2
REVISÃO DA LITERATURA

A distribuição de produtos é uma das principais atividades das empresas, pois define o seu sucesso no processo de atendimento aos seus clientes. Um bom planejamento desta atividade, aliado às estratégias corporativas, ajuda à empresa atingir seu nível de excelência garantindo a satisfação dos clientes e a redução dos seus custos.

Este capítulo realiza uma revisão da literatura sobre assuntos que fazem parte do contexto do processo de distribuição. Grande parte das definições e conceitos apresentados foi baseada na obra de Novaes (1989). Começando pela contribuição do estudo da logística, são citados conceitos aplicados na busca de diferenciais competitivos. Em seguida, é mencionada a importância das métricas espaciais nas estimativas de distâncias e simplificações de redes de transporte. Através da distribuição física são apresentadas as restrições de capacidade e tempo, normalmente encontradas em problemas reais. Finalizando o capítulo, são apresentados métodos para solução de problemas de roteamento.

2.1
CONTRIBUIÇÃO DA LOGÍSTICA

"*A logística é o processo de gerenciar estrategicamente a aquisição, movimentação e armazenagem de materiais, peças e produtos acabados e os fluxos de informações correlatos através da organização e de seus canais de marketing, de modo a poder maximizar as lucratividades presente e futura através do atendimento dos pedidos a baixo custo*" (Christopher,1999).

Segundo Daskin (1985), o estudo da logística vem auxiliar o processo de distribuição, definindo o planejamento e a operação dos sistemas físicos, informacionais e gerenciais, necessários para que insumos e produtos vençam condicionantes espaciais e temporais de forma econômica. Durante anos, outros autores vem seguindo esta linha de pesquisa, tendo a logística como objeto de estudo para solução de problemas operacionais.

A logística vem atuar também de forma vital na busca de diferenciais competitivos, alinhando as estratégias da empresa com os seus principais objetivos, (Christopher,1999). Através do planejamento, organização e controle efetivo das atividades corporativas, a logística visa prover um melhor nível de serviço, reduzindo custos operacionais e contribuindo com a prosperidade do negócio (Bowersox,1996).

Moura (2001) destaca que, com a intensificação da concorrência em todos os segmentos e a globalização dos mercados, as vantagens competitivas da logística se apresentam como um poderoso diferencial. O sucesso de muitas empresas não se deve apenas às vantagens tecnológicas ou mercadológicas, mas nos ganhos logísticos significativos face à concorrência (Graciolli, 1998).

A distribuição física é o ramo da logística que reúne as atividades de movimentação interna, armazenagem e transporte de produtos acabados e semi-acabados (Daskin, 1985). É importante citar que o gerenciamento da distribuição física através da logística abrange os níveis estratégicos, táticos e operacionais (Ballou, 1993).

No nível estratégico são definidas as linhas gerais de planejamento, como o número e localização das instalações a serem atendidas, os canais de distribuição da empresa e os meios de transporte a serem utilizados. No nível tático, procura garantir a eficiência do sistema de distribuição. Já no nível operacional trata o planejamento das atividades diárias como, por exemplo, a garantia de entrega dos produtos nos locais e tempos certos. Netto (1997) observou também que o sistema de gerenciamento logístico pode variar, dependendo das características específicas de cada empresa e seus produtos.

2.2 MÉTRICAS ESPACIAIS PARA SISTEMAS DE TRANSPORTE

Os sistemas de transporte operam ao longo de vias ou rotas específicas que, quando interligadas, formam uma rede. No caso do transporte urbano, ruas e avenidas formam uma rede de artérias por onde passam os veículos (Novaes, 1989). Nesta rede são destacados os pontos de origem e destino da carga, que serão modelados como "nós da rede". As ligações existentes entre estes diversos nós são representados como "arcos da rede".

Na solução de problemas de transporte e distribuição, que geralmente demandam respostas rápidas, são utilizados modelos simplificados para realizar estimativas de distâncias geométricas entre pontos. Através de coeficientes de correção, pode-se fazer com que estas estimativas fiquem bem próximas das distâncias reais. As métricas espaciais são muito utilizadas como parte de soluções de problemas logísticos.

2.2.1 METRICA EUCLIDEANA E MÉTRICA RETANGULAR

Segundo Novaes (1989), a partir de dois pontos situados sobre uma rede transporte, pode-se definir um sistema de coordenadas cartesianas. A ligação destes dois pontos é realizada por vários caminhos distintos, que possuirão distâncias diferentes. A menor delas, será sempre aquela representada por uma linha reta entre os pontos.

A métrica Euclidiana realiza o cálculo de distâncias retas entre pontos. Ela é a mais utilizada em aplicações reais de problemas de transporte (Novaes, 1989). Aplicando um fator de correção, que pode ser apurado por regressão, é possível se aproximar mais da distância real compensando distorções e barreiras geográficas. Esta métrica é muito utilizada na apuração de longas distâncias.

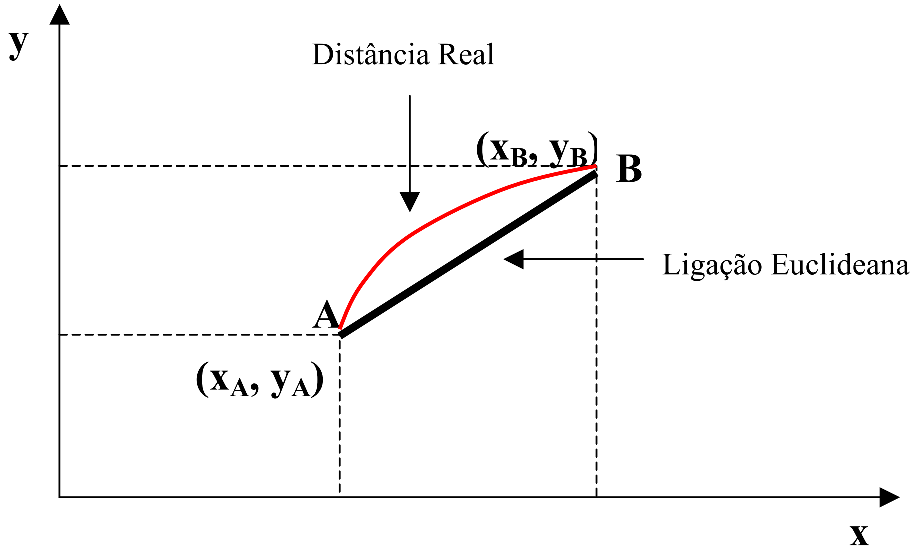

Figura 01 - Distância Euclideana entre os pontos A e B

A distância Euclideana (DE_{AB}) é expressa pela fórmula:

$$DE_{AB} = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{½} \quad (01)$$

Onde,

A e B são dois pontos situados em uma rede de transporte e (x_A, y_A) e (x_B, y_B) suas respectivas coordenadas.

Aplicando a regressão, pode-se calibrar sua distância efetiva (D_{AB}):

$$D_{AB} = a + b\, DE_{AB} \quad (02)$$

A métrica Retangular ou métrica de Manhathan, que é normalmente utilizada para apurar distâncias em centros urbanos com quadrados regulares, compensa as distorções geográficas causadas pela locomoção através de quarteirões (Novaes, 1989). Este tipo de métrica gera menos diferença entre a distância real e a calculada.

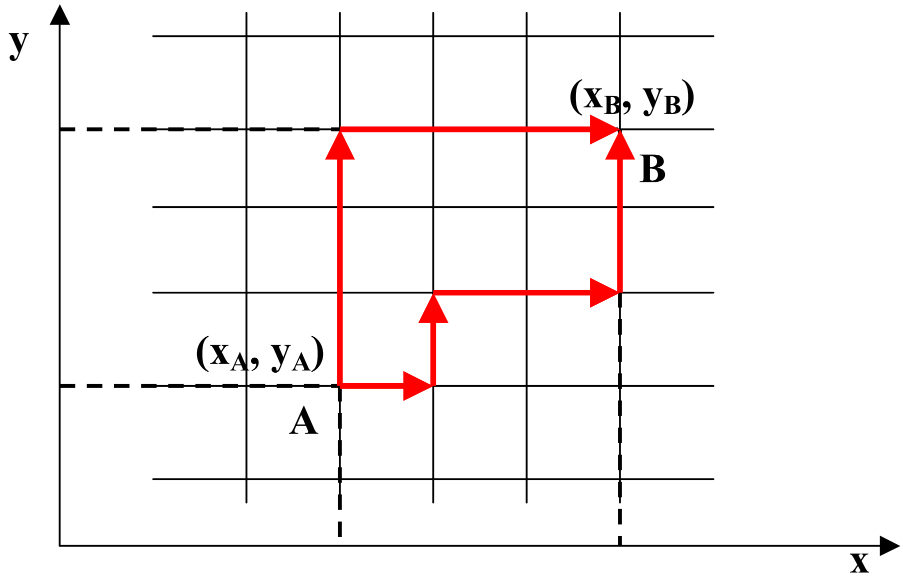

Figura 02 - Distância Retangular entre os pontos A e B

A distância Retangular (DR_{AB}) é expressa pela fórmula:

$$DR_{AB} = | x_B - x_A | + | y_B - y_A | \tag{03}$$

2.2.2
PONTO CENTRAL DE ABASTECIMENTO

Uma das primeiras questões a serem abordadas no planejamento da distribuição física é localização da base de abastecimento. Esta base de abastecimento, denominada por vários autores como "ponto central", determina a localização da fábrica ou depósito que realizará o abastecimento visando à otimização de tempo e distância. Fatores como custos e receitas, provenientes da acessibilidade dos clientes, podem ser determinantes no planejamento da distribuição (Ballou,1993).

O ponto central pode ser estimado através de métricas espaciais. Na determinação do ponto central através da métrica Euclideana, Novaes (1989) apresenta a seguinte formulação:

Seja,

C = Ponto Central;

(x, y) = suas coordenadas;

(x_i, y_i) = as coordenadas dos N pontos do conjunto;

P_i = o peso no ponto i (para i = 1, ..., N)

Tem-se a expressão,

$$Min\ f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} P_i[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2} \tag{04}$$

Derivando a expressão em relação a "x" e a "y", igualando as derivadas parciais a zero e efetuando simplificações, se obtém :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \times x_i / \overline{DE}_i}{\sum_{i=1}^{N} P_i / \overline{DE}_i} \tag{05}$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \times y_i / \overline{DE}_i}{\sum_{i=1}^{N} P_i / \overline{DE}_i} \tag{06}$$

Onde,

$\overline{DE}_i$ = Distância Euclideana entre a cidade "i" e o ponto central.

$$\overline{DE}_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2} \tag{07}$$

Na localização do ponto central através da "Métrica Retangular", Novaes (1989) utiliza a seguinte expressão, a ser aplicada em um processo iterativo:

$$Min\ f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} P_i[\,|x - x_i| + |y - y_i|\,] \tag{08}$$

Efetuando a multiplicação dentro da somatória, pode se separar as expressões e minimizá-las separadamente.

$$Min\ f_1(x) = \sum_{i=1}^{N} P_i |x - x_i| \tag{09}$$

e

$$Min\ f_2(y) = \sum_{i=1}^{N} P_i |y - y_i| \tag{10}$$

com

$$Min\ f(x, y) = Min\ f_1(x) + Min\ f_2(y) \qquad (11)$$

2.2.3
NÚMERO DE PONTOS A SEREM ATENDIDOS

Um outro tópico importante no planejamento da distribuição é determinar a média de pontos (clientes) a serem atendidos em um dado período de tempo. Esta informação serve de base para apurar uma estimativa da demanda e para calcular a necessidade de recursos (pessoas, veículos, etc).

A análise do número de pontos a serem atendidos parte do princípio que a distribuição de pontos segue um processo de Poisson (Novaes, 1989). Assim, baseado numa taxa média de eventos, calcula-se a probabilidade de ocorrer um número "x" de eventos, dado uma determinada área. Este número de eventos corresponde à quantidade de pontos na região a ser abastecida.

Se $P_N(t)$ for a probabilidade de ocorrer N eventos no intervalo $t(t \geq 0)$, se tem :

$$P_N(t) = \frac{(\lambda t)^N \times e^{-\lambda t}}{N!} \qquad (12)$$

Onde,

λ = taxa média de eventos;

Na distribuição de Poisson a média é igual à variância.

Média = $\overline{N}(t) = \lambda t$

Variância = λt

Se $P_N(A)$ for a probabilidade de ocorrer N eventos na área A, se tem:

$$P_N(A) = \frac{(\lambda A)^N \times e^{-\lambda A}}{N!} \qquad (13)$$

Onde,

$$\text{Média} \quad = \overline{N}(A) = \lambda A \tag{14}$$

$$\text{Variância} \;= \lambda A \tag{15}$$

2.3 DISTRIBUIÇÃO FÍSICA

Segundo Ballou (2001), a distribuição física é um dos processos mais importante no estudo na logística, pois os seus custos de transporte correspondem de um a dois terços do total dos custos operacionais. Uma boa gestão deste processo garantirá mais eficiência e confiabilidade no serviço pela empresa.

Os problemas mais comuns relacionados ao processo de distribuição envolvem questões como estimativas de tempo, distâncias e segmentações geográficas de zonas de abastecimento. No atendimento a vários clientes se faz necessário também a determinação de roteiros de entrega. Estes roteiros estabelecem a seqüência dos abastecimentos, respeitando as restrições de tempo e distâncias impostas pelo modelo. Estas restrições podem ser impostas pelas limitações de recursos da empresa ou pelas necessidades dos clientes.

2.3.1 TEMPO DE CICLO

Na distribuição física é importante determinar o tempo necessário para a prestação do serviço, mais conhecido como "tempo de ciclo". O tempo de ciclo considera os tempos gastos em viagem e em paradas. Novaes (1989) propõe uma formulação para determinar este tempo de ciclo, partindo das seguintes premissas:

- As regiões de abastecimento serão segmentadas em áreas.

- Cada área é servida por um único veículo.
- O tempo de ciclo é determinado através de um roteiro de entrega, que corresponde à saída do veículo da empresa, o abastecimento dos clientes e o seu retorno.
- São conhecidos os tempos médios de parada, de percurso entre cliente, de saída e retorno à base.
- O número de clientes a serem atendidos será também fornecido.

Formulação do tempo de ciclo (*TC*):

$$TC = 2t + T_p + T_\tau \tag{16}$$

Onde,

t = Tempo do depósito até zona de distribuição

$2t$ = Equivale ao tempo de ida e volta

T_p = Total dos tempos de parada

T_τ = Total dos tempos de percurso (entre paradas)

2.3.2 DISTÂNCIA MÉDIA ENTRE PONTOS

Os pontos a serem abastecidos estão distribuídos espacialmente nas zonas de entrega. Segundo Novaes (1989), esta distribuição segue um processo de Poisson, que considera uma densidade média (λ) constante ao longo da zona. Através de uma formulação matemática é possível determinar a distância média ($\bar{\delta}$) entre eles.

$$\bar{\delta} = K \times \lambda^{-1/2} \tag{17}$$

Com a constante $K \geq 0{,}5$

2.3.3
SEGMENTAÇÃO GEOGRÁFICA

A segmentação geográfica das áreas de abastecimento visa equilibrar a demanda e a utilização dos recursos. Assim, o número de áreas passa a ser definido pelo número de veículos disponíveis. Utilizando o conceito da "Divisão de Região em faixas" de Daganzo, procura-se determinar uma segmentação que reduza a distância média entre pontos e facilite a programação do roteiro de entrega. Novaes (1989) cita que esse conceito visa tirar vantagem das características morfológicas das redes de transporte, nas vias em forma de artérias com direções bem definidas e vários pontos a serem atendidos por um único veículo.

O caso estudado por Daganzo utiliza uma faixa de extensão finita, com largura igual a "w" e densidade igual a "λ" (pontos/km^2).

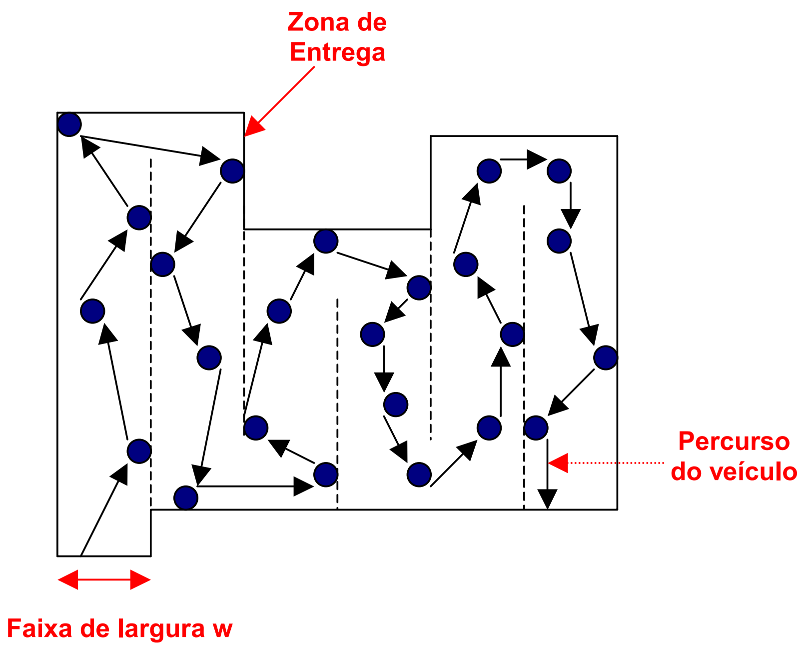

Figura 03 - Roteamento de veículo ao longo de faixas de largura w

Considerando um segmento desta faixa contento N pontos, pode-se obter o valor esperado da distância total percorrida (*E[L]*) para atender todos estes pontos através da seguinte fórmula:

$$E[L] = N \times \overline{\delta_W} \tag{18}$$

Onde,

$\overline{\delta_W}$ é a distância média por ponto de parada para a faixa de largura “w”, que tem o valor ótimo de “w”, exato na métrica retangular e aproximado para métrica Euclideana, dado por $\sqrt{\frac{3}{\lambda}}$.

Daganzo cita que, para otimizar o percurso a ser realizado pelo veículo, a largura “w” da faixa deve ser tal que torne mínimo o valor de $\overline{\delta_W}$. Assim, o valor otimizado da distância média por ponto de parada será calculado por:

$$\overline{\delta_W} = k \times \lambda^{-1/2} \tag{19}$$

Na métrica Retangular, k será igual a 1,15 .

Na métrica Euclideana, k será igual a 0,90 .

2.3.4
RESTRIÇÃO DE CAPACIDADE

Normalmente, as restrições do processo de distribuição são tratadas por um “Modelo Estocástico”, devido à imprevisibilidade de alguns dados do problema. Neste contexto, Novaes (1989) aborda a capacidade física dos veículos e o tempo máximo da jornada de trabalho, como questões importantes a serem consideradas pelo processo.

Em relação à capacidade física dos veículos, é importante determinar o tipo de carga a ser transportada. Cargas leves são geralmente limitadas pelo seu volume e cargas pesadas pelo seu próprio peso. Tanto a falta de capacidade quanto o excesso retratam um problema para empresa. O primeiro implica no não atendimento de clientes e o segundo no desperdício de recursos.

A restrição de capacidade é expressa pela seguinte fórmula:

$$W \leq \Phi \times \nabla \qquad (20)$$

Onde,

W = Total da carga a ser transportada

Φ = Coeficiente de redução, determinado em função de um percentual "*p*" referente à perda de capacidade útil. $\Phi = 1 - \frac{p}{100}$ (21)

∇ = Capacidade útil do veículo

Os limites impostos pela jornada de trabalho também precisam ser analisados e inseridos no planejamento, de forma a não prejudicar o processo de distribuição. Assim, faz-se necessário conhecer o número de horas da jornada normal de trabalho e o número máximo de horas extras permitidas pela convenção trabalhista, de acordo sindical e política corporativa.

Seja,

H_0 = Jornada diária normal de trabalho

H_1 = Máximo período contínuo de trabalho (jornada normal + máximo de horas extras permitidas).

t = Tempos gasto na distribuição

Se tem,

$t \leq H_0$ (Nível normal de serviço) (22)

$H_0 < t < H_1$ (Serviço com horas extras) (23)

$t > H_1$ (Nível crítico de serviço) (24)

2.4 DEFINIÇÃO DE ROTAS

O processo de roteirização de veículos está associado aos problemas de rede de transporte, que visam otimizar os esforços operacionais e reduzir custos. Estas redes transporte são representadas por “grafos”, com seus respectivos nós e arcos, que podem ser representados de forma orientada (com indicação do sentido dos fluxos) ou não. Os nós da rede representam os pontos a serem atendidos e os arcos os caminhos.

2.4.1 DEFINIÇÃO DO CAMINHO MÍNIMO

Seguindo o conceito de roteirização, procura-se determinar os “caminhos mínimos”, ou seja, o caminho mais curto entre os pares de nós da rede. Normalmente, os caminhos mais curtos são aqueles de menor custo e aqueles que demandam menos tempo de percurso. Novaes (1989) sugere a apuração do “caminho mínimo” através do algoritmo de Floyd. Este método se aplica a grafos Eulerianos orientados e não orientados.

Ford e Fulkerson (1962) apresentam as seguintes de definições para os grafos Eulerianos:

Orientados – Quando o número de arcos que entram é igual ao número de arcos que saem de cada nó.

Não Orientados – Quando todo nó tem um grau par, ou seja, tem um número par de arestas incidentes.

Misto – Quando todo deve incidir um número par de arcos orientados ou não orientados. Além disso, Nobert e Picard (1991) estabelecem uma condição de balanceamento chamada de “balanced set condidion”: para todo subconjunto S de nós do conjunto V, a diferença entre o número de arcos orientados de S para V-S e o número de arcos orientados de V-S para S deve ser menor ou igual ao número de arcos não orientados de S e V-S juntos.

Método de FLOYD

Considerando um grafo G=(N,A), numeram-se todos os seus nós com números inteiros em seqüência: 1, 2, 3, ... n. Em seguida, definem-se duas matrizes auxiliares:

Matriz $D^{(0)}$ - para representar a extensão da trilha.

Matriz $P^{(0)}$ - para fornecer a seqüência de nós predecessores.

Utilizando os pares de nós i e j, o método será aplicado da seguinte maneira:

A. Inicialmente se faz:

$$d_0(i,j) = \text{[elemento i, j da matriz } D^{(0)}\text{]} = \left| \begin{array}{l} \ell(i,j),\ \text{se arco (i,j) existe} \\ 0,\ \text{se } i = j \\ \infty,\ \text{se arco (i,j) não existe} \end{array} \right| \quad (25)$$

$$p_0(i,j) = \text{[elemento i, j da matriz } P^{(0)}\text{]} = \left| \begin{array}{ll} i, & \text{se } i \neq j \\ 0, & \text{se } i = j \end{array} \right| \quad (26)$$

B. Numa primeira rodada se faz k = 1.

C. Em seguida, atualizar todos elementos da matriz $D^{(0)}$ através da relação:

$d_k(i,j) = \text{Min}\{\ d_{k-1}(i,j),\ d_{k-1}(i,k) + d_{k-1}(k,j)\ \}$, variando i e j. (27)

D. Atualizar todos elementos da matriz $P^{(0)}$,de nós predecessores, através da relação:

$$p_k(i,j) = \left| \begin{array}{l} p_{k-1}(k,j),\ \text{se } d_k(i,j) \neq d_{k-1}(i,j) \\ p_{k-1}(i,j),\ \text{em caso contrário.} \end{array} \right| \quad (28)$$

E. Se k = n, o processo termina. Se K < n, acrescentar um a unidade a k, reiniciando o processo a partir de (C).

Quando terminado estes cálculos, o elemento $d_n(i,j)$ da matriz $D^{(0)}$ será igual a extensão do caminho mínimo entre i e j. Já a matriz $P^{(0)}$, permitirá identificar qual é a seqüência de nós que formam o caminho mínimo entre um par qualquer de nós (i,j) do grafo G=(N,A).

Dijkstra (1959), apresenta um algoritmo próprio para resolver o problema de caminho mínimo em redes. Seu algoritmo apresenta um desempenho eficiente quando a estrutura de dados é utilizada em forma de lista de incidências.

Algoritmo de DIJKSTRA

Considerando um grafo G=(N,A,c)

onde, N = Um conjunto de nós;

A = Um conjunto de arcos;

c = Matriz de custos associados aos arcos;

s = Nós de origem

d = Nós de destino

Serão atribuídos 3 rotulações aos nós:

1. Nós visitados (conjunto V)
2. Nós candidatos a pertencer ao caminho mínimo (conjunto F)
3. Nós nunca visitados ou desconhecidos (conjunto D)

No momento zero, o conjunto V contém um único elemento que corresponde ao nó de origem s(V={s}). Os nós incidentes, ou seja, vizinhos imediatos de *s,* que ainda não foram visitados, são alocados ao conjunto F, sendo calculados os custos para alcançá-lo a partir de *s*. Os demais nós não visitados, que não são vizinhos imediatos de *s*, são alocados no conjunto D. A cada nova iteração, o algoritmo escolhe a melhor opção para se construir o caminho mínimo, ou seja, o $t \in F$ que resulta na menor soma acumulada, sendo *t* transferido para o conjunto V e seus vizinhos transferidos do conjunto D para o conjunto F. Este processo de busca pelo menor caminho continuará até que o nó *d* seja atingido (encontrado o caminho mínimo) ou quando não houver mais nós a percorrer no conjunto F (não existe caminho mínimo entre *s* e *d*).

Outros algoritmos para resolver o problema de caminho mínimo foram propostos também por Bellman (1958) e Ford (1962). Estes algoritmos ajudam a determinar a matriz de distância mínima entre todos os pontos, além de determinar o caminho mínimo entre dois pontos de uma rede.

2.4.2
COBERTURA DE VIAS

Um dos primeiros problemas de cobertura de vias em redes de transporte foi o “Problema das Sete Pontes de Königsberg”, tratado por Euler no século 18. Este problema consistia em definir um caminho na qual uma procissão passasse pelas sete pontes da cidade, sendo que nenhuma ponte poderia ser cruzada mais de uma vez. Apesar deste problema não ter solução, ele serviu de base para o descobrimento de várias propriedades sobre a cobertura de vias (Novaes,1989).

Roteiro de Euler – Circuito que atravessa todos os arcos de um grafo uma única vez, sendo que este circuito deve iniciar e terminar no mesmo nó.

Trilha de Euler – Trilha (caminho) que cobre todos os arcos de um grafo somente uma vez. Diferente do Roteiro de Euler, os nós inicial e final não coincidem.

Grau de um nó – Representa o número arcos que incidem sobre esse nó.

Novaes (1989), também apresenta alguns teoremas desenvolvidos a partir destas propriedades, teoremas estes que receberam seu nome (**Teoremas de Euler**):

1- Um grafo conexo G (não orientado), possuirá um roteiro de Euler se e somente se G não contiver nenhum nó de grau ímpar.

2- Um grafo conexo G possuirá uma trilha de Euler se e somente se G contiver exatamente dois nós de grau ímpar.

Muitos anos mais tarde, foi escrito um artigo no jornal "Chinese Mathematics" sobre o problema de cobertura de vias de Euler. Este artigo acabou fornecendo o atual nome deste problema: "Problema do Carteiro Chinês" ou "Chinese Postman Problem"(CPP).

2.4.3 PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS

No CPP, o veículo (ou indivíduo) precisa sair de um nó e voltar a ele cobrindo todos os arcos da rede, minimizando a distância percorrida. Como nem sempre é possível encontrar o Roteiro de Euler, cobrindo todos os arcos do grafo apenas uma vez, procura-se minimizar o roteiro de forma racional passando o menor número de vezes possíveis nos mesmos arcos (Novaes,1989).

Os autores Eiselt, Gendreau e Laporte (1995) publicaram alguns casos de CPP, com formulações matemáticas e algoritmos de soluções para os seguintes problemas: CPP orientado utilizando mão de ruas, CPP não orientado sem mão de ruas, WWP ("Windy Postman Problem") com custo diferenciado pela mão da rua, MCPP ("Mixed Chinese Postman Problem") com arcos direcionados e não direcionados, e HPP ("Hierarchical Postman Problem") onde a ordem dos arcos servidos deve respeitar uma relação precedente definida no conjunto de arcos.

2.4.4 PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Um outro problema de roteamento muito estudado por vários autores é o "Problema do Caixeiro Viajante" (Traveling Salesman Problem - TSP). Diferente do CPP, que procura passar por todos os arcos da rede, o TSP procura passar por todos nós realizando um percurso de custo mínimo. Este percurso é denominado de ciclo Hamiltoniano, por passar em cada um dos nós exatamente uma única vez.

Considerando o grafo G(N,A,C) onde,

N = conjunto de nós

A = conjunto de arcos

C = matriz de custos c_{ij}

Se o custo para ir de um nó qualquer “i” para outro nó qualquer “j” for igual ao custo de ir do nó “j” para o nó “i”, o problema será denominado de simétrico. Caso contrário, o problema será assimétrico. No TSP, as demandas do problema estão nos nós e os custos estão nas movimentações de um nó origem até um nó destino.

Um dos primeiros algoritmos para resolver o problema do TSP foi proposto por Little, Murty, Sweeney e Karel (1963). Mais tarde, soluções exatas foram propostas por Crowder e Padberg (1980), utilizando o “cutting plane”. Bellmore e Nemhauser (1974) e Christofides (1976) também publicaram aspectos importantes sobre o TSP.

Balas e Christofides (1981) desenvolveram um procedimento exato eficaz, com a relaxação Lagrangeana. As técnicas de relaxação fizeram muito sucesso na solução de problemas do TSP. Usando “*bounds*”, limites próximos da solução, Christofides, Mingozzi e Toth (1981) conseguiram agilizar o desempenho deste algoritmo. Já Winston (1993) cita que o “Branch and Bound” é um dos métodos mais eficientes na soluções de problema do TSP.

Bodin et all (1983), apresenta uma formulação matemática resolvendo o problema do TSP através de um método exato:

Seja $x_{ij} \in X$ a variável de decisão tal que :

x_{ij} = 1, se o arco(i,j) pertence à rota, e 0 se não.

Função Objetiva:

$$Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (29)$$

Sujeito a:

$\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}) = 1$ (j=1,...,n) garante que somente um arco chega a j

$\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}) = 1$ (j=1,...,n) garante que somente um arco saia de i

$X \in S$ garante que não há formação de sub-rota.

Existem 3 opções para a representação de S, a chamada "restrição de quebra de sub-rota":

$$S = \{(x_{ij}): \sum_{i \in Q}\sum_{j \in Q} x_{ij} \geq 1 \ \ \forall \ Q \neq 0 \ \ Q \subset N\} \tag{30}$$

$$S = \{(x_{ij}): \sum_{i \in R}\sum_{j \in R} x_{ij} \leq |R| - 1 \ \ \forall \ R \neq 0 \ \ R \subset (2,3,...,n)\} \tag{31}$$

$$S = \{(x_{ij}): y_i - y_j + nx_{ij} \leq n - 1 \ \ para \ \ 2 \leq i \neq j \leq n \ \ para \ \ y_i \in R\} \tag{32}$$

2.4.5 ROTEIRIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES MÚLTIPLAS

Restrições do tipo tempo e capacidade, comuns a muitos casos reais da distribuição física, não são tratadas pelo problema do caixeiro viajante. Para estes casos é preciso se identificar subconjuntos de nós que atendam as restrições impostas pelo modelo.

Uma das heurísticas mais conhecidas para soluções destes problemas, é o algoritmo desenvolvido por Clarke e Wright (1964), que será citado mais à frente, na descrição do método proposto para o planejamento operacional da distribuição. Este é um dos algoritmos de economia, que constrói a cada passo uma solução e a compara com a anterior. Na comparação das rotas construídas, será selecionada aquela que trouxer maior economia seguindo um critério de ganho pré-definido. Golden, Magnanti e Nguyen (1977), e Ballou e Chowdhury (1980) apresentam alguns estudos sobre esta metodologia.