

2

Análise do Colapso de Estruturas através do Método dos Elementos Finitos

Neste capítulo, através do método dos elementos finitos baseado em deslocamentos, são apresentadas três técnicas de análise do colapso de estruturas: Análise não linear completa, análise incremental da carga crítica e análise linearizada da carga crítica. Os problemas de autovalor são formulados a partir de uma linearização.

2.1. Análise Não-Linear Completa

Esta técnica de análise é denominada completa porque as equações de equilíbrio são resolvidas até atingir a carga crítica de colapso. Além disso, permite descrever o comportamento pós-crítico da estrutura. Através desta, problemas com não linearidade geométrica e física podem ser abordados. A seguir são apresentados as equações de equilíbrio da configuração deformada, a cinemática da deformação, as equações constitutivas e os métodos de controle que resolvem as equações linearizadas do equilíbrio.

2.1.1. Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que o trabalho virtual interno e o externo, na configuração deformada de um sólido em equilíbrio, devem ser iguais. Empregando uma notação tensorial o princípio pode ser escrito como:

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \delta {}_{t+\Delta t}e_{ij} d{}^{t+\Delta t}V = {}_{t+\Delta t}\mathcal{P} \quad (2.1)$$

Na equação anterior, a parcela à esquerda representa o trabalho virtual interno das tensões reais através das deformações virtuais, e a direita representa o trabalho virtual externo das forças reais de corpo e superfície através dos deslocamentos virtuais, descritos na seguinte equação:

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{P} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta {}^{t+\Delta t}u_i d{}^{t+\Delta t}V + \int_{{}^{t+\Delta t}S} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta {}^{t+\Delta t}u_i d{}^{t+\Delta t}S \quad (2.2)$$

Um sólido pode experimentar grandes deslocamentos, grandes deformações e respostas não lineares do material.

2.1.2. Formulação Lagrangeana

Na formulação Lagrangeana, a malha de elementos finitos é fixa ao material e se desloca através do espaço com este. Esta formulação permite uma descrição natural da deformação dos elementos estruturais.

A formulação Lagrangeana pode ser classificada em duas categorias: uma formulação Lagrangeana Total e uma formulação Lagrangeana Atualizada. Na formulação Lagrangeana Total, a configuração de referência é a configuração indeformada ou inicial; na formulação Lagrangeana Atualizada, a configuração de referência é a configuração prévia ou última calculada. A cinemática da deformação e a descrição do movimento são descritas na Figura 2.1.

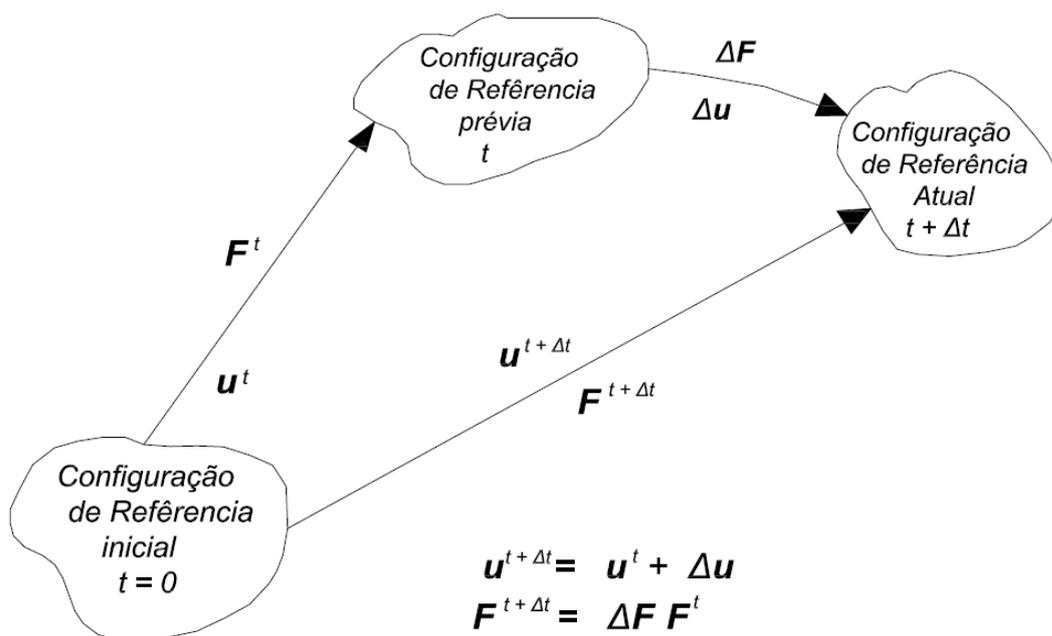


Figura 2.1 Descrição do movimento do sólido.

Mais detalhes das formulações Lagrangeanas Total e Atualizada podem ser encontrados em Bathe (1996) e De Borst et al. (2012).

2.1.2.1. Formulação Lagrangeana Total

Embora esta formulação seja baseada na geometria inicial dos elementos, as matrizes de rigidez incrementais são montadas para considerar as tensões desenvolvidas previamente e mudanças na geometria.

A formulação Lagrangeana Total é frequentemente útil para abordar problemas com plasticidade, grandes deslocamentos, grandes rotações, mas considerando pequenas deformações desenvolvidas nos elementos, hipóteses consideradas neste trabalho.

Na formulação Lagrangeana Total, as equações de equilíbrio podem ser expressas através do princípio dos trabalhos virtuais como:

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}\mathcal{P} \quad (2.3)$$

Aqui ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ é o segundo tensor das tensões de Piolla-Kirchhoff, e ${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$ é o tensor das deformações de Green-Lagrange. As integrações são feitas na configuração indeformada inicial no tempo $t = 0$. Decompondo a deformação total do tempo $t + \Delta t$ na deformação da configuração equilibrada do tempo t e a deformação incremental do tempo entre t e $t + \Delta t$, obtém-se:

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} = {}^t\epsilon_{ij} + {}_0\epsilon_{ij} \quad (2.4)$$

Decompondo a deformação incremental ${}_0\epsilon_{ij}$ numa parte linear ${}_0e_{ij}$ e outra não linear ${}_0\eta_{ij}$ nos incrementos dos deslocamentos:

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (2.5)$$

Onde ${}_0e_{ij}$, a parte linear da deformação incremental, pode ser descrito em função dos incrementos dos deslocamentos u_i como:

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^0 x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 x_j} \frac{\partial u_k}{\partial^0 x_i} \right) \quad (2.6)$$

O segundo termo entre parêntesis da equação anterior leva em consideração o efeito inicial dos deslocamentos. Por outro lado, ${}^0\eta_{ij}$, a parte não linear da deformação incremental, pode ser descrito em função dos incrementos dos deslocamentos u_i como:

$${}^0\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_i} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \right] \quad (2.7)$$

Linearizando o equilíbrio expressado na equação (2.3), e utilizando a equação (2.5), obtém-se:

$$\int_{0V} {}^0C_{ijrs} {}^0e_{ij} \delta {}^0e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}P - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta {}^0e_{ij} d^0V \quad (2.8)$$

Os termos resultantes da equação anterior são lineares nos incrementos dos deslocamentos.

2.1.3. Equações Constitutivas

As equações constitutivas são utilizadas para representar de forma ideal o comportamento elastoplástico de um material através de um modelo matemático. Estas equações contêm todas as componentes básicas de um modelo constitutivo elastoplástico:

- A decomposição da deformação Elastoplástica;
- A lei elástica;
- Critério de escoamento, estabelecida com o uso da superfície de escoamento;
- A lei de fluxo plástico definindo a evolução do tensor das deformações plásticas;
- A lei encruamento, que caracteriza a evolução da tensão de escoamento.

As equações constitutivas que definem o modelo constitutivo elastoplástico de determinado material, estão resumidas na Tabela 2.1

A resolução das equações constitutivas permite avaliar as tensões e operadores tangentes elastoplásticos que são empregadas na aproximação do método dos elementos finitos. As tensões avaliadas são utilizadas no cálculo do

vetor de forças internas e na contribuição não linear da matriz de rigidez tangente, e os operadores tangentes avaliados são utilizados no cálculo da contribuição linear da matriz de rigidez tangente. Avaliar de forma precisa as tensões e o operador tangente é importante na obtenção de soluções corretas e matrizes verdadeiramente tangentes. Estas matrizes tangentes permitem na análise incremental-iterativa utilizar o número mínimo de iterações para atingir a convergência.

Na avaliação das tensões emprega-se a lei elástica, mostrada na Tabela 2.1, que depende da derivada da energia potencial livre ψ com relação à parte elástica do tensor de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^e$. No presente trabalho foram considerados materiais isotrópicos com comportamento linear elástico, sendo a contribuição elástica da energia potencial livre:

$$\bar{\rho}\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.9)$$

Resultando a seguinte lei elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.10)$$

As relações constitutivas elastoplásticas mostradas na Tabela 2.1 podem ser reduzidas no seguinte sistema de equações:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma}(t) \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \quad (2.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \dot{\gamma}(t) \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) \geq 0, \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \leq 0, \quad \dot{\gamma}(t)\Phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) = 0 \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \Big|_t, \quad \mathbf{A}(t) = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Big|_t \quad (2.13)$$

Neste sistema de equações reduzidas, as únicas variáveis desconhecidas são a deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, as variáveis internas de encruamento $\boldsymbol{\alpha}$, e o multiplicador plástico $\dot{\gamma}$.

Tabela 2.1 Modelo constitutivo elastoplástico geral.

1. Decomposição aditiva do tensor de deformação:	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$
ou	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$
2. Função de energia potencial livre	$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha})$
onde $\boldsymbol{\alpha}$ representa as variáveis internas de encruamento	
3. Equação constitutiva para o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e forças termodinâmicas de encruamento \boldsymbol{A}	$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad \boldsymbol{A} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}$
4. Função de escoamento	$\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A})$
5. Lei de fluxo plástico e encruamento	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A})$ $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A})$
onde \boldsymbol{N} é o vetor de fluxo	$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
e \boldsymbol{H} é o modulo generalizado de encruamento	$\boldsymbol{H} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{A}}$
sendo Ψ o potencial de fluxo	
6. Critério de carregamento/descarregamento	$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$
condições que definem quando ocorre a evolução de deformações plásticas e variáveis internas	

As equações constitutivas reduzidas apresentadas acima contêm equações diferenciais ordinárias, cuja resolução de forma analítica não é sempre possível devido à complexidade presente na maioria dos problemas de engenharia. Por esta razão, a resolução destas equações precisa de um algoritmo de integração numérica que será abordado no capítulo 3.

Nos modelos constitutivos abordados neste trabalho é perfeitamente válido substituir o tensor de tensões e deformações por o segundo tensor das tensões de Piolla-Kirchhoff e o tensor das deformações de Green-Lagrange, respectivamente. Isto é válido porque na hipótese de grandes deslocamentos e rotações, mas de pequenas deformações nos elementos, as componentes dos tensores mencionados acima não se alteram com movimentos de corpo rígido.

Nesta seção são abordados os aspectos mais importantes da descrição matemática do modelo constitutivo linear elástico e de Von Mises, empregados numa análise não linear. Neste trabalho são discutidos aspectos da plasticidade baseado na hipótese de pequenas deformações, embora grandes deslocamentos e rotações ocorram. Esta hipótese permite uma decomposição aditiva das deformações e aplicar a teoria clássica da plasticidade.

2.1.3.1. Modelo Linear Elástico

O modelo linear elástico adota a Lei de Hooke para definir a relação tensão-deformação. Neste caso não é necessário empregar uma integração das tensões porque as tensões e operador tangente podem ser diretamente avaliados do estado de deformação atual.

A relação tensão-deformação empregada no modelo linear elástico é a mesma da equação (2.10), e pode ser expressa de maneira tensorial como:

$${}^t_0\sigma_{ij} = D_{ijrs}^e {}^t_0\epsilon_{ij} \quad (2.14)$$

Onde D_{ijrs}^e são as componentes do tensor de elasticidade infinitesimal, sendo estas expressas da seguinte forma:

$$D_{ijrs}^e = \lambda\delta_{ij}\delta_{rs} + \mu(\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr}) \quad (2.15)$$

Onde λ e μ são as constante de Lamé e δ_{ij} é a função delta de Kronecker.

2.1.3.2. Modelo Elastoplástico de Von Mises

Aqui são descritos a superfície ou critério de escoamento, a lei de fluxo ou escoamento e a lei de encruamento do modelo elastoplástico de Von Mises. Outros aspectos matemáticos e teóricos podem ser estudados em Souza Neto et al. (2008).

2.1.3.2.1. Superfície de Escoamento

De acordo com o critério de Von Mises, o escoamento começa quando a invariante do tensor desviador J_2 atinge um valor limite. Esta condição pode ser representada como:

$$J_2 = R(\alpha) \quad (2.16)$$

Onde R é função da variável interna de encruamento α , que será definida na Lei de encruamento. De forma alternativa, incluindo a tensão de escoamento uniaxial, a superfície de escoamento de Von Mises pode ser definida através da seguinte função:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2(s(\boldsymbol{\sigma}))} - \sigma_y(\alpha) \quad (2.17)$$

Das equações (2.16) e (2.17) pode-se notar que as componentes do tensor da tensão hidrostática não são levadas em consideração no critério de Von Mises, sendo o escoamento só influenciado pelo tensor da tensão desviadora. Portanto, este critério é incompressível com as deformações plásticas.

A função da superfície de escoamento de Von Mises é uma função isotrópica devido a sua definição em termos das invariantes do tensor de tensões, permitindo assim uma representação da superfície de escoamento em função das tensões principais como é apresentado na Figura 2.2.

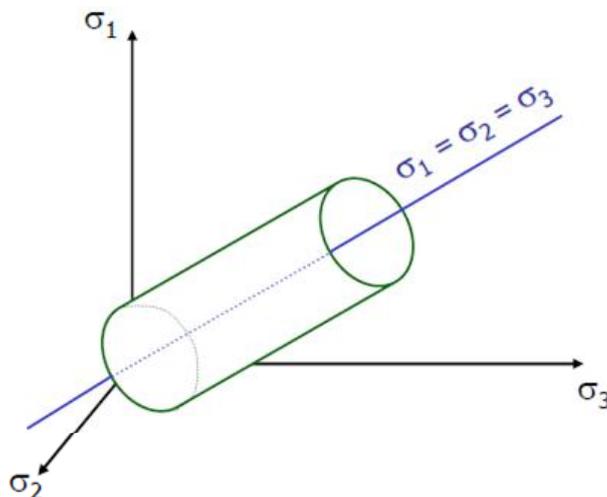


Figura 2.2 Superfície de escoamento de Von Mises.

2.1.3.2.2. Lei de Fluxo

A lei de escoamento de Prandtl-Reuss é a lei de fluxo que considera a função da superfície de escoamento de Von-Mises da equação (2.17) como o potencial de fluxo. Neste caso o vetor de fluxo N é calculado como:

$$N = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [\sqrt{3J_2(\boldsymbol{s})}] = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|} \quad (2.18)$$

Da equação anterior a lei de fluxo resulta na seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|} \quad (2.19)$$

Devido à insensibilidade do critério de Von Mises com as pressões hidrostáticas, o vetor de fluxo do escoamento resulta paralelo à direção desviadora. Isto é mostrado na Figura 2.3.

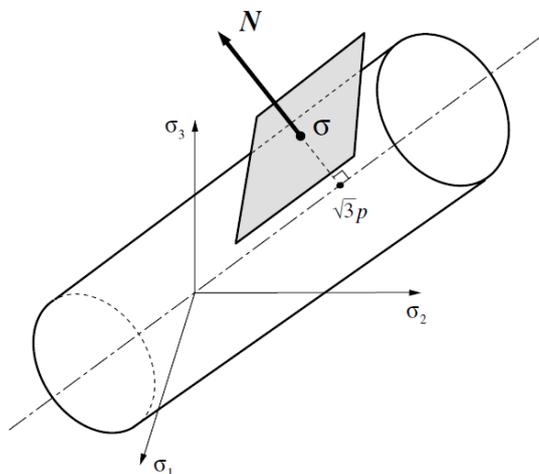


Figura 2.3 Vetor de fluxo da Lei de Prandtl-Reuss (Souza Neto et al., 2008).

A lei do fluxo de Prandtl-Reuss é frequentemente empregada junto à superfície de escoamento do critério de Von Mises, para criar desta maneira o modelo elastoplástico referido como modelo associativo de Von Mises, ou simplesmente o modelo de Von Mises.

2.1.3.2.3. Lei de Encruamento

Considerando encruamento isotrópico a superfície de escoamento cresce ou decresce de forma uniforme em todas as direções. No caso específico do modelo de Von Mises, um aumento ou diminuição no raio do cilindro ocorre. Este fenômeno pode ser ilustrado na Figura 2.4 junto com um teste cíclico uniaxial.

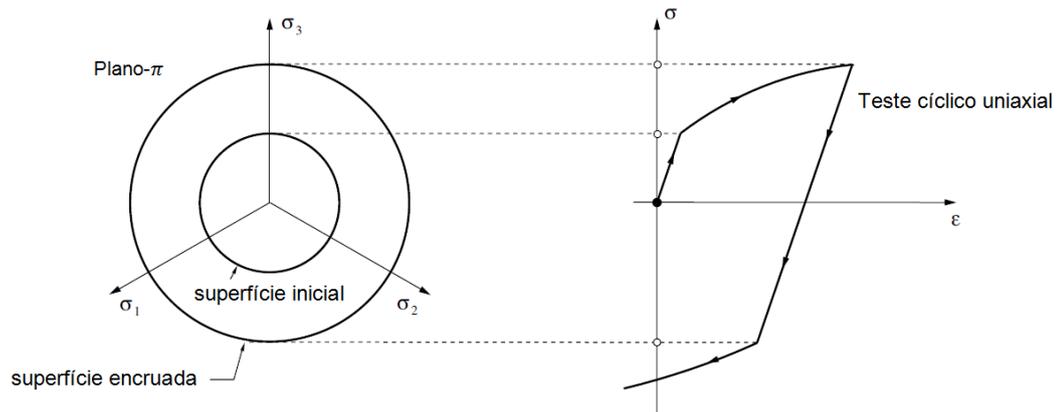


Figura 2.4 Encruamento Isotrópico. Teste uniaxial e Plano π (Souza Neto et al., 2008).

Na descrição constitutiva do encruamento isotrópico emprega-se apenas uma variável escalar para determinar o tamanho da superfície de escoamento. Esta variável do estado interno do encruamento é escolhida como uma medida escalar de deformação. No caso do modelo de Von Mises emprega-se a deformação plástica acumulada definida como:

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}^p\| dt \quad (2.20)$$

A definição acima generaliza a deformação axial plástica acumulada de um modelo unidimensional para um modelo que considera deformações multiaxiais. Empregando a equação (2.19) e a taxa de variação da equação (2.20), encontra-se que:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}^p\| = \dot{\gamma} \quad (2.21)$$

O modelo de Von Mises com encruamento isotrópico é obtido permitindo que a tensão de escoamento uniaxial seja função da deformação plástica acumulada

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) \quad (2.22)$$

Esta função define a curva deformação-encruamento que pode ser obtida através de um teste de tração uniaxial.

2.1.4. Análise Incremental-Iterativa das Equações Não-Lineares

No método dos elementos finitos baseado nos deslocamentos, podemos aproximar o campo contínuo dos deslocamentos através de uma discretização do domínio empregando funções de forma ou interpolação onde as variáveis desconhecidas a calcular são os deslocamentos nodais dos elementos. As funções de interpolação utilizadas numa análise não linear são as mesma empregadas numa análise linear, apresentadas em Felippa (2004) e Cook et al. (1989). Esta aproximação nos deslocamentos pode ser descrita como:

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{H}\mathbf{U}^t = \sum_{k=1}^n h_k(\xi, \eta, \zeta)\mathbf{U}^t \quad (2.23)$$

Substituindo a equação anterior da aproximação dos deslocamentos na equação linearizada do equilíbrio da equação (2.8), obtém-se em forma matricial:

$$(\delta\Delta\mathbf{U})^T \mathbf{K} \Delta\mathbf{U} = (\delta\Delta\mathbf{U})^T (\mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}^t) \quad (2.24)$$

Da equação de acima \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangente, $\mathbf{P}^{t+\Delta t}$ e \mathbf{F}^t são os vetores de forças externa e interna, e $\Delta\mathbf{U}$ é o incremento dos deslocamentos nodais. Sendo a equação (2.24) válida para qualquer incremento dos deslocamentos virtuais nodais $\delta\Delta\mathbf{U}$, obtém-se:

$$\mathbf{K} \Delta\mathbf{U} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}^t \quad (2.25)$$

As equações algébricas resultantes da equação anterior, que surgiram da linearização da equação de equilíbrio, precisam de um processo incremental-

iterativo para assegurar que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas, permitindo assim melhorar a qualidade das soluções.

No processo incremental-iterativo da resolução das equações (2.25), adotou-se uma notação para a j-ésima iteração do i-ésimo incremento de passo da maneira seguinte:

$$[K_{j-1}^i]\{\Delta U_j^i\} = \{P_j^i\} - \{F_{j-1}^i\} \quad (2.26)$$

O vetor de forças externas $\{P_j^i\}$ pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\{P_j^i\} = \{P_{j-1}^i\} + \{\Delta P_j^i\} \quad (2.27)$$

Ou de maneira equivalente:

$$\{P_j^i\} = \{P_{j-1}^i\} + \lambda_j^i \{\hat{P}\} \quad (2.28)$$

Onde λ_j^i é o incremento do fator de carga da j-ésima iteração do i-ésimo incremento de passo, e $\{\hat{P}\}$ é o vetor da carga de referência. Com o incremento dos deslocamentos nodais $\{\Delta U_j^i\}$ resolvido na j-ésima iteração, os deslocamentos nodais totais $\{U_j^i\}$ podem ser obtidos por acumulação da seguinte maneira:

$$\{U_j^i\} = \{U_{j-1}^i\} + \{\Delta U_j^i\} \quad (2.29)$$

Convenientemente denotou-se o vetor de forças desequilibradas $\{R_{j-1}^i\}$ como a seguinte diferença:

$$\{R_{j-1}^i\} = \{P_{j-1}^i\} - \{F_{j-1}^i\} \quad (2.30)$$

Empregando a equação (2.28) e (2.30), a equação (2.26) pode ser rescrita como:

$$[K_{j-1}^i]\{\Delta U_j^i\} = \lambda_j^i \{\hat{P}\} + \{R_{j-1}^i\} \quad (2.31)$$

Por conveniência, pode-se rescrever a equação anterior como duas equações da seguinte maneira:

$$[K_{j-1}^i]\{\Delta\bar{U}_j^i\} = \{\hat{P}\} \quad (2.32)$$

$$[K_{j-1}^i]\{\Delta\bar{U}_j^i\} = \{R_{j-1}^i\} \quad (2.33)$$

Resolvendo as equações acima pode-se obter o incremento dos deslocamentos nodais da seguinte forma:

$$\{\Delta U_j^i\} = \lambda_j^i \{\Delta\bar{U}_j^i\} + \{\Delta\bar{U}_j^i\} \quad (2.34)$$

A seguir descrevem-se as equações de restrição dos métodos mais empregados na resolução das equações não lineares. Estas equações permitem determinar o valor do incremento do fator de carga λ_j^i . Dentro dos métodos a mencionar descreve-se o método de controle de carga, controle de deslocamento e controle por comprimento de arco.

2.1.4.1. Método de Controle de Carga

Na literatura, frequentemente denominado como o Método de Newton-Raphson, sendo provavelmente o método iterativo mais antigo que ainda é amplamente empregado. Neste método as cargas externas são acrescentadas em uma quantidade constante apenas na primeira iteração do incremento de passo. Nas iterações seguintes, as cargas externas são mantidas, ou seja, o incremento de carga é zero dentro de um mesmo passo. A equação de restrição do método pode ser expressa como:

$$\lambda_j^i = \begin{cases} \text{constante} & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (2.35)$$

Detalhes das vantagens e limitações do método são descritas por McGuire et al. (2000) e Yang and Kuo (1994).

2.1.4.2. Método de Controle de Deslocamento

Neste método precisa-se escolher uma componente particular de deslocamento, denotado como a q -ésima componente, para ser o parâmetro de controle nas iterações. Denotando ΔU_{qj}^i como o incremento do deslocamento da q -ésima componente associada com a j -ésima iteração, a equação de restrição poder ser expressa como:

$$\Delta U_{qj}^i = \begin{cases} \text{constante} & \text{para } j = 1 \\ 0 & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (2.36)$$

Neste método, na primeira iteração do incremento de passo, é acrescentada uma quantidade constante na componente de deslocamento escolhida. Nas iterações restantes do passo, o incremento é zero. Esta equação de restrição pode ser expressa em termos do incremento do fator de carga como:

$$\lambda_j^i = \begin{cases} \frac{\Delta U_{qj}^i}{\Delta \bar{U}_{qj}^i} & \text{para } j = 1 \\ -\frac{\Delta \bar{U}_{qj}^i}{\Delta \bar{U}_{qj}^i} & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Claramente, as cargas externas não são mantidas constantes durante o processo iterativo. Detalhes das vantagens e limitações do método são descritas por McGuire et al. (2000) e Yang and Kuo (1994).

2.1.4.3. Método de Controle por Comprimento de Arco

Neste trabalho é abordado só o Método de controle por comprimento de arco cilíndrico. A equação de restrição deste método pode ser expressa como:

$$(\mathbf{U}_0^i + \Delta \mathbf{U}_j^i)^T (\mathbf{U}_0^i + \Delta \mathbf{U}_j^i) = l^2 \quad (2.38)$$

Neste caso, requer-se que a norma Euclidiana do incremento total de deslocamento no passo seja igual a l , i.e., que a solução no final do incremento fique na interseção entre a trajetória de equilíbrio e um cilindro de raio l centrado

na configuração de equilíbrio do início do incremento. Esta equação de restrição pode ser expressa em termos do incremento do fator de carga como:

$$\lambda_j^i = \begin{cases} \pm \frac{l}{\sqrt{\Delta \bar{\mathbf{U}}_1^i T \Delta \bar{\mathbf{U}}_1^i}} & \text{para } j = 1 \\ \max_{a\lambda_j^i{}^2 + b\lambda_j^i + c = 0} \left\{ (\mathbf{U}_0^i + \Delta \mathbf{U}_j^i)^T (\mathbf{U}_0^i + \Delta \mathbf{U}_{j-1}^i) \right\} & \text{para } j \geq 2 \end{cases} \quad (2.39)$$

Onde os coeficientes da equação de segundo grau são:

$$\begin{aligned} a &= \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^i T \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^i \\ b &= 2(\mathbf{U}_0^i + \Delta \mathbf{U}_{j-1}^i + \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^i)^T \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^i \\ c &= (\mathbf{U}_0^i + \Delta \mathbf{U}_{j-1}^i + \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^i)^T (\mathbf{U}_0^i + \Delta \mathbf{U}_{j-1}^i + \Delta \bar{\mathbf{U}}_j^i) - l^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Detalhes das vantagens e limitações do método são descritas por Souza Neto et al. (2008) e Paullo and Roehl (2012).

2.2. Análise incremental da Carga Crítica

A análise de autovalores pode ser utilizada junto com uma análise não linear completa, formulando o problema de autovalor após cada incremento de carga. Esta técnica, baseada nas matrizes de rigidez incrementais, é considerada como uma análise não linear embora seja empregada uma análise linearizada de autovalores em cada passo.

Considerando uma estrutura sujeita a um carregamento $\{\mathbf{P}\}$ e um estado de tensões e deslocamentos atuais $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\boldsymbol{\sigma}\}$, respectivamente, o problema de autovalor após um incremento de carga $\omega\{\Delta \mathbf{P}\}$ pode ser formulado da seguinte maneira:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) + \omega \Delta \mathbf{K}_G(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\sigma})] \{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.41)$$

Sendo \mathbf{K} a matriz de rigidez total no início do incremento e $\Delta \mathbf{K}_G$ o incremento da matriz de rigidez geométrica no incremento de carga $\{\Delta \mathbf{P}\}$. Nesta equação, $\Delta \mathbf{K}_G$ é assumida como uma função linear do incremento de carga $\{\Delta \mathbf{P}\}$ para causar a condição crítica. O incremento da rigidez geométrica $\Delta \mathbf{K}_G$ empregada na estimativa da carga crítica está baseado nos incrementos das tensões e deslocamentos $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \boldsymbol{\sigma}$, respectivamente, em relação ao início do

incremento. No entanto, os estados de tensão e deformação não são atualizados durante a análise desta técnica de colapso. Segundo Dupuis et al. (1970), o incremento da matriz de rigidez geométrica é:

$$\Delta K_G(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \Delta K_1(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \Delta K_2(\Delta \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.42)$$

Sendo ΔK_2 o incremento da matriz de rigidez das tensões iniciais e ΔK_1 o incremento da matriz de rigidez dos deslocamentos iniciais. Segundo Waszczyszyn et al. (1994), o incremento da matriz de rigidez geométrica é:

$$\Delta K_G(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \Delta K u_1(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \Delta K_2(\Delta \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.43)$$

Sendo ΔK_2 a mesma matriz da equação (2.42) e $\Delta K u_1(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u})$ o incremento da parte linear nos deslocamentos da matriz de rigidez dos deslocamentos iniciais $\Delta K_1(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u})$. Se os termos do incremento desta matriz não forem considerados na equação (2.43), obtém-se o incremento da matriz de rigidez geométrica clássica:

$$\Delta K_G(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \Delta K_2(\Delta \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.44)$$

2.3. Análise Linearizada da Carga Crítica

Na análise linearizada da carga crítica é considerado todo o comportamento da estrutura como linear antes do colapso. Através desta consideração, o problema de autovalor da análise linearizada pode ser obtido como um caso especial da análise incremental de carga crítica. Nesta análise os valores das tensões iniciais $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ e deslocamentos iniciais $\{\mathbf{u}\}$ são considerados nulos no início do incremento. Além disto, os efeitos dos deslocamentos iniciais não são levados em consideração no incremento da matriz de rigidez geométrica ΔK_G , sendo só considerados os efeitos do incremento da matriz de rigidez das tensões iniciais ΔK_2 . A equação do problema de autovalor para estimar a carga crítica numa análise linearizada, conhecida na literatura como a equação da carga de flambagem de Euler, é descrita como:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + \omega \Delta K_2(\Delta \boldsymbol{\sigma})]\{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.45)$$