (SHAPIRO, 1981, 353).

No que concerne esses dois pontos acerca da não demonstrabilidade da tese de Church, Shapiro (2006, 422) observa que para que pudessem ser levados a cabo definitivamente deveríamos levar em consideração o que consiste em algo ser vago. Na sua opinião, o fato de se considerar a noção de computação uma noção vaga ou intuitiva não é uma condição suficiente para que ela não seja considerada passível de uma demonstração matemática, dado que, se assim o fizéssemos, a matemática seria bastante reduzida, passando a existir apenas após o advento dos sistemas dedutivos formais.

Citando uma carta (datada de 29 de novembro de 1935) em que Church relata a Kleene uma conversa que teve com Gödel em 1934 (anterior ao artigo de Turing, portanto), Shapiro (2006, 423) ressalta o fato de que Gödel não acreditava haver, até então, uma boa definição da noção de computabilidade, considerando, neste quesito, o cálculo lambda "completamente insatisfatório". Em resposta, Church diz a Gödel que se comprometeria a demonstrar que qualquer definição de computabilidade por ele proposta estaria inclusa na sua definição de cálculo lambda. No entanto, aparentemente não era isso que faria Gödel mudar de opinião, pois sua insatisfação seria com os "tipos de evidência" propostos em favor da tese de Church. O trecho da carta a seguir indica que Gödel teria sugerido uma demonstração da tese:

[1]Chateaubriand é também da mesma opinião, como lemos em Carnielli e Epstein (2009, 299): "Por que deveríamos considerar estes casos [definição de um círculo e definição de continuidade] diferentes do de Church? Talvez, como nos sugeriu Oswaldo Chateaubriand, as noções pré-formais nestes dois exemplos foram originalmente concebidas como sendo parte da matemática, enquanto construtividade ou computabilidade foram sempre consideradas noções não matemáticas".

> His [Gödel's] only idea at the time was that it might be possible, in terms of effective calculability as an undefined term, to state a set of axioms which would embody the generally accepted properties of this notion, and to do something on that basis (apud (DAVIS, 1982, 9)).

Desse modo, a partir de axiomas que expressassem uma análise conceitual da noção de computabilidade demonstraríamos que uma função é computável se e somente se for recursiva[2].

Ainda que não possamos dizer que Gödel tenha considerado a análise de Turing uma demonstração da tese de Church, é certo que o trabalho deste autor foi indispensável para que ele passasse a considerá-la legítima[3], como atestam a citação mencionada na seção 2.3, onde Gödel fala que com o conceito de máquina de Turing temos pela primeira vez uma "definição absoluta de uma noção epistemológica interessante", e a também bastante citada passagem que se encontra no *postscriptum* ao artigo de 34[4]: "Turing's work gives an analysis of the concept of 'mechanical procedure' (alias 'algorithm' or 'computation procedure' or 'finite combinatorial procedure'). This concept is shown to be equivalent with that of a 'Turing machine'".

Como afirma Shapiro (2006, 424), a análise de Turing (1936) sobre em que consistiria uma pessoa seguir um algoritmo é tida como o "germe" da demonstrabilidade da tese de Church. Vários autores passaram a defender que a tese é passível de uma demonstração matemática rigorosa, como Mendelson[5], Gandy (1980), que explicitamente afirma "teorema de Turing", e Sieg, do qual vale a pena lermos a seguinte passagem:

> The detailed conceptual analysis of effective calculability yields rigorous characterizations that dispense with theses, reveal human and machine calculability as axiomatically given mathematical concepts, and allow their systematic reduction to Turing computability (SIEG, 2002, 391).

Podemos dizer que uma das grandes dificuldades da tese de Church, responsável por deixar seu estatuto epistemológico ainda sob disputa, deve-se ao fato dela dar espaço a uma interferência de elementos empíricos no âmbito da matemática, ciência que é tradicionalmente vista, à exceção de algumas vertentes teóricas empiristas, como a mais abstrata das ciências, cabendo-lhe mesmo a posição de um

---

[2](SHAPIRO, 2006, 423).

[3]"Although his [Truing's] treatment was not 'axiomatic' in any formal sense, he did manage to show that 'generally accepted properties' of effective calculability lead inevitably to a definite class of functions (which subsequently turned out to be the same as the λ-definable or recursive functions). It is therefore not difficult to see why Turing's work was so crucial for Gödel" (DAVIS, 1982, 14).

[4](GÖDEL, 1965, 72).

[5]"The point I have attempted to make is that equivalences between intuitive notions and "precise" notions need not always be considered unprovable theses. Such equivalences sometimes can be directly perceived to be valid, sometimes they can be justified by a combination of directly perceived truths and logical argument, and, in other cases, it is possible to discover entirely convincing proofs" (MENDELSON, 1990, 233).

conhecimento a priori. Assim, se a noção de computação envolve habilidades humanas ou dispositivos mecânicos de cálculo, demonstrar a tese de Church envolve demonstrar matematicamente algo sobre o mundo empírico, colocando num mesmo plano duas categorias que por princípio não se nivelam. Por isso uma investigação sobre a tese implica questões centrais da filosofia da matemática, como o que é uma demonstração e sobre o que a matemática fala[6].

Consideremos a questão de uma demonstração formal da tese de Church. De modo geral, uma demonstração formal se dá a partir de uma linguagem formal; de axiomas de uma teoria formalizados nesta linguagem; e de um sistema dedutivo, que estabelece, por meio de regras de inferência, quando uma fórmula – cujos critérios de boa formação são dados pela linguagem formal – se segue de outras. Uma demonstração formal se define então como uma sequência de fórmulas onde cada uma delas ou é um axioma ou se segue diretamente por meio de uma regra inferencial de fórmulas que a precedem. Cada fórmula da sequência é uma fórmula demonstrada, i.e., um axioma (considerado uma demonstração de si mesmo, pois é tido como demonstrado mesmo que não se siga de nenhuma outra fórmula) ou um teorema[7]. Além disso, é possível verificar mecanicamente se uma sequência de fórmulas é uma demonstração de uma determinada fórmula. Como observa Shapiro (2006, 425), uma demonstração formal da tese de Church provavelmente se daria numa formalização da teoria de números, à qual adicionaríamos um predicado para a noção de computabilidade e os axiomas que o exprimiriam. Assim poderíamos compor uma sequência de fórmulas que consistiria numa derivação formal de uma fórmula que representaria a tese de Church.

No entanto, se por um lado podemos dar uma definição precisa do que é uma demonstração formal, por outro, a questão sobre em que consiste uma demonstração não formal é vaga, pois ela se articula de acordo com a sua proximidade ao texto que a formalizaria e de acordo com a plausibilidade dos axiomas formais exprimirem adequadamente o que se pretende exprimir no contexto não formal. Por essa razão há um espaço de discordância sobre a possibilidade de formalizar os argumentos de Turing (1936), uma vez que não se pode garantir com exatidão que a formalização irá expressar adequadamente o que o texto originalmente propunha[8].

O ponto é que, dada uma demonstração formal da tese de Church, podemos a partir daí questionar, da mesma maneira que questionamos a legitimidade da equivalência afirmada pela tese, a adequação formal dos axiomas que compõem a de-

[6](SHAPIRO, 2006, 424).

[7]O que temos em mente aqui são os sistemas formais de tipo hilbertiano, não os sistemas de dedução natural, que por envolverem a noção de hipótese, não se adequariam exatamente nessa descrição.

[8](SHAPIRO, 2006, 426).

monstração em questão. O fato de haver uma demonstração formal não resolve, por si só, os problemas epistemológicos ocasionados pela tese. Nesse sentido, após dizer que não seria uma tarefa difícil formalizar os argumentos de Turing (1936), Shapiro comenta:

> But how would we guarantee that the stated axioms or premises are necessary for computability? This question cannot be settled by a *formal* derivation. That would start a regress, at least potentially. We would push our problem to the axioms or premises of that derivation (SHAPIRO, 2006, 426, grifo do autor).

A esse respeito, Lakatos (1978, cap. 4) é mais contundente. Ele concebe as demonstrações matemáticas em três tipos distintos: pré-formal, formal e pós-formal. No primeiro e terceiro tipos, as demonstrações são caracterizáveis por uma certa vagueza e empirismo, e justamente por isso são vinculadas a algum tipo de incerteza que provavelmente se revelará por meio de uma refutação devida a um contraexemplo ou característica originários de uma possibilidade até então não pensada. Desse modo, uma demonstração formal (o segundo tipo), desde que seja constituída a partir de um sistema consistente, é completamente fiável, no entanto, não é completamente certo *sobre o que* ela é fiável, sendo característico do desenvolvimento pós-formal se constituir das possibilidades de questionar se a formalização representa adequadamente aquilo que ela se propôs a formalizar[9]:

> Does this mean that for instance if we prove Euler's theorem in Steenrod's and Eilenberg's fully formalized postulate system it is impossible to have any counterexample? Well, it is certain that we won't have any counterexample formalizable in the system (assuming the system is consistent); but we have no guarantee at all that our formal system contains the full empirical or quasi-empirical stuff in which we are really interested and with which we dealt in the informal theory. *There is no formal criterion as to the correctness of formalization* (LAKATOS, 1978, 66-67, grifo nosso).

Shapiro (2006, 427) denomina de questões residuais os problemas concernindo a relação de adequação entre os sistemas formais e as concepções matemáticas pré-formais. Apesar de aparentemente serem questões filosóficas ou quase-empíricas, ele acredita que não se segue disso que seriam questões não matemáticas, além de que em alguns casos devem ser tratadas como questões já resolvidas. De acordo com ele, tal condição é comum no âmbito matemático, e não haveria nada de diferente na tese de Church que a colocaria como uma exceção.

Uma outra perspectiva a respeito da possibilidade de demonstrar a tese de Church seria exigir a sua demonstração na teoria de conjuntos axiomatizada por Zermelo-Fraenkel. Com isso concordaríamos com o ponto de vista que diz que qualquer demonstração matemática legítima possui, em última instância, uma demonstração em ZF que lhe representa[10]. Contudo, mesmo que isso fosse possível,

[9] O teorema de Euler (cf. abaixo), i.e., $V-E+F=2$, exaustivamente discutido em (LAKATOS, 1976), envolve um exemplo paradigmático de demonstração informal; já o teorema da incompletude constitui um exemplo de demonstração pós-formal.

[10] Shapiro (2006, 427) cita Maddy (1997) como uma representante dessa posição.

o problema das questões residuais não poderia ser considerado resolvido. Ainda que se obtivesse uma formulação adequada em ZF da noção formal de recursividade, permaneceríamos no mesmo lugar se nos questionássemos sobre a adequação da formulação em ZF da noção intuitiva de computabilidade, “we would be back where we started, philosophically”[11].

Disso, o que Shapiro (2006, 428) propõe concluir não é que a tese de Church seja vista como essencialmente possuindo características quase-empíricas ou filosóficas – o que para alguns impossibilitaria por princípio um tratamento matemático –, mas que não se deve tratá-la como um problema inteiramente redutível ao formalismo ou à teoria de conjuntos de ZF, sem esquecer, além do mais, que a matemática vai muito além desses dois âmbitos.

Como vimos na seção 2.4, teses podem ser notadas em diversos lugares, sejam propondo uma adequação a conceitos oriundos da própria matemática ou não. Mendelson (1990, 231-232) é também da mesma opinião, invocando quatro casos que poderiam igualmente ser considerados como teses, mas que em geral não o são. Além da definição de limite dada por Cauchy–Weierstrass, ele menciona a definição de função como um conjunto de pares ordenados, a definição tarskiana da verdade e a definição de validade lógica. Assim, ainda que tais teses estejam na mesma condição epistemológica da tese de Church, i.e., não se sabe com precisão até que ponto são suscetíveis a uma demonstração, elas são amplamente empregadas para demonstrar coisas sobre as noções pré-formais a elas vinculadas[12].

Para compreender melhor esse ponto, Shapiro (2006, 430) propõe uma conexão com a noção de *textura aberta*, teorizada pelo filósofo Friedrich Waismann. A origem de tal noção está ligada à crítica deste autor à concepção *verificacionista* de que o sentido de um enunciado é dado pelo seu método de verificação. Em sua crítica, Waismann não nega que o sentido de um enunciado p está de certa forma conectado aos enunciados $s_1, s_2, ..., s_3$ que descrevem suas evidências, o que ele nega é a *identificação* do sentido de p à conjunção dessas evidências. Apropriando-se de uma discussão oriunda da fenomenologia, a qual diz que a conjunção ou a disjunção de enunciados de dados dos sentidos não são suficientes para implicar a existência ou não de um objeto material – de modo que um enunciado sobre um objeto material não consistiria numa mera abreviação de tais enunciados –, Waismann (1951) acrescenta:

> The failure of the phenomenalist to translate a material object statement into terms of sense-data is not, as has been suggested, due to the poverty of our language which lacks the vocabulary for describing all the minute details of sense experience, nor is it due to the difficulties inherent in producing an infinite combination of sense-datum

[11](SHAPIRO, 2006, 427).
[12](SHAPIRO, 2006, 430).

> statements though all these things may contribute to it. In the main it is due to a factor which, though it is very important and really quite obvious, has to my knowledge never been noticed – to the 'open texture' of most of our empirical concepts.

Assim, não seria adequado falar de uma totalidade (definitiva) de verificações a partir da qual se constituiria o sentido de um enunciado empírico, uma vez que em tais enunciados ocorrem conceitos empíricos, para os quais não temos condições de determinar de antemão todas as situações possíveis a que eles se aplicariam: "Open texture is a very fundamental characteristic of most, though not of all, empirical concepts, and it is this texture which prevents us from verifying conclusively most of our empirical statements"[13].

Todavia, a textura aberta de um conceito não implica que ele necessariamente tenha um sentido vago. Enquanto a textura aberta se caracteriza por ser "essencialmente incompleta", a vagueza pode ser superada precisando melhor os pontos que deram ensejo a alguma ambiguidade:

> *Vagueness* should be distinguished from *open texture*. [...] Open texture [...] is something like *possibility of vagueness*. Vagueness can be remedied by giving more accurate rules, open texture cannot. An alternative way of stating this would be to say that definitions of open terms are *always* corrigible or emendable (WAISMANN, 1951, grifo do autor).

Waismann restringe sua noção ao âmbito dos termos empíricos sejam eles provenientes da linguagem ordinária ou das ciências empíricas. Shapiro (2006, 434) então propõe analisá-la no âmbito da matemática, ciência majoritariamente associada à ideia de definições precisas e rigorosas, diametralmente oposta, portanto, à noção de textura aberta. Ele argumenta que tal visão só se justifica nos ramos formalizados das matemáticas contemporâneas, ou nas matemáticas formuladas em ZF, e ainda assim, desde que não se levantem questões acerca da adequação de tais matemáticas a estes sistemas. Na prática informal e no desenvolvimento da matemática a perspectiva é diferente, pois aí encontramos conceitos cuja precisão de seus limites são ou já foram em algum momento motivo de controvérsia. O conceito de número, por exemplo, considerado à luz dos números complexos e dos números quatérnios, poderia, nesse sentido, se enquadrar na noção de textura aberta.

Vale observar que, se levarmos em consideração que a noção de conjunto possui uma "história longa e às vezes conturbada"[14] e que ainda hoje não há um consenso definitivo sobre qual noção intuitiva de conjunto subjaz a ZF[15], o argumento que sustenta que a tese de Church não pode ser uma definição ou ser passível de uma

[13](WAISMANN, 1951).

[14](SHAPIRO, 2006, 435).

[15]"George Boolos (1989) argues that there is no single, intuitive notion of set that underlies ZF. The theory is a more or less ad hoc mixture of two notions. The currently unresolved status of propositions like the continuum hypothesis sheds some doubt on the proposition that even now we have hold of a single, sharply delineated notion" (SHAPIRO, 2006, 435).

demonstração matemática, já que a noção de computabilidade seria vaga e intuitiva, poderia ser repetido para as "teses" que em suas propostas de equivalência estão envolvidas a noção de conjunto, pois, como sugere Mendelson (1990, 232), a noção de conjunto não seria mais clara do que a noção de função ou a noção tarskinana de verdade, por exemplo, definidas em relação àquela.

Sendo assim, Shapiro (2006, 435) procura concluir disso que a noção de conjunto subjacente a ZF, apesar das hesitações que a envolvem, é precisa o suficiente em diversos propósitos, o que se deve a décadas de trabalho com a sua axiomatização. Ademais, em seu desenvolvimento, tal noção revelou portar uma textura aberta, o que a equipararia, num certo sentido, à noção de computabilidade.

Munido da perspectiva teórica de Waismann que acabamos de apresentar, Shapiro então propõe ler o diálogo de *Proofs and Refutations*[16] – o qual descreve de maneira fictícia, mas embasado em documentação histórica, diversas controvérsias suscitadas pela demonstração do que hoje conhecemos como *teorema de Euler* – como uma instância dessa perspectiva.

O teorema de Euler pode ser enunciado da seguinte maneira: dado qualquer poliedro, e sendo V o número de vértices, A o número de arestas, e F o número de faces, temos que $V - A + F = 2$. A sua demonstração, que ao invés de apresentá-la aqui preferimos remeter o leitor a (LAKATOS, 1976, 7-10), consiste numa experiência de pensamento composta de três passos, que serão considerados lemas da demonstração: 1) considerar um poliedro oco, cujas faces são feitas de uma borracha fina, para assim remover uma delas e achatá-lo numa superfície plana; 2) triangularizar os polígonos que se formaram a partir das faces achatadas na superfície plana, i.e., traçar diagonais sobre os polígonos que não são triângulos; 3) remover paulatinamente cada um dos triângulos formados.

Feita a demonstração, os alunos que dão voz ao diálogo fictício apresentam uma série de figuras que se qualificariam como poliedros, mas que seriam contraexemplos ao teorema. Entre elas, um cubo oco contendo um cubo em seu interior[17] (sem que se toquem), um poliedro-estrela[18] e até mesmo um cilindro[19]. Cada um dos contraexemplos sugeridos acabam violando algum dos lemas acima. Por exemplo, o cubo composto por um cubo em seu interior violaria o primeiro lema, "because on removing a face from the inner cube, the polyhedron will not be stretchable on to a plane"[20].

[16](LAKATOS, 1976, 1-134).
[17](LAKATOS, 1976, 14).
[18](LAKATOS, 1976, 18).
[19](LAKATOS, 1976, 24).
[20](LAKATOS, 1976, 14).

Por meio da fala do aluno Delta, Lakatos (1976, 15) exprime o que denomina de método de "monster-barring", uma maneira de deslegitimar o que se apresenta como contraexemplo de uma demonstração. No caso em questão, as figuras sugeridas não seriam poliedros, mas monstros:

> DELTA: But why accept the counterexample? We proved our conjecture – now it is a theorem. I admit that it clashes with this so-called 'counterexample'. One of them has to give way. But why should the theorem give way, when it has been proved? It is the 'criticism' that should retreat. It is fake criticism. This pair of nested cubes is not a polyhedron at all. It is a monster, a pathological case, not a counterexample.

Isso levanta uma discussão sobre a definição do conceito de poliedro, a qual, uma vez estabelecida, delimitaria uma extensão precisa deste conceito, permitindo assim julgar a legitimidade dos contraexemplos sugeridos:

> TEACHER: [R]efutation by counterexamples depends on the meaning of the terms in question. [...] I assumed *familiarity* with the concept, i.e. the ability to distinguish a thing which is a polyhedron from a thing which is not a polyhedron – what some logicians call knowing the extension of the concept of polyhedron. It turned out that the extension of the concept wasn't at all obvious: *definitions are frequently proposed and argued about when counterexamples emerge* (LAKATOS, 1976, 17-18, grifo do autor).

A esse respeito, dois casos extremos se revelam. Por um lado, não haveria uma definição última de poliedro para a qual não existiria nenhum caso indeterminado, o que levaria a argumentar que tal conceito não é suscetível de um tratamento matemático – consequentemente, a aceitação do teorema de Euler deveria ser recusada; por outro, um poliedro seria definido como sendo exatamente o que realiza o teorema de Euler[21] (i.e., a condição é invertida: começamos tentando demonstrar uma propriedade que se aplicaria ao que definiríamos como um poliedro, mas acabamos definindo um poliedro como sendo o que instancia as condições demandadas para a demonstração de tal propriedade).

No intricado movimento dialético do texto de Lakatos, outras duas maneiras de lidar com a questão dos contraexemplos se fazem notar, como: restringir o teorema a uma classe específica de poliedros, tal como a constituída pelos poliedros simples e convexos (a despeito de ignorarmos os casos em que a fórmula $V - E + F = 2$ é válida para poliedros côncavos e não simples); assumir os contraexemplos e a partir daí procurar uma generalização do teorema, para que seja válido tanto para os poliedros eulerianos como para os não eulerianos[22].

De acordo com Shapiro, a história que Lakatos reconstrói no diálogo fictício que debate a demonstração do teorema de Euler pode ser interpretada por meio

[21] ALPHA: Why don't you just define a polyhedron as a system of polygons for which the equation $V - E + F = 2$ holds? This Perfect Definition would settle the dispute for ever. There would be no need to investigate the subject any further (LAKATOS, 1976, 17).

[22] (SHAPIRO, 2006, 437).

do que vimos sobre a teoria de Waismann. Apesar de em seus primórdios – que podem ser remontados à Grécia antiga – a noção de poliedro ter um uso estabelecido na comunidade matemática, ela não tinha uma definição formal estabelecida, que permitiria uma distinção precisa entre o que conta ou não como um poliedro:

> In other words, the notion of polyhedron exhibited what Waismann calls open-texture. This open-texture did not prevent mathematicians from working with the notion, and proving things about polyhedra. Still, at the time, it simply was not determinate whether a picture frame counts as a polyhedron (SHAPIRO, 2006, 437).

Como vemos em *Proofs and Refutations*, quando a generalidade do teorema de Euler se encontrou abalada, a comunidade matemática se manifestou com diferentes propostas, que podem ser consideradas a partir de dois modos[23]: as que consideram a demonstração mais convincente do que os contraexemplos, procurando numa análise daquela desvelar detalhes e "lemas ocultos"[24] que possam esclarecer o que é um poliedro; as que a partir dos contraexemplos e da demonstração procuram uma definição mais geral de poliedro, apontando as características necessárias que distinguem um poliedro euleriano de um não euleriano. Ambos os casos dão a sua contribuição à matemática, que pode ser notada na história dessa disciplina.

Uma outra via descrita por Lakatos (1976, 114) é a de traduzir a demonstração em termos "perfeitamente conhecíveis", a qual consideraria um poliedro como um conjunto de elementos que realizam certas condições. Tais elementos podem ser chamados de vértices, arestas e faces, mas o ponto é que, desde que realizem as condições exigidas, a questão sobre o que realmente são esses elementos é irrelevante. Como aponta Shapiro (2006, 439), essa via representa a perspectiva que considera a matemática à luz da álgebra e da teoria de modelos, popular desde o início do século XX. E tal como no formalismo axiomático hilbertiano, uma teoria não passaria de uma estrutura conceitual mantida por certas relações, de maneira que, sendo estas realizáveis, pouco importa a que elementos a teoria se aplica. Por essa razão se fala de termos perfeitamente conhecíveis, pois a axiomatização delimita com precisão os limites das definições, não havendo, portanto, espaço para uma textura aberta.

A esse modo de conceber se segue a seguinte crítica, expressa na voz do interlocutor Gamma:

> But then where do you take your definition from? You defined the obscure concept of polyhedron in terms of the 'perfectly known' concepts of faces, edges and vertices. But your definition – namely that the polyhedron is a set of vertices, plus a set of edges, plus a set of faces, plus an incidence matrix, obviously fails to capture the intuitive notion of a polyhedron (LAKATOS, 1976, 114).

[23](SHAPIRO, 2006, 438).
[24](LAKATOS, 1976, 46).

Logo em seguida, Lakatos se refere a Pólya, citando uma passagem em que este diz que numa definição matemática o sentido matemático é criado, ou seja, ao contrário de uma definição que encontramos num dicionário, onde o lexcógrafo aceita o sentido corrente das palavras e tenta expressá-lo o mais próximo possível na forma de uma definição, na matemática "[t]he mathematician is not concerned with the current meaning of his technical terms, at least not primarily"[25]. Nessas condições, seria meramente acidental qualquer semelhança entre o poliedro definido formalmente e o poliedro "genuíno", consequentemente, não teríamos um conhecimento seguro deste estudando-o a partir daquele. Além disso, se considerarmos a definição uma elucidação ou explicitação das características essenciais numa linguagem mais clara, a definição não passaria de uma conjectura, podendo ser verdadeira ou falsa: "How can you have a certainly true translation of a vague term into precise ones?"[26].

A conclusão de Shapiro sobre isso é que estaríamos agora diante do que poderíamos chamar de uma *tese de poliedro*:

> Its [polyhedron formal's definition] boundaries are as determinate as one could wish – assuming that there is no flexibility concerning the logic or the underlying set-theoretic model theory. But this is not to say that the original, pre-theoretic notion of "polyhedron" was similarly determinate, nor is it to say that the pre-heoretic notion (or notions) exactly matched the formal definition. *This last is yet another example of the same sort of thing as Church's thesis* (SHAPIRO, 2006, 439-440, grifo nosso).

Trazidos à tona o método de demonstrações e refutações, de Lakatos, e a noção de textura aberta, de Waismann, Shapiro passa a analisar como a tese de Church pode ser compreendida por meio desses elementos. Ele observa que o ponto de partida da discussão é a noção intuitiva ou pré-teórica de computável, fazendo notar que o sufixo "ável" está relacionado ao significado de "ser capaz de" ou "ser possível de", noções modais cuja extensão varia de acordo com interesses e hipóteses assumidos por quem os enuncia. Se, por exemplo, nos perguntarmos pela possibilidade de trissectar um ângulo arbitrário, a resposta irá depender do que estamos dispostos a admitir: ela será negativa se, exigindo uma precisão perfeita da trissecção, as únicas ferramentas disponíveis forem um compasso e uma régua sem demarcação; por outro lado, sendo permitido o uso de uma régua com demarcações, ou se o requisito de uma completa precisão for abrandado, a trissecção se torna possível. Com a noção de computável há algo semelhante. Podemos dizer que ela possui uma textura aberta quando não temos bem definidos os parâmetros que estabelecem com precisão as ferramentas e os limites admissíveis, sendo os trabalhos de pesquisadores da área – Church, Turing, Post, Kleene, Péter – os responsáveis pelo seu aperfeiçoamento, análogo ao que vimos com Lakatos a respeito da noção de poliedro. É nessa

[25](PÓLYA, 1973, 86).
[26](LAKATOS, 1976, 114).

direção que as ideias de Waismann e Lakatos se imbricam, uma noção pré-teórica paulatinamente se torna mais precisa à medida que o trabalho sobre ela elucida os parâmetros que vão sendo colocados em questão[27].

Por trás do estabelecimento de parâmetros, há o que Shapiro (2006, 442) denomina de *idealização*. Sem ela, a função recursiva de Ackermann, por exemplo, poderia ser considerada um contraexemplo ao que se entende pelo sentido *fraco* da tese de Church – o que diz que toda função recursiva é computável –, pois se entendermos por computável apenas o que for *factivelmente calculável* por um ser humano, notavelmente essa não seria uma função computável, já que envolve, mesmo para argumentos pequenos, valores cuja obtenção extrapolaria a quantidade de matéria disponível no universo. No entanto, a partir do momento em que os limites impostos pela execução factível de um cálculo não condizem com uma noção mais abstrata de computável, em que a consideração sobre o que *pode ser* computado responde a interesses mais teóricos, fazemos idealizações acerca do tempo e do espaço, permitindo-nos assim falar de tempo de execução ilimitado, recurso material inesgotável, etc. Não se pode deixar de notar que as idealizações fazem parte do próprio modo de ser da matemática. Se tomarmos o primeiro postulado de Euclides, por exemplo, que diz que, dados dois pontos distintos há um único segmento de reta que os une, não há nada estabelecendo um limite entre a distância de tais pontos. Nesse sentido, Shapiro argumenta que a idealização dá maior precisão à intuição, fixando parâmetros que correspondem a interesses específicos não determinados de maneira clara pela noção intuitiva.

De todo modo, nem tudo é idealizável, deve-se levar em conta algumas restrições para que certas consequências indesejadas sejam impedidas. Se fossem admitidos algorítimos infinitamente longos, por exemplo, qualquer função numérica seria computável, trivializando assim essa noção[28]. Na formulação de Turing (1936, 249), isso corresponde ao fato de não se admitir um alfabeto infinito, uma vez que implicaria a existência de símbolos cuja diferença entre si seria arbitrariamente pequena, tornando-os indistinguíveis pelo agente ideal que os manipularia. Dessa forma, impedem-se que instruções infinitas sejam dadas, consequentemente, a trivialização mencionada há pouco é barrada. Para Shapiro (2006, 443), esse argumento de Turing, ao estabelecer limites sobre o que é distinguível, torna a noção de algoritmo mais precisa, além de que ele poderia ser enquadrado no que Lakatos denomina de lemas ocultos numa demonstração, que numa disputa podem ser revelados a fim de salvaguardar a generalidade desta.

Mas isso não quer dizer que as idealizações aplicadas a uma noção intuitiva

[27](SHAPIRO, 2006, 441).
[28](SHAPIRO, 2006, 443).

são suficientes para torná-la identificável a uma noção formal. Para que possamos assumir como verdadeira a tese de Church, a noção intuitiva nela envolvida deve ser idealizada numa certa direção, a qual é orientada por interesses que estabelecem o que estamos dispostos a admitir como computável. Se, no âmbito da noção intuitiva, considerarmos que o agente ideal que calcula tem à sua disposição uma quantidade de papel (que seria a fita de uma máquina de Turing) limitada, ainda que esse limite seja uma idealização – por exemplo, uma quantidade de papel igual à quantidade de partículas no universo –, ela não é relevante para uma máquina de Turing, para a qual não há um limite para a disponibilidade de papel[29].

A essa altura, Shapiro evoca a demonstração (informal), proposta por Mendelson[30], do sentido *fraco* da tese de Church. De acordo com ele, a demonstração teria o importante papel de tornar a noção intuitiva mais precisa, pois daria as diretrizes para onde se devem orientar as idealizações:

> In light of the proof, and with hindsight, it remains eminently reasonable to focus on the idealized notion of computability, just as it was reasonable to focus on the sharply defined notions of polyhedron, continuity, area, and the like. [...] We look to see what the proof proves, and thereby gain insight on how the pre-theoretic notion should be sharpened. *After the fact, one might think that the argument proves something determinate about a previously sharp notion. I submit that this would be a mistake. I'd say that the proof serves to fix the intuitive notion* (SHAPIRO, 2006, 446, grifo nosso).

Mais uma vez, as idealizações demandadas pela demonstração – como tempo e espaço ilimitados –, podem ser vistas como lemas ocultos, e de acordo com o método de *demonstrações e refutações* de Lakatos, haveria ao menos três reações possíveis: alguém poderia alegar que tais idealizações criariam *monstros*, como a função de Ackermann; em resposta, poder-se-ia alegar que uma análise conceitual da noção de computável revelaria que a noção pré-teórica não pressupõe limites de tempo ou espaço; um outro poderia aproveitar a ocasião para conceber diferentes noções de computável, como a noção de computável num espaço polinomial, promovendo assim certas generalizações. Contudo, a conclusão de Shapiro (2006, 445) é que, apropriando-se do que vimos sobre Wiesmann, não haveria uma real necessidade de decidir por uma verdadeira essência da noção pré-formal.

Analisando agora o sentido mais controverso da tese de Church – toda função computável é recursiva –, Shapiro (2006, 446) investiga quais ferramentas e habilidades a noção intuitiva de computável concede a um agente que calcula, o qual pode

[29](SHAPIRO, 2006, 444).

[30]"(The so-called initial functions are clearly effectively computable; we can describe simple procedures to compute them. Moreover, the operations of substitution and recursion and the least-number operator lead from effectively computable functions to effectively computable functions. In each case, we can describe procedures that will compute the new functions.) This simple argument is as clear a proof as I have seen in mathematics, and it is a proof in spite of the fact that it involves the intuitive notion of effective computability. The fact that it is not a proof in ZF or some other axiomatic system is no drawback; it just shows that there is more to mathematics than appears in ZF" (MENDELSON, 1990, 233).

ser concebido a partir de certas *idealizações*. Algumas características são elencadas: a) o agente não age aleatoriamente, levando-se em consideração que a noção em questão é a de computabilidade determinista; b) o agente segue um certo conjunto de instruções que determinam o que ele deve executar em cada passo; c) o agente tem a habilidade de reconhecer o que está olhando, como distinguir o símbolo '1' de um espaço em branco; d) as ações do agente se limitam às instruções que estão armazenadas em sua memória, as quais são infalivelmente relembráveis.

Shapiro (2006, 446) então propõe supormos um agente ideal que tem a habilidade intuitiva de reconhecer se uma sentença arbitrária na linguagem da aritmética é verdadeira. Ele seguiria a seguinte instrução: diante de uma sentença verdadeira, retornar o número 1; caso contrário, retornar o número 0. Levando em conta que as instruções dizem de maneira precisa o que fazer em cada passo, e que, por hipótese, o agente é capaz de executar o que as instruções demandam, é cabível perguntarmo-nos se o que temos é um algoritmo. Se o for, a tese de Church é falsa, dado que a função computada – atribuir o número 1 às sentenças verdadeiras – não é recursiva.

Não aceitando que a descrição acima seja caracterizável como um algoritmo – a conclusão mais óbvia, de fato –, o que na noção intuitiva, não ignorando a legitimidade de se fazer certas idealizações, nos impõe essa conclusão? Poder-se-ia responder que a única intuição legitimamente atribuível ao agente que calcula, ainda que ele seja mandatário de alguns atributos ideais, é a que permite distinguir certos símbolos. Mas "[d]o we have a clear, unambiguous concept of what counts as (allowable) intuition? To be sure, actual humans do not have the ability to recognize arithmetic truth. But what of our idealized computists?"[31]

O exemplo acima pode parecer ingênuo, mas como adverte Shapiro (2006, 447), o contra-argumento dado por Kalmár[32] (cf. a seção 3.1) tem a sua razão de ser sustentada pela mesma condição: a delimitação das idealizações não se encontra determinada de maneira precisa pela noção informal de algoritmo. Relembremos o método que ele sugere para calcular a função ψ num número finito de passos: fixamos um argumento p e calculamos sucessivamente $\phi(p,0), \phi(p,1), \phi(p,1)...$; simultaneamente, tentamos demonstrar, "por todos os meios corretos", que nenhum dos valores acima pode ser igual a 0; assim, ou encontramos o menor número q tal que $\phi(p,q) = 0$, ou demonstramos que não existe um número y tal que $\phi(p,y) = 0$. Supondo-se um matemático idealmente competente – do qual se espera a habilidade de saber demonstrar teoremas –, com tempo e material ilimitado à sua disposição, o método acima descreve o que ele deve fazer em cada passo a fim de obter o valor

[31](SHAPIRO, 2006, 447). O autor utiliza o termo *computist* para se referir a um agente calculador ideal.

[32]"To say the least, he was an intelligent mathematician, and was not prone to deny what is obvious, a mere matter of understanding the meaning of a word in use" (SHAPIRO, 2006, 448).

de ψ.

Assim, na leitura de Shapiro, a noção intuitiva de computável não teria ainda atingido um grau de precisão suficiente para que desqualificasse a plausibilidade que Kalmár atribuía ao seu método:

> [I]s there something unambiguous in the pre-theoretic notion, or notions, of computability, in use in the 30's and a few decades after, that rules it [Kalmár's method] out, definitively? The question here is why Kalmár thought that this "method" constitutes an algorithm that is relevant to Church's thesis (SHAPIRO, 2006, 448).

O grande problema do método de Kalmár é que ele falha em capturar a ideia de procedimento mecânico associado à execução de um método efetivo. Em seu exemplo não se especifica o que o agente deve fazer para obter a demonstração, deixando isso a cargo de sua criatividade e habilidade como matemático. Isso porque, para Kalmár, a efetividade de um método se caracteriza principalmente por se concluir num número finito de passos, não importando como eles devem ser executados, sobretudo pelo fato de que novos métodos são criados constantemente, em consonância com o incessante desenvolvimento da matemática:

> We regard as effectively calculable any arithmetical function, the value of which can be effectively calculated for any given arguments in a finite number of steps, *irrespective how these steps are* and how they depend on the arguments for which the function value is to be calculated. In particular, I do not suppose the calculation method to be "uniform"[33] (KALMÁR, 1959, 73, grifo nosso).

A não uniformidade de um método mencionada aqui pode ser entendida como uma manifestação da ideia de que a noção de computável possui uma textura aberta, de modo que a aceitação da tese de Church implicaria em limitar tal noção a um método relativo a um determinado estágio do desenvolvimento da matemática.

Logo em seguida a uma citação de Péter, em que ela de modo semelhante pondera – após assentir à tese de Church – sobre a condição de que o desenvolvimento da matemática pode revelar métodos até então desconhecidos, ampliando nossa compreensão do que é computável, Shapiro afirma: "Waismann could not put it better. Péter declares that, *at the time*, the notion of computability is subject to open-texture"[34].

Esta citação dá a entender que para Péter a noção de computabilidade poderia ser desenvolvida a um ponto em que seria completamente precisa, pois sua textura aberta se deveria apenas *àquele período*. Não sabemos até que ponto essa atribuição a Péter é correta, no entanto, antes de mais nada, ela nos revela o ponto de vista de Shapiro, de acordo com o qual a noção de computabilidade, devido a anos de

[33] Sobre a noção de uniformidade e outras questões implícitas no artigo de Kalmár, cf. (SZABÓ, 2017), onde também encontramos a seguinte afirmação enfática: "according to Kalmár, every 'correct' mathematical result obtained 'in a finite number of steps' is obtained effectively" (p. 11).

[34] (SHAPIRO, 2006, 449, grifo nosso).

pesquisa acumulados, atingiu um nível de precisão que não deixa dúvidas sobre a legitimidade da adequação formal proposta pela tese de Church:

> It seems to me that in the ensuing decades, the community of logicians has come to see the notion of computability as sufficiently sharpened. It is now reasonable to hold that Church's thesis is established with as much rigor as anything in (informal) mathematics. [...] More recently, Turing's argument has been supplemented and extended by the deep analyses by Gandy and Sieg. [...] There is not much room for open-texture anymore – or so it seems, anyway (SHAPIRO, 2006, 450-451).

Aqui Shapiro se refere às axiomatizações propostas por Gandy e Sieg, as quais teriam realizado a sugestão de Gödel (cf. p. 151) de, a partir de uma análise conceitual da noção de computável expressa num sistema axiomático, demonstrar a tese de Church. Dessa forma, tais axiomatizações, mais toda a pesquisa acumulada que reafirma a plausibilidade da tese, antes de estarem estabelecendo algo sobre uma noção intuitiva "absolutamente precisa", estariam, sobretudo, *tornando* tal intuição mais precisa, propiciando assim um conceito matemático como qualquer outro.

5.1.1 Argumento por compressão

No que veremos a seguir, Smith, baseando-se num tipo de argumento devido a Kreisel, propõe uma demonstração informal da tese de Church. Como argumentaremos, não acreditamos que a demonstração realiza a sua pretensão, no entanto nos interessa a maneira como Smith compreende a noção informal de computável, que para ele, ao contrário de Shapiro, não *se torna* mais precisa ao ser compreendida em termos de uma noção formal. Ela assim já o é por si mesma. Isso será importante no desenvolvimento da seção subsequente.

Smith (2013, 344), ao falar sobre computabilidade, distingue três níveis em que este conceito é compreendido:

(1) Nível *pré-teórico*: baseando-nos em alguns exemplos paradigmáticos de computação que se dá no mundo real, constituímos um conjunto de ideias rudimentares sobre o que se pode computar com papel e caneta, computadores (i.e. as máquinas digitais de nosso tempo) e, de modo mais geral, alguns tipos de mecanismos;

(2) Nível *proto-teórico*: neste nível, uma certa organização teórica entra em cena. Visamos o conjunto de ideias rudimentares com um certo direcionamento e fazemos algumas idealizações, como a eliminação de limitações práticas – tempo, recursos materiais, etc. –, mas o conceito ainda comporta uma certa vagueza: "what makes a step in a step-by-small-step algorithmic procedure 'small' enough to be admissible?"[35]. Aqui se concebe o conceito, ainda não

[35](SMITH, 2013, 345).

completamente formal, de computabilidade;

(3) Nível *totalmente teórico*: o conceito adquire uma caracterização precisa, é onde encontramos os conceitos de recursividade, máquina de Turing, cálculo lambda.

A noção de computabilidade formada no nível pré-teórico é insuficiente em estabelecer algo bem definido, de maneira que a tese de Church se viabiliza apenas após um certo tratamento teórico das ideias rudimentares sobre computabilidade. Assim, o que a tese propõe é o estabelecimento de uma relação entre as extensões dos conceitos concebidos a partir dos níveis (2) e (3), ou seja: as funções que compõem a extensão do conceito proto-teórico de método efetivo são as mesmas que compõem a extensão[36] do conceito teórico de recursividade (e demais conceitos equivalentes)[37].

A despeito de algumas tentativas de recusar a tese de Church, como já vimos em seções passadas, de modo geral, ela é amplamente aceita, contudo o modo como ela é aceita pode ser distinguido em duas vertentes: uma mais moderada, que, fundamentando-se nas evidências formuladas na seção 2.3, admite que:

> we can accept the Thesis, though not as a statement of the bald truth but rather as recording a decision about how best to locate a sharply defined class of functions in the area initially gestured to by our still somewhat vague proto-theoretic concept (SMITH, 2013, 347);

outra mais contundente (menos popular que a primeira), disposta a assumir a tese como demonstravelmente verdadeira:

> Further reflection on the very notion of an effective calculation together with mathematical argument shows that the effectively calculable functions can be none other than the μ-recursive/Turing-computable ones, and so the Thesis is a demonstrably true claim about the coextensiveness of our proto-theoretic and formal concepts (SMITH, 2013, 347).

Smith se enquadra na segunda vertente, de modo que, apropriando-se de um argumento de Kreisel (1967), irá propor uma demonstração informal da tese, a qual se baseia no que ele denomina de *argumentos por compressão* (*squeezing arguments*). Mas antes de elucidar como esse tipo de argumento funciona, ele faz algumas observações prévias, necessárias para o correto entendimento do significado da demonstração.

[36]É interessante notar a observação de Smith (2013, 350, nota 5) de que a tese de Church não é uma relação entre conceitos, mas entre suas extensões: "For us, at any rate, it would be a mistake to write, e.g., 'Church's thesis is the proposal to identify an intuitive notion with a precise, formal, definition' (FOLINA, 1998, 311): it isn't the notions but their extensions which are being identified."

[37](SMITH, 2013, 345).

No processo de caracterização do conceito de computabilidade, ao passarmos do nível pré-teórico ao nível proto-teórico, procedemos do modo como vimos na seção 5.1. Eliminando algumas imprecisões e fazendo algumas idealizações, restringimos cada vez mais a condição de textura aberta do conceito pré-teórico. Não se trata de meramente explicar algo que sempre esteve, ainda que implícito, na noção pré-teórica, a passagem do nível (1) ao (2) se insinua pelo viés das idealizações, que demarcam o que estamos dispostos a admitir como *possível* de ser executado por um método efetivo (lembre-se da discussão sobre a função de Ackermann na seção supramencionada). Nessas condições, a vertente mais contundente da tese de Church se justifica pela ideia de que, a partir do momento em que nos encontramos no nível (2) de compreensão do conceito de computabilidade, segue-se que de fato temos um conceito que circunscreve a mesma classe de funções circunscrita pelos conceitos de nível (3)[38].

Resta examinar, todavia, a alegação – quase um senso comum na literatura sobre o tema – de que a tese de Church não pode ser demonstrada porque envolve em um de seus termos uma noção vaga. Para tanto, Smith (2013, 349) elabora duas noções de vagueza, argumentando que nenhuma delas pode constituir um bom argumento pela não demonstrabilidade da tese de Church: limite-vago-da-extensão (*borderline-vagueness-in-extension*) e poli-vagueza.

A primeira noção de vagueza envolve situações em que, numa graduação entre pequenas diferenças, não saberíamos determinar com precisão um limite a partir do qual estaríamos fora da extensão circunscrita por um conceito. Considere-se o conceito de *vida humana*, por exemplo. Não temos condições de assinalar um ponto limite que demarque com precisão o momento em que um certo agregado de células constitui uma vida humana. De modo semelhante, atribuir esse tipo de vagueza ao conceito de método efetivo seria equivalente a dizer que poderíamos alinhar uma série de funções, as quais passariam gradualmente das não computáveis às computáveis, sem haver uma fronteira que demarcasse com precisão onde uma classe termina e a outra começa[39].

Smith argumenta que, pelo fato do conceito de método efetivo envolver alguma vagueza – como quando se fala de passos pequenos que não ultrapassam uma certa capacidade cognitiva –, isso não implica que existam casos limites onde se colocaria em dúvida o caráter computável de uma função, ou seja, a extensão desse conceito não possui limites difusos ou borrados:

> I wave an arm rather airily and say, 'The men over there are great logicians'. The sense of 'over there' is vague; yet I may determinately refer to none other than Gödel,

[38](SMITH, 2013, 349).
[39](SMITH, 2013, 349).

> Church and Kleene, if they are the only men in the vicinity I sweepingly gesture towards (so on any reasonable sharpening of 'over there' in the context, I pick out the same men). Likewise, even if informal talk of effectively computable functions is in some sense an imprecise verbal gesture, it could be the case that this gesture picks out a quite determinate class of functions (i.e. the only natural class in the vicinity, which is located by any reasonable sharpening of the idea of a function calculable by an algorithm proceeding by small steps).

Quanto à noção de poli-vagueza, ela ocorre quando um conceito falha em capturar um único tipo de entidade, carecendo desse modo de uma desambiguação, que pode estabelecer em diversas direções novos limites para o conceito. Smith (2013, 350), referindo-se ao livro *Proofs and Refutations*, dá como exemplo o poliedro sugerido pelo estudante Alpha[40], que serviria de contraexemplo ao teorema de Euler: o conceito de poliedro precisa tornar-se mais preciso antes que o teorema possa ser considerado demonstrado ou refutado. Smith argumenta que o conceito proto-teórico de computabilidade não se enquadra nessa condição de vagueza, alegando que todas as tentativas de defini-lo acabaram por circunscrever exatamente a mesma classe de funções recursivas (e equivalentes). Assim:

> [W]e have no reason whatsoever to suppose that there is more than one mathematically natural class of total functions in the vicinity picked out by the intuitive notion of an effectively computable function (once we have done our rough-and-ready proto-theoretic clarification of the idea of computing-by-following-an-algorithm).

Nessas condições, aparentemente não há uma noção de vagueza sob a qual a extensão do conceito de computabilidade poderia ser considerada difusa ou ambígua, o que abre caminho para a demonstração de que tal extensão é identificável à extensão de um conceito formal.

A partir disso, Smith (2013, 351) argumenta que as alegações de que a tese de Church não pode ser demonstrada porque o conceito de computabilidade é vago tentam se fundamentar por um mero truísmo, o de que a noção proto-teórica é intuitiva, de maneira que o seu entendimento não envolve a compreensão de uma teoria geral formulada de maneira explícita e precisa. Logo, a noção de computabilidade não seria adequada para propósitos teóricos, pois não imporia restrições suficientes para que, aliada a uma argumentação matemática, a tese fosse demonstrada. No entanto, "that claim is *not* obvious. It needs to be defended as the conclusion of some arguments: it can't just be asserted as an unargued presumption"[41].

O mesmo tipo de pressuposição se articula na ideia de que uma demonstração legítima deve, em última instância, ser expressa num sistema formal. Além do mais, pressupondo-se que um sistema formal não pode lidar com conceitos intuitivos, tais conceitos desapareceriam assim que fossem adaptados às exigências formais, ou seja, no final nada se demonstraria a respeito deles. Quanto a isso, a posição de

[40]Cf. (LAKATOS, 1976, 14) e a seção 5.1, acima.
[41](SMITH, 2013, 352, grifo do autor).

Smith é de que uma formalização não pode "magicamente" viabilizar uma demonstração que não seria concebível se não tivesse sido formalizada, seu papel, num certo sentido, não é necessário à demonstração:

> Formalization enforces honesty about what assumptions and inferential rules are being relied on, enabling us to expose suppressed premisses and inferential fallacies, to avoid trading on ambiguities, and so forth. We thereby push to their limits the virtues of explicitness and good reasoning that we hope to find in common-or-garden mathematical arguments. But those common-or-garden arguments can perfectly well involve good reasoning and sound demonstrations *before* we go formal[42] (SMITH, 2013, 352, grifo do autor).

Além dos três níveis teóricos de compreensão de um conceito matemático, Smith (2013, 353) sugere três níveis para situarmos os argumentos matemáticos: (1) considerações meramente plausíveis: neste nível não temos ainda uma demonstração, nem formal, nem informal. Um exemplo seria a conjectura de Goldbach, é plausível que ela seja verdadeira, mas ainda não foi demonstrada; (2) demonstrações informais e (3) formais. Ele critica que, para alguns filósofos, só há uma linha divisória, que coloca as demonstrações formais de um lado e todo o resto do outro, situando assim demonstrações informais e considerações plausíveis num mesmo nível. Sua posição a respeito disso é que tal visão constitui uma má compreensão da prática matemática, além de forjar uma distinção entre formal e informal que aparenta ser mais precisa do que realmente é.

Smith proporá então uma demonstração informal da tese de Church, que ao seu ver tem a mesma força argumentativa de uma demonstração que a prática matemática consideraria legítima. Contudo, com relação ao que vimos na seção passada, é importante mencionarmos uma diferença entre Shapiro e Smith. De acordo com aquele, a passagem entre os níveis teóricos compõe uma evolução gradual, de modo que, da mesma maneira que um conceito passa do nível pré-teórico ao proto-teórico, ele passaria deste para o completamente teórico:

> Shapiro segues rather too smoothly from discussion of the conceptual move from the inchoate notion of computability to the notion of effective computability to discussion of the move from effective computability to Turing computability. But supposing that these are moves of the same kind is in fact exactly the point at issue in some recent debates (SMITH, 2007, 12-13, §14).

[42]Smith considera o seguinte exemplo como um argumento de que mesmo os que rejeitam a demonstrabilidade da tese de Church por questões de vagueza aceitam demonstrações envolvendo conceitos não formais:

> [T]ake the claim endorsed by almost all those who say that the Church-Turing Thesis is not provable, namely that it would be disprovable if false. The thought is that if we could find a clear case of an intuitively effectively computable function which is provably not recursive, then that would decisively settle the matter. But that again would be a proof involving the application of an intuitive unformalized notion (SMITH, 2013, 352-353).

Não acreditamos que isso seja um bom exemplo. *Refutar* a tese de Church por meio de um contraexemplo embasado numa noção intuitiva é bem menos comprometedor do que *demonstrá-la*, pois neste caso o que se propõe é um limite à noção intuitiva, como se fosse possível de antemão assegurar que todo o nosso conhecimento por vir não a alteraria.

Assim, o conceito de computabilidade, com o desenvolvimento da matemática, teria a sua extensão delimitada com cada vez maior precisão, de modo que a demonstração da tese de Church *faria parte desse processo* como um refinamento do nível proto-teórico. Por outro lado, para Smith, a demonstração da tese não seria um refinamento a mais do conceito de computabilidade, mas a demonstração de que este, no seu nível proto-teórico, possui características que restringem a identificação de sua extensão à extensão do conceito formal[43].

A demonstração proposta por Smith se apropria de um método, o qual ele denomina argumento por compressão, atribuído a Kreisel (1967, 152). Vejamos[44], primeiramente, como esse método se aplica à demonstração de que a noção informal de um argumento ser válido em virtude de sua forma, a qual referiremos por I_L, é coextensiva à noção de validade formalizada na teoria de modelos.

À semelhança do conceito de computabilidade, o conceito de validade é distinguível em três níveis: (1) pré-teórico, concebido a partir de explicações de caráter geral e exemplos paradigmáticos de argumentos tidos como logicamente robustos; (2) proto-teórico, onde entra a noção mais precisa de validade em virtude da forma; (3) completamente teórico, nível em que se encontra a definição tarskiana de validade.

No primeiro nível, ainda não temos condições de estabelecer uma extensão única para o que admitiríamos como uma consequência válida. Como teste, Smith propõe as seguintes questões:

> Is the intuitive notion of consequence constrained by considerations of relevance? – are *ex contradictione quodlibet* inferences (which argue from a contradiction to an arbitrary conclusion) fallacious? When can you suppress necessarily true premisses and still have an inference which is intuitively valid? What about the inference 'The cup contains some water; so it contains some H_2O molecules'? That necessarily preserves truth, if we agree with Kripke (1980, Lecture 3): but is it valid in the intuitive sense? – if not, just why not? (SMITH, 2013, 355).

Indagações como essas nos forçam a aprimorar nosso conceito pré-teórico, o que nos conduz ao segundo nível, onde se argumenta que a forma de um argumento é suficiente para estabelecer a sua validade, i.e., não importa como seja interpretado o vocabulário não lógico do argumento, a forma garante que de premissas verdadeiras jamais se segue uma conclusão falsa. Nesse nível, já nos damos conta, por exemplo, de que um argumento envolvendo o princípio de *ex contradictione quodlibet* constitui um caso limite de validade, e que a inferência "O copo contém água,

[43]"[T]he Church-Turing Thesis (read boldly) is that, once we have arrived at the *second*, considerably more refined though still somewhat vague, concept of an *effective* computation, *then* we in fact have a concept which pins down the same unique class of functions as the third-level concepts" (SMITH, 2013, 349, grifo do autor).

[44]Cf. (SMITH, 2013, 355).

logo contém H_2O", por se embasar no significado do vocabulário não lógico "água" e "H_2O", não é válida por causa da sua forma.

Ainda sim estamos diante de um conceito informal, que nos coloca em situações nas quais não temos condições de dar respostas precisas:

> In particular, we've said nothing explicitly about where we can look for the 'things' to build the interpretations which the account of validity generalizes over. For example, just how big a set-theoretic universe can we call on? [...] If you do cheerfully buy into set-theory, what about allowing domains of objects that are even bigger than set-sized? Our informal explication just doesn't begin to speak to such questions (SMITH, 2013, 356).

Apesar disso, Smith argumenta que a elucidação informal do conceito de validade em virtude da forma é suficiente para delimitar uma extensão única para I_L (ao menos para argumentos concebidos num vocabulário de primeira-ordem). O argumento se segue da seguinte maneira: seja S_L a propriedade de ser demonstrável no sistema dedutivo de nossa preferência para a lógica clássica de primeira-ordem. Assim, para qualquer argumento α,

L1. Se α for S_L, então α é I_L.

Isso corresponde à afirmação de que o sistema dedutivo é correto, i.e., aplicando as regras inferenciais a premissas verdadeiras não se pode produzir uma conclusão falsa. A evidência dessa afirmação se baseia numa indução sobre o tamanho das demonstrações, e na nossa compreensão intuitiva do conceito de validade: as regras básicas de inferência são corretas em virtude apenas da forma dos argumentos que elas constituem – como determina a noção intuitiva de validade. Por conseguinte, dado que o encadeamento de tais inferências preservam a validade do argumento constituído, se, por uma série de inferências deduzirmos uma fórmula Φ a partir de um conjunto de premissas Σ, a dedução de Φ a partir de Σ é válida. E como bem nota Smith (2013, 356): "Their [inference steps] evident validity in that sense is, after all, the principal reason why classical logicians accept the proof system's rules in the first place!".

A seguir, N_L exprime a propriedade de não existir um contra-modelo nos números naturais, ou seja, interpretando um argumento neste domínio não é o caso que ele tenha premissas verdadeiras e uma conclusão falsa. Nessa direção, ainda que a compreensão intuitiva do conceito de validade não estabeleça condições precisas sobre em que consiste atribuir diferentes interpretações ao vocabulário não lógico de um argumento, podemos ao menos reconhecer que, se este possui um contra-modelo nos números naturais, então certamente, no sentido intuitivo, ele não é válido em virtude apenas de sua forma, o que por contraposição nos dá:

L2. Se α for I_L, então α é N_L.

Disso se segue que as propriedades de ser demonstrável num certo sistema dedutivo, S_L, e de não existir um contra-exemplo nos números naturais, N_L, ladeiam a noção intuitiva de validade em virtude da forma (para inferências numa linguagem de primeira-ordem), I_L, i.e.,

i. $|S_L| \subseteq |I_L| \subseteq |N_L|$,

onde $|X|$ está para a extensão de X. Além disso, o teorema de Löwenheim–Skolem descendente garante que, se α possui algum contra-modelo, então existe um contra-modelo cujo domínio é constituído por uma parte dos números naturais ou por todos eles. Por contraposição: se α não possui um contra-modelo nos números naturais, então ele não possui nenhum contra-modelo, o que nos assegura, pelo teorema de completude, que α pode ser derivável num certo sistema dedutivo[45]. Logo, temos:

L3. Se α for N_L, então α é S_L.

Isso nos dá:

ii. $|S_L| \subseteq |I_L| \subseteq |N_L| \subseteq |S_L|$,

implicando que as extensões não estão *propriamente* contidas umas nas outras, ou seja, L3 comprime a extensão do conceito informal pelas extensões dos conceitos formais, obtendo a igualdade:

iii. $|S_L| = |I_L| = |N_L|$.

Assim, a partir de certas hipóteses concebidas em razão do conceito proto-teórico de validade em virtude da forma, somos forçados a reconhecer que a extensão deste conceito se iguala à extensão de outros dois conceitos formais.

Tomando esse argumento como modelo, Smith[46] propõe uma demonstração da tese de Church pelo método da compressão. Considerando que f esteja para funções numéricas de apenas um argumento (restrição apenas por questões de conveniência), a demonstração se articulará a partir das três premissas abaixo, onde S e N são conceitos formalmente definidos, e C, o conceito intuitivo de função computável:

C1. Se f for S, então f é C;

C2. Se f for C, então f é N;

C3. Se f for N, então f é S.

Tomando por S o conceito de função recursiva, ainda que C não tenha uma

[45](SMITH, 2013, 357, nota 14).

[46]Cf. (SMITH, 2013, 357-366) e (SMITH, 2010, 6-11).

extensão delimitada de uma maneira tão precisa quanto a de um conceito formal, a ideia de que toda função que se encontra na extensão de *S* é computável, o que corresponde ao sentido *fraco* da tese de Church, é bastante convincente[47] – se for o caso, podemos inclusive apelar à demonstração sugerida por Mendelson (1990, 233) (cf. seção 5.1, acima). Isso nos evidencia a premissa C1. Quanto a C2, o objetivo é escolher um conceito que permita nos convencermos de que, se uma função não se encontra em sua extensão, então ela não é computável. A partir daí, a premissa C3 pode ser estabelecida por uma demonstração usual de equivalência, tal como as já efetuadas no âmbito das evidências do tipo B (cf. seção 2.3). Estabelecidas as três premissas, podemos então deduzir que a extensão de *C* não difere da extensão dos outros dois conceitos formais.

Desse modo, a parte mais complicada da demonstração por compressão reside no estabelecimento de C2, pois, como diz Smith (2010, 7), devemos propor um conceito *N* "which is weak enough to feature in a compelling necessary condition for being algorithmically computable, but strong enough to give us the third premiss". Para *N*, poderíamos empregar o conceito de máquina de Turing, não obstante, Smith (2013, 358, §45.6), numa argumentação pormenorizada, apresenta razões indicando que esse conceito impõe certas restrições que não o tornariam suficientemente abrangente para abarcar algumas de nossas intuições a respeito do que legitimaríamos como computável:

> For example, when we do real-life computations by hand, we often insert temporary pages as and when we need them, and equally often throw away temporary working done earlier. In other words, our workspace doesn't have a fixed form: so when we are trying to characterize intuitive constraints on computation we shouldn't assume straight out – as Turing does – that we are dealing with computations where the 'shape' of the workspace stays fixed once and for all (SMITH, 2013, 359).

Sua proposta então consiste em tomar para *N* a definição de algoritmo idealizada por Kolmogorov e Uspenskii[48] (algoritmo-KU), cuja abrangência não imporia exceções à nossa intuição de computabilidade: "The great generality of the KU story means that it surely covers *far* too many procedures to count as giving an analysis of the intuitive notion of an algorithm"[49]. No que diz respeito à questão sobre o que nos garante que, com o desenvolvimento da matemática, não possa surgir uma compreensão do que é computável que não se adeque ao conceito de algoritmo-KU, Smith responde:

[47]Como vimos, os argumentos mais contundentes e relevantes contra o sentido *fraco* da tese são provenientes dos intuicionistas. Em todo caso, se estivermos corretos, um dos pontos que sustenta tais argumentos se fundamenta numa concepção contrária a uma visão extensional da noção intuitiva de computabilidade, ou seja, como o argumento da compressão assume desde o princípio uma perspectiva extensional, não poderíamos utilizar a crítica dos intuicionista para apontar uma falha concernindo o argumento *em si*.

[48]Smith remete ao artigo (KOLMOGOROV; USPENSKII, 1963).

[49](SMITH, 2013, 362, grifo do autor).

> We are only making the conceptual point that, whatever ideas emerge, they won't count as ideas of algorithmic calculation in the classic sense if they don't cleave to the basic conception of step-by-mall-step local manipulations in a dataspace that can be navigated by limited agents. But that conception is all we built into the idea of a KU algorithm. So, to repeat, the claim is: if a procedure is properly describable as algorithmic in the traditional sense, it will be redescribable as a KU algorithm (SMITH, 2013, 365).

Não nos deteremos sobre qual seria a melhor definição para se colocar no lugar de N, pois acreditamos que, ainda que façamos a melhor escolha, um argumento por compressão não aparenta aqui ter muita relevância. Como visto, no argumento por compressão de Kreisel, temos as extensões das noções formais de validade lógica tarskiana e derivabilidade num sistema formal, cabendo ao teorema da completude demonstrar que ambas são coextensivas. De fato, é este teorema que, por assim dizer, comprime a extensão da noção informal entre as extensões das noções formais. Por outro lado, no argumento de compressão proposto por Smith para a tese de Church, não há um teorema análogo que faça essa compressão. Em última instância, o que temos é apenas mais uma proposta de adequar uma noção intuitiva a uma noção formal, a de algoritmo-KU. E o fato desta ser coextensiva à noção de recursividade, premissa C3, teria apenas a relevância de uma evidência do tipo B (cf. seção 2.3).

No fundo, o estabelecimento das premissas C1 e C3 (majoritariamente aceitas pela comunidade matemática) não tocam diretamente a tese de Church, restando à premissa C2 o ponto mais importante do argumento. Contudo, argumentar por C2 é o mesmo que argumentar pelo sentido *forte* da tese, ou seja, continuamos no mesmo lugar.

5.2 Uma perspectiva fenomenológica

Principalmente com base nos trabalhos de Tieszen e da Silva, introduzimos a seguir a perspectiva teórica da fenomenologia, da qual depende o desenvolvimento das seções ulteriores. Após esse preâmbulo, retomaremos na próxima seção os problemas que estavam sendo discutidos.

Tieszen (2010) defende a tese de que um certo realismo matemático é compatível com o idealismo fenomenológico transcendental de Husserl, levando em consideração, sobretudo, a obra deste autor no período em torno de 1907[50]. Antes de propor a compatibilidade dessas duas concepções, Tieszen faz uma apresentação sumária do que em geral se entende por realismo – ou platonismo, seu sinônimo –

[50]A essa respeito, Tieszen (2010, 1) cita as seguintes obras de Husserl: *The Idea of Phenomenology*; *Ideas I*; *Cartesian Meditations*; parte II de *Formal and Transcendental Logic*; e trechos de palestras que aparecem em *The Phenomenology of the Consciousness of Internal Time.*

e idealismo matemáticos. Restringindo-nos ao que ordinariamente podemos considerar como sendo aquilo sobre o qual um matemático pensa durante o exercício de seu ofício, incluiríamos entidades abstratas como: objetos geométricos, números, funções, grupos, conjuntos, categorias, entre outras, além de verdades matemáticas sobre o que se enuncia a respeito de tais entidades. A concepção realista da matemática defende então a posição de que essas entidades são mentalmente-independentes. Nesse sentido, verdades matemáticas, bem como as entidades abstratas às quais elas se referem, são da maneira que são mesmo que não sejam conhecidas por nenhum sujeito. Elas não foram construídas por nós, e tampouco são constituídas em consonância com nossa estrutura cognitiva ou com os movimentos de nosso arbítrio. Numa perspectiva mais ampla, os platonistas também consideram a existência independente de entidades que não são estritamente matemáticas, como sentidos, proposições, propriedades, conceitos, essências, etc., além de distinguirem entre entidades extensionais e intensionais, algo não muito usual na prática matemática. Tieszen procura se limitar ao platonismo matemático.

Em oposição, há o idealismo ou antirrealismo matemático, que numa caracterização sumária é tida como a afirmação de que as entidades matemáticas e as verdades que se enunciam sobre elas são mentalmente-dependentes. Ademais, tais entidades, apesar de serem abstratas, não seriam, como no caso do platonismo, eternas ou atemporais.

Colocado nesses termos gerais, nota-se que o realismo e o idealismo matemáticos são incompatíveis. Assim, o objetivo de Tieszen (2010) é caracterizar melhor o realismo matemático e demonstrar como ele se compatibiliza com o idealismo fenomenológico transcendental, o qual possui particularidades que o distinguem em aspectos importantes do mero idealismo.

Aprofundando a caracterização de realismo matemático, os objetos matemáticos abstratos mentalmente-independentes envolvem as seguintes propriedades[51]: não são entidades mentais, tampouco ideias subjetivas, pensamentos ou imagens produzidas por seres humanos; transcendem a consciência humana, não são imanentes a ela; existiriam mesmo que não houvesse mentes no universo; *ser expresso* ou *ser pensado* não lhes são propriedades essenciais; são externos à consciência humana, mas como também são abstratos, essa externalidade adquire um sentido diferente do que atribuímos aos objetos físicos, materiais ou da experiência sensível. Nessa direção, Tieszen (2010, 4) emprega o termo “abstrato” não no sentido em que é empregado no contexto da teoria Husserliana sobre totalidades e partes[52], onde objetos abstratos não são ontologicamente independentes, pois dependem da-

[51]Cf. (TIESZEN, 2010, 4).
[52]Cf. a investigação III, em (HUSSERL, 2008).

quilo do qual foram abstraídos. Para Tieszen, um objeto abstrato se caracteriza por *não* possuir uma natureza espacial, *não* se envolver em ralações causais e *não* poder ser experienciado por nenhum dos cinco sentidos. Por outro lado, um objeto concreto, que é ontologicamente independente da existência de outros objetos, realizaria positivamente todas essas condições. Além disso, ao contrário de objetos situados no espaço físico ou de objetos do *sentido interno* – pensamentos, processos mentais, imagens –, os objetos matemáticos abstratos não possuem uma extensão temporal, ou como dizem alguns platonistas, são eternos ou atemporais, não se sujeitando à geração ou à corrupção.

Tieszen (2010, 5) chama a atenção para a distinção husserliana entre objetos reais e ideais, a qual contribuirá para a sua caracterização de realismo matemático. Um objeto ideal pode ser compreendido nos mesmos termos da noção de objeto abstrato dada acima – uma entidade não mental, independente, atemporal. Quanto aos objetos reais, eles se diferenciam dos ideais sobretudo por possuírem uma duração temporal, o que se aplica tanto a objetos do *sentido externo*, i.e., situados num espaço e num tempo externo, quanto a objetos do *sentido interno*. Ainda que possamos falar isoladamente de uma parte não independente de um objeto real, tal parte, que é também um objeto real, não existe isoladamente do todo do qual é parte. Assim, se para Husserl os objetos matemáticos são objetos ideais, temos um realismo como o descrito nos moldes acima, em que, ao contrário de um realismo ontológico imanente, como o de Aristóteles, por exemplo, a existência dos objetos matemáticos não depende da existência de objetos reais.

Uma outra distinção entre objetos reais e ideais que interessa a Tieszen diz respeito à diferenciação, que pode ser remontada a Platão, entre exato e inexato, perfeito e imperfeito. Isso quer dizer que os objetos ideias matemáticos são perfeitos, sendo suas instanciações (no mundo material) ou expressões e pensamentos acerca deles meras aproximações.

Embora haja um consenso entre os realistas a respeito das características que estamos aqui atribuindo ao realismo, nem sempre é o caso deles concordarem sobre quais objetos ideias matemáticos existem, i.e., quais objetos abstratos matemáticos mentalmente-independentes existem. Adotando uma posição reducionista, pode-se, por exemplo, ser realista a respeito dos números naturais, mas não a respeito dos números reais ou imaginários, que seriam definidos em termos dos primeiros; uma outra estratégia seria considerar apenas conjuntos como objetos ideais matemáticos, os quais serviriam de fundamento para definir outros objetos[53].

Tieszen (2010, 6) observa que a teoria dos conjuntos, de maneira notável, leva a

[53](TIESZEN, 2010, 6).

concepção realista da matemática a se confrontar com novos problemas ontológicos e epistemológicos. Ademais, uma compreensão fenomenológica desses problemas deve ir além do que encontramos na obra de Husserl, seja porque alguns deles ganharam força apenas após a época desse autor, seja porque o próprio Husserl não lhes dirigiu muita atenção[54]. Um desses problemas diz respeito ao fato de lidarmos, na teoria moderna dos conjuntos, com enunciados existenciais envolvendo conjuntos transfinitos enormes[55]. A despeito da mente humana não poder de fato apreender a existência de números naturais muito grandes, podemos *idealizar* o que a sua capacidade finita permite apreender, e imaginar que seria possível haver uma apreensão completa de cada um dos números naturais. No entanto, considerando, por exemplo, alguns dos axiomas existenciais de ZFC, como os axioma do infinito, do conjunto potência e da substituição, logo nos confrontamos com conjuntos transfinitos enormes: não nos comprometemos apenas com a existência de conjuntos infinitos enumeráveis, mas, também, com a existência de conjuntos não enumeráveis, com a existência do conjunto potência de conjuntos não enumeráveis, e assim por diante. Desse modo, diferentemente do que ocorre com o caso dos números naturais,

> we cannot idealize the *finite* mind or *finite* capacities in such a way as to cover the grasp or formation of such transfinite objects. Transfinite sets transcend the possibility of being known on the basis of acquaintance with all of their members. A much more substantial idealization has to be involved (TIESZEN, 2010, 7, grifo do autor).

Assim, o realismo matemático se vê confrontado com questões particulares à teoria dos conjuntos, como: existem, de maneira atual, conjuntos infinitos completos, sobretudo os conjuntos transfinitos que envolvem uma idealização mais robusta?; devemos admitir a existência de conjuntos transfinitos especificados impredicativamente, como o axioma da substituição nos permite fazer? Tieszen (2010, 7) alega que alguns filósofos ou matemáticos, como Gödel, estariam dispostos não apenas a se comprometerem com uma teoria impredicativa dos conjuntos, mas também a irem além dos compromissos existenciais presentes em ZFC, de modo que a busca por novos axiomas revelaria mais do que já existe no universo abstrato e mentalmente-independente de conjuntos transfinitos.

Feitas tais elucidações acerca do realismo matemático, consideremos agora o idealismo fenomenológico transcendental, para que possamos avaliar em que medida essas duas concepções podem ser ditas compatíveis. Para compreendermos esta última concepção, precisamos antes compreender a noção de *redução fenome-*

[54]A propósito, esse é um dos motivos que nos fez eximir da preocupação de fazer um trabalho meticuloso de interpretação da obra de Husserl. Quando lemos filósofos da matemática que se enquadram num viés husserliano, como Tieszen, van Atten, Tragesser, da Silva, não é incomum encontrarmos a afirmação de que estão mais se apropriando do que interpretando a filosofia de Husserl.

[55]Cf. a secção 4.1.1.

nológica, também conhecida como *epoché*. Numa palavra, a redução fenomenológica consiste em voltar-se à experiência intencional, considerando-a como tal. Isso nos introduz mais uma noção, a de *intencionalidade*, que desempenha um papel central na fenomenologia. Entende-se por intencionalidade aquilo que nos diferentes atos da consciência – como imaginar, lembrar, desejar, perceber – se caracteriza como um direcionar-se, um visar algo. Um ato da consciência se direciona a algo por meio de uma intenção, que o apresenta de uma certa maneira, mesmo que este algo não exista. Nesse sentido, toda consciência é consciência de algo, de modo que uma experiência não intencional não é uma experiência da consciência. Em outros termos, um sujeito se dirige a algo (que pode ser um objeto, um estado de coisas, um conceito, uma ideia) por meio de uma intenção envolvida num ato da consciência (que pode ser pensar, lembrar, imaginar, julgar). Esse algo, talvez inexistente, se apresenta à consciência como foi intencionado, ou seja, como foi pensado, lembrado, imaginado, etc.

Uma maneira de representar figurativamente a estrutura da intencionalidade seria[56]:

$$\text{Ato (Conteúdo)} \longrightarrow \text{[objeto]}.$$

Nota-se nessa representação esquemática a estrutura básica de um ato intencional, que se distingue entre dois polos: *noesis* e *noema*. O primeiro consiste num ato da consciência, ao passo que o segundo consiste naquilo que é visado – *como* é visado, ou seja, como conteúdo da experiência de um ato da consciência, não como algo além dela – por esse ato. Um objeto pode ser visado de diferentes maneiras: *como* uma percepção, uma imagem, uma memória, de modo que a maneira como ele se apresenta a partir de uma certa visada é o que se compreende por *noema*. No esquema acima, coloca-se o objeto entre colchetes para indicar a condição de que tal objeto pode não existir. A esse respeito, Tieszen afirma:

> [W]e "bracket" the object because we do not assume that the object of an act always exists. Phenomenologists are famous for suggesting that we "bracket" the object, and that we then focus our attention on act (noesis) and act-content (or noema), where we think of an act as directed toward a particular object by way of its content (or noema). Whether the object exists or not depends on whether we have evidence for its existence, and such evidence would be given in further acts carried out through time (TIESZEN, 1989, 23).

Um exemplo ajuda a elucidar esses pontos. Considerando uma sentença *S*, um matemático pode se envolver com ela por meio de diferentes atos da consciência (ou, empregando um sinônimo, atos cognitivos), i.e., ele pode acreditar, saber ou lembrar que *S*, entre outros. Desse modo, o sentido da sentença *S* – o que ela ex-

[56](TIESZEN, 1989, 23).

prime –, que consiste no *conteúdo* do ato da consciência[57], mantém-se o mesmo, ao passo que esse ato pode variar. Ademais, nada impede que o inverso ocorra: o ato da consciência se mantém fixo, mas seu conteúdo se modifica. O conteúdo de um ato intencional relacionado a S poderia ser, por exemplo, $\exists x\ F(x)$. Nesse caso, o direcionar-se a um objeto consistiria em um matemático conhecer (ou acreditar, lembrar, etc.) que $\exists x\ F(x)$, para um certo F e um domínio D de objetos em particular[58].

Concebe-se então a noção de *intuição*, que é compreendida como a realização das condições balizadas pela intenção dirigida a um objeto. Se tais condições são realizadas, temos evidência de que o objeto intencionado existe[59]. Voltando ao nosso exemplo, conhecer S é um ato intencional dirigido ao estado de coisas $\exists x\ F(x)$, que será o caso se pudermos apresentar ao menos um objeto $a \in D$, tal que $F(a)$. As condições que esse ato intencional prescreve podem ou não ser realizadas, estabelecendo assim se intuímos ou não o conteúdo de S. Note-se que a existência do objeto[60] intencionado não pode ser concebida à parte de um ato intencional, pois é ele que determina as condições que, se realizadas, compõem a evidência de que o objeto existe.

Feita essa aproximação inicial a alguns dos principais conceitos da fenomenologia, voltemo-nos por ora ao conceito de redução fenomenológica. Uma maneira de abordá-lo é por meio do método cartesiano da dúvida. Com ele se pode notar que, quando tentamos duvidar de tudo, nos damos conta de que nem tudo pode ser colocado em dúvida, pois enquanto pensamos que tudo é dubitável, é indubitável que pensamos que tudo é indubitável. Do mesmo modo, isso ocorre com a redução fenomenológica, que consiste em focar no *Ato (Conteúdo)* de um ato intencional, não no objeto intencionado, que foi colocado entre parênteses, fazendo com que não dependamos de nenhuma hipótese que envolva a sua existência. Assim, a despeito do objeto intencionado existir ou não, estamos certos do ato intencional que se dirige a ele:

> If I am perceiving or judging, for example, then whether these activities are veridical or not, whether they have objects that exist or not, it is nonetheless clear that I am *perceiving* this or that, or *judging* this or that. The awareness that I am perceiving or judging implies that I have the capacity to *reflect* on my cognitive activities. In this reflection something is given to me that I cannot doubt (TIESZEN, 2010, 9, grifo do autor).

[57]"We can think of the contents associated with acts as the meanings or senses under which we think of the objects" (TIESZEN, 2005, 327).

[58](TIESZEN, 1989, 24).

[59](TIESZEN, 1989, 24).

[60]O uso da palavra "objeto" impõe uma certa confusão. De fato, o que é intencionado não se restringe a objetos, pode ser uma entidade qualquer, como um estado de coisas, por exemplo. Assim, quando o [objeto] é um estado de coisas, dizer que o [objeto] existe equivale a dizer que o estado de coisas intencionado é o caso.

Ao refletirmos sobre nossas capacidades cognitivas, refletimos sobre o que nos é imanente, distanciando-nos assim da *atitude natural*, em que ingenuamente pressupomos experienciar um mundo objetivamente dado, que se encontra "lá fora", transcendente. Desse modo, com a redução fenomenológica, focamos no que se apresenta a nós tal como isso se apresenta a nós, restringindo-nos assim à esfera da aparência. Ou seja, num ato intencional, podemos colocar em dúvida se o que se apresenta é realmente o caso, mas não podemos duvidar da aparência mesma, que em sua imanência é dada de maneira absoluta[61], não se relativizando a uma intermediação. Em particular, ainda que a percepção de um determinado objeto seja uma alucinação, podemos nos focar na alucinação enquanto tal, sem nos comprometermos com o que a alucinação sugere existir.

Como vimos na penúltima citação, a existência de um objeto é evidenciada por atos intencionais que se sucedem no tempo. Dessa forma, uma sequência de atos intencionais pode promover uma correção mútua, acumulando evidências sobre a existência de um determinado objeto. Por exemplo, num primeiro momento, a consciência pode experienciar a visão de uma cobra num quintal, no entanto, visadas posteriores da consciência podem revelar que essa percepção inicial era uma ilusão, que o que de fato se percebe é uma mangueira enrolada. Radicalizando essa condição, pode ser o caso que esse processo de correção continue indefinidamente, promovendo um conflito global entre os atos intencionais, de maneira que toda nossa experiência perceptual se degenere numa ilusão. Contudo, a despeito de que, neste caso, "nenhum mundo natural seria constituído na nossa experiência"[62], ainda haveria a consciência, pois, conforme afirma Tieszen, não podemos escapar do ser absoluto dos processos mentais, que permanecem pressupostos em qualquer tentativa de duvidar da existência de variados fenômenos.

Assim, por meio da redução fenomenológica, voltamo-nos ao imanente, que é absoluto, o qual se distingue do que é transcendente, que é relativo à consciência. A relatividade do transcendente à consciência implica que não podemos falar da existência de um objeto, mesmo que seja mentalmente independente, sem levarmos em conta o sentido do seu ser, que foi constituído por uma intencionalidade. Distanciamo-nos da atitude fenomenológica se falamos de objetos existindo em si, à parte de qualquer envolvimento com a consciência, pois "o que quer que sejam as coisas, elas são coisas experienciáveis"[63]. Apenas a experiência[64] pode lhes prescrever um sentido, mesmo que esse sentido postule uma entidade transcendente, de

[61](TIESZEN, 2010, 10).
[62](TIESZEN, 2010, 10).
[63](TIESZEN, 2010, 10).
[64]A palavra "experiência" porta o sentido de vivências da consciência, não o de experiência empírica, como poderia ser entendido numa concepção naturalista.

existência objetiva:

> [T]he whole spatiotemporal world and each of its constituents is thus, according to its sense, a merely intentional being. It is a being posited by consciousness in its experiences. Each constituent of the world, of essential necessity, can be determined and intuited only as something identical through motivated multiplicities of appearances. It is something invariant for consciousness through a manifold of appearances. Beyond that it is nothing (TIESZEN, 2010, 11).

Dessa forma, a consciência, que é dada de maneira imanente e absoluta, constitui o sentido da objetividade, a qual, a menos que nos envolvamos com um realismo ingênuo, não pode ser constituída fora dessa intermediação[65]. Temos então uma consciência *doadora-de-sentido*, por meio da qual pensamos a realidade como existente, e que, por ser absoluta, existe por si mesma, não como mandatária de uma outra doação-de-sentido[66].

Isso nos coloca no âmbito do idealismo fenomenológico transcendental, que não se identifica com o realismo nem com o idealismo. No primeiro caso, a identificação falha porque a existência de um objeto é sempre mediada por uma intencionalidade, que não se dá fora de uma performance atual ou potencial da consciência. Já no segundo caso, não há identificação porque, a despeito de que o sentido do ser de qualquer objeto que se apresente como existente seja perpassado por uma experiência da consciência, reconhece-se que nem tudo é constituído como um fenômeno mental. Além disso, a subjetividade transcendental, onde se processam os atos intencionais, não se reduz a um subjetivismo, ela também pode ser compreendida, por exemplo, como uma comunidade científica que tem uma concepção em comum sobre a realidade, "uma interseção de horizontes de diferentes egos na constituição de um mundo objetivo comum"[67].

Como Tieszen (2010, 12) afirma, o idealismo fenomenológico transcendental não nega que haja objetividade ou verdade objetiva. O que essa abordagem filosófica propõem é que todo tipo de objetividade – já que nenhum objeto escapa da redução fenomenológica – deve ser investigado a partir de como a consciência constitui o sentido da objetividade, envolvendo-nos assim no que esse autor denomina de análise constitucional. Dessa maneira, cabe-nos analisar tanto a constituição do sentido do ser de objetos concernentes a atos fundadores relativos à percepção sensorial, como a constituição do ser de objetos concernentes a formas fundadas da

[65]"[I]f what is experienced has the sense of transcendent being then it is experience itself that constitutes this sense" (TIESZEN, 2010, 11).

[66](TIESZEN, 2010, 11).

[67](TIESZEN, 2010, 11). E quanto ao que foi dito nesse parágrafo, a seguinte citação é interessante: "Phenomenology shows the possibility of another conception of existence with all the benefits of realism without its metaphysical burden (this is why Husserl once claimed, on being 'accused' of idealism, that nobody was more realist than him, the transcendental idealist)" (da SILVA, 2017, 138).

consciência – baseadas em atos de abstração, generalização, reflexão, idealização –, como objetos categoriais, ideais, ou, mais especificamente, objetos matemáticos.

Apesar de nenhum objeto, mesmo que seja um objeto da percepção, poder aparecer ao ego sem por ele ser intencionado, tal condição não implica que esse objeto nos é dado como uma entidade mental ou subjetiva. Isso depende de como o intencionamos. Podemos intencioná-lo como um objeto real do mundo empírico, existindo de maneira independente, ou seja, a consciência pode constitui-lo como um objeto que transcende os fenômenos mentais:

> [T]he meaning of the being of physical objects is constituted by consciousness in such a manner that physical objects are not mental entities. They are not meant as mental entities. They are constituted as external objects, as objects that are in space and in external time. We are led, in this sense, to a kind of realism about physical objects. This is different, however, from a naive realism. It is, rather, a phenomenological or 'constituted' realism that has its origins in transcendental subjectivity itself (TIESZEN, 2010, 12).

Entramos no âmbito do realismo ingênuo a partir do momento em que ignoramos o papel da consciência como doadora de sentido, quando pretendemos conceber a existência de um objeto à parte de uma intencionalidade que constitui o sentido do seu ser. Em outras palavras, somos realistas ingênuos quando afirmamos a existência de objetos existindo em si mesmos, de maneira completamente independente da consciência.

No caso particular dos objetos matemáticos, o que dissemos sobre intencionalidade e constituição do sentido a partir de uma experiência da consciência se aplica igualmente (o que não poderia deixar de ser). Como Tieszen (2010, 13) afirma, é a experiência matemática – o que a consciência vivencia no exercício da atividade matemática –, que determina o sentido do ser de seus objetos. Assim, se do que é experienciado emana o sentido de ser ideal, não mental, imutável, não espacial e não material, "então é a própria experiência que deve, de uma maneira não arbitrária, constituir esse sentido". O ponto que aqui deve ser notado é que os objetos matemáticos podem até ter as mesmas características que elencamos quando falamos do realismo matemático, contudo, deve-se acrescentar que, nos parâmetros do idealismo fenomenológico transcendental, tais características devem ser constituídas de uma maneira não arbitrária na consciência do sujeito transcendental.

Há, no entanto, uma ressalva importante que não podemos deixar de levar em conta: os objetos matemáticos não podem situar-se fora da dimensão temporal. Como no idealismo fenomenológico transcendental não se pode conceber a existência de um objeto fora de uma experiência possível, a qual necessariamente se situa no tempo, i.e., no fluxo das vivências da consciência, o sentido do ser de um objeto matemático – que emana da consciência –, também se situa no tempo:

> Since we are within the sphere of possible experience for transcendental subjects we are within the sphere of temporality. This means that mathematical objects are also objects that must be in time, only now we will say that they exist at all times. Thus, instead of saying that mathematical objects are atemporal or eternal or timeless – somehow outside of time (and all possible experience) altogether – we will now say that they are omnitemporal (TIESZEN, 2010, 13).

Por conseguinte, se um objeto matemático fosse situado fora do tempo, ele se situaria fora de toda experiência possível, algo que seria equivalente a um concepção realista ingênua, uma vez que a existência de tal objeto seria concebida como independente da consciência. Nessa perspectiva, Tieszen (2010, 14) cunha o termo "platonismo constituído", que diz respeito a um platonismo não ingênuo concernente à lógica e à matemática. Esse platonismo se caracteriza por ter a sua origem no ego transcendental, ou seja, ao concebermos objetos abstratos mentalmente independentes, tal concepção é constituída por um sentido que se funda na consciência.

Vejamos agora, sob a égide do idealismo fenomenológico transcendental, no que exatamente consiste falar de objetos mentalmente independentes. De acordo com o que vimos, uma característica fundamental que distingue, no âmbito da matemática, o realismo do idealismo diz respeito à condição de concebermos entidades matemáticas como mentalmente independentes ou não. No entanto, essa dependência ao mental precisa ser qualificada à luz da redução fenomenológica, a menos que nos comprometamos com alguma forma ingênua de realismo ou idealismo.

A redução fenomenológica nos coloca na esfera da aparência. Por meio dela, voltamos nossa atenção ao *Ato (Conteúdo)* da intencionalidade, que nos é dado de maneira imanente e absoluta. Todavia, mesmo que nos restrinjamos a esse contexto, ainda podemos distinguir entre o que *aparece como* imanente e o que *aparece como* transcendente. E é correspondendo a essas noções de imanente e transcendente que compreenderemos, respectivamente, as noções de mentalmente dependente e mentalmente independente, que, após a redução fenomenológica, têm um significado diferente do que possuíam no contexto de um realismo ou idealismo ingênuos.

Acima mencionamos o exemplo de uma percepção enganosa, em que uma mangueira foi confundida com uma cobra. Por meio dele, podemos entender a distinção, no âmbito da aparência, entre o imanente e o transcendente. Num primeiro momento, o que aparece à consciência é uma cobra, todavia, num momento posterior, o objeto que aparece na continuação daquele ato intencional inicial é uma mangueira. Por haver esse conflito, uma inconsistência a respeito do objeto intencionado, o sentido intencional não pode ser realizado, ou seja, não podemos intuir o objeto que foi visado[68]. Não obstante, se em sucessivos momentos do ato intenci-

[68] A noção de consistência é necessariamente intrínseca à de existência. Trata-se de uma questão de princípio, não meramente de fato, que a intencionalidade ligada à postulação de um objeto não contenha uma contradição: "Further acts of perception, for example, can disclose inconsistencies

onal é a aparência da mangueira que se estabiliza, isso indica que temos evidência de que se trata de um objeto "real" (entre aspas, pois diz respeito a uma realidade compreendida no contexto da redução fenomenológica, não a uma realidade completamente independente da consciência). Como afirma Tieszen (2010, 15), sem sairmos do âmbito da redução fenomenológica, podemos recuperar nossa experiência pregressa e recolocar a distinção entre aparência e realidade, dando-nos conta de que a cobra era uma mera aparência, e que, "em realidade", o que vivenciávamos era uma mangueira. Consequentemente, não temos um idealismo ingênuo, caracterizado pelo mote "ser é ser percebido", uma vez que experiências posteriores mostraram que não havia uma cobra. O que se coloca como "real", ou seja, como transcendente, independente da mente, é o que se mantém invariante nas experiências *até então* conduzidas por um ato intencional, não se eliminando a possibilidade de que uma experiência futura possa colocar em xeque uma evidência ratificada por experiências passadas:

> The perception of the coiled garden hose, however, could itself be overturned in future experience. [...] Its being a coiled garden hose is *not absolute* even if the coiled garden hose is given as what is "real" and mind-independent in accordance with all of our evidence thus far. Our evidence that the coiled garden hose is mind-independent is in this sense presumptive (TIESZEN, 2010, 15, grifo do autor).

O que foi dito no parágrafo anterior concerne a objetos sensoriais, mas é equivalentemente estendível a objetos matemáticos. Temos, igualmente, a redução fenomenológica e a noção de que correções e refinamentos provenientes do que experienciamos ao intencionarmos objetos matemáticos constituem a evidência da existência de objetos que transcendem o sujeito transcendental, i.e., os objetos matemáticos "reais", mentalmente independentes. Deve-se ter claro, todavia, que não extrapolamos os limites da aparência, no sentido de que vislumbramos uma realidade absoluta, independente de toda aparência, quando um ato intencional se estabiliza ao vivenciar uma invariância. Como já fizemos notar, o transcendente é relativo à consciência. Uma realidade absoluta, tal como propõe uma metafísica realista, é compreendida pelo idealismo fenomenológico transcendental apenas como um ideal infinito[69]. Nesse caso, só a aparência é absoluta, dada a sua imanência.

Há, dessa forma, um sentido forte e um sentido fraco a respeito do que se pode entender por mentalmente independente. O sentido forte é o apregoado pelo realismo ingênuo, onde há a noção de coisa-em-si, entidade cuja existência é completamente independente da consciência. A partir do idealismo fenomenológico

in the meaning intentionally attached to the object of a previous act of perception; no object exists which has both *A* and *not-A*, for any property *A*. *Inconsistencies immediately cancel the positing* and the intentional object 'vanishes"' (da SILVA, 2017, 45, grifo nosso).

[69]"We are nonetheless not entitled to say that what is stable or invariant is the final, absolute reality. We cannot have a realism that recognizes an appearance-independent absolute reality. At best, the notion of 'absolute reality' might be preserved as an infinite ideal" (TIESZEN, 2010, 16).

transcendental, a possibilidade de que o sentido forte seja o caso é inviável, porque seria inconcebível a existência de objetos mentalmente independentes que residem além de toda experiência possível. No entanto, um sentido fraco de mentalmente independente é admitido, em que se concebe a existência de entidades "reais", entidades que se revelam invariantes numa variedade (*manifold*) de aparências[70].

Tieszen (2010, 18) então propõe a seguinte indexação das maneiras de compreender as distinções entre mentalmente dependente (MD) e mentalmente independente (MI):

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] \text{Atitude natural:} & & \mathrm{MD}_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{MI}_1 \\ \text{Epoché:} & \mathrm{MD}_2 & & \mathrm{MI}_2 & \end{tikzcd}$$

Inicialmente, podemos dizer que há a atitude natural, em que se distinguem o mentalmente-dependente$_1$ – o aparente, o imanente –, do mentalmente-independente$_1$ – o "mundo lá fora", além do aparente, numa transcendência completamente independente da consciência. A partir da redução fenomenológica, abandonamos a atitude natural, como se houvesse apenas o âmbito da aparência, que nos é imanente e absoluto. Inserido nesse contexto, o sujeito transcendental, por meio da intencionalidade, é capaz de se direcionar a objetos que o transcendem, encontrando no mentalmente-dependente$_1$ a distinção mentalmente-dependente$_2$/mentalmente-independente$_2$. Dizemos então que existem algumas coisas que *aparecem a nós* como imanentes, outras, como transcendentes, sendo irredutível a condição de *aparecer a nós*[71]. E ainda que o domínio do idealismo fenomenológico transcendental seja o das experiências da consciência, isso não implica que as entidades aí postuladas sejam arbitrárias, como poderiam sugerir certas concepções subjetivistas ou solipsistas. O ato intencional é balizado por imposições objetivas:

> One of the marks of objectivity in both sensory and mathematical experience is that we find our awareness to be constrained in certain ways. It is not possible to will objects or states of affairs in either sensory or mathematical experience to be just anything we want them to be. We find all of these moments of experience after the epoché (TIESZEN, 2010, 17).

Por meio do diagrama acima, compreende-se melhor qual forma de realismo é compatível com o idealismo fenomenológico transcendental. Tieszen (2010, 18) alega que a maior parte do debate contemporâneo acerca das disputas entre realismo e idealismo matemáticos se dá no nível onde ocorre a distinção entre mentalmente-dependente$_1$ e mentalmente-independente$_1$. Nesse nível, o realismo e o idealismo são incompatíveis, sendo uma inconsistência afirmar que os objetos matemáticos

[70](TIESZEN, 2010, 16).
[71](TIESZEN, 2010, 17).

são mentalmente-dependentes$_1$ e mentalmente-independentes$_1$. Seria também inconsistente dizer que os objetos matemáticos são mentalmente-dependentes$_2$ e mentalmente-independentes$_2$, não podendo, igualmente, aí ser encontrada uma compatibilidade entre o realismo e o idealismo. Contudo, como o mentalmente-independente$_2$ cai sob o mentalmente-dependente$_1$, não é uma inconsistência afirmar que os objetos matemáticos são mentalmente-dependentes$_1$ e mentalmente-independentes$_2$. O que se tem aqui é o que Tieszen denomina de "realismo matemático constituído" ou "platonismo constituído", em que o mentalmente independente é constituído de maneira não arbitrária ou racional. É essa forma de realismo que é compatível com o idealismo fenomenológico transcendental, pois envolve intencionalidade, por meio da qual o conhecimento pode ser elucidado:

> Constituted platonism, unlike naive metaphysical platonism, does not cut off the possibility of knowledge of mathematical objects. Knowledge involves intentionality. Mathematical knowledge is to be spelled out in terms of intentional directedness toward ideal or abstract objects, where the objects are to be thought of as (founded) invariants in mathematical experience. What we are describing here is a position about mathematical *experience* (TIESZEN, 2010, 19, grifo do autor).

Após a redução fenomenológica, as caracterizações de realismo e idealismo propostas logo no início dessa discussão se mostram carentes de qualificações posteriores. Com a distinção mentalmente-dependente$_2$/mentalmente-independente$_2$, Tieszen propõe uma terceira possibilidade, compatibilizando um certo realismo matemático com o idealismo fenomenológico transcendental, em que o realismo e o idealismo não são mais ingênuos. Os objetos mentalmente-independentes$_2$, estabelecidos como invariantes em meio a uma variedade de aparências, transcendem o meramente aparente, todavia, não se situam fora de toda experiência possível, ou seja, não se caracterizam ingenuamente como mentalmente-independentes$_1$.

5.2.1 Analisando a noção de computável

A partir do que se apresentou na seção anterior, gostaríamos agora de tentar entender como a noção de computável e, consequentemente, a tese de Church podem ser compreendidas no âmbito de uma ontologia matemática articulada nos termos da redução fenomenológica.

Mas, primeiramente, retomemos alguns pontos feitos ao longo deste trabalho. Na seção 2.4, observamos que a condição de ser uma tese pode não ser uma exclusividade da noção de computável. Na matemática, a partir do momento em que se procura dar um tratamento teórico e sistemático a uma noção pré-formal, podemos dizer que nos encontramos diante de uma tese que afirma a legitimidade de enquadrar tal noção nos limites precisos de uma definição rigorosa. Ainda na mesma seção, vimos duas maneiras de tratar a tese de Church: a estruturalista, de acordo com a qual há uma estrutura matemática objetiva que subjaz a todo processo computacional, de maneira que qualquer definição do que é computável seria uma tentativa de exprimir essa estrutura; e a que considera as definições de computabilidade como propostas de modelos matemáticos de processos computacionais.

A nosso ver, temos um realismo ingênuo nas duas concepções. De acordo com a concepção estruturalista, há uma estrutura matemática – objetiva e independente – que constitui a propriedade de ser computável. Já de acordo com a outra concepção, as definições formais são modelos – imbuídos de certos propósitos – que procuram representar teoricamente, ainda que de maneira apenas aproximada, processos computacionais que ocorrem no mundo "lá fora". Ademais, ambas concepções sugerem um teor empirista à tese de Church, de modo que a propriedade de ser computável é compreendida como pertencente a uma realidade não matemática.

Por fim, na seção 5.1, vimos a proposta de que a noção de computável não consiste numa noção pré-formal absoluta, que tentaríamos exprimir por uma definição adequada. Shapiro propõe que tal noção se caracteriza por ter uma textura aberta, e que por meio de idealizações e de trabalhos de lógicos que a estudaram foi aperfeiçoando-se cada vez mais, até se tornar suficientemente precisa como qualquer outra noção empregada na matemática. No entanto, na seção seguinte a essa (5.1.1), Smith critica esse ponto de vista. Apesar de julgar a tese de Church verdadeira, e de até mesmo propor a sua demonstração, ele não acredita que a noção de computável, partindo de uma compreensão pré-formal, teria evoluído gradativamente até as noções formais, como as de cálculo lambda e máquina de Turing. De acordo com ele, há uma noção proto-teórica de computável rigorosa o suficiente para estabelecer uma extensão precisa, a qual pode ser comparada com as extensões delimitadas pelas noções formais.

Feitas essas considerações, como o aparato teórico da fenomenologia apresentado na seção passada poderia nos ajudar a esclarecer o que se passa com a noção de computável? Poderíamos nos inspirar em da Silva, que faz uma análise fenomenológica do conceito de número:

> Numbers are as objective but as fabricated as hammers (and in a sense as instrumental). To find out what they are, it is essential to inquiry how they came to be, i.e. how they entered the life-world, the purposes they serve therein, and how the theoretical concept of number and theoretical arithmetic originated from the pre-theoretical notion of number and practices of the life-world (da SILVA, 2017, 103).

Uma investigação como essa, mas com relação à noção de computável – recontando a sua origem pré-teórica e compreendendo o seu envolvimento nas práticas do mundo-da-vida (que para Husserl constitui um reino de vivências originárias) –, não se encontra ao alcance de nossa capacidade. No entanto, fazendo algumas analogias com a abordagem fenomenológica da gênese do conceito matemático de número, tal qual se encontra no livro onde encontramos a citação acima, acreditamos trazer alguns esclarecimentos sobre a noção de computável e a tese de Church.

À semelhança do que encontramos na síntese das diferentes posições feita há pouco, assumimos que o conceito de computável possui uma existência objetiva. Porém, na medida em que nossa proposta se articula sob a redução fenomenológica, não se trata de uma existência objetiva nos moldes de um realismo ingênuo, i.e., não se trata de uma entidade mentalmente-independente$_1$. Nesse sentido, o conceito de computável existe de maneira independente, mas não independente de toda experiência possível, uma vez que se pressupõe o ato intencional – indissociável de um sujeito transcendental – que o constitui como uma entidade independente. E de acordo com o que já observamos, o sujeito transcendental não deve ser reduzido à subjetividade de um indivíduo cognoscente, pois é compreendido como um ego comunitário que intenciona um mundo objetivo comum. Ademais, práticas culturais fazem parte da constituição da objetividade de um objeto intencionado, como publicação de artigos e livros, cursos, palestras, etc., formando assim uma produção conjunta em que verdades são preservadas e transmitidas, permanecendo sempre como uma possibilidade de ressurgirem como as mesmas em diferentes atos intencionais dispersos em regiões diversas do espaço-tempo[72]. Dessa forma, podemos dizer que o conceito de computável subsiste e se encontra disponível para ser reidentificado em diferentes experiencias intencionais:

> Mathematical realms although not metaphysically real are objectively real. The mathematical community (playing the role of transcendental subjectivity) constitutes them as objectively existing domains determined in themselves, thus constituting, concomitantly, complete systems of truths-in-themselves, approachable by gradually improved methods (that cannot be determined a priori, being as they are products of historical developments) which will be, or so we hope, completely disclosed eventually. To confuse this view with ontological or epistemological realism, or worse, *metaphysical* idealism is a gross error (if anything, it is transcendental idealism) (da SILVA, 2011, 344).

O que o sujeito transcendental postula como existente é o que se mantem invariante a partir de uma série de atos intencionais consistentes entre si. Qualquer inconsistência entre tais atos implica a inexistência do objeto intencionado. Contudo, não se pode deixar de notar na citação acima a afirmação de que métodos, produtos do desenvolvimento histórico, aprimoram-se gradualmente. Nessas condições, todo objeto intencionado possui uma origem, uma "gênese intencional"[73]. E dado que o sujeito transcendental possui um distensão temporal, os objetos por ele intencionados possuem uma história, mas não se trata de uma história factual, e sim de uma história transcendental, a qual se volta aos atos intencionais que postularam os objetos cuja gênese nos interessa:

[72](da SILVA, 2017, 96-99).
[73](da SILVA, 2017, 108).

> [F]actual history depends on who is telling it and the events he chooses to tell. Transcendental history, on the contrary, is not a chronicle of facts but of intentional acts. It is a pure science whose task is to determine by which series of intentional acts the intentional ego has become conscious or aware of something. Transcendental history tells how intentional objects of any given type came to be and the necessary structure of its coming to be. Factual history merely registers the real manifestations of this coming into being (da SILVA, 2017, 23).

Reafirma-se aí o que dissemos atrás a respeito das entidades matemáticas se situarem no tempo, pois são postuladas por atos intencionais, que constituem experiências possíveis – necessariamente inseridas na esfera temporal – de um sujeito transcendental. Não obstante, isso não interfere na objetividade, independência e incorruptibilidade das entidades matemáticas, desde que tenham sido intencionadas com tais características.

Pelo exposto, uma conclusão que podemos tirar é que a noção de computabilidade possui uma história transcendental. Nesse sentido, à semelhança da nossa interpretação de Shapiro na seção 5.1, não podemos supor que, atravessando a história de maneira imutável, haja uma noção pré-formal fixa de computabilidade, a qual tentaríamos descrever por meio de definições formais. Por outro lado, e nesse ponto sendo favorável à crítica de Smith, não acreditamos que as definições formais atuais sejam a *conclusão* de um processo evolutivo, pelo qual a noção de computabilidade foi tornando-se paulatinamente mais precisa. De acordo com nosso entendimento, as definições formais que por ora possuímos capturam a essência de uma noção mandatária de uma certa intencionalidade de computável, inserida na história da gênese intencional dessa noção, ou seja, pode ser que uma outra maneira de intencionar a noção de computável, que se deu no passado ou possa se dar no futuro, não corresponda às definições formais atuais.

Há, no entanto, dois pontos que precisam ser esclarecidos. Quando se fala em essência, não se trata de uma noção metafísica de essência, que diz respeito a propriedades que um objeto necessariamente deve possuir a fim de ser aquilo que é. Numa perspectiva fenomenológica, a essência se encontra nas propriedades que um objeto deve possuir a fim de que seja o que ele é intencionado a ser:

> What in the intentional meaning associated to this object as it appears to the ego is *necessarily* required for it to appear as *this* object (or an object of *its type*) in any possible appearing of *it*? Asking for the phenomenological essence of a thing, in short, is asking for what it means to be this thing (da SILVA, 2017, 39-40, grifo do autor).

Assim, o fato de termos diferentes definições formais, mas logicamente equivalentes, da noção de computabilidade indica que intuímos a sua essência[74]. Por conseguinte, podemos dizer que estamos diante de um objeto "real", posto que se mantém

[74] "[W]e have evidently arrived at the "essence" of the concept of mechanical procedure by way of the many different definitions of this concept that were subsequently proved to be logically equivalent"(TIESZEN, 2011, 32).

invariante diante de distintos atos intencionais que visam constituí-lo. Esse "real", como já foi observado, não é um real absoluto, independente de toda aparência, mas pode ser considerado próximo a isso quando visto como uma ideal infinito, algo que se estabiliza diante de toda aparência por meio da qual se manifesta. Além disso, a equivalência das definições contam em favor da objetividade do conceito de computável, uma vez que foram formuladas independentemente entre si.

O outro ponto a ser considerado diz respeito à gênese intencional da noção de computabilidade. Essa noção é mandatária de uma certa intencionalidade, a qual se situa em algum momento da história transcendental. Na matemática, isso é notado quando observamos a evolução de seus conceitos:

> Our concepts of space and number, for example, have evolved through the history of mathematics preserving some of its aspects, losing some, and acquiring some new ones. The questions "what is a number?" or "what is space?" cannot have definitive answers and must be contextualized. The tendency among mathematicians is to offer the last conceptualization as the definitive one, reinterpreting the previous conceptualizations in terms of the most recent one. Therefore, no conceptualization is definitive.
> [...]
> It is often said that Cantor *discovered* transfinite numbers when in fact he only acted as the inductor of a collective process of intentional genesis of new entities and a new conception of number (da SILVA, 2017, 48, grifo do autor).

Por essa razão, acreditamos que, em favor de Smith, há uma noção pré-formal passível de ser considerada na equivalência proposta pela tese de Church, mas, ao contrário de Shapiro, não acreditamos que devamos supor um fim, um limite ao desenvolvimento dessa noção. Quanto a isso, a seguinte citação é interessante:

> [Q]uand on formule la thèse de Church en disant qu'aucun langage d'expression d'algorithmes proposé dans le futur ne sera plus puissant que les langages que nous connaissons aujourd'hui, ou que tous les algorithmes qui seront proposés dans le futur pourront être exprimés dans les langages que nous connaissons aujourd'hui, on semble davantage lire dans le marc de café qu'énoncer une thèse scientifique (DOWEK, 2015b, 84).

Abaixo, da Silva fala sobre a gênese intencional do conceito de número, mas a investigação aí sugerida poderia ser aplicada de maneira análoga ao conceito de computável:

> The differing characters of number-positing acts explains why numbers have not come into existence all at the same time. The intentional ego incarnated historically in a community of intentional co-workers spread through space and time, i.e. the mathematical community, operates in stages. Initially, driven by practical necessities of the life-world, the ego devises techniques for tallying, reckoning and ordering that involves a primitive notion of (cardinal and ordinal) number and numbering. By gradually moving to ever-higher levels of abstraction and ideation, and eventually theoretical interest, the ego finally comes to posit an infinite domain of ideal entities as an objective realm of being open to theoretical investigation. To identify *the moments of this development* is to follow the intentional genesis of numbers and their science, arithmetic. Transcendental history is the history of this genesis; it is, I recall, an a priori variety of history, whose task is to identify the necessary steps in the constitution of, in this case, numbers and a science of numbers (da SILVA, 2017, 109, grifo nosso).

O que gostaríamos de concluir disso é que uma correta compreensão da tese de Church não pode ignorar as etapas que compõem a história transcendental do conceito de computável. Cada etapa que se identifica na gênese intencional desse conceito pode exigir uma definição distinta.

5.2.2 Platonismo versus intuicionismo

Pelo que vimos na seção anterior, a abordagem fenomenológica se alinha com algumas concepções do intuicionismo lógico: na fenomenologia, as entidade matemáticas não existem por si mesmas, passam a existir quando são intencionadas por um sujeito transcendental – momento que pode ser identificado pela história transcendental. Até aí temos bastante semelhanças, diríamos mesmo que tais entidades não são descobertas, e que à existência delas é imprescindível uma consciência que se dê conta delas. Há, no entanto, uma diferença fundamental, que reside no sentido que a intencionalidade atribui ao ser que ela postula. Embora uma entidade tenha uma gênese intencional, i.e., *passe* a existir em algum momento, a intencionalidade que a constitui pode caracterizá-la como uma entidade mentalmente-independente$_2$ e onitemporal. A fenomenologia permite, por exemplo, intencionar e legitimar a existência de conjuntos transfinitos enormes, que apesar de não serem efetivamente intuíveis, são *em princípio* intuíveis. Para o intuicionismo, a existência de tais conjuntos é ilegítima. O objetivo da presente seção é esclarecer como podemos compreender, a partir de uma perspectiva fenomenológica, as divergências entre platonismo e intuicionismo.

De modo geral, a ideia básica por trás do intuicionismo é de que a determinação do valor de verdade de uma proposição matemática está condicionada à possibilidade de ser demonstrada. Isso já o coloca em pleno contraste com o platonismo, em que uma proposição, independentemente de ter sido demonstrada, possui um valor de verdade determinado. Mas há aqui alguns nuances que precisam ser esclarecidos, o que fazemos ao elencar abaixo quatro modos que caracterizam diferentes maneiras de compreender a atribuição de um valor de verdade a uma proposição[75]. Sendo A um proposição qualquer, podemos nos deparar com uma das seguintes situações:

(1) Demonstrou-se que A é verdadeira;

(2) Demonstrou-se que A é falsa, ou, como Brouwer diz, demonstrou-se que A é um absurdo, i.e, demonstrou-se que $\sim A$ é verdadeira;

[75](BROUWER, 1975e, 552).

(3) Não se demonstrou que A é verdadeira, nem se demonstrou que A é falsa, mas é conhecido um algoritmo capaz de decidir o valor de verdade de A;

(4) Não se demonstrou que A é verdadeira, nem se demonstrou que A é falsa, e tampouco se conhece um algoritmo que decida o seu valor de verdade.

De acordo com Brouwer (2011, 92), o caso (3) pode ser reduzido a um dos outros dois primeiros, o que indica que uma proposição nesta condição possui um valor de verdade determinado, ainda que esteja latente, potencialmente presente no algoritmo que o revelará[76]. Além disso, Brouwer afirma que os dois primeiros casos possuem um caráter perpétuo, ao passo que uma proposição que se classifica de acordo com a condição (4) pode transitar para as outras classificações, o que pode se dever à circunstância de termos adquirido o conhecimento de um método efetivo que decida o seu valor de verdade, ou à circunstância de alguma entidade matemática ter obtido uma propriedade que não possuía antes, já que o intuicionismo não concebe as entidades matemáticas como sendo necessariamente predeterminadas.

O lugar, portanto, para abordarmos o desacordo entre as concepções platonista e intuicionista é o que se classifica sob as condições do item (4), uma vez que nos demais pontos ambos concordam a respeito da determinabilidade do valor de verdade proposicional. Ao contrário de um platonista, um intuicionista não admite que uma proposição classificada de acordo com (4) tenha um valor de verdade determinado, o que implica na rejeição da validade universal de um dos princípios basilares da matemática clássica: o princípio lógico de bivalência.

Da Silva (2017, 78) enuncia em duas versões o princípio lógico de bivalência, uma que denomina subjetiva, e outra, objetiva. Na primeira, afirma-se que qualquer asserção significativa (*meaningful*, em inglês) "pode idealmente, em princípio, ser verificada". Isso quer dizer que o que uma asserção afirma pode ser confirmado ou refutado numa experiência-de-verdade, uma vivência subjetiva que se dá no confronto do conteúdo da asserção com os fatos que lhes são relevantes. Já de acordo com a outra versão, a objetiva, o princípio é entendido como dizendo que qualquer asserção significativa possui um valor de verdade intrínseco – o verdadeiro ou o falso –, a despeito de qualquer verificação atual. Dito dessa maneira, a seguinte questão vem à tona:

> How can it be that truth or falsehood, which can only be properly attached to assertions by means of *subjective* evidential experiences of adequacy or inadequacy of the content asserted with the facts, belong to assertions *independently* of such experiences being *actually* carried out? Or still, how can any assertion be either true or false in *itself, intrinsically*? (da SILVA, 2017, 78, grifo do autor).

[76]Um finitista estrito, é válido observar, sequer aceitaria que proposições classificadas de acordo com (3) têm um valor de verdade determinado.

À primeira vista, responderíamos essa questão apontando o item (3) da lista acima. Diríamos que uma asserção tem um valor de verdade intrínseco não porque o evidenciamos numa experiência-de-verdade atual, mas porque possuímos um método que em princípio garante essa experiência. No entanto, da Silva, baseando-se na filosofia husserliana, evoca uma outra noção de *verificação em princípio*, cujo caráter potencial não está relacionado ao conhecimento de um método. De acordo com essa concepção, a verificação atual de uma asserção se coloca como um *ideal*: pressupõe-se que seja idealmente possível verificar uma asserção. Isso implica que, se esse ideal for atualizado, um valor de verdade é atribuído à asserção, o qual sempre lhe pertenceu, considerando que o seu sentido nunca foi alterado. Por essa razão diríamos que asserções possuem, independentemente de qualquer verificação atual, valores de verdade intrínsecos e definitivos.

Para elucidar essa noção de verificação ideal, da Silva a compara com um *ponto ideal* – uma noção da geometria projetiva –, que representa a direção de linhas paralelas que se interceptam no infinito. Por mais que percorramos essas linhas, tal interceptação estará sempre fora de nosso alcance, no entanto, assim como um ponto no infinito organiza a perspectiva pictorial do espaço, as verificações ideais organizam o campo de experiência da verdade:

> The complete experience of truth may not actually belong to the ego's field of experiences – as vanishing points do not belong to the pictorial space – but as an imaginary focus this ideal unifies all the partial and limited experiences of truth into an integrated whole (da SILVA, 2017, 78).

Assim temos que a noção de verificação ideal expressa na versão subjetiva do princípio de bivalência não possui o sentido de decidibilidade – ou *verificabilidade efetiva* –, não se enquadrando, portanto, no item (3) acima, aceito pelos intuicionistas. Mas como poderíamos argumentar pela legitimidade desse princípio, indo além da mera apresentação de uma metáfora? Da Silva (79, 2017) observa que a bivalência se trata de um princípio a priori, e por esse motivo sua validade não deve depender de questões de fato, como a existência atual de um método de decisão. Um outro ponto é que, por se tratar de um princípio lógico, ele é constitutivo dos fundamentos de qualquer justificação, ou seja, como justificar o que é pressuposto no próprio ato de justificação? Dessa forma, um princípio lógico não pode ser demonstrado, restando-nos somente apresentar as condições e pressuposições que conduzem à sua aceitação[77]. Sua validade deve depender apenas de questões de princípio, constituindo-se, pois, como um objeto de investigação de uma filosofia transcendental.

Tratando os princípios lógicos no âmbito de uma lógica de asserções, devemos levar em conta que estas, em virtude de serem significativas, pressupõem um

[77](da SILVA, 2011, 334).

mundo ao qual se referem. Por essa via, a validade de um princípio lógico não pode ser concebida sem levar em consideração o sentido do ser atribuído ao domínio referido pelas asserções submetidas ao princípio lógico em questão. Numa investigação fenomenológica transcendental, isso implica em analisar a intencionalidade desse domínio, i.e., investiga-se como ele deve ser concebido a fim de que um determinado princípio lógico seja nele validado.

Antes de prosseguir, convém elucidarmos o que da Silva[78] entende por uma asserção significativa. Numa palavra, uma asserção é significativa se possui sentido sintático *e* semântico, ou, dizendo de outro modo, se é sintaticamente e semanticamente significativa. Dessa forma, um dos papeis de uma lógica de asserções (também conhecida como lógica apofântica) é identificar tipos sintáticos e tipos semânticos, bem como elucidar, a priori, as possibilidades de combinação desses tipos. Por exemplo, em "João é e", temos uma asserção que não é sintaticamente significativa, porque de acordo com as regras que regimentam a combinação de tipos sintáticos, a sentença aberta "João é –" poderia ser preenchida por um adjetivo ou um substantivo, mas não por uma conjunção. Já a asserção "o número 2 é verde", apesar de ter um sentido sintático, é semanticamente sem sentido, pois considerando como intencionamos o domínio dos números, um número é a priori impedido de possuir uma cor.

Assim se observa um envolvimento intrínseco entre uma asserção e aquilo a que ela se refere. Tal envolvimento pode ser elucidado da seguinte maneira: uma asserção significativa é regida por regras semânticas, que por sua vez dependem da intencionalidade constitutiva do ser do domínio referido; o sentido do ser de tal domínio deixa estabelecido a priori sua compatibilidade de combinação com outros domínios, que compõem diversos tipos ontológicos – no parágrafo anterior, por exemplo, o contrassenso de "o número 2 é verde" se deve à condição de que o sentido do ser de um objeto ideal é a priori impedido de possuir uma propriedade exclusiva de uma subclasse de objetos reais, ou melhor, os sentidos do ser atrelados a diferentes tipos ontológicos estabelecem de maneira a priori compatibilidades entre si; por conseguinte, uma asserção significativa exprime uma situação que é a priori possível, sendo verdadeira se a situação expressa for também atual:

> A world contains many different ontological regions, objects of different types, and no assertion about this world is materially meaningful that does not respect a priori compatibilities and incompatibilities of ontological types. But a priori ontological compatibilities and incompatibilities are also aspects of the intentional meaning attached to the world. Once assertions respect syntactic and semantic rules of formation they are meaningful, that is, able to represent possible situations of the world (da SILVA, 2017, 81).

Por essa razão, do ponto de vista da objetividade, quando um sujeito faz uma asser-

[78]Cf. (da SILVA, 2017, 30-31; 71-72) e (da SILVA, 2011, 11).

ção, ele se compromete com a factualidade da possibilidade em princípio expressa por ela. Já do ponto de vista da subjetividade, ele se compromete com a possibilidade em princípio do valor de verdade da asserção ser intuída numa experiência-de-verdade[79]. E lembremo-nos, tal possibilidade em princípio não diz respeito a questões de fato, como a existência de um método de decisão.

É interessante observar como a significatividade de uma asserção não origina um colapso com o seu valor de verdade, mesmo no caso de asserções matemáticas, que envolvem propriedades necessárias. A sentença

“uma sequência de sete 7s ocorre na expansão decimal de π”

é sintaticamente significativa, mas seria também semanticamente significativa? Para que assim o seja, deve-se apelar à condição de que qualquer sequência de dígitos pode em princípio ocorrer em qualquer expansão decimal. Todavia, ao contrário de uma sentença que exprime um estado de coisas contingente, se a sentença acima for verdadeira, ela é necessariamente verdadeira; se falsa, necessariamente falsa. Assim, supondo que seja falsa, como dizer que ela exprime um estado de coisas possível? Da Silva (2017, 83) afirma que as regras semânticas envolvem apenas tipos, não instâncias de tipos. Posto isso, os tipos de *sequência de dígitos* e de *expansões decimais* são a priori compatíveis, a despeito de algumas das instâncias de cada um serem, por uma questão de fato, necessariamente incompatíveis.

Numa outra ocasião[80], da Silva fala de um sentido fraco e de um sentido lógico de possibilidade. A sentença “175 é um número primo”, por exemplo, é necessariamente falsa, consequência da definição de número primo e do fato de que o número 175 possui divisores próprios. Diz-se então que, apesar dessa sentença, num sentido lógico, ser necessariamente falsa, ela poderia, num sentido mais fraco de possível, ser verdadeira. Ou seja, quando se diz que uma sentença significativa exprime um estado de coisas possível, é a noção mais fraca de possibilidade que é levada em consideração: a que versa sobre a compatibilidade entre *tipos ontológicos*. Sem essa concepção mais fraca, teríamos dificuldade em explicar como é possível conjecturar sobre a *verdade* de uma proposição que posteriormente é demonstrada ser (necessariamente) falsa, ou em distinguir entre um fato matemático demonstrado e a mera suposição desse fato.

Por esse motivo que da Silva (2017, 83) afirma que o conteúdo de uma evidência possível é negativo: não há nada que a priori impeça que 175 seja um número primo, pois o que pode ser estabelecido a priori diz respeito apenas à compatibili-

[79](da SILVA, 2017, 71).
[80](da SILVA, 2011, 346, nota 9).

dade entre tipos ontológicos. Em termos gerais, isso quer dizer que um estado de coisas pode em princípio ser experienciado desde que possamos determinar a priori, considerando somente os tipos ontológicos envolvidos, o que não pode ser excluído de ser o conteúdo de uma experiência.

A partir do que foi exposto, reconsideremos agora a pergunta colocada há pouco, que dizia respeito ao que o princípio de bivalência implica: como uma proposição, independentemente de uma experiência que a confronte com os fatos por ela expressos, pode possuir um valor de verdade intrínseco? Ou seja, como podemos a priori legitimar que uma proposição arbitrária é verdadeira ou falsa, mesmo não possuindo um método que possa verificá-la?

De acordo com o que vimos, a abordagem fenomenológica dessa questão insiste que, por estarmos tratando de um princípio lógico, devemos instaurar uma investigação transcendental, a qual nos esclarecerá quais condições devem ser pressupostas a fim de que o princípio de bivalência seja válido. Nossa atenção deve voltar-se para o mundo referido pelas proposições submetidas ao princípio lógico em questão, pois é referindo-se a ele que a significatividade e o valor de verdade de tais proposições são compreendidos. Voltar a atenção para esse mundo significa processá-lo numa redução fenomenológica, i.e., significa inquirir a intencionalidade que constitui o sentido do seu ser, revelando assim os critérios que legitimam as asserções que o têm como referência:

> [T]he truth of logically true assertions does not depend of their particular contents, but depends on the sense of being of the domain to which they refer. In order for, say, either *A* or *not-A* to be valid, no matter which *A*, the domain where *A* is interpreted must be intentionally conceived *in a certain way*. It befalls on phenomenology the task of clarifying what this way of being is and why conceiving the domain of knowledge thus is justified in the overall schema of knowledge (da SILVA, 2017, 9, nota 7, grifo do autor).

O que se destaca nessa abordagem é o fato de que o princípio lógico em si não é questionado, dada a sua própria condição de princípio, no entanto investigam-se as pressuposições que o validam. Tragesser também argumenta nessa direção, em que a constituição intencional de um domínio é que *exige* uma determinada lógica, e não vice-versa:

> The principal contribution Chapter IV makes to the foundations of logic is to show, on the basis of phenomenological ontology [...], that there exist different worlds or objective domains *W* and *V* such that, for the porposes of formulating true and adequate theories of these domains, *W* e *V* *require* different logics (TRAGESSER, 1977, 90, grifo nosso).

Dessa forma, compreendendo a intencionalidade que constitui o mundo referido por sentenças significativas elucidamos a validade dos princípios lógicos que as regem. Por conseguinte, a pergunta que deve ser feita é: quais características dessa intencionalidade são responsáveis pela validação do princípio de bivalência?

Tal intencionalidade *deve conceber* um mundo como sendo objetivamente completo, inteiramente determinado em si mesmo. É esse sentido do ser, atribuído ao mundo referido por sentenças significativas, que legitima a *verificabilidade ideal* pressuposta pelo princípio lógico de bivalência. Assim, tem-se garantido a priori um domínio maximamente consistente de fatos, onde um, e apenas um, de dois estados de coisas completares e incompatíveis entre si é o caso, permitindo que uma proposição sobre qualquer estado de coisas possível seja *em princípio* verificável contra os fatos – o que dá a ela um valor de verdade intrínseco[81].

Da Silva (2017, 87) observa que princípios lógicos são a priori e universais, contudo, à luz da investigação fenomenológica por ele proposta, tais características precisam ser melhor qualificadas. Nesse caso, um princípio lógico é a priori porque é independente de qualquer experiência atual[82], mas não é independente de uma determinação a priori de quais experiências são possíveis em princípio num determinado domínio. Tal determinação está envolvida com a maneira como intencionamos o domínio em questão, possuindo assim um caráter fenomenológico transcendental.

Quanto à universalidade, segue-se que a validade de um princípio lógico é relativa ao domínio cuja intencionalidade o legitima:

> [V]alidation in one domain is not exportable to *all* domains. The validity of logical principles of reasoning is confined to the domains whose sense of being validates them. Hence, in a sense, logic is *not* universal, or is, but only within the limits of a given intentional positing. Different ways of conceiving a domain of being – for example, the domain of real numbers classically and intuitionistically conceived – may require different ways of reasoning about the objects of this domain (da SILVA, 2017, 87-88, grifo do autor).

Dito isso, temos que uma sentença significativa possui um valor de verdade intrínseco em virtude do sentido do ser atribuído ao domínio referido cumprir com as características de ser objetivamente completo e maximamente consistente. Dadas tais condições, pode-se compreender a verificabilidade de qualquer proposição como um ideal. No entanto, se a significatividade semântica de uma proposição envolver domínios cuja intencionalidade os caracterizam como incompletos, por vezes dependendo da ação de um sujeito para serem completados, a verificabilidade não pode ser colocada como um ideal. Tal proposição não possuiria um valor de verdade intrínseco, sendo a sua determinação necessariamente dependente de uma experiência-de-verdade, que pode ser atual ou possível. Mas note-se, trata-se da noção de possibilidade compreendida nos parâmetros de uma verificação decidível (como as proposições caracterizadas de acordo com o item (3), acima), não nos parâmetros de uma verificabilidade ideal.

[81]Cf. (da SILVA, 2017, 81-82; 88).

[82]Que pode ser uma experiência intuitiva em que se verifica o valor de verdade de uma proposição, por exemplo.

Podemos desse modo, por meio de um viés transcendental, compreender o debate entre platonistas e intuicionistas. Aqueles intencionam o domínio de referência de suas proposições como objetivamente completo, já estes, como incompleto, constituído por meio de construções que se desenvolvem no tempo. Neste caso, nem todo estado de coisas representado por uma proposição se encontra determinado quanto à sua factualidade. *Por conta disso*, a bivalência não é válida em geral[83], apenas para proposições decidíveis. Sendo assim, a disputa entre platonistas e intuicionistas trata, no fundo, de um embate acerca da constituição intencional de seus respectivos domínios de referência.

É interessante observar a ordem conceitual que constitui esse argumento: partindo da intencionalidade de um domínio seguimos para a validação de um princípio lógico. Logo, se a lógica se segue de uma certa concepção da realidade, ou seja, se o modo de ser de um determinado domínio, que foi intencionado de uma certa maneira, *exige* uma lógica em particular, isso vai de encontro à ideia de que a lógica serve de base para uma metafísica, um ponto de vista que encontramos, por exemplo, na obra *The Logical Basis of Methaphysics*, de Dummett[84].

Após ressaltar que o conflito entre platonistas e intuicionistas se deve a pressuposições que cada uma das partes toma a respeito da natureza da realidade matemática e da verdade matemática, isso com base em hipóteses metafísicas, não com base numa abordagem transcendental e fenomenológica, da Silva afirma:

> The conflict is dogmatic and thus unsurmountable. The phenomenological-transcendental approach, being non-dogmatic, can *understand* each side's perspective, corresponding as they are to different conceptions of reality, each acceptable on its own terms under the scope of the *epoché*. From the phenomenological perspective, Platonists and intuitionists are simply not talking about the same thing, since they do not have the same intentional conception of mathematical reality (da SILVA, 2017, 86, grifo do autor).

A fenomenologia investiga esse debate a partir da *epoché*, o que significa, de acordo com a seção passada, que a distinção entre platonistas e intuicionistas deve ser considerada no âmbito da distinção entre MD_2 e MI_2. De fato, para da Silva, o debate que não ultrapassa o âmbito da distinção entre MD_1 e MI_1 procura justificar os princípios lógicos por meio de pressuposições ontológicas e epistemológicas, que de modo geral ele denomina de hipóteses metafísicas. Num realismo concebido por meio de uma hipótese metafísica, por exemplo, há um mundo "lá fora"

[83] Lembre-se que há pouco dissemos que um princípio lógico é a priori porque independe de qualquer experiência atual. É justamente por isso que a bivalência deixa de ser um princípio lógico no intuicionismo, uma vez que, neste contexto, para uma proposição ser verdadeira ou falsa deve ao menos haver uma experiência que evidencie a existência de uma método capaz de decidir o seu valor de verdade.

[84] A esse respeito, cf. (ALVES, 2011, 31), onde o autor defende que há pelo menos uma ideia em comum entre Dummett e Quine: "the idea that our logical principles constitute our principles about what there is, and therefore, that logic is metaphysics".

porque pressupõe-se que tal mundo *é* completo e independente do conhecimento. Isso caracteriza o que chamamos na seção passada de realismo ingênuo. Por outro lado, anuindo a uma abordagem transcendental, envolvemo-nos com uma questão de princípio. Se há um mundo "lá fora", é porque ele *é concebido como* objetivamente completo, i.e., trata-se da intencionalidade que constitui seu sentido de ser. Como temos apresentado, o que interessa à fenomenologia é o voltar-se ao ato intencional enquanto tal, sendo consideradas ingênuas, ou carentes de melhores qualificações, pressuposições metafísicas que desconsideram a intencionalidade daquilo que uma pressuposição instaura. Em termos gerais, "[t]he difference is that metaphysical hypotheses have to do with how reality *is*, whereas transcendental presuppositions on how reality *is conceived to be* or how it *must be* given how it is conceived to be"[85].

Nesse sentido, a abordagem fenomenológica não pode colocar-se com o intuito de *justificar* a validade de um princípio lógico. E como o conflito entre platonistas e intuicionistas gira em torna da aprovação ou recusa do princípio de bivalência, a fenomenologia, quanto a isso, nos deixa num terreno neutro, servindo apenas para nos esclarecer por que esse princípio é aceito num contexto mas não em outro.

Mais adiante, analisaremos a questão sobre a rejeição de um princípio lógico, ou sobre a condição de trafegarmos de um contexto a outro. Por ora, vejamos como a elucidação fenomenológica nos auxilia a esclarecer alguns problemas encontrados no interior do próprio intuicionismo.

5.2.3 Demonstração, tempo e verdade

Como visto, o cerne da disputa entre um platonista e um intuicionista se concentra na condição de que aquele admite uma realidade objetivamente completa e independente. Nesta perspectiva, proposições matemáticas são compreendidas como descrições de fatos "que já estão aí", de maneira que uma proposição é verdadeira desde que os descreva corretamente, atribuindo assim à matemática uma conotação epistemológica que se assemelha às das ciências naturais, as quais pressupõe um "mundo objetivo lá fora". No intuicionismo, por outro lado, o conhecimento, em certa medida, é constitutivo da realidade. É sob esses termos que a noção de demonstração – compreendida como uma atividade de conhecimento, por meio da qual um sujeito encontra as garantias de evidência do valor de verdade de uma proposição matemática – desempenha um papel fundamental. Neste contexto, onde a autonomia da realidade é colocada em questão, o que poderia atestar a verdade de uma proposição não se encontra plenamente determinado: a proposição tem a

[85](da SILVA, 2017, 85, grifo do autor).

pretensão de dizer verdadeiramente sobre algo, mas este algo não está completo, esperando por uma descrição correta, ele se constrói ao mesmo tempo em que se evidencia ao entendimento.

Um dos pontos distintivos do intuicionismo, portanto, é que nele uma proposição matemática, a despeito de seu caráter necessário, *torna-se* verdadeira. Ela não é intrinsecamente verdadeira ou falsa, pois seu valor de verdade não é concebido como algo que pré-existe à vivência de um sujeito que o evidencie atualmente (ou, ao menos, garanta tal evidência por meio da posse de um método efetivo de verificação). Nesta seção, baseando-se sobretudo nas filosofias de Prawitz e Dummett, trataremos da dificuldade de se conciliar as noções de demonstração e verdade, já que elas nos induzem a uma cisão de partes antagônicas: de um lado, temos uma noção temporal, empírica e epistemológica, de outro, uma noção atemporal, necessária e ontológica.

A noção de demonstração contém o elemento epistêmico necessário para que, aliada a uma concepção de verdade, seja possível opor-se a acusações concernindo a admissão de um realismo. Tomando por verdadeiro apenas aquilo que possamos evidenciar com a apresentação de uma demonstração, segue-se que a determinação desse valor de verdade está subjugada à vivência de um sujeito cognoscente, mesmo que, por meio da posse de um método efetivo, tal vivência esteja garantida apenas em princípio.

Nesses moldes, equivalendo as noções de demonstração e verdade, o intuicionista conseguiria se desvincular do realismo. No entanto, Prawitz alerta que essa equivalência deve ser ponderada, sob o risco de estarmos exigindo demais do conteúdo de uma sentença:

> By asserting a sentence you guarantee that there is a proof of it, but that is not what the assertion says; the content of the sentence, what you say by asserting it, is simply that the sentence is true, not that you have a proof of it. [...] It seems to be a misrepresentation of the assertion to think of its content as being that a proof has been found. It is to put too much in the content (PRAWITZ, 1998, 46).

De acordo com ele, podemos extrair consequências bastante contraintuitivas se não desvincularmos a verdade de uma sentença do fato de se ter obtido a sua demonstração. Como argumento ele oferece um exemplo hilário, mas esclarecedor: imagine um pastor que, até então, era dono de 52 ovelhas. Asserindo-se a premissa de que apenas 50 ovelhas se encontram no pasto, poderíamos concluir que estão faltando duas ovelhas. Todavia, se a verdade dessa premissa pressupõe a efetivação de sua demonstração – que poderia ser colocar um observador no pasto, para contar o número de ovelhas –, caberia-nos concluir, também, que haveria um observador bastante cansado.

Da mesma forma, agora considerando um exemplo dado por Raatikainen (2004, 137), se *A é verdadeira* significasse o mesmo que *A foi demonstrada*, poderíamos considerar equivalentes os dois enunciados abaixo:

(1) Se alguém possui uma demonstração de que existe uma infinidade de números primos gêmeos, então alguém conhece bastante de números primos.

(2) Se é verdade que existe uma infinidade de números primos gêmeos, então alguém conhece bastante de números primos.

Não obstante, isso contraria o uso mais natural e intuitivo que fazemos da noção de verdade em tais contextos. Quando hipoteticamente tomamos uma conjectura como premissa, o que nos interessa é uma noção de verdade atemporal e independente, para assim podermos construir um argumento que nos leve a certas consequências, dependentes da demonstração da conjectura em questão. Com uma noção muito restrita de asserção, em que a posse atual de uma demonstração é a palavra de ordem, seria difícil justificar o uso que fazemos de tais argumentações hipotéticas. A estranheza provocada pelo enunciado (2) nos deixa claro que asserir hipoteticamente a conjectura de que há infinitos números primos gêmeos não visa extrair consequências do fato de alguém conhecer a demonstração dessa conjectura, pois o objetivo de uma argumentação hipotética é, antes de mais nada, poder pensar sobre uma realidade que não pôde ainda ser conhecida.

Diante disso, Prawitz se pergunta se uma noção de sentido proposicional compreendida em termos epistêmicos necessariamente conduz à condição temporal de existência de uma demonstração:

> What is the appropriate notion of truth for sentences whose meanings are understood in epistemic terms such as proof or ground for an assertion? It seems that the truth of such sentences has to be identified with the existence of proofs or grounds, and the main issue is whether this existence is to be understood in a temporal sense as meaning that we have actually found a proof or a ground, or if it could be taken in an abstract, tenseless sense (PRAWITZ, 2012b, 9).

A abordagem que Prawitz privilegia é a que favorece um sentido abstrato e atemporal de demonstração, para que assim possamos abranger outros usos da força expressiva de uma sentença, indo além da mera asserção. Essa abstração e atemporalidade seria viabilizada pela noção de verdade, que nos permitiria sempre atribuir a uma sentença, a despeito do uso que se faça dela, um mesmo conteúdo, seja empregando-a como uma hipótese, uma pergunta, ou uma asserção.

Assim, Prawitz (2012b, 14) acusa que autores de índole intuicionista, como Dummett e Heyting, identificam a verdade de uma sentença – de acordo com ele, o seu conteúdo – com as condições de asseri-la, as quais envolvem questões empíricas sobre a construção e posse de uma demonstração. Essa identificação restringiria o uso de sentenças apenas ao seu aspecto assertivo, já que empregando-as como conjecturas, por exemplo, a noção de verdade envolvida é outra que a de construção de uma demonstração.

Todavia, exatamente nesse ponto onde Prawitz argumenta por uma noção de verdade baseada numa concepção de demonstração abstrata e atemporal, ele é suspeito de retomar uma posição realista[86]. De acordo com ele, *A é verdadeira* não deve ser equacionada com *A foi demonstrada*, mas com *A é demonstrável*, ou *existe uma demonstração de A*, em que este *existe* é tomado num sentido atemporal[87]. Para proposições decidíveis, essa noção de verdade é consentida pelo intuicionismo, no entanto, ao adotá-la de forma geral, surgem acusações de realismo:

> The difficulty with his formulation is, of course, how we should construe the 'can' in 'can be verified'. I am dubious about his explanation of it [...] in terms of an untensed and abstract (platonic?) sense of 'exists'. An untensed use of 'is true' is no doubt admissible: but then it should genuinely be in the tense of timelessness, and not in that of eternity; 'is' ought not to be read as 'always was and always will be'. [...] it is equally hard to see how, on this conception of the existence of proofs, we can resist supposing that a proof of a given statement determinately either exists or fails to exist (Dummett (1987, 285) em réplica a Prawitz).

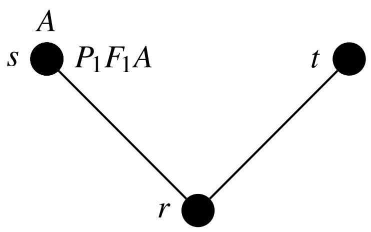
Num outro texto, Dummett (1998, 130) reconsidera a posição de Prawitz e nos esclarece de que maneira com ele concordaria. Sua proposta consiste em dizer que, situando-nos num ponto em que possamos olhar para o passado, temos o direito de afirmar que o que aconteceu estava determinado de assim o ter sido. Para ele, o curso de eventos se desmembra em direção ao futuro, não em direção ao passado, assim, um enunciado que se refere ao futuro não possui um valor de verdade intrínseco, mas chegado o tempo referido, tal enunciado assume um valor de verdade, sendo que, quanto ao passado, não se considera mais o curso de eventos que não conduz ao tempo a que se chegou. Nesse sentido, Dummett afirma:

> What we need, therefore, is a semantics for tensed statements that will allow us correctly to say at any given time, concerning some statement that has turned out at that time to be true, that it was always the case that it was going to be true, even though, at an earlier time, we could not correctly have said that it was true or going to be true (DUMMETT, 1998, 130).

Para ficar mais claro, empreguemos aqui o exemplo que Dummett apresenta. Primeiramente, ele considera uma linguagem com os operadores P_n, que significa *foi o caso n dias atrás*, e F_n, *será o caso n dias depois*. Se a uma sentença A antepuséssemos o operador P_2, formando P_2A, por exemplo, tal sentença significaria *A foi o caso 2 dias atrás*. Consideremos então o seguinte diagrama, que ilustra o desmembramento do curso dos eventos r, s e t:

[86] Cf., por exemplo, (RAATIKAINEN, 2004, 140).

[87] (PRAWITZ, 2012b, 15).



Dessa forma, com o estado de coisas r precedendo os estados de coisas s e t por 1 dia, sendo a sentença A verdadeira em s, mas não em t, situando-nos em r não poderíamos afirmar que A seria verdadeira daqui a um dia, i.e., F_1A. Isto se dá porque não ocorre de A ser verdadeira em todos os nódulos ligados (acessíveis) a r. Por outro lado, se o nosso ponto de vista se constituísse a partir de s, F_1A seria verdadeira em r, uma vez que t, onde não temos a verdade de A, não é acessível ao nódulo s, ou seja, olhando para o passado, ignoramos os caminhos que não levaram à verdade de A, por isso, em s, diríamos que sempre foi o caso que A se tornaria verdadeira. Portanto, sendo s o nosso ponto de vista, P_1F_1A é verdadeira em s, i.e., ontem já era o caso de que A seria verdadeira no dia seguinte. Dummett prossegue dizendo que a ideia básica dessa concepção temporal é a de que para o presente e o passado só existe um curso de eventos, não obstante existir, para o futuro, vários cursos possíveis, nenhum deles atual.

A noção semântica apresentada acima corresponde à maneira de Dummett concordar com Prawitz a respeito da concepção de que a verdade preexistiria à demonstração de uma proposição. Ela nos permite dizer, de qualquer sentença que *já tenha sido demonstrada*, que ela sempre foi verdadeira, ao mesmo tempo em que não precisamos consentir com a ideia de que uma sentença não demonstrada ou refutada está fadada a ser demonstrada ou refutada, ou jamais ser demonstrada ou refutada[88].

Prawitz, todavia, não se contentaria com essa perspectiva. Ele almeja uma noção de verdade destituída de qualquer traço temporal. Precisamente, em sua proposta não nos caberia afirmar que uma certa proposição *A se tornou* verdadeira. Tampouco poderíamos dizer que, quando uma demonstração é obtida, tal demonstração *já* existia, tudo isso por causa do elemento temporal envolvido nessas condições. De acordo com ele:

> [T]ense should be dropped when speaking about truth and the existence of proofs or grounds, as it usually is when we speak about the existence of numbers. Even a constructivist can use 'is' without tense when saying that there is a number with a certain property. Such a use does not bring with it a commitment to holding that for any property, either there is a number with the property or there is not (PRAWITZ, 2012b, 15).

É válido observar que um ponto crucial envolvido com a temporalidade da verdade se relaciona com a questão da objetividade da matemática. Em última instân-

[88](DUMMETT, 1998, 131).

cia, Prawitz (1998, 50) se pergunta como a matemática manteria a sua objetividade no contexto de uma concepção intuicionista. No contexto do realismo (ingênuo), o problema da objetividade não se coloca, pois a verdade de uma proposição não depende da vivência de um sujeito que a evidencie. Tal verdade se deve à própria constituição da realidade, que é independente de quem assere a proposição. Sem a objetividade, a evidência de uma asserção se daria apenas no âmbito pessoal, e no caso de um embate em torno de asserções opostas, não haveria nada de imparcial a recorrer para que o conflito pudesse ser resolvido. Um desafio que se coloca a um intuicionista, portanto, é manter, por um lado, a objetividade da matemática, mas sem ser realista, e, por outro, justificar uma posição antirrealista, mas sem cair em alguma espécie de subjetivismo.

A via que Dummett parece sugerir é a de que a realidade não existe autonomamente em relação ao conhecimento, no entanto, para que ela não seja uma mera criação nossa, ele oferece a imagem de que tal realidade brotaria à medida que fôssemos bem-sucedidos em verificar a verdade das proposições por nós investigadas, de tal maneira que seríamos forçados a aceitá-la assim que ela fosse surgindo:

> It seems that we ought to interpose between the platonist and the constructivist picture an intermediate picture, say of objects springing into being in response to our probing. We do not *make* the objects but must accept them as we find them (this correponds to the proof imposing itself on us); but they were not already there for our statements to be true or false of before we carried out the investigations which brought them into being (DUMMETT, 1978, grifo do autor).

Prawitz, porém, traça outro caminho, para justificar a objetividade da matemática nessa fronteira entre platonismo e intuicionismo. De acordo com ele, essa objetividade se encontraria no próprio significado das sentenças que consideramos, sendo que nele já estão presentes as condições que nos permitiriam confirmar se uma alegada demonstração realmente lhe corresponde.

Consideremos um matemático se esforçando para encontrar a demonstração da verdade de uma proposição, até que, por fim, ele alega tê-la encontrado. Analisando a demonstração, pode-se verificar que ela de fato serve para justificar que a proposição investigada é verdadeira. Essa verificação só é possível porque nos é claro, antes mesmo da apresentação da demonstração, qual o significado da proposição. Tal significado já deixou estabelecido o que seria demonstrá-la, apesar de não nos dizer como fazê-lo, que seria a tarefa, por excelência, do matemático. É considerando isso que Prawitz afirma:

> [T]he question of whether something is a proof is fixed when the meanings are given, that is, when it is given what counts as a canonical proof. From this it is natural to conclude that already, before a proof of a sentence is found, it is determined that there is such a proof. Provability, which I want to identify with truth, becomes in this way something objective (PRAWITZ, 1998, 50).

Prawitz, portanto, não identifica a verdade de uma proposição com o fato dela *ter sido* demonstrada, mas com a condição dela *ser demonstrável*, condição essa estabelecida pelo próprio significado da proposição.

Em suma, as propostas intuicionistas há pouco tratadas, ao equacionarem verdade e demonstrabilidade, a fim de não negligenciar a participação de um sujeito cognoscente na construção do saber matemático, acabaram sobrecarregando o conteúdo proposicional, como afirma Prawitz. Em virtude disso, as proposições matemáticas ganharam uma dimensão temporal e empírica que não aparenta condizer com o caráter necessário da ciência a que pertencem. Assumindo que a atribuição de um valor de verdade a uma proposição depende da existência de uma demonstração, a qual é empiricamente construída por um matemático, temos como consequência a estranha condição de que uma proposição demonstrada, ainda que necessária, *não era*, antes da demonstração, verdadeira ou falsa. Tentemos agora avaliar os argumentos que Dummett e Prawitz ofereceram para lidar com essa condição.

A proposta de Dummett aparentemente sugere que, a despeito de uma proposição não possuir um valor de verdade intrínseco antes de ser demonstrada, *quando* surge a sua demonstração, o valor de verdade que lhe é atribuído se propaga para o passado, o que nos permitiria dizer que tal proposição *já era* verdadeira. Contudo, considerando o argumento de Pereira presente no artigo *On the Constructive Notion of Truth and a New Sea-battle Problem*, temos boas razões para refutarmos a proposta de Dummett. Vejamos de perto este argumento.

Pereira começa considerando dois casos em que a verdade vai além de uma asserção justificada, i.e., casos em que demonstração e verdade não se coincidem:

(a) quando se possui um método efetivo capaz de decidir o valor de verdade de uma proposição, este valor já está determinado, mesmo que o método não tenha ainda sido executado;

(b) após uma proposição matemática ter sido demonstrada, não se pode negar que ela já era verdadeira antes do surgimento da sua demonstração, dada a necessidade da sua verdade.

Em ambos os casos há uma ruptura entre o conhecimento e a realidade, algo característico das concepções platonistas: em (a) diríamos "a proposição possui um valor de verdade, apesar de não o conhecermos"; em (b), "a proposição era verdadeira, mas não se sabia". Vale ainda acrescentar que temos aqui uma dualidade. A verdade se dissocia da noção de demonstração em duas direções temporais, uma que se direciona ao futuro, como em (a), e outra que se direciona ao passado, como em (b).

A partir da condição (b), em que poderíamos dizer que a verdade de uma proposição – depois que a demonstramos – se propaga para o passado, Pereira (2014, 192) reformula o problema da batalha naval, de Aristóteles[89]. A reformulação se dá mais ou menos nestes termos: seja S uma conjectura matemática levantada em 1662, mas que só foi demonstrada em 1994. Levando em conta a propagação da verdade para o passado, podemos dizer que S sempre foi verdadeira, mas ninguém sabia disso até o dia em que foi demonstrada, mais de 300 anos depois. Em outras palavras, em 1662, as condições que justificariam a verdade de S não foram realizadas, apesar de já naquela época ela ser verdadeira. Vale observar que uma noção onitemporal de verdade necessária está sendo assumida: a demonstração de uma proposição matemática não implica apenas que a proposição é verdadeira, também implica que ela era verdadeira e sempre será verdadeira.

O ponto crucial do argumento vem agora. De acordo com o princípio C, de Dummett, se uma proposição for verdadeira, então deve existir algo na realidade em virtude do qual se dá a sua verdade. Um intuicionista, para não contrariar sua conduta epistemológica, toma esse algo na realidade como sendo a demonstração da verdade da sentença, não um fato matemático independente do conhecimento. Mas se S não possui uma demonstração em 1662, a qual garantiria a realização do princípio C, isso quer dizer que S não era verdadeira naquela data, o que nos coloca em confronto com o princípio de não contradição, ou seja: S, em 1662, é verdadeira, dada a propagação da verdade para o passado ocasionada pela demonstração de 1994, e não é verdadeira, dada a não realização do princípio C. Temos assim uma batalha naval às avessas, que pode ser sumariada no seguinte quadro, que a compara com o argumento da batalha naval aristotélico:

Batalha Naval	**Nova Batalha Naval**
Tempo futuro	Tempo passado
Sentenças contingentes	Sentenças necessárias
Princípio de bivalência	Princípio de não contradição

Note-se que na batalha naval de Aristóteles uma noção intuitiva, a contingência do futuro, nos faz repensar um princípio lógico, a bivalência; na nova batalha naval, um princípio lógico, a não contradição, nos faz repensar uma noção intuitiva, a onitemporalidade das verdades necessárias.

E quanto à proposta de Prawitz, seria possível sustentá-la? Tentaremos elucidar essa questão por meio da filosofia de Martin-Löf.

[89]Numa palavra, o problema aristotélico da batalha naval é um argumento para refutar a ideia de que a necessidade do princípio lógico de bivalência implica a não contingência das ações futuras.

Como visto na seção 3.5.1, na TIT compreendemos uma proposição A quando temos compreensão do que seria a sua prova – ou para sermos mais específicos à TIT, quando sabemos o que seria o seu objeto-prova. Dessa forma, a uma proposição A podemos associar o tipo *prova(A)*, habitado pelos objetos-prova que verificam A. Isso condiz com a seguinte concepção: existindo uma prova de A, pode-se concluir que A é verdadeira; ou então: a *asserção* da verdade de A se dá a partir da existência de uma prova de A. Assim, legitimamos esta equação:

$$\text{A proposição } A \text{ é verdadeira } = \textit{prova}(A) \text{ existe.}$$

E como Martin-Löf observa, esse existencial não é o existencial quantificacional:

> [T]he notion of existence that enters here is the traditional philosophical notion of existence of a concept, or existence of an essence, if you prefer, where by saying that a concept has existence I mean that there exists an object which falls under the concept. So to say that a proposition is true is the same as to say that the concept proof of the proposition has existence in the traditional philosophical sense[90] (MARTIN-LÖF, 1991, 141).

Ou seja, se de fato possuímos uma prova a de A, que pode ser um método efetivo de verificação ainda não executado, então A é verdadeira. Por isso a inferência abaixo é correta:

$$\frac{a : \textit{prova(A)}}{\textit{A é verdadeira}}$$

Martin-Löf reconhece a dificuldade do que vimos tratando, qual seja, quando a noção de demonstração se envolve com a de verdade, deve-se estranhamente admitir que uma proposição necessária *se torna* verdadeira:

> [I]t has often been pointed out that it is very counter-intuitive to say that a proposition *becomes true* when it is proved, and it has often been held against the intuitionists that they construe the notion of truth in that way (MARTIN-LÖF, 1991, 142, grifo nosso).

Sua maneira de lidar com esse problema consiste em distinguir duas noções de existência de uma prova: a existência de uma prova pode ser atual ou potencial. E dado que a existência de uma prova implica a verdade de uma proposição, seguem-se duas noções de verdade proposicional: uma proposição pode ser atualmente verdadeira ou potencialmente verdadeira. Quando se diz que uma proposição é atualmente verdadeira, isso significa que ela foi provada, ou que a asserção (ou juízo) *A é verdadeira* foi demonstrada, ou ainda, que uma prova de A – i.e., um objeto-prova – foi construída. Tudo isso equivale a dizer que *sabemos* que A é verdadeira. Por outro

[90] Cf. a nota 22 da seção 3.5.1 (p. 60).

lado, "to say that A is potentially true is to say that A can be proved, that is, that a proof of A can be constructed, which is the same as to say, in usual terminology, simply that A is true"[91].

Precisamos, no entanto, ter cautela com a expressão *A é verdadeira*, o que nos remete à discussão acerca do axioma (CS3)′ do sujeito criador[92]. Repare-se que Martin-Löf diz "em terminologia usual", o que quer dizer que, nesse caso, não se está especificamente falando da forma de juízo da TIT *A é verdadeira*, que, pela sua força assertiva e categórica, compromete-se com a existência *atual* de uma prova de A. Assim, *em terminologia usual*, quando enunciamos *A é verdadeira*, comprometemo-nos apenas com a existência potencial de uma prova de A. Ademais, tendo em vista que na ordem de prioridade conceitual o que é atual precede o que é potencial[93], se de fato possuímos uma prova de A, além de podermos dizer que A é atualmente verdadeira, também temos o direito de dizer que A é potencialmente verdadeira, apesar disso introduzir uma ambiguidade desnecessária.

Isso nos permite compreender por que Martin-Löf considera correta a seguinte regra de inferência[94]:

$$\frac{A \textit{ é verdadeira}}{(A \textit{ é verdadeira}) \textit{ é demonstrável}},$$

mas não se sente confortável[95] com o princípio K (que provavelmente está para *knowability*) de Dummett:

K: se um enunciado for verdadeiro, deve ser em princípio possível saber que ele é verdadeiro.

Considerando que, para Martin-Löf, a demonstração de uma asserção implica *conhecer* o que está sendo asserido, a regra de inferência acima é equivalente à apresentada na seção 3.5.3 (p. 81). Nesse sentido, também poderíamos reescrever, na terminologia de Martin-Löf, o princípio K:

K': se uma proposiçao for verdadeira, então sua verdade é demonstrável.

O desconforto que esse princípio provoca em Martin-Löf diz respeito ao que

[91](MARTIN-LÖF, 1991, 142).
[92]Cf. a seção 3.5.3, especificamente a página 80.
[93]Tudo o que é atual é possível, cf. (MARTIN-LÖF, 1991, 142).
[94](MARTIN-LÖF, 1996, 28).
[95](MARTIN-LÖF, 1998b, 106).

já afirmamos bem atrás: tratando-se de um condicional, pode ser o caso de que a afirmação presente no antecedente não seja categórica, logo, da mera hipótese de que uma proposição é verdadeira não podemos concluir que a sua prova existe. No entanto, se temos uma asserção categórica de que uma proposição é verdadeira, como na premissa da regra inferencial acima, é porque temos condições de apresentar uma prova que evidencie tal verdade. Em razão disso, Martin-Löf propõe a seguinte correção do princípio K:

K'': se o juízo da forma 'A é verdadeira' for correto, então a proposição A pode ser conhecida como verdadeira.

Prawitz (2012a, 57) alega que, nesses termos, o princípio K se reduz a uma trivialidade, dado que "correto", na análise de Martin-Löf, significa conhecível. Acreditamos, no entanto, que essa retificação tem apenas o objetivo de esclarecer que a mera *suposição* da verdade de uma proposição não nos dá o direito de concluir que possuímos a sua prova, i.e., que *sabemos* que ela é verdadeira. Além do mais, K'' exprime o que a regra inferencial acima diz, e, afinal, qual regra inferencial não comporta um sentido trivial?

Mas retomemos nosso problema inicial: como a distinção entre proposições atualmente e potencialmente verdadeiras pode lidar com a condição contraintuitiva de uma proposição matemática *se tornar* verdadeira quando provada? Para Martin-Löf, quando esse tipo de objeção é feita, leva-se em consideração somente uma noção atualista de existência de uma prova, e como a verdade de uma proposição está associada à existência de sua prova, uma proposição só pode ser verdadeira *a partir do momento* que sua prova passa a existir. Sua sugestão consiste então em apelar a uma noção potencial da verdade, de modo que não mais dizemos que uma proposição se tornou verdadeira, e sim que sua verdade foi atualizada. Ou seja, a verdade de uma proposição, que já lhe era inerente em estado potencial, porque a existência de sua prova sempre lhe foi possível, apenas se atualiza. Vejamos a citação abaixo:

> [T]here is not only the notion of actual truth, but also the notion of potential truth, and that, even before, the proposition was proved, it could be proved, which is to say that, although not yet actually true, it was potentially true. Thus the notion of potential truth is not tensed in the way the notion of actual truth is. On this analysis of the notion of truth, potential truth, that is, it is clear that there are no propositions which are true but which cannot be proved; because potential truth is simply analyzed as potential existence of proof (MARTIN-LÖF, 1991, 142).

Nessas condições, Martin-Löf parece cumprir com o que Prawitz caracterizou como uma noção atemporal e abstrata de existência de uma prova, porque pode-se dizer de uma proposição arbitrária que a sua prova sempre (no sentido de atemporalidade) existiu num estado potencial. Consequentemente, toda proposição é potencialmente verdadeira, independentemente de sua verdade ser ou não atualizada. Note-se que assim o argumento da nova batalha naval não se aplica, pois a validade do princípio *C* seria garantida pela existência potencial de uma prova.

Ademais, vale ressaltar – pois podemos ser facilmente induzidos a esse ponto – que a existência potencial de uma prova não se reduz à potencialidade relacionada à execução de um método efetivo. A passagem a seguir aparenta atestar que o sentido de potência em "*A* pode ser provada" não é o vinculado ao de posse de um método de decisão. Dizendo de outro modo, a proposição *A* não precisa ser decidível. A noção de potência ali empregada está mais próxima ao que chamamos na seção passada de *verificabilidade ideal* do que à noção de *verificabilidade efetiva*, que é menos abrangente:

> [I]n the definition of potential truth, we cannot change the words *A* can be proved into *A* has been, is being or will be proved, that is, will be proved at some time in the course of history, because the conceptual relation between saying that something has been, is being or will be done and saying that it can be done is that we have an entailment in the direction, If something has been, is being or will be done, then it can be done, but not in the converse direction (MARTIN-LÖF, 1991, 143).

Se Martin-Löf estivesse falando da posse de um método efetivo, não se poderia negar que a proposição que tem a conclusão da sua execução como prova será provada em algum momento no curso da história, ou seja, poder-se-ia legitimamente interpretar "*A* pode ser provada" como "*A* foi, está sendo ou será provada".

E quanto à potencialidade envolvida na noção de verificabilidade efetiva, é preciso que o método efetivo de verificação que a garante seja executado, i.e., é preciso que ele *de fato* retorne um valor? De acordo com Martin-Löf, podemos relacionar essa questão ao que Lovejoy chama de princípio de plenitude, o qual diz que toda possibilidade será atualizada no curso do tempo. A negação desse princípio consiste em afirmar que não é necessário que tudo que é possível deva existir de modo atual. Como Martin-Löf não vê "nenhuma base para esse princípio"[96], nada nos impede de assumir que, para ele, a potencialidade relacionada à verificabilidade efetiva, ou à noção de prova não canônica, não exige a execução factual do método efetivo envolvido.

Pelo exposto, a impressão que fica, mais uma vez, é que a tentativa de dissociar as noções de demonstração e verdade – a fim de que esta adquira um caráter abstrato e atemporal – nos deu todos os ingredientes para que compuséssemos uma compreensão realista dessas noções. A maneira como a noção de potência foi interpretada, tal qual se apresenta no enunciado "*A pode* ser provada", parece exprimir a noção de *verificabilidade ideal*, investigada na seção passada. Entendida dessa forma, uma proposição pode ser verdadeira não porque ela pode ser atualmente provada,

[96](MARTIN-LÖF, 1991, 143).

mas porque ela pode *em princípio* ser provada. No entanto, de acordo com a análise fenomenológica que efetuamos acima, a verificabilidade ideal só é válida num domínio cuja intencionalidade o caracteriza como objetivamente completo, que é justamente a característica fundamental do platonismo:

> An assertion is *true-in-itself* (resp. *false-in-itself*) if it is meaningful, both syntactically and semantically; [...] But with an important proviso, assertions must refer to domains of being that are already fully determined in themselves, domains that I called objectively complete. Only under this presupposition, all meaningful assertions can ideally be clarified[97].
> [...] If, on the contrary, a domain is conceived as objectively incomplete, depending for its completion on the action of a subject, there is no place for the notion of intrinsic truth. Truth is either experienced or not at all (da SILVA, 2017, 88-89, grifo do autor).

Em outras palavras, a menos que uma proposição se refira a um domínio objetivamente completo, não estamos justificados em lhe atribuir um valor de verdade intrínseco, que corresponderia à noção proposta por Martin-Löf de proposição potencialmente verdadeira.

Gostaríamos de observar, contudo, que a existência de um domínio objetivamente completo não é uma condição suficiente para haver um realismo semântico – i.e., qualquer proposição possui um valor de verdade intrínseco –, apesar de ser uma condição necessária. Estaria então Martin-Löf, sobretudo ao atribuir um caráter ontológico aos objetos-prova, propondo uma forma de intuicionismo em que temos, de um lado, um realismo ontológico, mas, de outro, um antirrealismo semântico? Podemos constatar nesta citação que os objetos-prova (ou provas, simplesmente) são compreendidos ontologicamente, entidades em virtude das quais uma proposição pode ser dita verdadeira:

> [T]he intuitionist, or verificationist, notion of truth is really a version of the correspondence notion of truth, truth as agreement with reality: the only novelty is that we call that thing in reality, or in the world, which has to be there in order for the proposition to be true, its proof, or verification (MARTIN-LÖF, 1998b, 112).

A partir disso, poderíamos entender que há um domínio objetivamente completo de objetos-prova, referência de toda proposição verdadeira, de modo que, para uma proposição arbitrária A, existe ou não existe um objeto-prova que a verifique. Esse domínio, além de garantir a verdade potencial de A, invalidaria o argumento da nova batalha naval: os objetos-prova sempre estiverem disponíveis, ou melhor, a referência de uma proposição verdadeira, como demanda o princípio C, pré-existe à atualização da verdade dessa proposição.

Mas se a verdade de uma proposição se deve à existência de seu objeto-prova, afirmar que, para qualquer proposição, seu objeto-prova existe ou não existe não

[97] I.e., idealmente provada (nota nossa).

equivale a se comprometer com um realismo semântico? Ademais, isso não validaria o princípio lógico de bivalência, marcador fundamental da distinção entre platonismo e intuicionismo? A concepção semântica da TIT não permite uma resposta positiva a essas duas questões. Para se afirmar um juízo da forma *A é verdadeira*, é preciso *conhecer* o objeto-prova que realize as condições estabelecidas pelo sentido da proposição A: "to have the right to make a judgement of the form 'A is true', you must know a proof of A"[98]. Desse modo, o princípio de bivalência apenas seria válido se conhecêssemos, para uma proposição arbitrária A, um objeto-prova de $A \vee \sim A$, que, de acordo com o sentido da disjunção, equivale a conhecermos o objeto-prova de pelo menos um dos disjuntos, contudo isso nem sempre é o caso[99].

Prawitz sugere essa interpretação para a teoria intuicionista de tipos, em que, poderíamos dizer, alia-se um realismo ontológico a um antirrealismo semântico:

> Adopting this new view of proof-objects, Martin-Löf definition of truth in terms of them does not any longer make "intuitionism into an idealistic philosophy in the knowledge theoretical sense". On the contrary, it brings his new position close to, or at least closer to, realism. Asked what the proof-bjects are after their epistemic connections have been severed, Martin-Löf and Sundholm often answer that they are just *truth-makers* (PRAWITZ, 2012a, 59, grifo do autor).

Apesar dessa interpretação solucionar os problemas que temos discutido, não acreditamos que seja fidedigna ao intuicionismo de Martin-Löf. Não é correto afirmar que, de acordo com a TIT, haja um domínio objetivamente completo de objetos-prova. Como discutido na seção 3.5.1, Martin-Löf distingue entre demonstrar um juízo e provar uma proposição. Um juízo da forma *A é verdadeira* é demonstrado por um encadeamento de inferências onde se *evidencia* a *construção* de um objeto-prova que verifica a proposição A. Ou seja, os objetos-prova não habitam um domínio objetivamente completo e independente, pois são construídos por meio de uma demonstração, atividade que se caracteriza por trazer evidências a um sujeito cognoscente.

Sendo assim, temos que admitir que a condição temporal de uma proposição tornar-se verdadeira é algo inerente ao intuicionismo, trazendo consigo todas as suas consequências contraintuitivas? Acreditamos que não, e a solução para isso, se estivermos corretos, encontra-se na maneira em que a teoria intuicionista de tipos compreende o sentido proposicional.

Na TIT, temos os juízos de formação. Por conseguinte, antes de termos o direito de asserir *A é verdadeira*, o juízo de formação *A é uma proposição* já deve ter sido feito, i.e., ele entra como premissa da conclusão que assere a verdade de A. Para termos o direito de asserir *A é uma proposição*, devemos saber o que seria um

[98](MARTIN-LÖF, 1998b, 112).

[99]Cf. (PRAWITZ, 2012a, 61).

objeto-prova de A, pois é esse conhecimento que nos permite compreender o sentido de A, ou seja, que nos permite saber que A é uma proposição. Outra peculiaridade da TIT é que proposições podem ser vistas como tipos, tipos habitados por objetos-prova que verificam a proposição associada ao tipo que habitam. Assim, temos algo semelhante ao que falamos na seção passada sobre significatividade semântica. Vimos que a proposição "o número 2 é verde" não é semanticamente significativa porque há uma incompatibilidade a priori entre tipos ontológicos. Também vimos que uma sentença sintaticamente e semanticamente significativa é capaz de exprimir uma situação a priori possível, isso se devendo tão somente à compatibilidade entre os tipos ontológicos que constituem a sua significatividade semântica. Por essa razão que a proposição "175 é um número primo", apesar de ser necessariamente falsa, pode (num sentido mais fraco de possibilidade) ser verdadeira. E aqui chegamos ao ponto que gostaríamos de propor: quando asserimos *A é uma proposição*, delimitamos a compatibilidade dos tipos requeridos pelo sentido de A, para os quais devemos investigar a construção de um objeto-prova que os instancie. É essa compatibilidade de tipos, instaurada assim que compreendemos o sentido de A, que nos permite dizer que A pode ser verdadeira, ou que A pode ser provada.

Usando o argumento da nova batalha naval para testar a nossa interpretação, dizemos: independentemente de quando ocorre uma prova, no momento em que uma proposição é feita, ou conjecturada, diríamos, estabelece-se uma compatibilidade de tipos, determinando a priori que a proposição em questão pode ser provada. Ou seja, uma proposição se torna verdadeira porque construímos um objeto-prova que a verifica, no entanto, devido somente ao sentido da proposição, a construção desse objeto-prova já era possível, i.e., já havia a possibilidade da proposição ser verdadeira. E tudo isso sem recorrermos a uma concepção platônica de entidades pré-existentes. Até mesmo os tipos ontológicos só existem porque as proposições existem, as quais são *construídas* pelos juízos de formação da TIT. Nessas condições, no que diz respeito à passagem do tempo, talvez o mais importante a questionar é se a proposição provada é a mesma conjecturada tempos atrás.

Assim, se lermos à luz da TIT a noção de sentido proposta por Prawitz, ela parece sustentar-se diante das dificuldades ocasionadas por uma noção mais abstrata de verdade.

5.3 Prawitz: equilíbrio reflexivo

Como vimos atrás, no contexto de uma análise fenomenológica da lógica, alega-se que um princípio lógico, justamente por conta de sua condição de princípio, não pode ser justificado, impondo assim, caso queiramos compreender sua legitimidade, uma investigação de caráter transcendental. No entanto, essa investigação não nos permite eleger uma lógica em detrimento de outra, uma vez que se restringe a elucidar as condições que validam um certo princípio, ou seja, não haveria uma lógica correta, pois cada domínio, de acordo com os termos de sua intencionalidade, harmoniza-se com uma determinada lógica.

Notamos uma situação semelhante quando tratamos da noção de indicador de derivação. Apesar da derivação subjacente a uma demonstração revelar de maneira objetiva quais princípios lógicos esta pressupõe, ela não nos dá condições para resolvermos conflitos originários de uma disputa entre lógicas.

Assim, nesta seção, gostaríamos de dar um passo adiante. Assumindo que a intencionalidade de um domínio exige uma determinada lógica, não seria então possível criticar o ato intencional que constitui tal domínio, o que indiretamente implicaria uma crítica à lógica por ele exigida? Em outras palavras, seria possível estabelecer um critério que favorecesse uma intencionalidade em detrimento de outra? Dessa forma, se, por exemplo, não tivermos boas razões para que o domínio de objetos da matemática seja intencionado como um domínio incompleto, em construção, não teremos motivos para sancionar o intuicionismo.

Para da Silva, a matemática dá conta de si mesma, de modo que a filosofia da matemática deve ser caracterizada como um ramo da epistemologia, com a função de elucidar o que se passa na matemática, sem ignorar "como ela é atualmente praticada e tradicionalmente concebida"[100]. Caso a filosofia não se contente com o seu papel de elucidação e tente *justificar* a maneira como uma determinada prática matemática intenciona o seu domínio, i.e., caso tente apresentar uma razão para eleger uma determinada intencionalidade, ela pode passar a assumir pressupostos metafísicos:

> The fact that mathematicians are convinced that the domain of numbers is objectively complete only shows that this is how mathematicians *conceive* the numerical domain to be, which has no bearing on how this domain is *independently* of being so conceived, *if* it indeed were so. Some philosophers think that this way of conceiving must be *justified*. But how, they wonder, if not by a metaphysical presupposition, namely, that this is how the domain *actually is*? The conception is made to rest on a metaphysical parti-pris. It takes phenomenological insight for one to realize that there is a gap between intentional conceptions and metaphysical theses (da SILVA, 2017, 259, grifo do autor).

Todavia, antes de haver uma elucidação transcendental da experiência matemática (ou das ciências positivas em geral) tal como ela é praticada, a existência dessa prática já está sendo pressuposta. Se nos limitamos a apenas compreender uma prática *nela mesma*, podemos ter um bom entendimento de como funciona

[100](da SILVA, 2017, 1).

internamente, todavia ignoramos como ela se comporta diante de outras práticas. Saberíamos dizer o porquê de uma prática ter prioridade em face de outras? E no caso em que uma prática se modifica? Se nos contentamos com a visão interna, podemos somente constatar que uma certa maneira de conceber a realidade foi modificada. Mas o que levou a essa modificação? Vejamos a seguinte citação:

> Mathematical objects, as I will argue below, are (ordinarily or "classically" posited as) abstract (ontologically dependent), ideal (non-real) objects outside space and time. To treat them otherwise, as, for instance, temporal objects, in the manner of intuitionists, is to falsify the experience in which they are posited. Which does *not* mean that experiences of constitution of the intuitionist type are illegitimate; on the contrary, *all* positing intentional experiences are legitimate *on their own terms*. My point is that intuitionism does not coincide with ordinary mathematics; it is a completely different thing. It cannot count as a philosophy of mathematics, only as *an alternative conception* of mathematics. My approach, in short, offers not only a possibility of philosophically clarifying usual, ordinary mathematics, but alternative versions of it too (da SILVA, 2017, 16, nota 13, grifo do autor).

O que legitima a distinção entre uma matemática ordinária e uma matemática alternativa? Uma mera questão numérica, i.e., há mais matemáticos praticando a matemática clássica? A seguir, por meio da caracterização que Prawitz dá ao princípio de *equilíbrio reflexivo*, acreditamos elucidar esses pontos, que não dizem respeito a uma dada prática em si, mas a um conflito entre práticas. Ou seja, haveria uma justificativa objetiva que nos pudesse guiar diante de uma escolha entre práticas conflitantes?

Para começar, Prawitz apresenta duas concepções que ele caracteriza como anti-objetivistas: o niilismo valorativo e o subjetivismo valorativo. De acordo com elas, juízos de valor como[101]

"A Suécia deve investir em energia nuclear" ou

"Não é justo perseguir alguém por motivos raciais"

não são verdadeiros nem falsos, pois não há propriamente uma afirmação envolvida, em que se atribui uma propriedade a um certo objeto. Para o niilismo valorativo, tais juízos expressariam somente uma opinião ou um gosto particular. Já de acordo com o subjetivismo valorativo, a questão da verdade pode até surgir, contudo ela estaria relacionada apenas à atitude do falante com relação às suas opiniões valorativas emitidas, não ao juízo em si.

Ambas concepções inabilitam uma discussão racional sobre juízos de valor, pois sendo o objetivo de uma discussão estabelecer um valor de verdade, impossibilitada a existência deste, não há o que ser discutido. No subjetivismo valorativo,

[101](PRAWITZ, 2007, 127).

o máximo que poderíamos discutir é se a atitude de alguém condiz com os juízos de valor por ele emitidos, "mas não podemos discutir se ele deveria ou não possuir esses sentimentos"[102].

A despeito disso, uma possibilidade de discussão acerca de juízos de valor seria discutir as relações entre tais juízos, como deduzir um valor a partir de valores mais básicos, ou recusar um valor por estar em contradição com valores previamente estabelecidos. Prawitz (2007, 128) reconhece que parte dos defensores do niilismo valorativo legitimam esse tipo de discussão, mas, em todo caso, sendo consistente o sistema constituído pelos valores básicos, não nos cabe argumentar sobre a verdade ou falsidade destes.

Assim, dado que um juízo científico pretende estabelecer algo passível de verdade ou falsidade, e considerações morais sobre deveres não são suscetíveis a um valor de verdade, uma das conclusões que se segue dessas teorias anti-objetivistas é que não cabe à ciência descrever como devemos agir. Algo que também se manifesta em nossas relações ordinárias, como quando dizemos que uma determinada questão de valor não se discute porque se trata de um gosto particular. Isso, todavia, não necessariamente conduz a um ceticismo ou relativismo generalizados, basta notarmos que o subjetivismo apontado nas proposições valorativas é frequentemente apresentado em contraste com proposições objetivamente factuais – e.g., "está nevando", "a terra é redonda" –, cujos valores de verdade independem da subjetividade daquele que as enuncia[103].

Como aponta Prawitz (2007, 132), uma parcela dos niilistas valorativos defende que os problemas mencionados acima não se restringem ao âmbito da ética, estendendo-se de modo análogo aos domínios da matemática e da lógica. De acordo com esse ponto de vista, da mesma maneira que na ética há valores básicos sobre os quais não cabe uma discussão sobre a verdade – e a partir dos quais são deduzidos outros valores –, um matemático pode adotar um conjunto arbitrário de axiomas, desde que não sejam contraditórios entre si. Argumentar em favor de um certo enunciado matemático consiste então em deduzi-lo, por meio de regras de inferência, de axiomas previamente assumidos, a respeito dos quais não faz sentido discutir se são verdadeiros ou falsos. Como nesse caso a asserção do enunciado não passaria do estabelecimento da condição de uma proposição se seguir logicamente de outras, o que em última instância estaríamos admitindo é que os enunciados matemáticos possuem uma natureza lógica, que não asserimos algo "matematicamente verdadeiro". Assim, diríamos que há uma relativização da matemática, dado que esta é reduzida à lógica.

[102](PRAWITZ, 2007, 128).
[103](PRAWITZ, 2007, 129).

Seguindo o movimento desse raciocínio, podemos considerar um relativismo com relação à própria lógica. Desse modo, um enunciado é logicamente verdadeiro quando derivável de axiomas lógicos por meio de regras básicas de inferência. E igualmente, não faz sentido argumentar pela verdade dos axiomas e das regras de inferência. No caso da lógica, contudo, em que não há a redução de um conhecimento a outro – como na redução da matemática à logica –, temos um relativismo total, o que traz a seguinte consequência:

> [T]odo raciocínio se torna agora no fundo tão correto do ponto de vista lógico quanto qualquer outro. A tarefa da lógica não consiste em averiguar quais raciocínios são corretos, mas somente em determinar a qual sistema de regras um raciocínio pertence e quais raciocínios são corretos em diferentes sistemas (PRAWITZ, 2007, 132).

Ou seja, dado qualquer argumento, podemos lhe atribuir uma lógica subjacente, cuja correção de seus axiomas e regras básicas não pode ser colocada em questão.

Esse relativismo total, o qual podemos considerar como um niilismo lógico, poderia ser evitado se encontrássemos um meio de argumentar em favor ou contra a correção das regras lógicas que assumimos ou desconsideramos. Infelizmente, a definição mais corrente de verdade lógica, a qual afirma que uma certa forma proposicional é logicamente verdadeira se e somente se ela permanece verdadeira a despeito de qualquer reinterpretação que se faça de suas contantes não lógicas, é insuficiente para nos auxiliar neste quesito. A esse respeito, Prawitz apresenta o seguinte exemplo:

> Se aplicamos essa definição à sentença "para toda propriedade vale que ou ela pode ser aplicada a todos os objetos, ou existe um objeto que não tem a propriedade em questão", então vemos que ela é logicamente verdadeira se e somente se, para qualquer domínio de indivíduos e para qualquer propriedade que possamos escolher, segue-se que, ou todos os indivíduos do domínio têm a propriedade ou existe algum indivíduo no domínio que não a possui (PRAWITZ, 2007, 133).

Contudo, como ele alega em seguida, na própria argumentação pela verdade lógica da sentença acima é pressuposto o princípio de bivalência, que é justamente o que se encontra em disputa entre as lógicas clássicas e intuicionistas. Por isso o emprego da definição usual de verdade lógica seria insuficiente numa argumentação envolvendo uma disputa entre lógicas.

A fim de elucidar o envolvimento entre argumentos e regras lógicas, Prawitz (2007, 133) apresenta um exemplo concreto de argumento matemático, o qual refazemos a seguir com algumas pequenas modificações. O objetivo do argumento é demonstrar o teorema de Euclides que diz haver infinitos números primos, i.e., dada qualquer lista em ordem crescente de números primos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, pode-se sempre acrescentar um número primo maior que p_n.

Seja N o número que obtemos quando multiplicamos entre si os primos de uma dada lista e, em seguida, somamos 1 ao resultado, i.e.:

$$N = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n) + 1.$$

Assim, temos:

(1) N é um número primo **ou** N é divisível por um número q, tal que $1 < q < N$;

Considerando o primeiro disjunto, segue-se que

(2) existe um número primo maior do que p_n, o próprio N;

Considerando o segundo disjunto, segue-se que

(3) existe um número primo $q < N$ que divide N (isso se deve ao Teorema Fundamental da Aritmética: todo inteiro maior do que 1 ou é um número primo, ou pode ser representado de maneira única como um produto de números primos);

Consequentemente:

(4) $q > p_n$, uma vez que a divisão de N por qualquer um dos $p_1, ..., p_n$ sempre deixa 1 como resto;

Logo, em ambos os casos, (2) e (3):

(5) pode-se sempre apresentar um primo $q > p_n$, ou seja, os números primos são infinitos. $\square$

Como Prawitz observa, a inferência de (5) a partir de (1), (2) e (4) consiste numa instância da regra lógica conhecida como Dilema Construtivo, a qual estabelece que, dadas três premissas com as seguintes formas: *A ou B*; *Se A*, *então C*; *Se B*, *então C*; podemos concluir *C*. Ele então coloca a seguinte questão:

> Mas será realmente que nossa inferência acima, pela qual concluímos (5) a partir das premissas (1), (2) e (4), tem sua validade derivada dessa regra lógica geral? Ou será que, em vez disso, compreendemos diretamente que (5) tem que valer se (1), (2) e (4) valem, e que a regra lógica adquire sua validade do fato de que essas instâncias concretas são válidas? (PRAWITZ, 2007, 135, adaptamos os números que se referem aos passos argumentativos).

Há aqui um questionamento sobre o que colocamos em primeiro lugar na ordem das razões: um argumento particular porta a sua própria evidência, ou nada mais seria do que a instância de princípios lógicos gerais? Ou seja, precisamos reconhecer um argumento como uma instância desses princípios para que possamos legitimar a sua validade? Prawitz (2007, 135) levanta alguns pontos contra esta última posição. Na demonstração acima, sua validade não aparenta ser outorgada por uma primazia da regra geral caracterizada pelo princípio do Dilema Construtivo. Atentando-nos diretamente para o conteúdo do argumento, reconhecemos sem maiores problemas que o passo (5), que expressaria a conclusão da regra, já se encontra justificado no passo (4). Além disso, Prawitz argumenta que “uma regra geral quase sempre é mais incerta do que suas instâncias concretas”. Em sua formulação geral, a validade do princípio do terceiro excluído (que se encontra no cerne das discussões entre clássicos e intuicionistas), por exemplo, é bem mais controversa do que a validade de suas instâncias particulares, como no caso de (1), que nos parece imediatamente clara, dada a definição de número primo. Nesse sentido, a validade de um argumento aparenta ser mais simples de ser reconhecida em sua particularidade do que na formulação de princípios gerais dos quais o argumento seria uma mera instância.

Um outro ponto que se deve considerar é que, se a validade de um argumento particular for sempre subsumida à validade de um princípio geral, podemos incorrer num regresso ao infinito absurdo. Tal condição pode ser descrita nos seguintes termos[104]: podemos dizer que a passagem do passo (3) ao (4) é correta se a proposição “se existe um número primo $q < N$ que divide N, então $q > p_n$” for válida, a qual chamaremos de (S), i.e.:

(S) Se (3), então (4).

Assim, a inferência de (4) seria justificada a partir de (3) e (S). Não obstante, a correção dessa inferência, por sua vez, seria garantida pela validade da proposição

(S$'$) Se (3) e (S) valem, então (4).

Todavia, não podemos ainda inferir (4) a partir de (3), (S) e (S$'$), pois, para tanto, precisamos garantir a correção dessa inferência por meio da validade da proposição

(S$''$) Se (3), (S) e (S$'$) valem, então (4).

[104]Cf. (PRAWITZ, 2007, 135-136) e (CARROLL, 1895).

E assim sempre demandaríamos a validade de novos princípios, impedindo-nos de definitivamente alcançar a conclusão almejada.

Diante disso, Prawitz (2007, 136) ressalta a posição de Brouwer, para o qual a validade de uma inferência é compreendida diretamente a partir do conteúdo que se apresenta num caso particular, não por intermédio de um princípio geral que a tem como instância. A lógica surgiria apenas posteriormente, formulando princípios gerais com base em argumentos concretos que já consideraríamos válidos. Desse modo, a prioridade é dada aos argumentos particulares, i.e., os princípios lógicos são válidos desde de que sejam uma generalização correta destes, ao passo que um dado argumento não adquire sua validade pelo fato de concordar com uma certa lógica. Esse ponto de vista pode ser também estendido a outros âmbitos, como os da ética e da linguística. Muitas vezes não temos dificuldades em julgar que uma certa ação é justa ou injusta, ou que uma determinada expressão linguística é correta ou incorreta, a despeito de que seja complicado formular um princípio geral que abranja adequadamente tais julgamentos particulares.

Dando prioridade aos casos particulares, revertemos a condição descrita no início desta seção. Naquela ocasião, de acordo com o niilismo valorativo, poderíamos, a partir de axiomas lógicos ou princípios morais fundamentais, argumentar em defesa de uma verdade lógica ou moral, contudo tais axiomas ou princípios deveriam ser assumidos sem a possibilidade de argumentarmos em favor deles. Na perspectiva atual, a situação se inverte: o fato de axiomas ou princípios implicarem proposições cuja validade se legitima em casos particulares é usado para argumentarmos em prol deles. Para Prawitz (2007, 137), isso nos daria

> um critério para a validade de uma regra básica lógica ou moral, que é, em princípio, do mesmo tipo daqueles utilizados para a aceitação de uma teoria nas ciências empíricas. Aceitamos uma teoria científica quando ela é a teoria mais simples que nos permite deduzir os fenômenos que realmente observamos; e a rejeitamos quando ela implica enunciados que são refutados pela observação.

Em suma, ao contrário do que apregoa o niilismo valorativo, temos condições de argumentar pela verdade de princípios básicos morais ou lógicos, sendo o critério utilizado para isso a condição de tais princípios implicarem o que efetivamente constatamos nos casos particulares.

Todavia, a comparação com as ciências empíricas não é completamente adequada. Uma sentença observacional não está para uma teoria empírica da mesma maneira que um valor ou inferência particulares estão para uma teoria ética ou uma lógica, respectivamente. No caso destas, acontece de frequentemente nos guiarmos por princípio gerais quando não estamos completamente certos a respeito de como julgar o caso particular que se apresenta. Por outro lado, nas ciências empíricas, “mesmo sendo verdade que nossas observações dependem em parte das teorias em que acreditamos, não parece razoável pensar que aquilo que observamos seja de fato modificado com base em considerações teóricas”[105].

Nesse sentido, a ética e a lógica são peculiares porque no momento em que reconhecemos a validade de um princípio geral ele assume um caráter normativo que passa a se impor sobre os juízos que fazemos nos casos particulares. Como argumenta Prawitz (2007, 139), faz parte da natureza de nossas ações que elas sejam influenciáveis pelas reflexões que fazemos acerca delas. Assim, o estabelecimento de princípios gerais traz uma melhor compreensão dos objetivos de nossas ações éticas ou argumentativas, induzindo-nos a agir de acordo com tais princípios, o que por fim acaba modificando o caráter dessas ações.

Há, portanto, “um movimento circular inevitável”[106] no estabelecimento de princípios gerais que concernem nossas ações. Em especial, a partir de valores éticos fundamentais e regras lógicas gerais, julgamos valores e inferências particulares, mas existe também a outra direção, argumentamos em favor dos princípios lógicos ou éticos indicando que eles não contrariam nenhum caso particular que reconhecemos como legítimo.

Consequentemente, na situação de um conflito entre um princípio geral e um caso particular, um desses dois polos deve ser modificado. Prawitz (2007, 140) não desenvolve um argumento detalhado que elucide como nos guiar acerca de tal modificação, dizendo apenas que, se as práticas constitutivas dos casos particulares já estiverem bastante “arraigadas” em nós, provavelmente rejeitaremos o princípio geral conflitante, mas se, por outro lado, o princípio geral tem sido ratificado pelos casos particulares, e já o temos “absorvido” em nossa compreensão, o mais provável é que consideremos errados os casos particulares conflitantes.

Dessa forma, quando tentamos propor um princípio geral ou resolver um conflito entre este e um caso particular, dá-se início a um processo de modificações sucessivas, que pode modificar ora um lado, ora o outro, mas não deixando de convergir para um equilíbrio onde a teoria e a práxis encontrem uma harmonia:

> O desenvolvimento da teoria dos conjuntos nos últimos cem anos pode ser visto como um exemplo desse tipo de processo na área da lógica. Somente quando, nesse processo, tivermos atingido um ponto de equilíbrio em que teoria e práxis entrem em acordo – o que Rawls denomina “equilíbrio reflexivo” – poderemos ter a pretensão de ter alcançado uma compreensão teórica de nossa atividade (PRAWITZ, 2007, 140).

Alcançado tal equilíbrio, teríamos um bom fundamento para aceitarmos tanto a práxis quanto a teoria que procura compreendê-la por meio de princípios gerais.

O termo “equilíbrio reflexivo”, que Prawitz atribui ao filósofo John Rawls, é

[105](PRAWITZ, 2007, 138).
[106](PRAWITZ, 2007, 139).

caracterizado por este autor, no contexto da filosofia política, da seguinte maneira:

> In searching for the most favored description of this situation[107] we work from both ends. We begin by describing it so that it represents generally shared and preferably weak conditions. We then see if these conditions are strong enough to yield a significant set of principles. If not, we look for further premises equally reasonable. But if so, and these principles match our considered convictions of justice, then so far well and good. But presumably there will be discrepancies. In this case we have a choice. We can either modify the account of the initial situation or we can revise our existing judgments, for even the judgments we take provisionally as fixed points are liable to revision. By going back and forth, sometimes altering the conditions of the contractual circumstances, at others withdrawing our judgments and conforming them to principle, I assume that eventually we shall find a description of the initial situation that both expresses reasonable conditions and yields principles which match our considered judgments duly pruned and adjusted. This state of affairs I refer to as reflective equilibrium (RAWLS, 1999, 18).

Nesta mesma passagem, Rawls acrescenta uma nota de rodapé que faz referência ao trabalho do filósofo Nelson Goodman, no qual podemos encontrar uma concepção semelhante de ajuste mútuo entre condições particulares e princípios, só que no âmbito de princípios concernentes a lógicas indutivas ou dedutivas. Goodman não emprega o termo "equilíbrio reflexivo", mas pela caracterização que lemos abaixo, vislumbramos a mesma noção de justificação de um princípio a partir da obtenção de um estado de equilíbrio:

> [D]eductive inferences are justified by their conformity to valid general rules, and that general rules are justified by their conformity to valid inferences. But this circle is a virtuous one. The point is that rules and particular inferences alike are justified by being brought into agreement with each other. *A rule is amended if it yields an inference we are unwilling to accept; an inference is rejected if it violates a rule we are unwilling to amend.* The process of justification is the delicate one of making mutual adjustments between rules and accepted inferences; and in the agreement achieved lies the only justification needed for either (GOODMAN, 1983, 64, grifo do autor).

Prawitz (2007, 140) ressalta, contudo, que o estabelecimento de um equilíbrio não dá garantias de uma verdade absoluta. O equilíbrio obtido pode ser desestabilizado a qualquer momento, seja por novas considerações teóricas – "quando, por exemplo, buscamos uma explicação unificada, uma teoria mais básica, para fenômenos semelhantes" –, seja por uma práxis que nos viabilize novas experiências. Não obstante, temos condições adequadas para discutir racionalmente a verdade de proposições que dizem respeito a princípios lógicos ou morais, refutando assim a tese do niilismo valorativo.

Uma ressalva que se poderia fazer consiste em imaginar uma situação em que dois interlocutores estabeleceram para si equilíbrios diferentes. Como cada um sistematiza suas práticas e princípios correspondentes numa harmonia interna própria, nada que um diga poderá ser tido como uma possível desestabilização do equilíbrio alcançado pelo o outro:

[107] A situação em que dois agentes racionais procuram estabelecer um consenso acerca de princípios de justiça. (Nota nossa).

> A discussão racional sobre questões lógicas e morais pressupõe que haja entre os participantes suficiente semelhança para que um deles possa preocupar o outro com casos concretos ou princípios teóricos cuja validade este deve reconhecer ainda que tais casos ou princípios não se sigam de seu sistema (PRAWITZ, 2007, 141).

Prawitz alega que uma compartimentalização entre sistemas que inviabilize nas ciências empíricas uma discussão entre os interlocutores que os assumem pressupõe que estes possuem mecanismos de percepção distintos, por isso uma tal situação nunca teria ocorrido. Contudo, ainda que isso seja possível no âmbito da ética e da lógica, não se deixa de demonstrar que o relativismo nesses domínios seria de outra ordem, diferente das teses niilistas discutidas acima.

5.3.1 Elucidando alguns pontos

Peregrin e Svoboda (2017), num livro inteiramente dedicado à noção que temos analisado de equilíbrio reflexivo, argumentam que a maneira básica como formamos teses gerais, seja na ciência ou em nosso cotidiano, é por meio da indução. A partir da observação de diversos casos individuais, fazemos certas generalizações, como "metais são condutores elétricos", "nenhuma mamífero respira debaixo d'água", "todo peixe tem guelras". Quanto mais exemplos individuais confirmam nossas teses gerais, mais acreditamos que elas são corretas e irrefutáveis. Nessa condição, quando nos deparamos com um contraexemplo, nossa primeira atitude é tentar deslegitimá-lo, uma vez que os casos em favor da tese têm sido maioria. Podemos fazer isso procurando um erro de observação, mas se o contraexemplo ainda persistir a essa revisão, e ainda não quisermos abandonar a tese, uma outra medida consiste em revisar nossos conceitos: "The point is that any general thesis is formulated by means of some concepts ('metals', 'electricity', 'breathing', etc.) and fine-tuning the concepts may tamper with the thesis in such a way that the counterexample might no longer refute it"[108]. A esse respeito, Peregrin e Svoboda (2017, 91) dão o seguinte exemplo: supondo que o conceito de *peixe* seja definido como "todo animal que vive na água e possui barbatanas", podemos formar a tese geral de que "todo peixe possui guelras". Contudo, ao nos depararmos com uma baleia, teríamos um caso, de acordo com aquela definição, de um peixe que não possui guelras. Diante disso, temos duas opções, abandonar a tese ou ajustar nossa definição de *peixe*, de modo que o contraexemplo não mais se aplique, como dizendo que "peixe é todo animal que possui guelras". Neste caso, a tese se trivializaria, pois se tornaria analítica[109]. Se não quisermos torná-la trivial, uma saída é acrescentar à definição de *peixe* características que a distingue da definição de *baleia*,

[108](PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 92).

[109]O que nos faz lembrar da crítica de Lakatos (1976, 17) dirigida ao fato de se definir um poliedro como sendo justamente aquilo que realiza o teorema de Euler.

por exemplo: "todo animal ectotérmico que vive na água e possui barbatanas".

Gostaríamos de observar, no entanto, que a disjunção acima, "abandonar a tese ou modificar o conceito nela envolvido", não nos parece, de fato, uma disjunção entre possibilidades distintas. Afinal, ao modificarmos os conceitos, não estaríamos abandonando a tese original? Peregrin e Svoboda afirmam:

> It would not make sense to apply this method [fine-tuning concepts] *whenever* we encounter a counterexample which challenges our adopted picture of the world. However, if we have a very well-confirmed general thesis that has already proven to be useful and only isolated counterexamples, then explaining the counterexamples away by fine-tuning concepts may be reasonable (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 92, grifo dos autores).

O problema é que não se pode ajustar os conceitos da tese sem que esta deixe de ser a "tese geral bem confirmada". Os autores, numa observação parentética, reconhecem isso, mas não parecem se atentar às devidas consequências:

> [A] general thesis holds because there are no counterexamples to it, but if we could explain away any counterexample, then, it might seem, anything might be defended as a general thesis. (Well, not really; for explaining away the counterexamples *changes* the original thesis, hence we should say any general thesis can be *transformed* into a *modified* thesis that holds) (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 92, grifo dos autores).

Imaginemos um clássico e um intuicionista discutindo acerca da validade do princípio do terceiro excluído. Quando um intuicionista apresenta a conjectura de Goldbach como um caso em que o princípio não se aplicaria, não cabe ao clássico, pretendendo defender seu princípio geral, ver esse caso como um contraexemplo. E ao contrário do que os autores pensam, desconsiderar (*explain away*) um contraexemplo não se trata de reformular os conceitos da tese geral, mas de argumentar, por uma via que não envolva a tese em questão, que o contraexemplo apresentado não pode ser considerado como tal[110]. Nessa disputa hipotética entre um clássico e um intuicionista, se aquele modifica a sua conceitualização do princípio do terceiro excluído, afirmando, por exemplo, que ele é válido porque, no fundo, só se queria dizer que o princípio apenas diz respeito a proposições decidíveis, o clássico acaba se tornando um intuicionista.

Mais adiante, Peregrin e Svoboda, com a tácita pretensão de defenderem a ideia de que princípios lógicos não são absolutos, ou de que não refletem uma estrutura necessária da realidade[111], apresentam a citação abaixo, a qual diz que o princípio

---

[110] O clássico poderia, por exemplo, apresentar justificações de caráter ontológico que deslegitimassem o caso apresentado pelo intuicionista.

[111] Esta citação nos ajuda a compreender o horizonte teórico em que o livro se articula: "While it seemed almost self-evident during the pre-modern era that logic must be grounded in the realm of the ideal that precedes the mundane reality of our senses, during the last century the requirement that logic should be continuous with scientific findings about the world (such as those of psychology, linguistics, but also of neurology, or evolution theory), i.e., that *logic should be grounded in a broadly naturalistic fashion*, became close to imperative" (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 2, grifo nosso).

reflexivo não contém nada que já não possa ser encontrado na metodologia das ciências empíricas:

> As a procedure, reflective equilibrium (RE) is simply a familiar kind of standard scientific method with a new name. (...) A theory is constructed to account for a set of observations. Recalcitrant data may be rejected as noise or explained away as the effects of interference of some sort. Recalcitrant data that cannot be plausibly dismissed force emendations in theory. What counts as a plausible dismissal depends, among other things, on the going theory, as well as on background theory and on knowledge that may be relevant to understanding the experimental design that is generating the observations, including knowledge of the apparatus and observation conditions. This sort of mutual adjustment between theory and data is a familiar feature of scientific practice. Whatever authority RE seems to have comes, I think, from a tacit or explicit recognition that it has the same form as this familiar sort of scientific inference (Cummings, apud (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 93)).

Como vimos acima, ao analisarmos o artigo de Prawitz (2007), a comparação com as ciências empíricas não parece adequada. O equilíbrio reflexivo exige que, a partir do momento em que há um conflito entre o princípio geral assumido e um caso particular, devemos ou reconsiderar nossas práticas envolvendo o caso particular, preservando assim o princípio geral, ou vice-versa. Em outras palavras, optar pela preservação do princípio geral implica modificar nossas práticas: o que era até então visto como contraintuitivo passa a não mais ser encarado dessa forma. É dessa maneira que o princípio geral adquire um caráter normativo, pois modifica nossas práticas argumentativas ou éticas. Nas ciências empíricas, a modificação é unilateral, apenas os princípios gerais podem ser alterados, uma vez que não se pode modificar aquilo que observamos. O máximo que podemos fazer é rever nossas observações, mas isso só pode revelar um erro no experimento, o qual propiciou uma coleta de dados errada. Os dados, eles mesmos, não são alterados em virtude de uma força normativa da teoria que busca sistematizá-los. Nessas condições, não nos parece correto atribuir o princípio de equilíbrio reflexivo a contextos que não possuem um caráter normativo. Singer também argumenta nessa direção, como podemos ler a seguir:

> The analogy between the role of a normative moral theory and a scientific theory is fundamentally misconceived. A scientific theory seeks to explain the existence of data that are about a world "out there" that we are trying to explain. Granted, the data may have been affected by errors in measurement or interpretation, but unless we can give some account of what the errors might have been, it is not up to us to choose or reject the observations (SINGER, 2005, 345).

Recorrendo mais uma vez à disputa clássico/intuicionista acerca do princípio do terceiro excluído, se quisermos salvaguardar a compreensão intuicionista desse princípio, devemos modificar nossas práticas argumentativas, ou seja – para dar um exemplo –, argumentos por redução ao absurdo envolvendo domínios infinitos não devem mais ser aceitos como válidos. Por outro lado, se quisermos preservar as práticas envolvendo argumentos por redução ao absurdo, devemos modificar a compreensão intuicionista do princípio do terceiro excluído.

Numa outra ocasião, Peregrin e Svoboda aparentam confundir o movimento envolvido no processo de estabelecimento de um equilíbrio reflexivo: se ele diz respeito à manutenção do princípio geral, em detrimento do que se pratica num caso particular, ou vice-versa. Analisemos a citação a seguir:

> Consider, for example, the law of the excluded middle, stating, in effect, that every statement is true or false. In natural language, we can certainly find lots of statements which do not quite obey it: statements with indexicals or in other ways substantially context-dependent, vague statements, statements of personal taste, perhaps statements about the future, etc. So there may seem to be a reason to reject the law and to embrace a logic that does not accept it[112]. But, in view of the fact that two-valued logic is so conveniently simple, we may also consider the possibility to 'explain away' all the inconvenient cases as non-statements, or as not what we understand by statements when articulating the law (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 95).

Diante do que o início da citação diz, o seu último período, que se inicia com a conjunção adversativa "mas", não faz sentido. Se quisermos manter a lógica clássica (denominada pelos autores lógica bi-valorada), por ser "so conveniently simple", o que *não* devemos fazer é exatamente o que este período diz para fazer. Quando desconsideramos (*explain away*) certos casos como sendo inconvenientes, é justamente porque o princípio já não tem mais a generalidade que lhe era atribuída. Para que realmente possamos manter o princípio do terceiro excluído (e a lógica clássica que lhe é subjacente), *devemos admitir* – modificando assim a nossa prática – que ele se aplica inclusive aos casos que aparentemente o contradiz, pois a contradição se insinua apenas quando um *novo* princípio do terceiro excluído é proposto. O que uma lógica intuicionista (que é não clássica) faz não é exatamente desconsiderar certas proposições como não sendo candidatas a uma aplicação do princípio do terceiro excluído, justamente porque este já não seria mais considerado universalmente válido?

Ao empregarmos o procedimento de equilíbrio reflexivo na justificação ou elucidação de leis lógicas, deparamo-nos com um outro problema: em virtude da generalidade destas, no próprio processo envolvido no equilíbrio reflexivo alguma lógica já estaria sendo pressuposta, de maneira que, se esta é vista como o *resultado* desse processo, encontramo-nos num círculo vicioso: "we cannot see logic as being *constituted* by a certain procedure because the procedure already *incorporates* logic"[113].

Um outro sintoma indesejado, observação que os autores[114] atribuem a Shapiro, é que o equilíbrio reflexivo pode ser facilmente trivializado. Uma vez que podemos modificar nossos princípios lógicos, diante de um conflito entre um princípio geral e um caso particular, bastaria modificarmos o princípio de contradição, fazendo assim com que tal conflito desapareça e um equilíbrio seja estabelecido.

---

[112]Aqui, os autores inserem a seguinte nota: "This, of course, is what many modern 'non-classical' logics did".

[113](PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 96, grifo dos autores).

[114](PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 96).

Como Peregrin e Svoboda observam, tais objeções seriam legítimas apenas se concebêssemos o equilíbrio reflexivo como uma elucidação de como a lógica passa a existir *a partir do nada*. Neste caso, teríamos um círculo vicioso, uma vez que, enquanto a lógica está sendo construída (*do nada*), ela já se encontraria pressuposta no procedimento que a constrói. No entanto, de acordo com os mesmos autores, isso não seria uma imagem correta do procedimento de equilíbrio reflexivo. Antes que possamos dar início ao estabelecimento de qualquer teoria, o que inclui uma teoria lógica, uma linguagem já deve estar à nossa disposição. Tal linguagem, pela sua própria condição de linguagem, deve incorporar implicitamente uma certa lógica. Nessas condições, o que o procedimento de equilíbrio reflexivo faz é explicitar e dar uma forma definitiva aos princípios "(proto)lógicos" inerentes a essa linguagem, um procedimento que envolve, em certa medida, um papel não meramente descritivo, mas, também, normativo:

> [T]he logic that would be implicitly contained in a language might be – to a certain extent and in some respects – vague, indeterminate and open-ended, and to make it more precise, decisive, and explicit is a project that is surely not simple even if it may be greatly rewarding. This process is not just a description of what we can find in language, it is a project involving regimentation, streamlining, and extrapolation – but in no case is it a creation *ex nihilo* (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 96).

Assim, não incorremos num círculo vicioso, tendo em vista que a lógica não está sendo criada do nada por meio de um procedimento que pressupõe a lógica. Tampouco podemos modificar arbitrariamente a lógica, com o objetivo específico de extinguir determinados conflitos.

Isso esclarece por que não podemos conceber o equilíbrio reflexivo como um procedimento que *cria* a lógica. Contudo, não haveria ainda uma outra forma de circularidade, levando em consideração que, em última instância, nesse procedimento utilizamos uma lógica para modificar a própria lógica sendo empregada nessa modificação? Peregrin e Svoboda possuem também uma resposta a essa questão. De acordo com eles, o processo de equilíbrio reflexivo pressupõe uma lógica, a lógica implícita na linguagem empregada para construir uma determinada teoria. Tal lógica[115], todavia, "transcende" esse processo, não estando, portanto, sujeita aos seus desdobramentos. Isso se daria não por uma mera decisão *ad hoc*, "but rather because its robust presence in our language is a presupposition of any theory building, and it is hence resistant to any revision"[116]. Em todo caso, os autores concedem que tal lógica nuclear não é completamente imune a revisões, acontece que sua revisão é mais lenta e complexa, algo que eles vinculam à metáfora do barco de Neurath – o lógico empregaria a lógica que está construindo para modificar ela mesma[117].

---

[115]Ou melhor, "this amount of logic", cf. (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 97).

[116](PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 97).

[117]"(This is not to say that this core logic would be totally immune to revision, but that its revi-

Essa resposta, no entanto, não parece nos retirar do lugar do qual queríamos sair. Como é possível afirmar que temos uma lógica transcendente não sujeita ao processo de equilíbrio reflexivo, e ao mesmo tempo afirmar que tal lógica é passível de revisão? Talvez a melhor maneira de compreender essa circularidade seja apelando ao que Prawitz sugeriu como "movimento circular inevitável", e que em Goodman foi caracterizado como um círculo virtuoso. Podemos entender tal "lógica implícita na linguagem" como a lógica que se manifesta em nossas práticas, ora contrariando princípios lógicos que as sistematizam, ora os confirmando. Assim, dizer que empregamos a lógica para modificar ela própria corresponde a dizer que modificamos um princípio lógico a partir de nossas práticas argumentativas, ou vice-versa. No fundo – e essa parece ser a tese fundamental do equilíbrio reflexivo –, não existem princípios absolutos.

Vendo dessa maneira, a seguinte citação, que fala da presença de uma lógica antes de uma teoria da lógica, pode ser entendida como se referindo às práticas argumentativas, que se modificam ou se generalizam no processo de equilíbrio reflexivo:

> [U]nderstanding logic in terms of reflective equilibrium makes sense if we assume that logic is here before we start to do a theory of logic – not quite in an articulated and unambiguous form, but here nevertheless. We assume that we can start to do logical theory only if we already have a language embodying some logic, i.e., such that some of the arguments articulable in the language are held for correct and some for incorrect and the language allows for reflecting on these matters (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 97).

Assim, acompanhado os dois autores, não se cria uma lógica a partir do nada, e a lógica que se origina por meio do processo de equilíbrio reflexivo é explícita e envolve um aperfeiçoamento – com uma dose de normatividade – daquilo que estamos considerando como o princípio manifestado num caso particular.

Uma outra crítica que se faz ao princípio de equilíbrio reflexivo, devida a Singer, concerne à condição de que poderíamos estipular princípios gerais normativos arbitrários, completamente independentes de uma ratificação da intuição. Vejamos a passagem que exprime essa perspectiva:

> A normative ethical theory [...] is not trying to explain our common moral intuitions. It might reject all of them, and still be superior to other normative theories that better matched our moral judgments. For a normative moral theory is not an attempt to answer the question "Why do we think as we do about moral questions?" Even without an evolutionary understanding of ethics, it is obvious that the question "Why do we think as we do about moral questions?" may require a historical, rather than a philosophical, investigation (SINGER, 2005, 345).

A crítica de Singer se articula especificamente no âmbito da ética, além de que seu argumento contém premissas provenientes da ética evolucionista. Seu ponto

---

sion might happen only as a very slow, complex, and 'Neurath-boat' process)" (PEREGRIN; SVOBODA, 2017, 97). Estranhamente, mais uma afirmação parentética que contraria o que acaba de ser afirmado.

principal consiste em dizer que não faz sentido conceber princípios gerais que justifiquem nossas intuições éticas, uma vez que estas meramente seriam legadas de um processo concernente à evolução de nossa espécie. Tomando como exemplo o *dilema do bonde*[118], não nos traria um esclarecimento ético uma tentativa de propor princípios gerais que justifiquem o porquê de nossa intuição preferir o caso em que se puxa a alavanca ao caso em que se empurra uma pessoa de cima da ponte, pois de acordo com a ética evolucionista, intuitivamente repudiaríamos o segundo caso simplesmente porque em nosso passado primitivo não dispúnhamos de meios indiretos de infligir uma violência física a alguém. Como só podíamos agredir fisicamente outrem por meios diretos – batendo, empurrando, estrangulando, apedrejando, o que é diferente do caso de puxar uma alavanca, ação que infligirá uma violência apenas por uma via indireta –, nossa intuição só pôde legar repulsa a tais atos diretos. Ou seja, desde a perspectiva das condições decretadas por nosso processo evolutivo, não há uma *distinção moral* relevante a ser considerada entre os dois casos. Levar em conta nossas intuições diria menos respeito a uma investigação ética ou filosófica do que a uma investigação histórica. Citando Singer novamente:

> There is little point in constructing a moral theory designed to match considered moral judgments that themselves stem from our evolved responses to the situations in which we and our ancestors lived during the period of our evolution as social mammals, primates, and finally, human beings. We should, with our current powers of reasoning and our rapidly changing circumstances, be able to do better than that (SINGER, 2005, 348).

Como nosso interesse principal é a lógica, poderíamos apenas alegar que tais críticas direcionadas ao princípio de equilíbrio reflexivo no âmbito da ética não teriam correspondência no domínio que nos interessa – afinal, seria legítimo atribuir uma origem evolutiva a nossas intuições lógicas? Contudo, gostaríamos de propor que mesmo no âmbito da ética a crítica de Singer parece equivocada.

De acordo com a visão desse autor, em última instância, nossa intuição não portaria nenhuma legitimidade ética para nos dizer como *devemos* agir, e esse seria o problema presente no modelo de uma ética baseada no princípio de equilíbrio reflexivo, porque "it assumes that our moral intuitions are some kind of data from which we can learn what we ought to do"[119]. O que gostaríamos de apontar é que

[118]O dilema se exprime na seguinte experiência de pensamento: "You see a runaway trolley moving toward five tied-up (or otherwise incapacitated) people lying on the tracks. You are standing next to a lever that controls a switch. If you pull the lever, the trolley will be redirected onto a side track and the five people on the main track will be saved. However, there is a single person lying on the side track. You have two options: (1) Do nothing and allow the trolley to kill the five people on the main track; (2) Pull the lever, diverting the trolley onto the side track where it will kill one person". Há também a seguinte variação do dilema: "As before, a trolley is hurtling down a track towards five people. You are on a bridge under which it will pass, and you can stop it by putting something very heavy in front of it. As it happens, there is a very fat man next to you – your only way to stop the trolley is to push him over the bridge and onto the track, killing him to save five" (Wikipedia contributors, 2018).

[119](SINGER, 2005, 346).

Singer parece estar pressupondo algum tipo de intuição primitiva e imodificável, diante da qual deveríamos construir e justificar princípios éticos gerais. Mas não é essa a ideia por trás do princípio de equilíbrio reflexivo. A ideia é que uma dada intuição é passível de ser modifica – o que, além do mais, é bem diferente da ideia de, dado um conjunto de intuições, eleger, em detrimento de outras, apenas as intuições que melhor se adequam a um certo princípio geral. Assim, é irrelevante uma investigação histórica sobre a origem de uma determinada intuição, dado que ela pode modificar-se devido ao círculo virtuoso contido no embate originário da adequação de uma intuição a um princípio geral, e vice-versa.

Na citação a seguir, Singer dá claramente a entender que está atrás de uma intuição primitiva e, num certo sentido, pura, sem a interferência de uma racionalização que a tomou como base:

> It might be said that the response that I have called "more reasoned" is still based on an intuition, for example the intuition that five deaths are worse than one, or more fundamentally, the intuition that it is a bad thing if a person is killed. But if this is an intuition, it is different from the intuitions to which Haidt and Greene refer. It does not seem to be one that is the outcome of our evolutionary past (SINGER, 2005, 350).

Contudo, o que o equilíbrio reflexivo faz é exatamente misturar as instâncias do intuitivo e do racional, onde reside a formulação dos princípios gerais: o que era antes uma mera intuição se torna um princípio geral (mais racional, por assim dizer), que por sua naturalização em nossas práticas passa a fazer parte do que consideramos como intuitivo, e assim sucessivamente. Logo, se não nos comprometemos com uma noção de intuição primitiva, não faz sentido negar que nossas intuições tenham algo moralmente relevante a nos esclarecer sobre nossas atitudes éticas atuais[120]. De fato, na citação acima, se Singer abrisse mão dos preceitos que ele defende acerca da ética evolucionista, poderíamos lê-la como uma defesa do princípio de equilíbrio reflexivo.

[120]Na citação a seguir, vemos como Singer compreende – erroneamente, como tentamos argumentar – a intuição ética a partir de uma dimensão histórica que procura atribuir uma origem a nossas intuições: "So the salient feature that explains our different intuitive judgments concerning the two cases is that the footbridge case is the kind of situation that was likely to arise during the eons of time over which we were evolving; whereas the standard trolley case describes a way of bringing about someone's death that has only been possible in the past century or two, a time far too short to have any impact on our inherited patterns of emotional response. But what is the moral salience of the fact that I have killed someone in a way that was possible a million years ago, rather than in a way that became possible only two hundred years ago? I would answer: none" (SINGER, 2005, 348).

6

Considerações Finais

Neste último momento, gostaríamos de destacar dois resultados que acreditamos ter obtido. O primeiro diz respeito a compreender a tese de Church a partir de um contexto em que é legítimo falar de evolução conceitual na matemática. O segundo é acerca da possibilidade de conciliar de maneira coerente a condição contingente e temporal de posse de uma demonstração com o caráter necessário e atemporal do valor de verdade de proposições matemáticas.

Consideremos o primeiro resultado. Distinguimos, no primeiro capítulo, duas maneiras de compreender em que consiste adequar a noção informal de computabilidade a uma definição formal equivalente à de função recursiva: a definição pretende identificar uma estrutura matemática subjacente aos processos computacionais ou pretende ser um modelo que permite tratar matematicamente tais processos. Ambos os casos são passíveis à crítica que fizemos sobre pressuposições metafísicas ingênuas, pois pressupõem uma realidade objetivamente completa, que se encontra além de toda experiência possível. O que propomos então foi considerar a tese de Church como sendo relativa a um conceito de computável que se manifesta em algum momento de sua história transcendental (registro de sua gênese intencional). Se reconstruirmos a história (factual) desse conceito, passaremos pelos trabalhos de Babbage, Lovelace, Gödel, Church, Turing, a partir dos quais poderemos desvelar a sua história transcendental, onde encontraremos o sentido intencional que lhe possibilitou ser independentemente definido por diversas definições equivalentes. Assim, diríamos que o que Shapiro caracteriza como textura aberta talvez seja o entrever de etapas da gênese intencional de um conceito, cuja "realidade" não pode ser dissociada da sua constituição intencional.

Esse modo de compreensão nos leva a crer que, na matemática, a evolução conceitual não falsifica resultados baseados no conceito que se desenvolve, o que ocorre é uma delimitação mais precisa do domínio onde tais resultados se aplicam. Essa condição pode ser compreendida a partir do que vimos na seção 4.4.1. Como expomos, Kripke demonstra a tese de Church desde que qualquer algoritmo possa ser expresso numa linguagem de primeira-ordem. Se isso não for o caso, não temos exatamente uma falsificação desse resultado, mas a sua restrição, ou seja, ao invés de dizermos que todo algoritmo é recursivo, teremos apenas o direito de afirmar que todo algoritmo *formulado numa linguagem de primeira-ordem* é recursivo.

Quanto ao segundo resultado, por meio da noção de proposições como tipos, de Martin-Löf, e a noção de compatibilidade a priori de tipos ontológicos, proposta por da Silva[1], acreditamos ter elucidado o que significa dizer no contexto do intuicionismo que uma proposição *pode* ser provada. Na TIT, a partir do momento em que concebemos um juízo da forma *A é uma proposição*, estabelecemos os tipos que, se habitados por algum objeto-prova que realize as exigências que demandam, nos permitem asserir que *A* é verdadeira. A exemplo da análise feita da proposição "uma sequência de sete 7s ocorre na expansão decimal de π", podemos dizer que o estabelecimento de tipos não se compromete particularmente com nenhuma de suas instâncias, as quais, por uma questão de fato, podem ser necessariamente incompatíveis. A compatibilidade se refere apenas à compatibilidade entre tipos, que delimita a priori o que não pode ser descartado como um de seus objetos-prova.

Por essa via, um intuicionista pode continuar insistindo na associação entre verdade e posse de uma prova, sem com isso sobrecarregar o conteúdo proposicional. Além do mais, permite-se compreender como uma proposição cuja verdade é necessária *torna-se* verdadeira: a necessidade dessa verdade se encontra na compatibilidade a priori estabelecida pelos tipos que constituem o sentido proposicional.

Esses dois resultados empregam o aparato conceitual da fenomenologia como uma ferramenta. Embora isso possa parecer heterodoxo aos olhos da filosofia analítica, onde majoritariamente encontramos as discussões dos temas aqui tratados, observamos que as bases filosóficas da teoria intuicionista de tipos têm uma fundamentação fenomenológica, como pode ser constatado nos seguintes trabalhos: (MARTIN-LÖF, 1987), (MARTIN-LÖF, 1996) e (MARTIN-LÖF, 1998b). Ademais, em (TIESZEN, 2011) há um trabalho histórico e interpretativo que busca compreender o quanto a fenomenologia de Husserl exerce influência nas concepções filosóficas de Gödel, outro autor que esteve aqui presente em diversas ocasiões.

Antes de finalizar, gostaríamos de indicar duas investigações que podem dar continuidade a este trabalho. Questões acerca do limite dos sistemas formais e da

[1] Saying that a meaningful judgment represents its content as the content of a possible evidence only means that the terms of the judgment fall into materially compatible types (da SILVA, 2017, 83).

evolução conceitual na matemática têm sido temas dos trabalhos de Celluci[2]. Esse autor distingue duas noções fundamentais de demonstração, às quais qualquer outra noção pode ser reduzida: (a) a noção de demonstração axiomática, em que uma demonstração consiste em demonstrar dedutivamente uma proposição a partir de premissas primitivas que são consideradas verdadeiras "em algum sentido de 'verdadeiro'"[3]. O objetivo de tais demonstrações é fundamentar ou justificar a proposição demonstrada; (b) a noção de demonstração analítica, em que uma demonstração, "em algum sentido de 'plausível'", consiste em derivar não dedutivamente hipóteses plausíveis de um dado problema. Neste caso, o objetivo é descobrir hipóteses plausíveis capazes de solucionar o problema em questão.

Numa demonstração analítica, dado um problema a ser resolvido, procuram-se hipóteses que possam solucioná-lo. Essa procura se dá por métodos não dedutivos, como indução, analogia, etc. Solucionado o problema, a hipótese, por sua vez, permanece como um problema em aberto, o qual demanda novas hipóteses, e assim se segue ao infinito. Nesse sentido, o método axiomático de demonstração pode ser visto como uma parte do método analítico: quando se decide que as hipóteses de um certo estágio devem ser consideradas como um ponto de partida absoluto.

O que chama atenção no processo de uma demonstração analítica é que tanto o problema quanto a sua solução se modificam nesse processo:

> During this process the statement of the problem may be modified to a certain extent to make it more precise, or may even be radically changed as new data emerge. Thus the development of the statement of the problem and the development of the solution of the problem may proceed in parallel (CELLUCI, 2008, 3).

Isso sem dúvida nos remete a nossas discussões sobre uma demonstração axiomática da tese de Church e sobre a historicidade dos conceitos matemáticos. Afinal, quando resolvemos um problema, trata-se do problema inicialmente conjecturado, ou os conceitos que o compõem se modificaram para se encaixar numa certa solução?

Associada a isso, surge uma outra questão: a pureza dos métodos empregados nas demonstrações:

> "Purity" in mathematics has generally been taken to signify a preferred relationship between the resources used to prove a theorem or solve a problem and the resources used or needed to understand or comprehend that theorem or problem. In this sense, a pure proof or solution is one which uses only such means as are in some sense intrinsic to (a proper understanding of) a theorem proved or a problem solved (DETLEFSEN; ARANA, 2011, 1).

Uma investigação acerca da "pureza" na matemática pode nos auxiliar a compreender em que medida o sentido de uma sentença se preserva ante a sua demonstração,

[2]Cf, por exemplo, (CELLUCCI, 2013) e (CELLUCI, 2008).

[3](CELLUCI, 2008, 2).

trazendo assim alguns esclarecimentos sobre o que temos falado a respeito de desenvolvimento conceitual.

Referências Bibliográficas

ALVES, D. D. P. Logic is metaphysics. *Principia*, v. 15, n. 1, p. 31–42, 2011.

ASPRAY, W.; KITCHER, P. *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988.

AVIGAD, J. Mathematical method and proof. *Synthese*, v. 153, n. 1, p. 105–159, Nov 2006.

____. Computers in mathematical inquiry. In: MANCOSU, P. (Ed.). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: OUP Oxford, 2008. p. 302–316.

____. Proof theory. In: HANSSON, S.; HENDRICKS, V.; KJELDAHL, E. (Ed.). *Introduction to Formal Philosophy*. Netherlands: Springer International Publishing, 2018. p. 177–190.

AZZOUNI, J. *Tracking Reason: Proof, Consequence, and Truth*. Oxford: Oxford University Press, 2005.

____. Why do informal proofs conform to formal norms? *Foundations of Science*, v. 14, n. 1, p. 9–26, Mar 2009.

BARWISE, J. An introduction to first-order logic. In: BARWISE, J. (Ed.). *Handbook of Mathematical Logic*. Netherlands: Elsevier Science, 1977. p. 5–46.

BERNAYS, P. On Hilbert's thoughts concerning the grounding of arithmetic (1922). In: MANCOSU, P. (Ed.). *From Brouwer To Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. New York: Oxford University Press, 1998. p. 215–222.

BOOLOS, G. Iteration again. *Philosophical Topics*, v. 17, n. 2, p. 5–21, 1989.

BRANQUINHO, J.; MURCHO, D.; GOMES, N. *Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos*. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

BRIDGES, D. *Computability: A Mathematical Sketchbook*. New York: Springer, 2012b.

____. Constructive mathematics. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2012. [S.l.: s.n.], 2018.

BRIDGES, D.; PALMGREN, E. Constructive mathematics. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2018. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

BROUWER, L. Essentialy negative properties (1948a). In: HEYTING, A. (Ed.). *Collected Works*. Amsterdam: North-Holland, 1975c. p. 478–479.

____. The effect of intuitionism on classical algebra of logic (1955). In: HEYTING, A. (Ed.). *Collected Works*. Amsterdam: North-Holland, 1975e. p. 551–554.

____. The non-equivalence of the constructive and the negative order realaion on the continuum (1949a). In: HEYTING, A. (Ed.). *Collected Works*. Amsterdam: North-Holland, 1975f. p. 495–496.

____. Historical introduction and fundamental notions. In: DALEN, D. van (Ed.). *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. cap. 1, p. 1–19.

CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. L. *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

CARROLL, L. What the tortoise said to Achilles. *Mind*, Oxford University Press, v. 4, n. 14, p. 278–280, 1895.

CELLUCCI, C. *Rethinking Logic: Logic in Relation to Mathematics, Evolution, and Method*. Netherlands: Springer Netherlands, 2013.

CELLUCI, C. Why proof? what is a proof? In: ____. *Deduction, Computation, Experiment: Exploring the Effectiveness of Proof*. Milano: Springer Milan, 2008. p. 1–27.

CHATEAUBRIAND, O. Proof and logical deduction. In: HAEUSLER, E. H.; PEREIRA, L. C. (Ed.). *Proofs, types and categories*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1999.

CHURCH, A. An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics*, v. 58, n. 2, p. 345–363, 1936.

COGBURN, J. Deconstructing Dummett's anti-realism: a new argument against Church's thesis. *The Logica Yearbook*, 2002. Acessado em 12/11/2018. Disponível em: <http://bit.do/eAHqk>.

____. Manifest invalidity: Neil Tennant's new argument for intuitionism. *Synthese*, v. 134, n. 3, p. 353–362, Mar 2003.

COGBURN, J.; MEGILL, J. Are Turing machines platonists? Inferentialism and the computational theory of mind. *Minds and Machines*, 2010. Acessado em 12/11/2018. Disponível em: <http://bit.do/eAHq7>.

COPELAND, B. J. The Church-Turing thesis. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017. Acessado em 25/03/2018. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/church-turing/>.

da SILVA, J. J. On the principle of excluded middle. *Principia*, v. 15, n. 2, p. 333–347, 2011.

____. *Mathematics and Its Applications: A Transcendental-Idealist Perspective*. Switzerland: Springer, 2017.

DAVIS, M. *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*. London, New York: Academic Press, 1965.

____. Why Gödel didn't have Church's thesis. *Information and Control*, v. 54, n. 1, p. 3 – 24, 1982.

DAWSON JR, J. W. Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica*, v. 14, n. 3, p. 269–286, 2006.

DETLEFSEN, M.; ARANA, A. Purity of methods. *Philosophers' Imprint*, Mpublishing, v. 11, 2011.

DIEUDONNÉ, J. Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques. *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, IREM Paris-Nord ; École Normale Supérieure, n. 3, p. 1–10, 1980.

DIEUDONNÉ, J. A. Views: Should we teach "modern" mathematics? An affirmation from a founder of Bourbaki of the principles of the new curricula in mathematics. *American Scientist*, Sigma Xi, The Scientific Research Society, v. 61, n. 1, p. 16–19, 1973.

DOWEK, G. *Les Métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire des mathématiques*. Paris: Humensis, 2015b.

DUMMETT, M. *Elements of Intuitionism*. Oxford: Clarendon Press, 1977. Primeira Edição.

____. Wittgenstein's philosophy of mathematics. In: DUMMETT, M. (Ed.). *Truth and Other Enigmas*. New York: Harvard University Press, 1978. cap. 11, p. 166–185.

____. The philosophical significance of Gödel's theorem (1963). In: DUMMETT, M. (Ed.). *Truth and Other Enigmas*. New York: Harvard University Press, 1978b. cap. 12, p. 186–201.

____. The philosophical basis of intuitionistic logic (1984). In: DUMMETT, M. (Ed.). *Truth and Other Enigmas*. New York: Harvard University Press, 1978c. cap. 14, p. 215–247.

____. The reality of the past (1969). In: DUMMETT, M. (Ed.). *Truth and Other Enigmas*. New York: Harvard University Press, 1978d. cap. 21, p. 358–374.

____. Reply to Dag Prawitz. In: TAYLOR, B. (Ed.). *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*. Netherlands: Springer, 1987. cap. 9(E), p. 281–286.

____. *The Logical Basis of Metaphysics*. New York: Harvard University Press, 1991.

____. *Frege: Philosophy of Mathematics*. London: Harvard University Press, 1991b.

____. Reply to Wright. In: MCGUINNESS B.; OLIVERI, G. (Ed.). *The Philosophy of Michael Dummett*. Dordrecht: Kluwer, 1994b. p. 329–338.

____. What is mathematics about? (1993). In: DUMMETT, M. (Ed.). *The Seas of Language*. Oxford: Clarendon Press, 1996c. cap. 18, p. 4429–445.

____. Truth from the constructive standpoint. *Theoria*, v. 64, n. 2-3, p. 122–138, 1998.

____. *Elements of Intuitionism*. New York: Oxford University Press, 2000.

DYBJER, P.; PALMGREN, E. Intuitionistic type theory. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2016. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016. Acessado em 17/06/2018. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/type-theory-intuitionistic/>.

ENDERTON, H. *Elements of Set Theory*. New York: Academic Press, 1977.

____. *Computability Theory: An Introduction to Recursion Theory*. London: Elsevier Science, 2010.

EWALD, W. *From Kant to Hilbert: 2*. New York: Clarendon Press, 1996.

FEFERMAN, S. What does logic have to tell us about mathematical proofs? *The Mathematical Intelligencer*, v. 2, n. 1, p. 20–24, Mar 1979.

FERNÁNDEZ-DÍEZ-PICAZO, E. G. *The intended interpretation of the intuitionistic first-order logical operators*. London: [s.n.], 1997. Tese de Doutorado. Acessado em 22/11/2018. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/2ce1/c1c74ef8837bf14a0f64b74504df1f3eaa10.pdf>.

FITCH, F. B. A logical analysis of some value concepts. *The Journal of Symbolic Logic*, Association for Symbolic Logic, v. 28, n. 2, p. 135–142, 1963.

FOLINA, J. Church's thesis: Prelude to a proof. *Philosophia Mathematica*, Oxford University Press, v. 6, n. 3, p. 302–323, 1998.

FREGE, G. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. Berkeley: University of California Press, 1982.

____. On the foundations of geometry: second series (1906). In: MCGUINNESS, B. (Ed.). *Collected papers on mathematics, logic, and philosophy*. Oxford: Blackwell Publishers Ltd, 1984. p. 293–340.

GANDY, R. Church's thesis and principles for mechanisms. In: BARWISE, H. J. K. J.; KUNEN, K. (Ed.). *The Kleene Symposium*. Amsterdam: North-Holland, 1980. p. 123–148.

____. The confluence of ideas in 1936. In: HERKEN, R. (Ed.). *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*. Vienna: Springer, 1995. p. 51–102.

GEORGE, A.; VELLEMAN, D. *Philosophies of Mathematics*. Oxford: Blackwell, 2002.

GÖDEL, K. On undecidable propositions of formal mathematical systems (1934). In: DAVIS, M. (Ed.). *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*. London, New York: Academic Press, 1965. p. 41–74.

____. On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I (1931). In: FEFERMAN, S. (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works: Volume I: Publications 1929-1936*. Oxford: OUP USA, 1986c. p. 145–195.

____. On the length of proofs (1936). In: FEFERMAN, S. (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works: Volume I: Publications 1929-1936*. Oxford: OUP USA, 1986d. p. 397–399.

____. Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics (1946). In: FEFERMAN, S. (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II: Unpublished Essays and Lectures*. Oxford: OUP USA, 1990. p. 150–153.

____. Some remarks on the undecidability results (1972). In: FEFERMAN, S. (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works: Volume II: Unpublished Essays and Lectures*. Oxford: OUP USA, 1990b. p. 305–306.

____. The present situation in the foundations of mathematics (1933). In: FEFERMAN, S. (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works: Volume III: Unpublished Essays and Lectures*. Oxford: OUP USA, 1995. p. 45–53.

GOLDREI, D. *Classic Set Theory: For Guided Independent Study*. London: Chapman & Hall/CRC, 1996.

GOODMAN, N. *Fact, Fiction, and Forecast*. Cambridge: Harvard University Press, 1983.

HERBRAND, J. The principles of Hilbert's logic (1930). In: GOLDFARB, W. D. (Ed.). *Logical Writings*. Dordrecht: Springer, 1971. p. 203–214.

____. Unsigned note on Herbrand's thesis, written by Herbrand himself (1931). In: GOLDFARB, W. D. (Ed.). *Logical Writings*. Dordrecht: Springer, 1971a. p. 272–276.

HESSELING, D. *Gnomes in the Fog: The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*. Switzerland: Birkhäuser Basel, 2003.

HEYTING, A. After thirty years. In: NAGEL, E.; SUPPES, P.; TARSKI, A. (Ed.). *Logic, methodology and philosophy of science : proceedings of the 1960 international congress*. California: Stanford University Press, 1966. p. 194–197.

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of Mathematical Logic*. New York: Chelsea Publishing Company, 1950.

HUSSERL, E. *Logical Investigations Volume I*. New York: Routledge, 2008.

IEMHOFF, R. Intuitionism in the philosophy of mathematics. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2016. [S.l.: s.n.], 2016.

KAHLE, R. Is there a "Hilbert thesis"? *Studia Logica*, p. 1–21, 2018.

KALMÁR, L. An argument against the plausibility of Church's thesis. In: HEYTING, A. (Ed.). *Constructivity in Mathematics, Proceedings of the Colloquium held in Amsterdam, 1957*. Amsterdam: North-Holland, 1959. p. 72–80.

____. Foundations of mathematics – whither now? In: LAKATOS, I. (Ed.). *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland, 1967. p. 187–207.

KENNEDY, J. Turing, Gödel and the "bright abyss". In: FLOYD, J.; BOKULICH, A. (Ed.). *Philosophical Explorations of the Legacy of Alan Turing: Turing 100*. Switzerland: Springer International Publishing, 2017. p. 63–92.

KLEENE, S. *Introduction to metamathematics*. Groningen: Wolters-Noordhoff Publishing, 1974.

____. *Mathematical Logic*. New York: Dover Publications, 2002.

KLEENE, S. C. Origins of recursive function theory. *Annals of the History of Computing*, v. 3, n. 1, p. 52–67, 1981.

____. Reflections on Church's thesis. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 28, n. 4, p. 490–498, 1987.

KOLMOGOROV, A. N.; USPENSKII, V. A. On the definition of an algorithm. *American Mathematical Society Translations*, n. 29, p. 217–245, 1963.

KOSS, M. R. *Semantic and mathematical foundations for intuitionism*. Indiana: [s.n.], 2013. Tese de Doutorado.

KREISEL, G. Informal rigour and completeness proofs. In: LAKATOS, I. (Ed.). *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland, 1967. p. 138–186.

KRIPKE, S. A. Semantical analysis of intuitionistic logic i. In: DUMMETT, M.; CROSSLEY, J. N. (Ed.). *Formal Systems and Recursive Functions: Proceedings of the Eighth Logic Colloquium, Oxford July 1963*. [S.l.]: North Holland, 1963. p. 92–130.

____. *Naming and Necessity*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1980.

____. The Church-Turing "thesis" as a special corollary of Gödel's completeness theorem. In: COPELAND, B.; POSY, C.; SHAGRIR, O. (Ed.). *Computability: Turing, Gödel, Church, and Beyond*. Massachusetts: MIT Press, 2013. p. 77–104.

LAKATOS, I. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

____. What does a mathematical proof prove? In: WORRALL, J.; CURRIE, G. (Ed.). *Mathematics, Science and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. cap. 4, p. 61–69.

LARGEAULT, J. *Intuition et Intuitionisme*. Paris: Vrin, 1993.

LÖWENHEIM. On possibilities in the calculus of relatives (1915). In: HEIJENOORT, J. V. (Ed.). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967. p. 228–251.

MADDY, P. *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 1997.

MANCOSU, P. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: OUP Oxford, 2008.

MARTIN-LÖF, P. *Intuitionistic type theory (1980)*. Napoli: Bibliopolis, 1984.

____. Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof (1985). *Synthese*, v. 73, n. 3, p. 407–420, 1987.

____. A path from logic to methaphysics. In: CORSI, G.; SAMBIN, G. (Ed.). *Atti del Congresso Nuovi Problemi della Logica e della Filosofia della Scienza, Viareggio, 8-13 gennaio, 1990*. Bologna: CLUEB, 1991. p. 141–149.

____. Analytic and synthetic judgements in type theory. In: PARRINI, P. (Ed.). *Kant and contemporary epistemology (1992)*. Dordrecht: Kluwer, 1994. p. 87–99.

____. On the meaning of the logical constants and the justification of the logical laws (1983). *Nordic Journal of Philosophical Logic*, v. 1, n. 1, p. 11–60, 1996.

____. Truth and knowability: on the principles C and K of Michael Dummett (1995). In: DALES, H.; OLIVERI, G. (Ed.). *Truth in Mathematics*. New York: Clarendon Press, 1998b. cap. 5, p. 105–114.

MATES, B. *Elementary Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1972.

MENDELSON, E. On some recent criticism of Church's thesis. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 4, n. 3, p. 201–205, 1963.

____. Second thoughts about Church's thesis and mathematical proofs. *The Journal of Philosophy*, v. 87, n. 5, p. 225–233, 1990.

MOSCHOVAKIS, Y. N. Review of four recent papers on Church's thesis. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 33, n. 3, p. 471–472, 1968.

MOSCONI, J. The developments of the concept of machine computability from 1936 to the 1960s. In: DUBUCS, J.; BOURDEAU, M. (Ed.). *Constructivity and Computability in Historical and Philosophical Perspective*. Amsterdam: Springer Netherlands, 2014. p. 37–56.

MUNDIM, B. R. *Uma Abordagem sobre a Concepção de Proposição da Teoria Intuicionista de Tipos*. Goiânia: [s.n.], 2013. (Dissertação de mestrado). Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3337>.

NELSON, R. J. Church's thesis and cognitive science. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 28, n. 4, p. 581–614, 1987.

NORDSTRÖM, B.; PETERSSON, K.; SMITH, J. *Programming in Martin-Löf's type theory: an introduction*. [S.l.]: Clarendon Press, 1990.

Open Logic Project. *The Open Logic Text*. Open Logic Project, 2018. Revision: c3d76a8 (master), 2018-12-29. Disponível em: <https://open.umn.edu/opentextbooks/textbooks/open-logic-project>.

PAGIN, P. Compositionality, understanding, and proofs. *Mind*, [Oxford University Press, Mind Association], v. 118, n. 471, p. 713–737, 2009.

PEREGRIN, J.; SVOBODA, V. *Reflective Equilibrium and the Principles of Logical Analysis: Understanding the Laws of Logic*. New York and London: Taylor & Francis, 2017.

PEREIRA, L. On the constructive notion of truth and a new sea-battle problem. In: SCHUBACK, M.; PEREIRA, L. (Ed.). *Time and Form: Essays on Philosophy, Logic, Art, and Politcs*. UK: Axl Books, 2014. p. 183–196.

PÉTER, R. Rekursivität und konstrutivität. In: HEYTING, A. (Ed.). *Constructivity in Mathematics, Proceedings of the Colloquium held in Amsterdam, 1957*. Amsterdam: North-Holland, 1959. p. 226–236. Traduzido para o inglês como "Recursivity and Constructivity" por André Porto, manuscrito.

PÓLYA, G. *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. I: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 1954.

____. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. New Jersey: Princeton University Press, 1973.

POPPER, K. *The Logic of Scientific Discovery*. London: Routledge, 2002.

POST, E. L. Finite combinatory processes-formulation 1. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 1, n. 3, p. 103–105, 1936.

PRAWITZ, D. Meaning and proofs: On the conflict between classical and intuitionistic logic. *Theoria*, Blackwell Publishing Ltd, v. 43, n. 1, p. 2–40, 1977.

____. Dummett on a theory of meaning and its impact on logic. In: TAYLOR, B. (Ed.). *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*. Netherlands: Springer, 1987. cap. 4, p. 117–165.

____. Truth and objectivity from a verificationist point of view. In: DALES, H.; OLIVERI, G. (Ed.). *Truth in Mathematics*. New York: Clarendon Press, 1998. cap. 2, p. 41–52.

____. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. New York: Dover Publications, 2006.

____. Sobre a verdade das proposições morais e das proposições da lógica. *Analytica*, v. 11, n. 1, p. 128–142, 2007.

____. Truth and proof in intuitionism. In: DYBJER, P. et al. (Ed.). *Epistemology versus Ontology: Essays on the Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer London, Limited, 2012. p. 45–67.

____. Truth as an epistemic notion. *Topoi*, v. 31, n. 1, p. 9–16, 2012.

____. Explaining deductive inference. In: WANSING, H. (Ed.). *Dag Prawitz on Proofs and Meaning*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2015, (Outstanding Contributions to Logic, v. 7). p. 65–100.

QUINE, W. V. O. *Philosophy of Logic*. Cambridge: Harvard University Press, 1986.

RAATIKAINEN, P. Conceptions of truth in intuitionism. *History and Philosophy of Logic*, v. 25, p. 131–145, 2004.

RAV, Y. Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, Oxford University Press, v. 7, n. 3, p. 5–41, 1999.

____. A critique of a formalist-mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices. *Philosophia Mathematica*, v. 15, n. 3, p. 291–320, 2007.

RAWLS, J. *A Theory of Justice*. Cambridge: Harvard University Press, 1999.

RESCHER, N. *Hypothetical Reasoning*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1964.

ROGERS, H. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. New York: McGraw-Hill, 1967.

ROSSER, J. *Logic for Mathematicians*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2008.

RUSSELL, B. On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Journal of Philosophy Inc, v. 4, n. 14, p. 29–53, 1906.

____. The limits of empiricism. *Proceedings of the Aristotelian Society*, v. 36, p. 131–150, 1935.

SHAGRIR, O. Gödel on Turing on computability. In: OLSZEWSKI, A.; WOLENSKI, J.; JANUSZ, R. (Ed.). *Church's Thesis After 70 Years*. Frankfurt: De Gruyter, 2006. cap. 18, p. 392–419.

SHAPIRO, S. Understanding Church's thesis. *Journal of Philosophical Logic*, v. 10, n. 3, p. 353–365, 1981.

____. Remarks on the development of computability. *History and Philosophy of Logic*, v. 4, n. 1-2, p. 203–220, 1983.

____. Induction and indefinite extensibility: The Gödel sentence is true, but did someone change the subject? *Mind*, Oxford University Press, v. 107, n. 427, p. 597–624, 1998.

____. Computability, proof, and open-texture. In: OLSZEWSKI, A.; WOLENSKI, J.; JANUSZ, R. (Ed.). *Church's Thesis After 70 Years*. Frankfurt: De Gruyter, 2006. cap. 19, p. 420–455.

SIEG, W. Mechanical procedures and mathematical experience. In: GEORGE, A. (Ed.). *Mathematics and Mind*. Oxford: Oxford University Press, 1994. p. 71–117.

____. Calculations by man and machine: Conceptual analysis. In: SIEG, W.; SOMMER, R.; TALCOTT, C. (Ed.). *Reflections on the Foundations of Mathematics: Essays in Honor of Solomon Feferman*. Natick, Massachusetts: Association for Symbolic Logic, 2002. p. 390–409.

____. *Hilbert's Programs and Beyond*. Oxford: Oxford University Press, 2013.

SINGER, P. Ethics and intuitions. *The Journal of Ethics*, Springer, v. 9, n. 3/4, p. 331–352, 2005.

SMITH, P. Church's thesis after 70 years (review). 2007. Acessado em 27 de ago. de 2018 (manuscrito). Disponível em: <https://www.logicmatters.net/resources/pdfs/CTT.pdf>.

____. Squeezing Church's thesis again. 2010. Acessado em 27 de ago. de 2018 (manuscrito). Disponível em: <http://www.logicmatters.net/resources/pdfs/SqueezingChr.pdf>.

____. *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

SMULLYAN, R.; FITTING, M. *Set Theory and the Continuum Problem*. New York: Dover Publications, 2010.

SOARE, R. I. Turing and the discovery of computability. In: DOWNEY, R. (Ed.). *Turing's Legacy: Developments from Turing's Ideas in Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. p. 467–492.

SUNDHOLM, B. Implicit epistemic aspects of constructive logic. *Journal of Logic, Language, and Information*, v. 6, p. 191–212, 1997.

SUNDHOLM, G. Proof theory and meaning. In: GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Ed.). *Handbook of Philosophical Logic: Volume III: Alternatives in Classical Logic*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1986. p. 471–506.

____. The proof-explanation of logical constants is logically neutral. v. 58, p. 401–410, October 2004.

____. Semantic values for natural deduction derivations. *Synthese*, Springer, v. 148, n. 3, p. 623–638, February 2006.

____. "Inference Versus Consequence" revisited: Inference, consequence, conditional, implication. *Synthese*, Springer Nature, v. 187, n. 3, p. 943–956, 2012.

____. Constructive recursive functions, Church's thesis, and Brouwer's theory of the creating subject: Afterthoughts on a parisian joint session. In: DUBUCS, J.; BOURDEAU, M. (Ed.). *Constructivity and Computability in Historical and Philosophical Perspective*. Amsterdam: Springer Netherlands, 2014. p. 1–36.

____. The vocabulary of epistemology, with observations on some surprising shortcomings of the english language. In: REBOUL, A. (Ed.). *Mind, Values, and Metaphysics*. Amsterdam: Springer, Cham, 2014b. p. 203–208.

SUNDHOLM, G.; van ATTEN, M. The proper explanation of intuitionistic logic: on Brouwer's demonstration of the bar theorem. In: van ATTEN, M. et al. (Ed.). *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007)*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag AG, 2008. cap. 5, p. 60–77.

SUPPES, P. *Axiomatic Set Theory*. New York: Dover Publications, 1972.

SZABÓ, M. Kalmár's argument against the plausibility of Church's thesis. *History and Philosophy of Logic*, p. 1–18, 2017.

TARSKI, A. Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences. In: TARSKI, A. (Ed.). *Logic, semantics, metamathematics: papers from 1923 to 1938*. Oxford: Clarendon Press, 1956b. p. 60–109.

____. *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. New York: Dover Publications, 1995.

THOMPSON, S. *Type theory and functional programming*. [s.n.], 1999. (Manuscrito, acessado em 19/06/2018). Disponível em: <https://www.cs.kent.ac.uk/people/staff/sjt/TTFP/ttfp.pdf>.

TIESZEN, R. *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

____. *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

____. Mathematical realism and transcendental phenomenological idealism. In: *Phenomenology and Mathematics*. Dordrecht: Springer, 2010. cap. 1, p. 1–22.

____. *After Gödel: Platonism and Rationalism in Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press, 2011.

TRAGESSER, R. *Phenomenology and Logic*. Ithaca and London: Cornell University Press, 1977.

TROELSTRA, A. *Principles of Intuitionism*. Netherlands: Springer, 1969.

TROELSTRA, A. S.; DALEN, D. V. *Constructivism in Mathematics: An Introduction*. Netherlands: North-Holland, 1988.

TURING, A. M. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 42, n. 2, p. 230–265, 1936.

van ATTEN, M. The foundations of mathematics as a study of life: an effective but non-recursive function. p. 38–47, 2008.

____. The hypothetical judgement in the history of intuitionistic logic. In: GLYMOUR, C.; WANG, W.; WESTERSTAHL, D. (Ed.). *Logic, Methodology, and Philosophy of Science 13: Proceedings of the 2007 International Congress in Beijing*. London: King's College Publications, 2009b. p. 122–136.

van DALEN, D. An interpretation of intuitionistic analysis. *Annals of Mathematical Logic*, Association for Symbolic Logic, v. 13, n. 1, p. 1–43, 1978.

van DALEN, D.; van ATTEN, M. On the definition of the classical connectives and quantifiers. In: JACQUETTE, D. (Ed.). *A companion to philosophical logic*. Oxford: Blackwell, 2002. p. 513–530.

van ROOTSELAAR. On subjective mathematical assertions. In: KINO, A.; MYHILL, J.; VESLEY, R. E. (Ed.). *Intuitionism and proof theory. Proceeedings of the summer conference*. Amsterdam: North-Holland, 1968. p. 187–196.

VELLEMAN, D. J. Constructivism liberalized. *Philosophical Review*, Duke University Press, v. 102, n. 1, p. 59–84, 1993.

WAISMANN, F. Verifiability. In: RYLE, G.; FLEW, A. (Ed.). *Journal of Symbolic Logic*. Nova Jersey: Blackwell, 1951. p. 117–144. (Acessado em 18/08/2018). Disponível em: <http://www.ditext.com/waismann/verifiability.html>.

WANG, H. *From Mathematics to Philosophy*. New York: Routledge & Kegan Paul, 1974.

WEISS, B. Proof and canonical proof. *Synthese*, v. 113, n. 2, p. 265–284, Nov 1997.

Wikipedia contributors. *Trolley problem — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2018. Acessado em 26/11/2018. Disponível em: $<https://en.wikipedia.org/wiki/trolley\_problem>$.

WRIGHT, C. About "The philosophical significance of Gödel's theorem": Some issues. In: MCGUINNESS B.; OLIVERI, G. (Ed.). *The Philosophy of Michael Dummett*. Dordrecht: Kluwer, 1994c. p. 167–202.