

4 Exemplos Numéricos

Nos exemplos a serem apresentados, mostram-se os efeitos da consideração das não linearidades geométrica e física na estimativa de cargas críticas. Para um melhor estudo da influência dos efeitos não lineares, estudou-se primeiro estruturas que incluem só não-linearidade geométrica e um comportamento linear-elástico do material. A seguir foram estudadas estruturas que incluem além da não linearidade geométrica a não linearidade física, considerando um comportamento elastoplástico do material. Na estimativa de cargas críticas empregaram-se as três técnicas de análise estudadas: Análise linearizada da carga crítica, Análise incremental da carga crítica e Análise não linear completa. Na técnica de análise incremental da carga crítica empregaram-se as matrizes de rigidez geométrica K_G formuladas nos métodos da seção 2.2. Para um melhor estudo e comparação das matrizes formuladas, os métodos de Dupuis et al. (1970), Waszczyszyn et al. (1994) e o método clássico atualizado foram denominados como método I, método II e método III, respectivamente. Antes de empregar as técnicas de análise estudadas, foi feito um estudo de convergência de malha nos problemas a serem abordados.

4.1. Estimação de cargas críticas com Material Linear Elástico

Nesta seção são estudados três exemplos encontrados na literatura: um arco circular abatido, um arco circular elevado e um pórtico T.

4.1.1. Arco circular abatido

Um arco circular abatido com extremos fixos é carregado em sua parte central com uma força concentrada, como é mostrado na Figura 4.1. A geometria e propriedades do arco, empregadas na análise, são mostradas na mesma figura. Utiliza-se uma malha composta por 20 elementos isoparamétricos Q9, na direção circunferencial, com nove 9 pontos de integração. A malha empregada no arco é mostrada na Figura 4.2.

A precisão da solução numérica, na obtenção da trajetória de equilíbrio, pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Yaw (2008). Neste problema será estimada a carga crítica associada ao ponto limite da trajetória de equilíbrio.

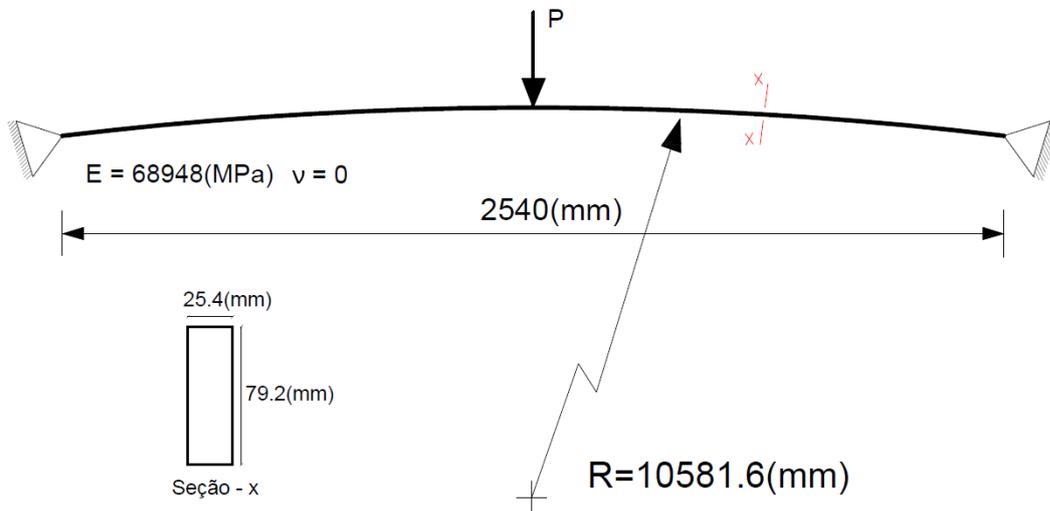


Figura 4.1 Arco circular abatido do exemplo 4.1.1.

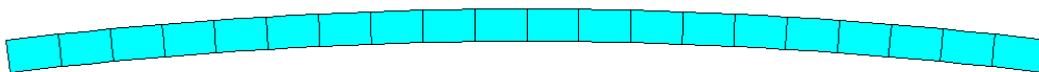


Figura 4.2 Malha do arco abatido do exemplo 4.1.1.

Empregando a técnica da análise linearizada da carga crítica obtém-se um valor numérico de 78.3kN na estimativa da carga. A configuração deformada relacionada ao primeiro modo de colapso, obtida através desta técnica, é mostrada na Figura 4.3. A configuração obtida é assimétrica.

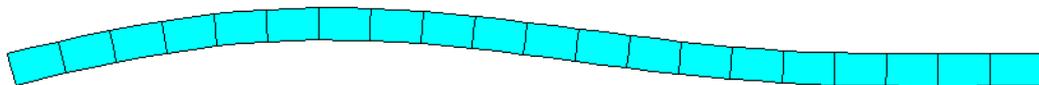


Figura 4.3 Modo de colapso do exemplo 4.1.1 (análise linearizada da carga crítica).

Na análise incremental da carga crítica aplicou-se uma carga de 26kN em 26 passos, sendo estimado o valor da carga crítica após cada passo. Os resultados obtidos após os passos 10, 15, 20, 23 e 26; são resumidos na Tabela 4.1, Tabela 4.2 e Tabela 4.3, respectivamente. Na avaliação dos resultados empregou-se um incremento de carga ΔP de 1kN.

Tabela 4.1 Cargas críticas obtidas do método I no exemplo 4.1.1.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kN)	ΔP (kN)	ω	Carga crítica (kN)
10	9	1	24.40	33.4
15	14	1	17.52	31.5
20	19	1	10.48	29.5
23	22	1	6.12	28.1
26	25	1	1.31	26.3

Tabela 4.2 Cargas críticas obtidas do método II no exemplo 4.1.1.

$$[K_0 + \omega(\Delta K u_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kN)	ΔP (kN)	ω	Carga crítica (kN)
10	9	1	21.30	30.3
15	14	1	13.80	27.8
20	19	1	7.10	26.1
23	22	1	3.58	25.6
26	25	1	0.54	25.5

Tabela 4.3 Cargas críticas obtidas do método III no exemplo 4.1.1.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kN)	ΔP (kN)	ω	Carga crítica (kN)
10	9	1	58.20	67.2
15	14	1	46.31	60.3
20	19	1	32.89	51.9
23	22	1	20.97	43.0
26	25	1	4.08	29.1

A partir dos resultados da análise incremental da carga crítica, observou-se que nos métodos I e II todos os modos de colapso obtidos após os passos são simétricos. Entretanto, no caso do método III os modos de colapso obtidos após os passos 10, 15 e 20 são assimétricos como no caso prévio da análise linearizada da carga crítica, enquanto os modos de colapso obtidos após os passos 23 e 26 são simétricos como os modos obtidos nos métodos I e II. Os valores estimados das cargas críticas nos métodos I, II e III, após o passo 26, foram de 26.3kN, 25.5kN e 29.1kN, respectivamente. Os modos de colapso obtidos, após o passo 26, são muito parecidos nos três métodos. Na Figura 4.4 é mostrada a configuração deformada do primeiro modo de colapso obtido após este passo, empregando o método III da análise incremental da carga crítica.



Figura 4.4 Modo de colapso do exemplo 4.1.1, após o passo 26.

Finalmente, empregou-se a análise não linear completa para estimar o valor da carga crítica. Através desta técnica obteve-se um valor numérico de 26.1kN para a carga crítica e a trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 4.5. A configuração deformada do arco abatido na carga crítica é mostrada na Figura 4.6.

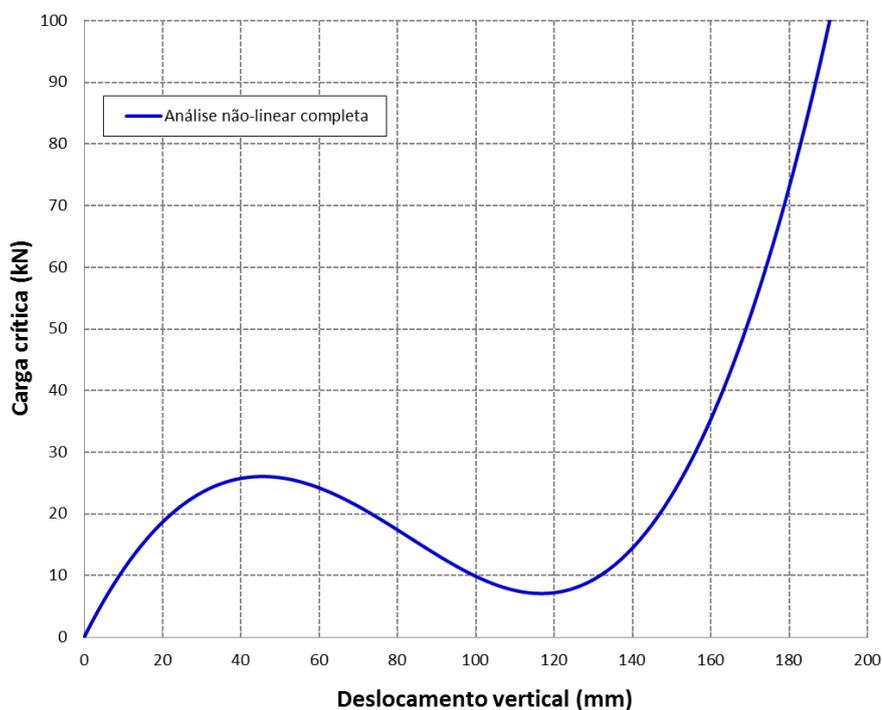


Figura 4.5 Trajetória de equilíbrio do exemplo 4.1.1.

Os valores obtidos nas três técnicas apresentam diferenças na estimativa do valor da carga crítica. As diferenças também estão presentes nos três métodos abordados na análise incremental da carga crítica. Na Figura 4.7 são mostrados os valores obtidos para a carga crítica.



Figura 4.6 Configuração deformada do exemplo 4.1.1 (análise não linear completa).

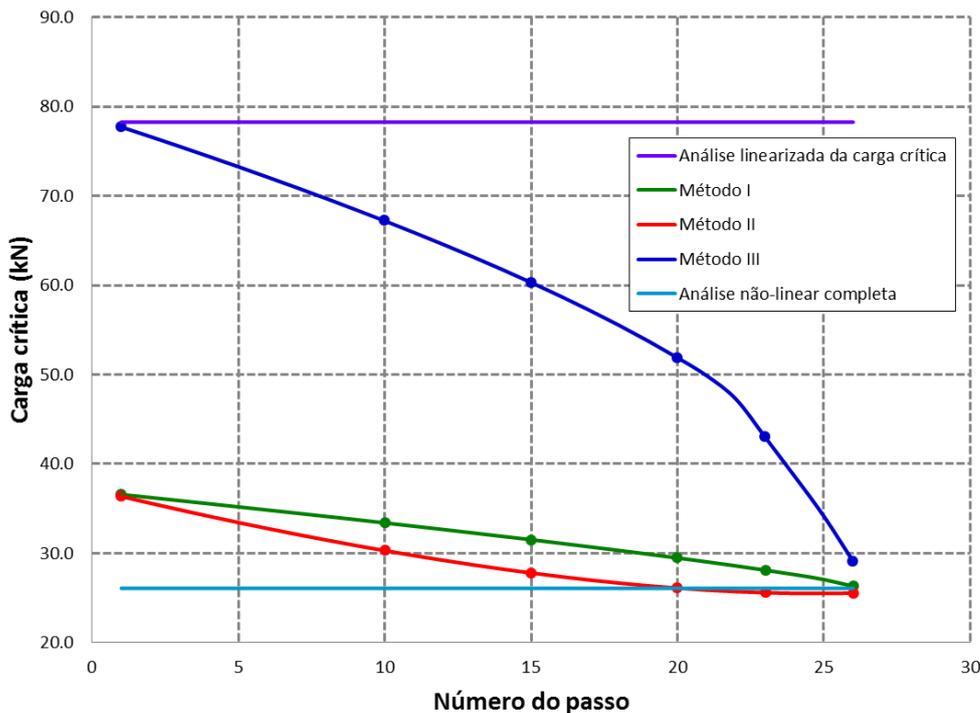


Figura 4.7 Valores obtidos para a carga crítica no exemplo 4.1.1.

Da Figura 4.7 pode-se observar que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica, convergem para um valor próximo do valor obtido na análise não linear completa. Neste exemplo, os métodos I e II apresentam uma convergência melhor e mais rápida que a do método III. Pode-se observar também que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica e análise não linear completa diferem significativamente do valor obtido na análise linearizada da carga crítica. Esta diferença entre os valores obtidos pode ser devido à mudança da geometria e distribuição das tensões. As tensões equivalentes de Von Mises, para o caso linear e não linear, são mostradas na Figura B.1 e Figura B.2 do Apêndice B, respectivamente.

4.1.2. Arco circular elevado

Um arco circular elevado com extremos fixos é carregado em sua parte central com uma força concentrada, como é mostrado na Figura 4.8. A geometria e propriedades do arco, empregadas na análise, são mostradas na mesma figura. Utiliza-se uma malha composta por 80 elementos isoparamétricos Q9, na direção circunferencial, com nove 9 pontos de integração. A malha empregada neste exemplo é mostrada na Figura 4.9.

A precisão da solução numérica, na obtenção da trajetória de equilíbrio, pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Battini (2002). Neste problema serão estimadas as cargas críticas associadas ao ponto de bifurcação e ponto limite da trajetória de equilíbrio.

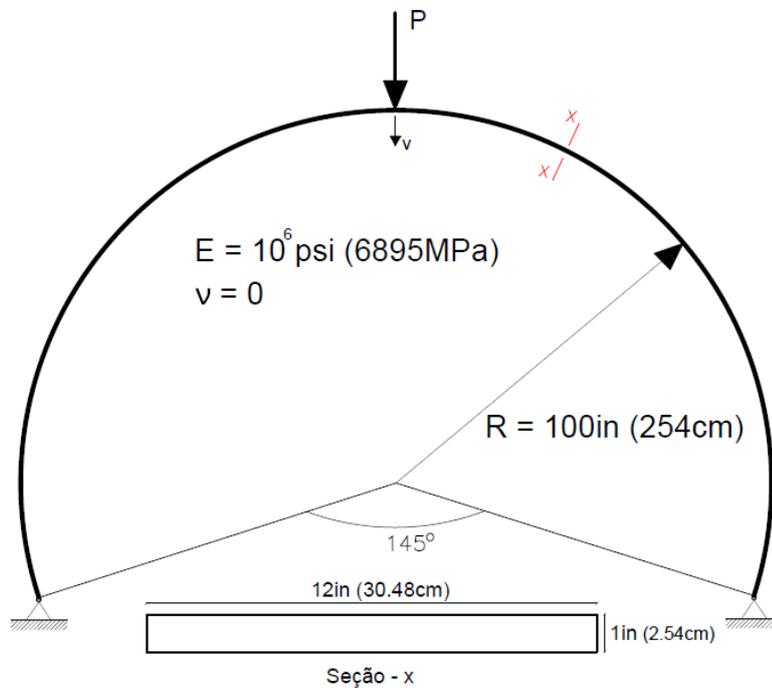


Figura 4.8 Arco circular elevado do exemplo 4.1.2.

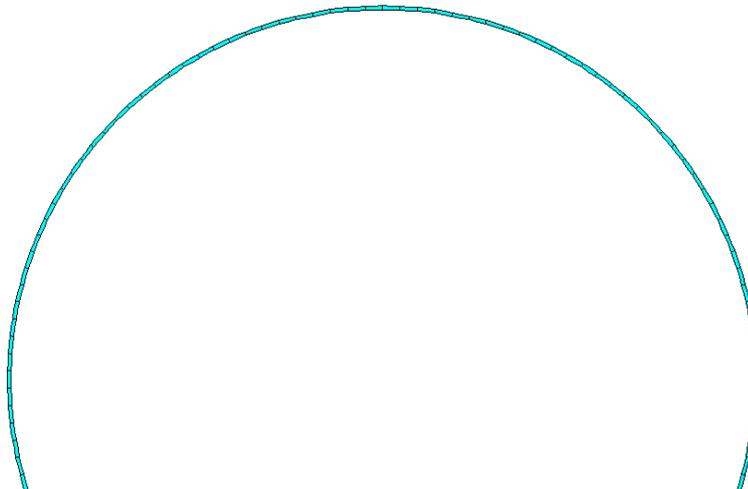


Figura 4.9 Malha do arco elevado do exemplo 4.1.2.

Neste exemplo, primeiro será estimada a carga crítica relacionada ao ponto de bifurcação associada à configuração deformada assimétrica. A seguir será estimada a carga crítica relacionada ao ponto limite associada à configuração deformada simétrica.

4.1.2.1.

Estimativa da carga crítica associada ao ponto de bifurcação

Empregando a técnica da análise linearizada da carga crítica obtém-se um valor numérico de 357.1lbf (1588.5N) na estimação da carga. A configuração deformada relacionada ao primeiro modo de colapso, obtida através desta técnica, é mostrada na Figura 4.10. A configuração obtida é assimétrica.

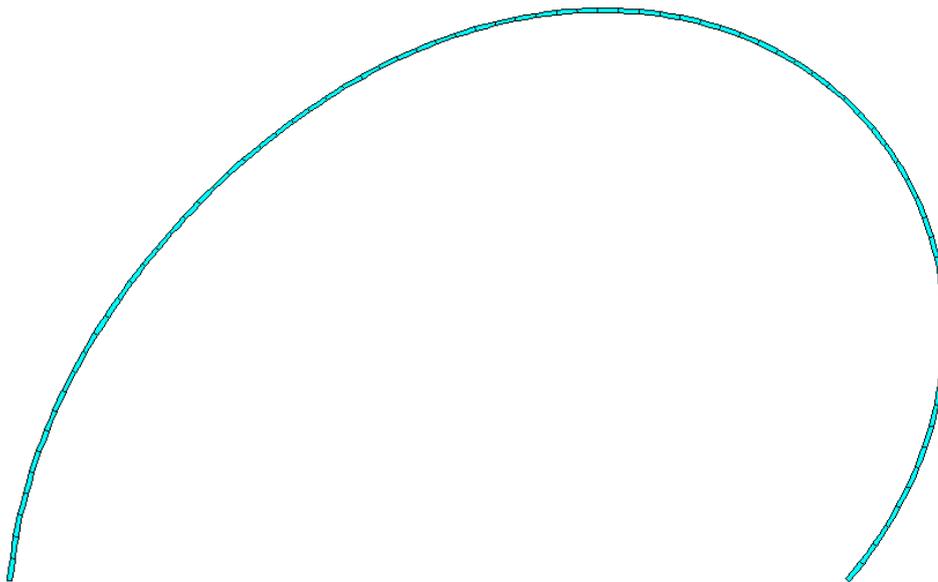


Figura 4.10 Modo assimétrico do exemplo 4.1.2 (análise linearizada da carga crítica).

Na análise incremental da carga crítica aplicou-se uma carga de 320lbf (1423.4N) em 32 passos, sendo estimado o valor da carga crítica após cada passo. Os resultados obtidos após os passos 10, 15, 20, 27 e 32; são resumidos na Tabela 4.4, Tabela 4.5 e Tabela 4.6, respectivamente. Na avaliação dos resultados empregou-se um incremento de carga ΔP de 10lbf (44.5N).

Tabela 4.4 Cargas críticas obtidas do método I no exemplo 4.1.2 (assimétrico).

$[K_0 + \omega(\Delta K_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$				
Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
10	90	10	1.22	102.2
15	140	10	1.16	151.6
20	190	10	1.11	201.1
27	260	10	1.04	270.4
32	310	10	1.01	320.1

Tabela 4.5 Cargas críticas obtidas do método II no exemplo 4.1.2 (assimétrico).

$$[K_0 + \omega(\Delta K u_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
10	90	10	0.0164	90.2
15	140	10	0.0076	140.1
20	190	10	0.0038	190.0
27	260	10	0.0012	260.0
32	310	10	0.0002	310.0

Tabela 4.6 Cargas críticas obtidas do método III no exemplo 4.1.2 (assimétrico).

$$[K_0 + \omega(\Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
10	90	10	25.36	343.6
15	140	10	19.72	337.2
20	190	10	14.20	332.0
27	260	10	6.75	327.5
32	310	10	1.72	327.2

A partir dos resultados da análise incremental da carga crítica, observou-se que nos três métodos todos os modos de colapso obtidos após os passos são assimétricos como no caso prévio da análise linearizada da carga crítica. Os valores estimados das cargas críticas nos métodos I, II e III, após o passo 32, foram de 320.1lbf (1423.9N), 310lbf (1378.9N) e 327.2lbf (1455.5N), respectivamente. Os modos de colapso obtidos, após o passo 32, são muito parecidos nos três métodos. Na Figura 4.11 é mostrada a configuração deformada do primeiro modo de colapso obtido após este passo, empregando o método III da análise incremental da carga crítica.

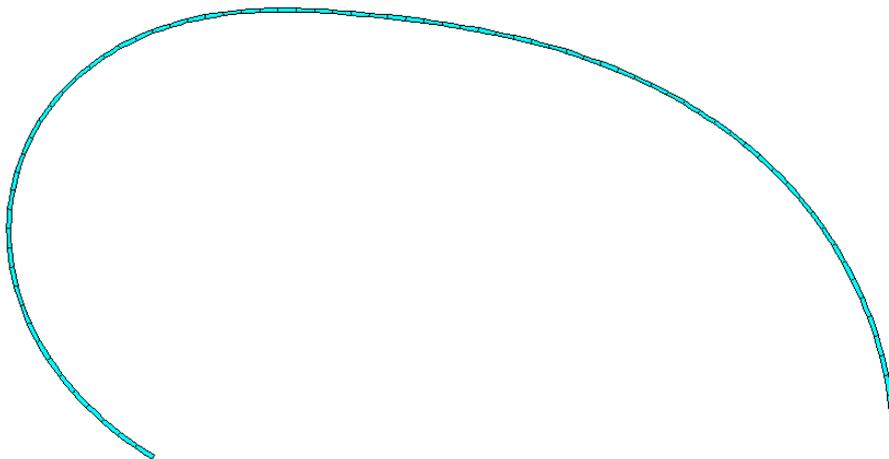


Figura 4.11 Modo assimétrico do exemplo 4.1.2, após o passo 32.

Finalmente, empregou-se a análise não linear completa para estimar o valor da carga crítica. Na avaliação desta carga crítica empregou-se uma imperfeição inicial na geometria, proporcional ao primeiro modo obtido da análise linearizada da carga crítica. Através desta técnica obteve-se um valor numérico de 320.8lbf (1427.0N) para a carga crítica e a trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 4.12. Também foi estimado um valor numérico de 414.0lbf (1841.6N) para a carga crítica relacionada ao ponto limite da trajetória de equilíbrio secundária. A configuração deformada assimétrica do arco elevado nesta carga crítica é mostrada na Figura 4.13.

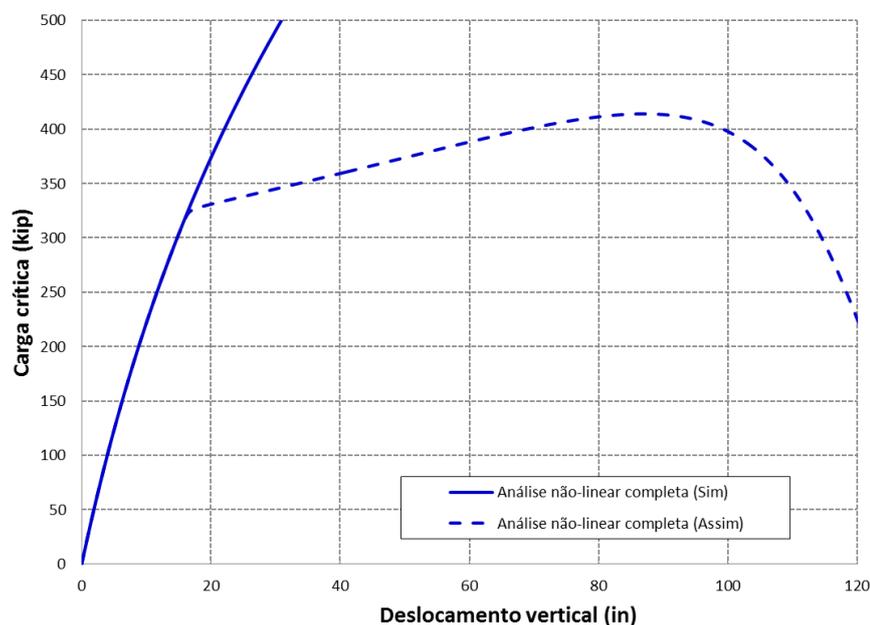


Figura 4.12 Trajetória de equilíbrio assimétrica do exemplo 4.1.2.

Os valores obtidos nas três técnicas apresentam diferenças na estimativa do valor da carga crítica. As diferenças também estão presentes nos três métodos abordados na análise incremental da carga crítica. Na Figura 4.14 são mostrados os valores obtidos para a carga crítica.

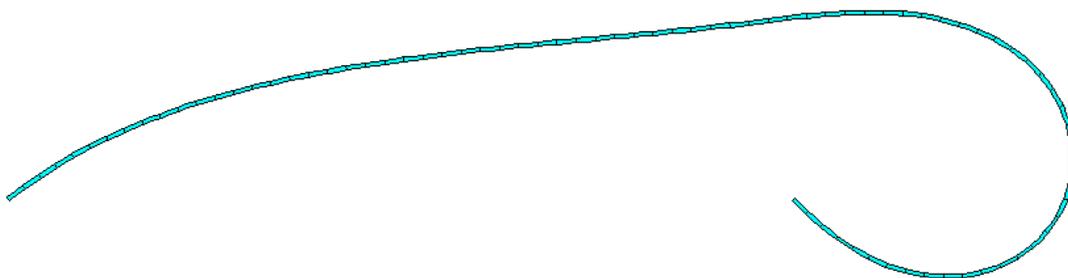


Figura 4.13 Deformada assimétrica do exemplo 4.1.2 (análise não linear completa).

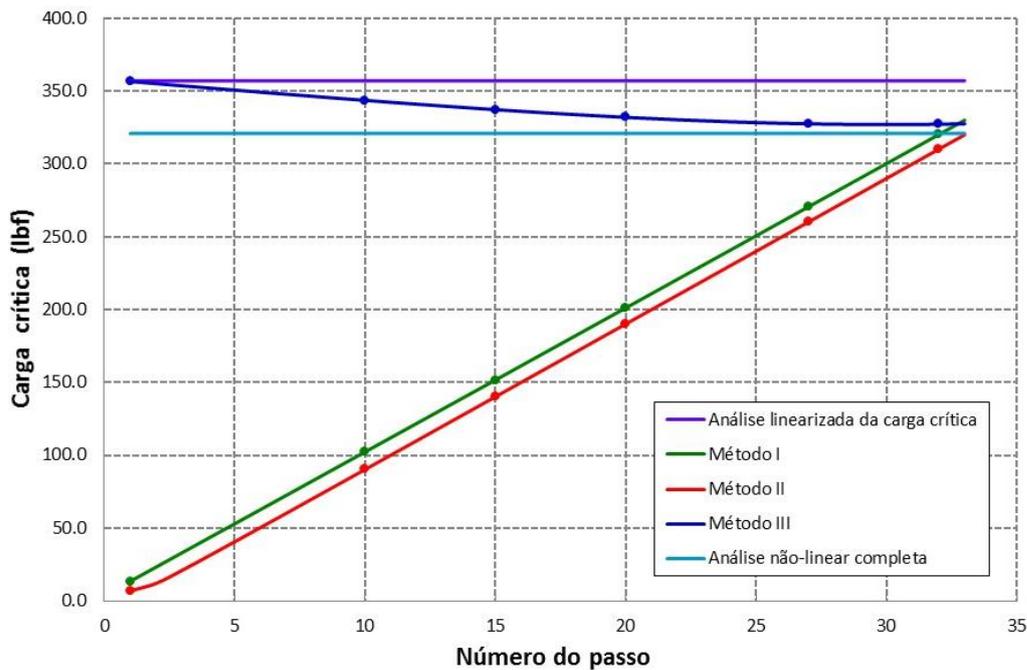


Figura 4.14 Valores obtidos para a carga crítica no exemplo 4.1.2 (assimétrico).

Da Figura 4.14 pode-se observar que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica, convergem para um valor próximo do valor obtido na análise não linear completa. Neste exemplo, os métodos I e II apresentam uma convergência mais lenta que a do método III. Pode-se observar também que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica e análise não linear completa não diferem significativamente do valor obtido na análise linearizada da carga crítica. Esta diferença não significativa entre os valores obtidos pode ser devido à mudança não significativa da geometria e distribuição das tensões. As tensões equivalentes de Von Mises, para o caso linear e não linear, são mostradas na Figura B.3 e Figura B.4 do Apêndice B, respectivamente.

4.1.2.2.

Estimativa da carga crítica associada ao ponto limite

Neste exemplo a carga crítica estimada, relacionada ao ponto limite, está associada à trajetória de equilíbrio fundamental. Na estimação desta carga só foram empregadas as técnicas de análise incremental da carga crítica e análise não linear completa.

Na análise incremental da carga crítica aplicou-se uma carga de 950lbf (4225.8N) em 95 passos, sendo estimado o valor da carga crítica após cada passo. Os resultados obtidos após os passos 60, 70, 80, 90 e 95; são resumidos na Tabela 4.7, Tabela 4.8 e Tabela 4.9, respectivamente. Na avaliação dos resultados empregou-se um incremento de carga ΔP de 10lbf (44.5N).

Tabela 4.7 Cargas críticas obtidas do método I no exemplo 4.1.2 (simétrico).

$$[K_0 + \omega(\Delta K_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
60	590	10	0.14	591.4
70	690	10	0.17	691.7
80	790	10	0.19	791.9
90	890	10	0.08	890.8
95	940	10	0.01	940.1

Tabela 4.8 Cargas críticas obtidas do método II no exemplo 4.1.2 (simétrico).

$$[K_0 + \omega(\Delta K u_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
60	590	10	0.00198	590.0
70	690	10	0.00124	690.0
80	790	10	0.00070	790.0
90	890	10	0.00026	890.0
95	940	10	0.00006	940.0

Tabela 4.9 Cargas críticas obtidas do método III no exemplo 4.1.2 (simétrico).

$$[K_0 + \omega(\Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
60	590	10	128.03	1870.3
70	690	10	98.83	1678.3
80	790	10	70.98	1499.8
90	890	10	40.60	1296.0
95	940	10	9.08	1030.8

A partir dos resultados da análise incremental da carga crítica, observou-se que nos métodos II e III todos os modos de colapso obtidos após os passos são simétricos, enquanto no caso do método I todos os modos de colapso obtidos após os passos são assimétricos. Os valores estimados das cargas críticas nos métodos I, II e III, após o passo 95, foram de 940.1lbf (4181.8N), 940.0lbf

(4181.3N) e 1030.8lbf (4585.2N), respectivamente. Os modos de colapso obtidos, após o passo 95, são muito parecidos nos métodos II e III. Na Figura 4.15 é mostrada a configuração deformada do primeiro modo de colapso obtido após este passo, empregando o método III da análise incremental da carga crítica.

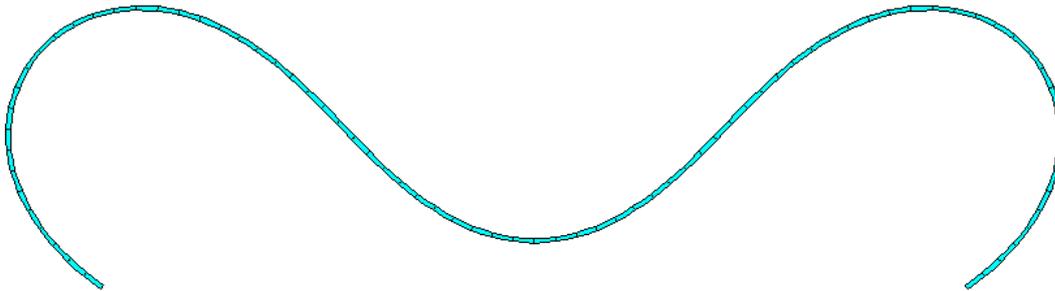


Figura 4.15 Modo de colapso do exemplo 4.1.2, após o passo 95.

Finalmente, empregou-se a análise não linear completa para estimar o valor da carga crítica. Através desta técnica obteve-se um valor numérico de 957.2lbf (4257.8N) para a carga crítica e a trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 4.16. A configuração deformada simétrica do arco elevado na carga crítica é mostrada na Figura 4.17.

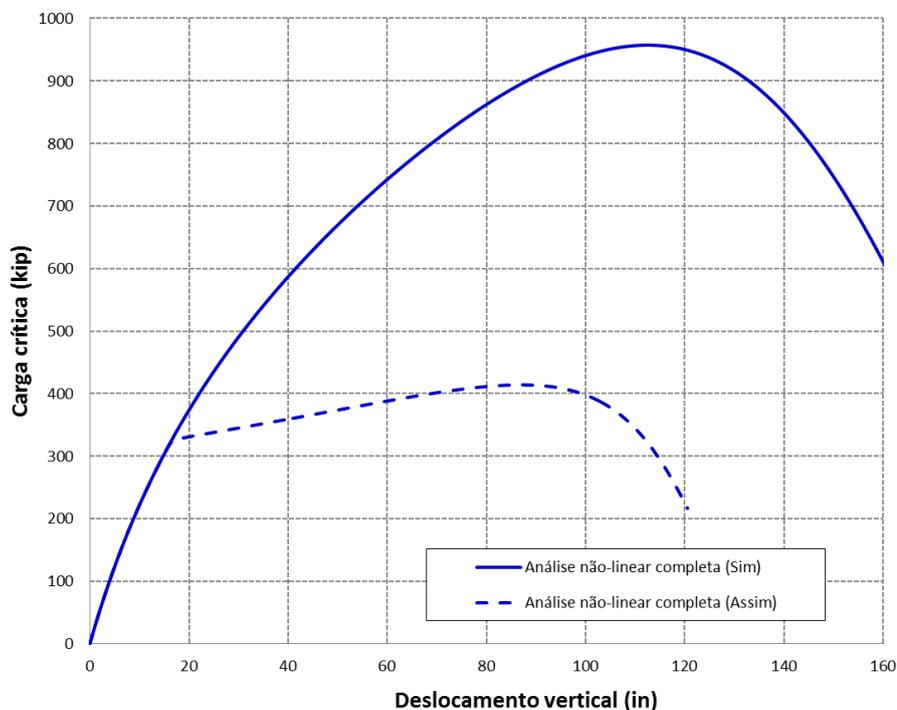


Figura 4.16 Trajetória de equilíbrio simétrica do exemplo 4.1.2.

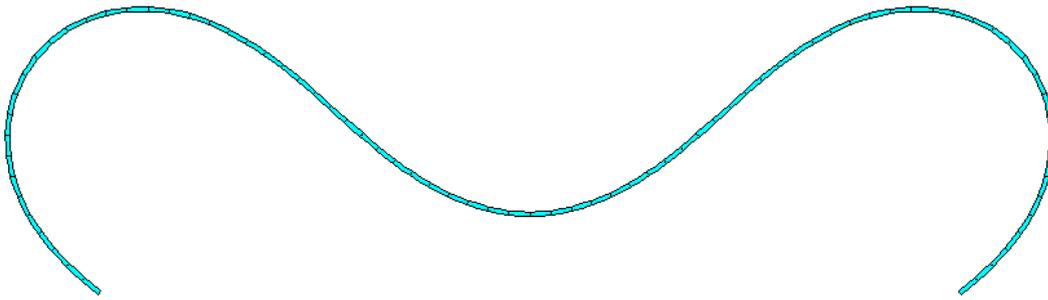


Figura 4.17 Deformada simétrica do exemplo 4.1.2 (análise não linear completa).

Os valores obtidos nas duas técnicas apresentam diferenças na estimativa do valor da carga crítica. As diferenças também estão presentes nos três métodos abordados na análise incremental da carga crítica. Na Figura 4.18 são mostrados os valores obtidos para a carga crítica.

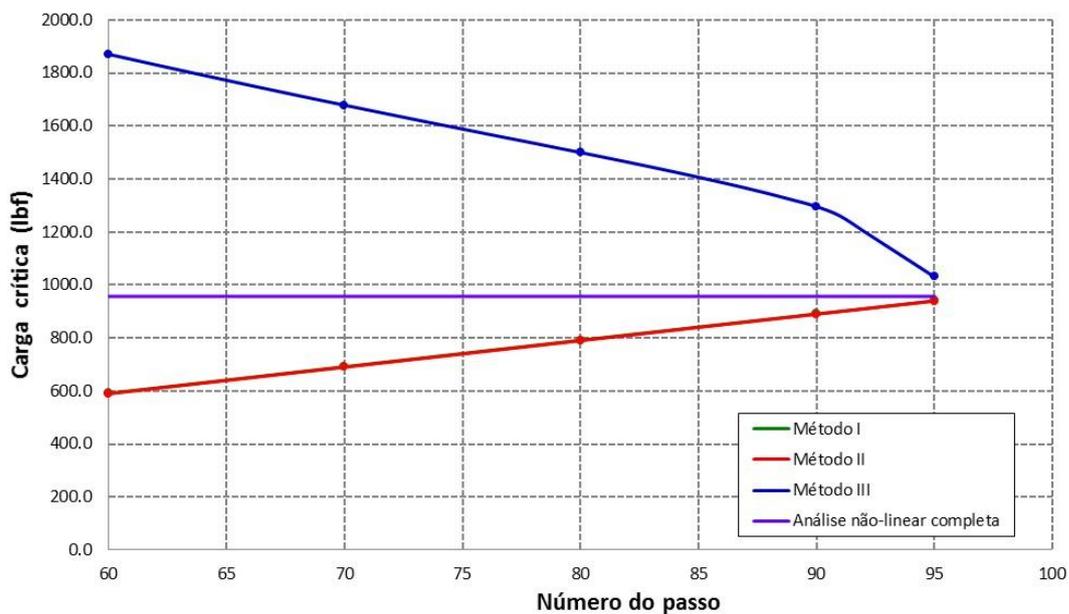


Figura 4.18 Valores obtidos para a carga crítica no exemplo 4.1.2 (simétrico).

Da Figura 4.18 pode-se observar que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica, convergem para um valor próximo do valor obtido na análise não linear completa. Neste exemplo, os métodos I e II apresentam valores muito semelhantes, com uma convergência melhor e mais rápida que a do método III.

4.1.3. Pórtico T

Um pórtico T é carregado com uma força concentrada, como é mostrado na Figura 4.19. A geometria e propriedades do pórtico, empregadas na análise, são mostradas na mesma figura. Utiliza-se uma malha composta por 31 elementos isoparamétricos Q9, discretizados na direção do comprimento dos elementos, com nove 9 pontos de integração. A malha empregada no pórtico é mostrada na Figura 4.20. A precisão da solução numérica, na obtenção da trajetória de equilíbrio, pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Yaw (2008). Neste problema serão estimadas a cargas críticas associadas ao ponto limite da trajetória de equilíbrio.

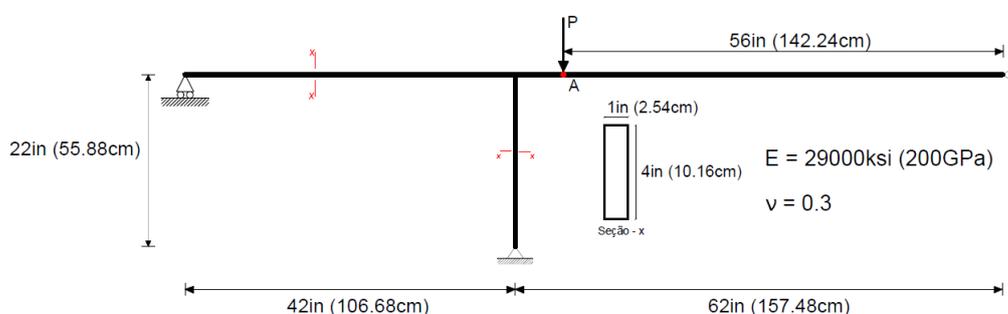


Figura 4.19 Pórtico T do exemplo 4.1.3.

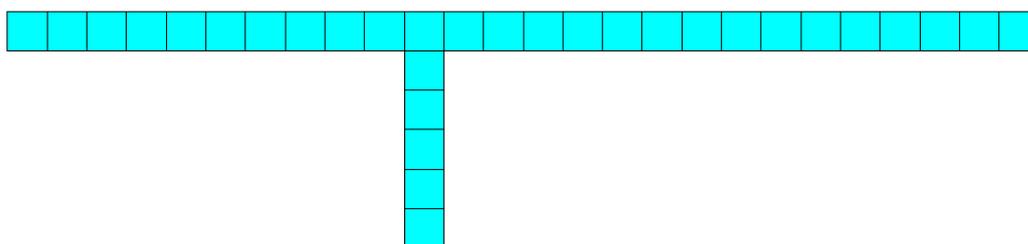


Figura 4.20 Malha do pórtico T do exemplo 4.1.3.

Empregando a técnica da análise linearizada da carga crítica obtém-se um valor numérico de 3044.3kip (13541.7kN) na estimativa da carga. A configuração deformada relacionada ao primeiro modo de colapso, obtida através desta técnica, é mostrada na Figura 4.21.

Na análise incremental da carga crítica aplicou-se uma carga de 1250kip (5560.3kN) em 50 passos, sendo estimado o valor da carga crítica após cada passo do incremento.

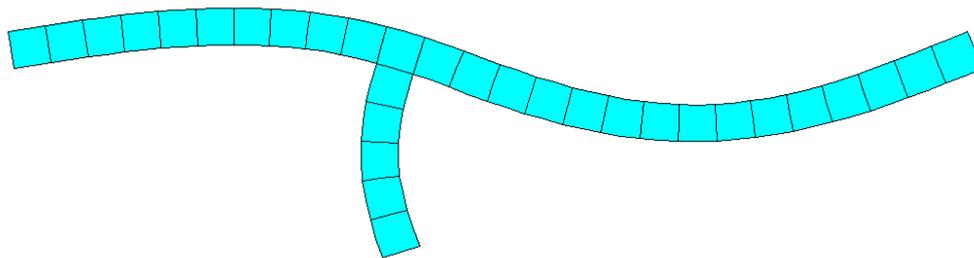


Figura 4.21 Modo de colapso do exemplo 4.1.3 (análise linearizada da carga crítica).

Os resultados obtidos após os passos 20, 35, 42, 47 e 50; são resumidos na Tabela 4.10, Tabela 4.11 e Tabela 4.12, respectivamente. Na avaliação dos resultados empregou-se um incremento de carga ΔP de 25kip (111.2kN).

Tabela 4.10 Cargas críticas obtidas do método I no exemplo 4.1.3.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kip)	ΔP (kip)	ω	Carga crítica (kip)
20	475	25	10.69	742.2
35	850	25	6.31	1007.7
42	1025	25	4.17	1129.2
47	1150	25	2.41	1210.3
50	1225	25	1.14	1253.4

Tabela 4.11 Cargas críticas obtidas do método II no exemplo 4.1.3.

$$[K_0 + \omega(\Delta K u_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kip)	ΔP (kip)	ω	Carga crítica (kip)
20	475	25	3.38	559.5
35	850	25	0.87	871.9
42	1025	25	0.37	1034.4
47	1150	25	0.14	1153.4
50	1225	25	0.03	1225.6

Tabela 4.12 Cargas críticas obtidas do método III no exemplo 4.1.3.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kip)	ΔP (kip)	ω	Carga crítica (kip)
20	475	25	101.73	3018.3
35	850	25	68.16	2554.0
42	1025	25	41.16	2054.0
47	1150	25	19.03	1625.8
50	1225	25	4.66	1341.4

A partir dos resultados da análise incremental da carga crítica, observou-se que os valores estimados das cargas críticas nos métodos I, II e III, após o passo 50, foram de 1253.4kip (5575.4kN), 1225.6kip (5451.7kN) e 1341.4kip (5966.8kN), respectivamente. Os modos de colapso obtidos, após o passo 50, são muito parecidos nos três métodos. Na Figura 4.22 é mostrada a configuração deformada do primeiro modo de colapso obtido após este passo, empregando o método III da análise incremental da carga crítica.

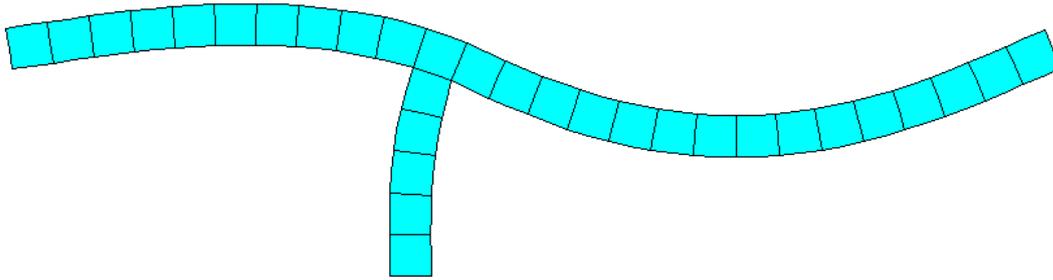


Figura 4.22 Modo de colapso do exemplo 4.1.3, após o passo 50.

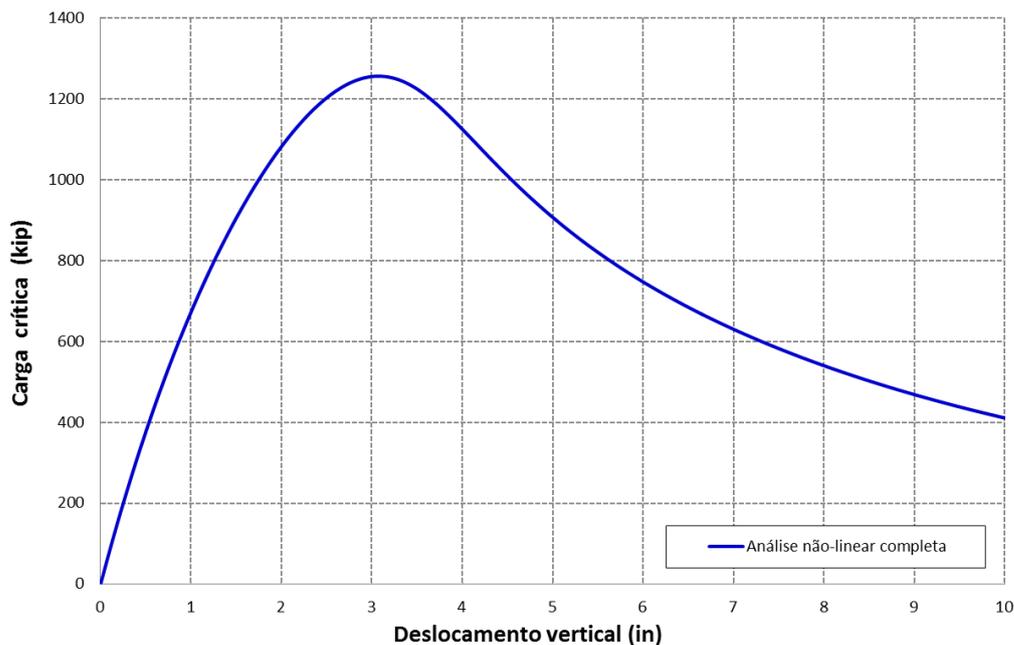


Figura 4.23 Trajetória de equilíbrio do exemplo 4.1.3.

Finalmente, empregou-se a análise não linear completa para estimar o valor da carga crítica. Através desta técnica obteve-se um valor numérico de 1256kip (5587kN) para a carga crítica e a trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 4.23. A configuração deformada do pórtico T na carga crítica é mostrada na Figura 4.24.

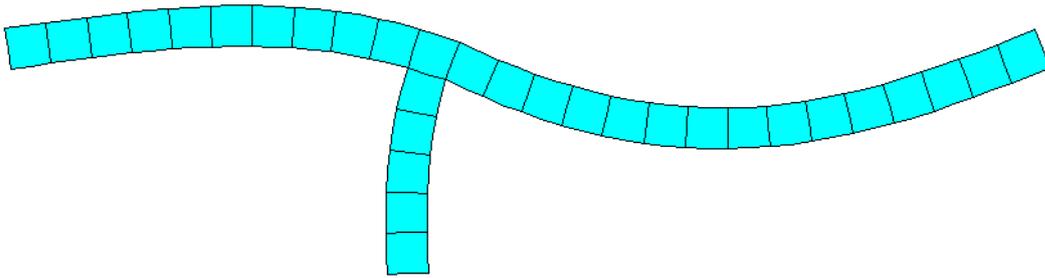


Figura 4.24 Configuração deformada do exemplo 4.1.3 (análise não linear completa).

Os valores obtidos nas três técnicas apresentam diferenças na estimativa do valor da carga crítica. As diferenças também estão presentes nos três métodos abordados na análise incremental da carga crítica. Na Figura 4.25 são mostrados os valores obtidos para a carga crítica.

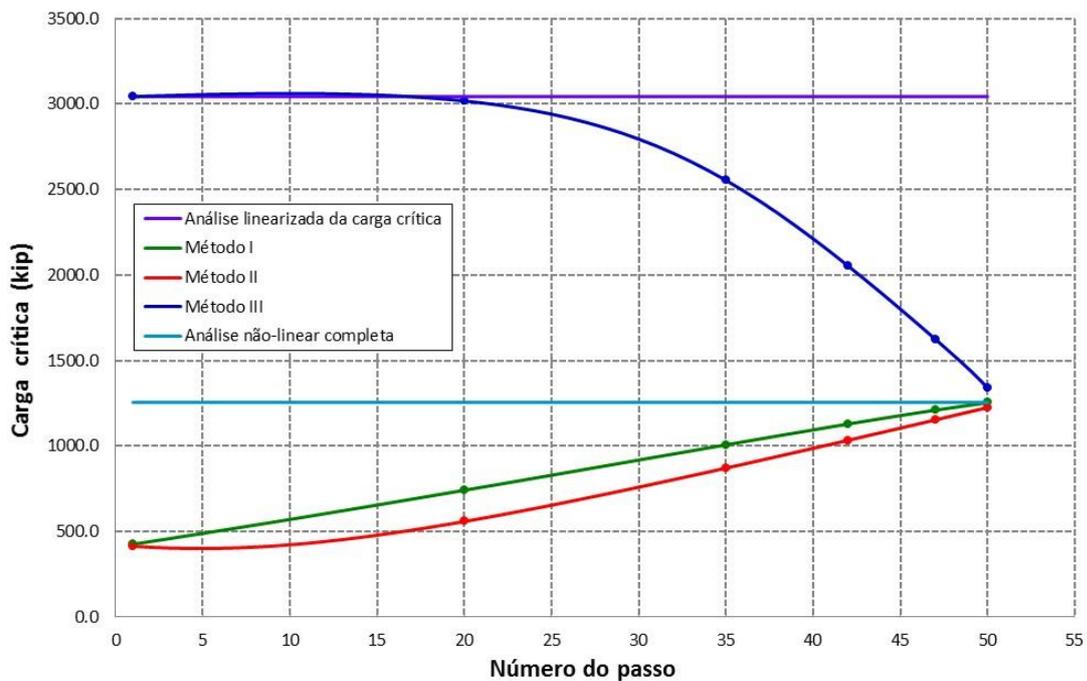


Figura 4.25 Valores obtidos para a carga crítica no exemplo 4.1.3.

Da Figura 4.25 pode-se observar que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica, convergem para um valor próximo do valor obtido na análise não linear completa. Neste exemplo, os métodos I e II apresentam uma convergência mais rápida que a do método III. Pode-se observar também que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica e análise não linear completa diferem significativamente do valor obtido na análise linearizada da carga crítica. Esta diferença entre os valores obtidos pode ser devido à

mudança da geometria e distribuição das tensões. As tensões equivalentes de Von Mises, para o caso linear e não linear, são mostradas na Figura B.5 e Figura B.6 do Apêndice B, respectivamente.

4.2. Estimação de cargas críticas com Material Elastoplástico

Nesta seção serão estudados dois exemplos da seção anterior, o arco abatido e pórtico T, e outro exemplo encontrado na literatura denominado como pórtico toggle. Nos três exemplos a serem estudados, considerou-se um comportamento elastoplástico do material na análise.

4.2.1. Arco circular abatido

O arco circular abatido do exemplo 4.1.1 é analisado considerando uma tensão de escoamento $\sigma_y = 50MPa$ e modulo elastoplástico $E^{ep} = 13789.6MPa$. A geometria e propriedades do arco, empregadas na análise, são mostradas na Figura 4.1. Utiliza-se uma malha composta por 80 elementos isoparamétricos Q9, discretizada com 40 divisões na direção circunferencial e 2 divisões na direção radial, com 9 pontos de integração. A malha empregada no arco é mostrada na Figura 4.26. Neste problema será estimada a carga crítica associada ao ponto limite da trajetória de equilíbrio.

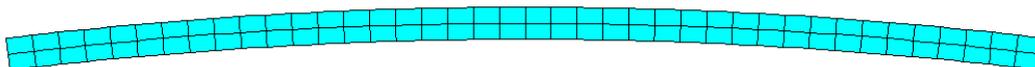


Figura 4.26 Malha do arco abatido do exemplo 4.2.1.

Empregando a malha da figura anterior obtém-se um valor numérico de 78.6kN na estimativa da carga através da técnica da análise linearizada da carga crítica. A configuração deformada relacionada ao primeiro modo de colapso, obtida através desta técnica, é mostrada na Figura 4.27. A configuração obtida é assimétrica. Os resultados obtidos são similares aos do exemplo 4.1.1.

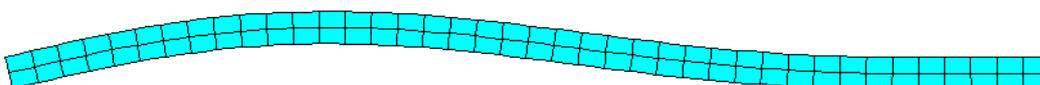


Figura 4.27 Modo de colapso do exemplo 4.2.1 (análise linearizada da carga crítica).

Na análise incremental da carga crítica aplicou-se uma carga de 11.5kN em 23 passos, sendo estimado o valor da carga crítica após cada passo. Os resultados obtidos após os passos 10, 15, 18, 21 e 23; são resumidos na Tabela 4.13, Tabela 4.14 e Tabela 4.15, respectivamente. Na avaliação dos resultados empregou-se um incremento de carga ΔP de 0.5kN.

Tabela 4.13 Cargas críticas obtidas do método I no exemplo 4.2.1.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kN)	ΔP (kN)	ω	Carga crítica (kN)
10	4.5	0.5	54.0	31.5
15	7	0.5	32.2	23.1
18	8.5	0.5	20.1	18.6
21	10	0.5	10.6	15.3
23	11	0.5	2.6	12.3

Tabela 4.14 Cargas críticas obtidas do método II no exemplo 4.2.1.

$$[K_0 + \omega(\Delta K u_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kN)	ΔP (kN)	ω	Carga crítica (kN)
10	4.5	0.5	50.4	29.7
15	7	0.5	28.1	21.1
18	8.5	0.5	16.3	16.7
21	10	0.5	7.5	13.8
23	11	0.5	1.2	11.6

Tabela 4.15 Cargas críticas obtidas do método III no exemplo 4.2.1.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kN)	ΔP (kN)	ω	Carga crítica (kN)
10	4.5	0.5	139.1	74.1
15	7	0.5	111.8	62.9
18	8.5	0.5	90.2	53.6
21	10	0.5	53.5	36.8
23	11	0.5	10.1	16.0

A partir dos resultados da análise incremental da carga crítica, observou-se que nos métodos I e II todos os modos de colapso obtidos após os passos são simétricos. Entretanto, no caso do método III os modos de colapso obtidos após os passos 10, 15 e 18 são assimétricos como no caso prévio da análise linearizada da carga crítica, enquanto os modos de colapso obtidos após os passos 21 e 23 são simétricos como os modos obtidos nos métodos I e II. Os

valores estimados das cargas críticas nos métodos I, II e III, após o passo 23, foram de 12.3kN, 11.6kN e 16.0kN, respectivamente. Na Figura 4.28 e Figura 4.29 são mostradas as configurações deformadas do primeiro modo de colapso obtidas após os passos 15 e 23, respectivamente, empregando o método III da análise incremental da carga crítica.

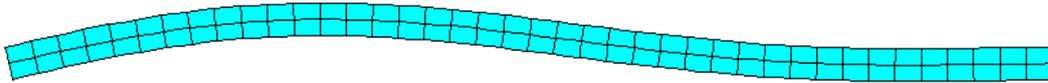


Figura 4.28 Modo de colapso do exemplo 4.2.1, após o passo 15.

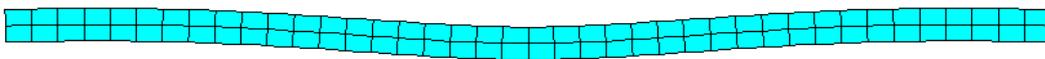


Figura 4.29 Modo de colapso do exemplo 4.2.1, após o passo 23.

Finalmente, empregou-se a análise não linear completa para estimar o valor da carga crítica. Através desta técnica obteve-se um valor numérico de 11.5kN para a carga crítica e a trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 4.31. A configuração deformada do arco na carga crítica é mostrada na Figura 4.30.

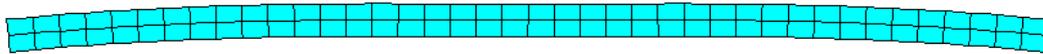


Figura 4.30 Configuração deformada do exemplo 4.2.1 (análise não linear completa).

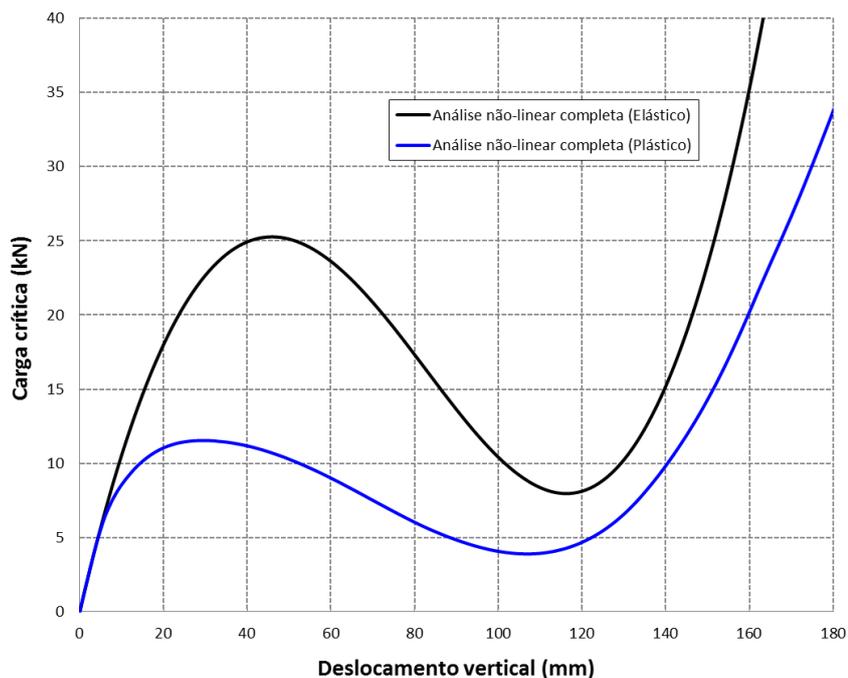


Figura 4.31 Trajetória de equilíbrio do exemplo 4.2.1.

Os valores obtidos nas três técnicas apresentam diferenças na estimativa do valor da carga crítica. As diferenças também estão presentes nos três métodos abordados na análise incremental da carga crítica. Na Figura 4.32 são mostrados os valores obtidos para a carga crítica.

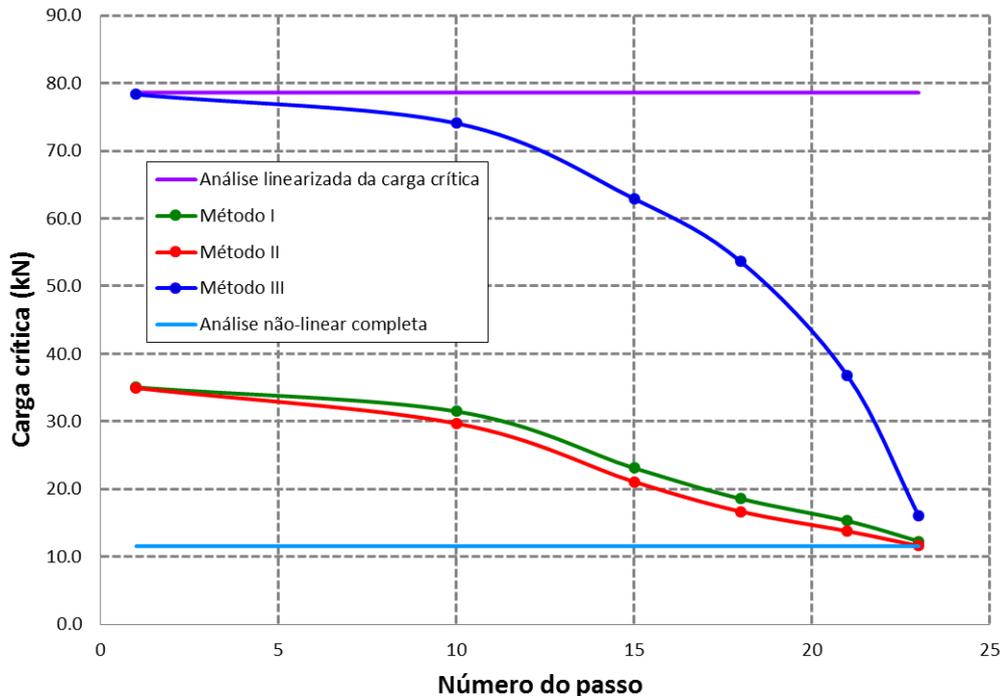


Figura 4.32 Valores obtidos para a carga crítica no exemplo 4.2.1.

Da Figura 4.32 pode-se observar que os valores obtidos na análise incremental de carga crítica, convergem para um valor próximo do valor obtido na análise não linear completa. Neste exemplo, os métodos I e II apresentam uma convergência melhor e mais rápida que a do método III, como no caso elástico. Pode-se observar também que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica e análise não linear completa diferem significativamente do valor obtido na análise linearizada da carga crítica. Esta diferença entre os valores obtidos pode ser devido à mudança da geometria e distribuição das tensões. As tensões equivalentes de Von Mises, para o caso linear e não linear, são mostradas na Figura B.7 e Figura B.8 do Apêndice B, respectivamente.

4.2.2. Pórtico toggle

Um pórtico toggle com extremos fixos é carregado em sua parte central com uma força concentrada, como é mostrado na Figura 4.33. A geometria e propriedades do pórtico, empregadas na análise, são mostradas na mesma figura. Utiliza-se uma malha composta por 80 elementos isoparamétricos Q9, discretizada com 20 divisões no comprimento de cada elemento e 2 divisões na altura, com 9 pontos de integração. A malha empregada no pórtico é mostrada na Figura 4.34. A precisão da solução numérica, na obtenção da trajetória de equilíbrio, pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Battini (2002). Neste problema será estimada a carga crítica associada ao ponto de bifurcação da trajetória de equilíbrio associada à configuração deformada assimétrica.

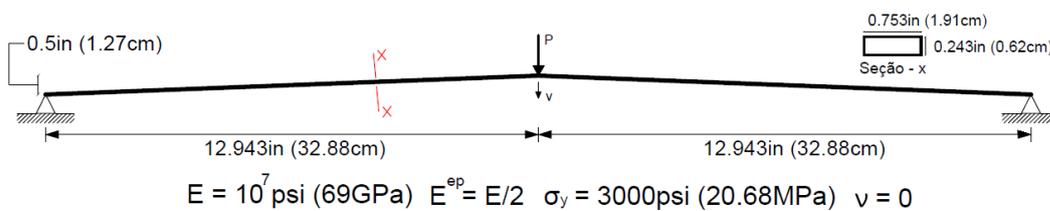


Figura 4.33 Pórtico toggle do exemplo 4.2.2.



Figura 4.34 Malha do pórtico toggle do exemplo 4.2.2.

Empregando a malha da figura anterior obtém-se um valor numérico de 43.3 lbf (192.6 N) na estimativa da carga através da técnica da análise linearizada da carga crítica. A configuração deformada relacionada ao primeiro modo de colapso, obtida através desta técnica, é mostrada Figura 4.35. A configuração obtida é assimétrica.

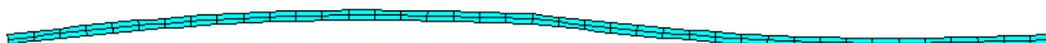


Figura 4.35 Modo de colapso do exemplo 4.2.2 (análise linearizada da carga crítica).

Na análise incremental da carga crítica aplicou-se uma carga de 26.5lbf (117.9N) em 53 passos, sendo estimado o valor da carga crítica após cada passo. Os resultados obtidos após os passos 20, 30, 40, 50 e 53; são resumidos na Tabela 4.16, Tabela 4.17 e Tabela 4.18, respectivamente. Na avaliação dos resultados empregou-se um incremento de carga ΔP de 0.5lbf (2.2N).

Tabela 4.16 Cargas críticas obtidas do método I no exemplo 4.2.2.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
20	9.5	0.5	44.4	31.7
30	14.5	0.5	34.0	31.5
40	19.5	0.5	23.6	31.3
50	24.5	0.5	10.0	29.5
53	26	0.5	4.2	28.1

Tabela 4.17 Cargas críticas obtidas do método II no exemplo 4.2.2.

$$[K_0 + \omega(\Delta K u_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
20	9.5	0.5	38.2	28.6
30	14.5	0.5	26.2	27.6
40	19.5	0.5	15.7	27.3
50	24.5	0.5	4.9	26.9
53	26	0.5	1.5	26.7

Tabela 4.18 Cargas críticas obtidas do método III no exemplo 4.2.2.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (lbf)	ΔP (lbf)	ω	Carga crítica (lbf)
20.0	9.5	0.5	59.3	39.1
30.0	14.5	0.5	45.1	37.1
40.0	19.5	0.5	31.0	35.0
50.0	24.5	0.5	12.3	30.6
53.0	26.0	0.5	5.1	28.6

A partir dos resultados da análise incremental da carga crítica, observou-se que nos três métodos todos os modos de colapso obtidos após os passos são assimétricos como no caso prévio da análise linearizada da carga crítica. Os valores estimados das cargas críticas nos métodos I, II e III, após o passo 53, foram de 28.1lbf (125N), 26.7lbf (118.8N) e 28.6lbf (127.2N), respectivamente. Os modos de colapso obtidos, após o passo 53, são muito parecidos nos três

métodos. Na Figura 4.36 é mostrada a configuração deformada do primeiro modo de colapso obtida após este passo, empregando o método III da análise incremental da carga crítica.



Figura 4.36 Modo de colapso do exemplo 4.2.2, após o passo 50.

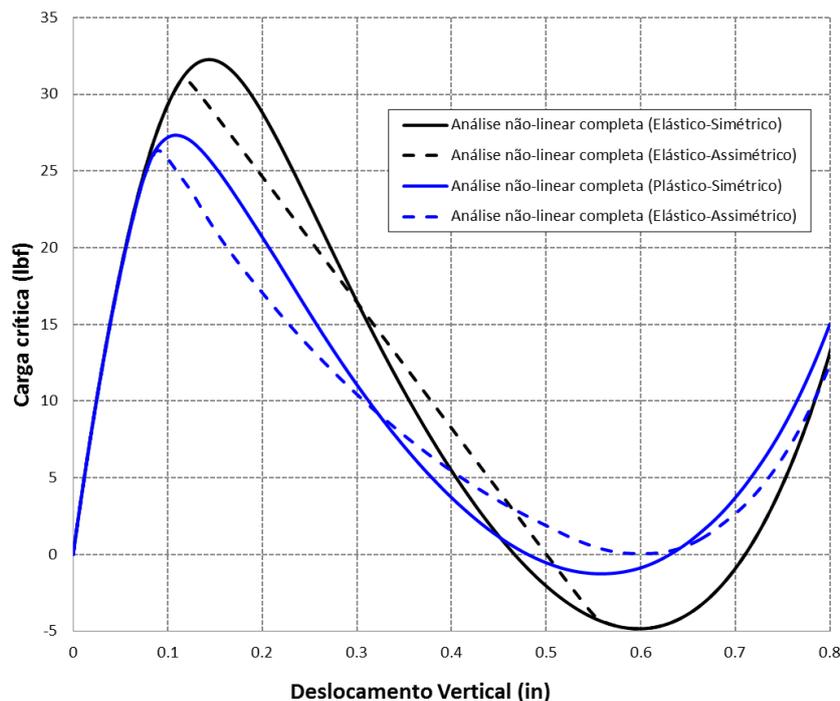


Figura 4.37 Trajetória de equilíbrio do exemplo 4.2.2.

Finalmente, empregou-se a análise não linear completa para estimar o valor da carga crítica. Através desta técnica obteve-se um valor numérico de 26.3lbf (117N) para a carga crítica e a trajetória de equilíbrio, associada à configuração deformada assimétrica, mostrada na Figura 4.37. Nesta figura também se mostra a trajetória de equilíbrio associada à configuração deformada simétrica. A configuração deformada do pórtico toggle na carga crítica e pós-crítica são mostradas na Figura 4.38 e Figura 4.39, respectivamente.



Figura 4.38 Configuração deformada do exemplo 4.2.2 (análise não linear completa).



Figura 4.39 Configuração deformada do exemplo 4.2.2 (análise não linear completa).

Os valores obtidos nas três técnicas apresentam diferenças na estimativa do valor da carga crítica. As diferenças também estão presentes nos três métodos abordados na análise incremental da carga crítica. Na Figura 4.40 são mostrados os valores obtidos para a carga crítica.

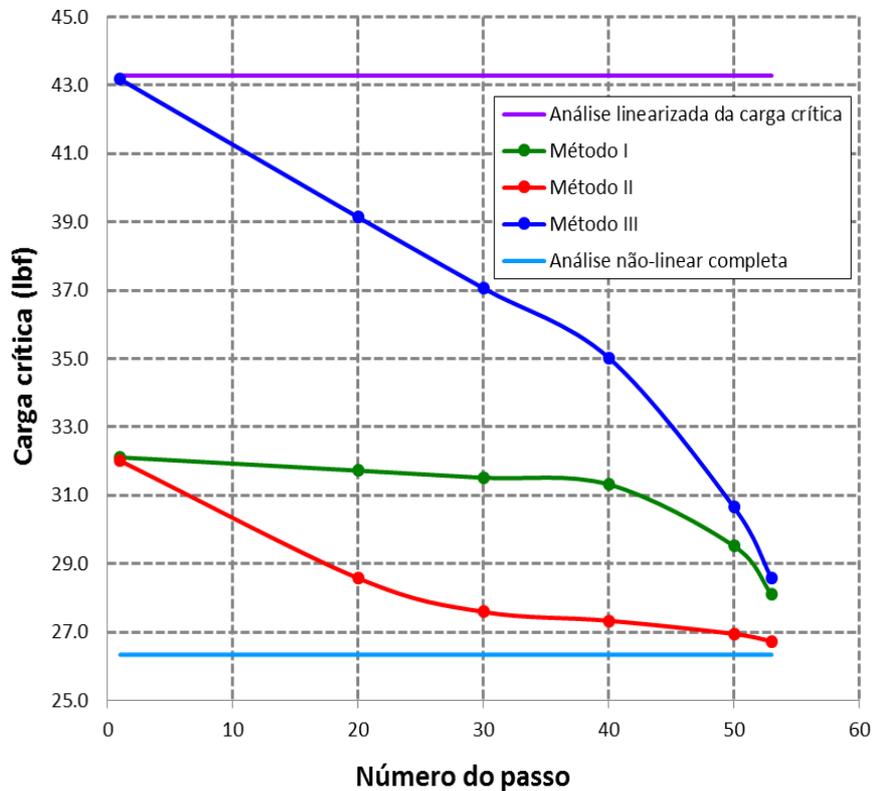


Figura 4.40 Valores obtidos para a carga crítica no exemplo 4.2.2.

Da Figura 4.40 pode-se observar que os valores obtidos na análise incremental de carga crítica, convergem para um valor próximo do valor obtido na análise não linear completa. Neste exemplo, os métodos I e II apresentam uma convergência mais rápida que a do método III, e o método II apresenta uma convergência melhor que a dos métodos I e III. Pode-se observar também que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica e análise não linear completa diferem significativamente do valor obtido na análise linearizada da carga crítica. Esta diferença entre os valores obtidos pode ser devido à mudança da geometria e distribuição das tensões. As tensões equivalentes de Von Mises, para o caso linear e não linear, são mostradas na e Figura B.9 e Figura B.10 do Apêndice B, respectivamente.

4.2.3. Pórtico T

O pórtico T do exemplo 4.1.3 é analisado considerando uma tensão de escoamento $\sigma_y = 400\text{ksi}$ (2757.9MPa) e módulo elastoplástico $E^{ep} = 4833.3\text{ksi}$ (33324.6MPa). A geometria e propriedades do pórtico, empregadas na análise, são mostradas na Figura 4.19. Utiliza-se uma malha composta por 124 elementos isoparamétricos Q9 com 9 pontos de integração. A malha empregada no pórtico é mostrada na Figura 4.41. Neste problema será estimada a carga crítica associada ao ponto limite da trajetória de equilíbrio.

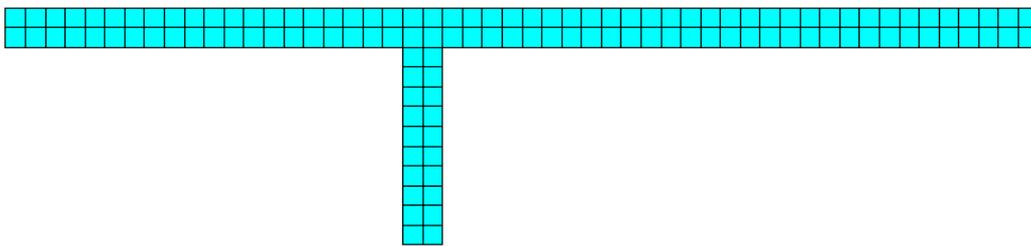


Figura 4.41 Malha do pórtico T do exemplo 4.2.3.

Empregando a malha da figura anterior obtém-se um valor numérico de 3012.6kip (13400.7kN) na estimativa da carga através da técnica da análise linearizada da carga crítica. A configuração deformada relacionada ao primeiro modo de colapso, obtida através desta técnica, é mostrada na Figura 4.42. Os resultados obtidos na análise são similares aos do exemplo 4.1.3.

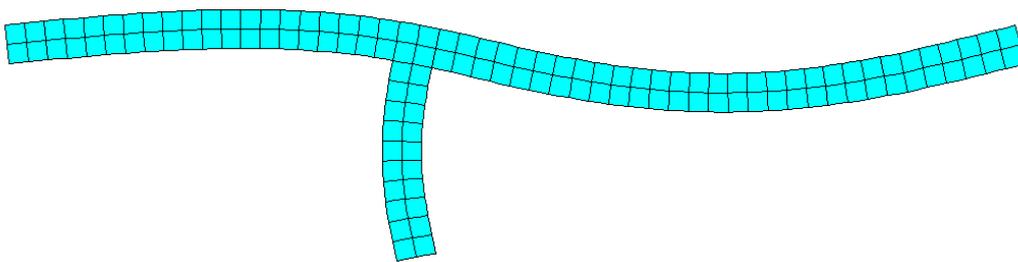


Figura 4.42 Modo de colapso do exemplo 4.2.3 (análise linearizada da carga crítica).

Na análise incremental da carga crítica aplicou-se uma carga de 798kip (3549.7kN) em 266 passos, sendo estimado o valor da carga crítica após cada passo. Os resultados obtidos após os passos 220, 235, 250, 260 e 266; são resumidos na Tabela 4.19, Tabela 4.20 e Tabela 4.21, respectivamente. Na avaliação dos resultados empregou-se um incremento de carga ΔP de 3kip (13.3kN).

Tabela 4.19 Cargas críticas obtidas do método I no exemplo 4.2.3.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kip)	ΔP (kip)	ω	Carga crítica (kip)
220	657	3	2.3	664.0
235	702	3	2.3	708.9
250	747	3	2.4	754.1
260	777	3	0.8	779.4
266	795	3	1.8	800.4

Tabela 4.20 Cargas críticas obtidas do método II no exemplo 4.2.3.

$$[K_0 + \omega(\Delta K u_1(\Delta u, u) + \Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kip)	ΔP (kip)	ω	Carga crítica (kip)
220	657	3	2.0	663.0
235	702	3	1.9	707.8
250	747	3	1.7	752.1
260	777	3	0.4	778.2
266	795	3	0.1	795.3

Tabela 4.21 Cargas críticas obtidas do método III no exemplo 4.2.3.

$$[K_0 + \omega(\Delta K_2(\Delta \sigma))]\{\phi\} = \{0\}$$

Nº do passo	P (kip)	ΔP (kip)	ω	Carga crítica (kip)
220	657	3	741.0	2880.0
235	702	3	617.0	2553.1
250	747	3	299.2	1644.7
260	777	3	207.5	1399.5
266	795	3	25.9	872.8

A partir dos resultados da análise incremental da carga crítica, observou-se que os modos de colapso obtidos após dos incrementos 235, 250, 260 e 266 diferem do modo obtido no caso prévio da análise linearizada da carga crítica. Os valores estimados das cargas críticas nos métodos I, II e III, após o passo 50, foram de 800.4kip (3560.4kN), 795.3kip (3537.7kN) e 872.8kip (3882.4kN), respectivamente. Na Figura 4.43 é mostrada a configuração deformada do primeiro modo de colapso obtido após o passo 266, empregando o método III da análise incremental da carga crítica.

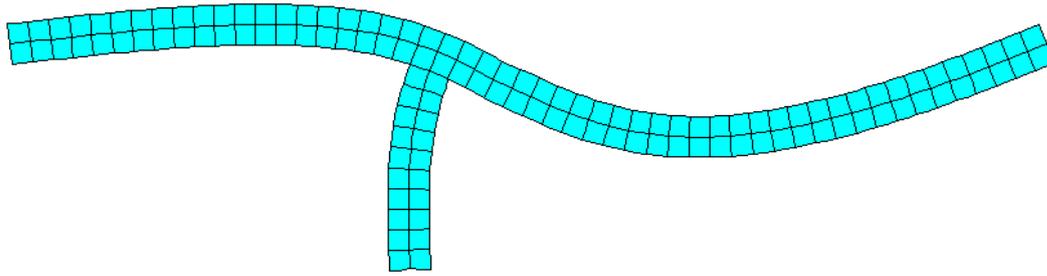


Figura 4.43 Modo de colapso do exemplo 4.2.3, após o passo 266.

Finalmente, empregou-se a análise não linear completa para estimar o valor da carga crítica. Através desta técnica obteve-se um valor numérico de 798.9kip (3553.7kN) para a carga crítica e a trajetória de equilíbrio mostrada na Figura 4.45. A configuração deformada do pórtico T na carga crítica é mostrada na Figura 4.44.

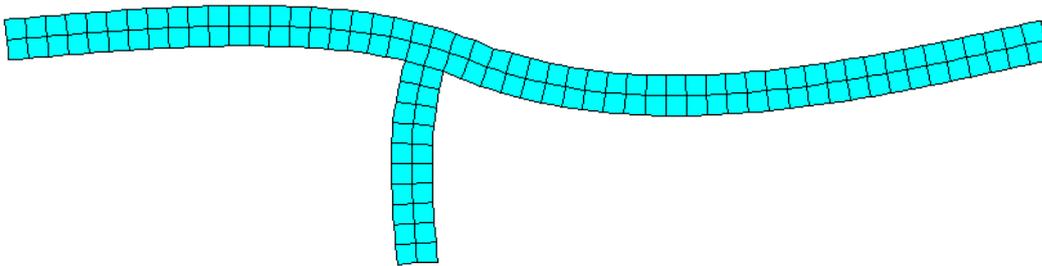


Figura 4.44 Configuração deformada do exemplo 4.2.3 (análise não linear completa).

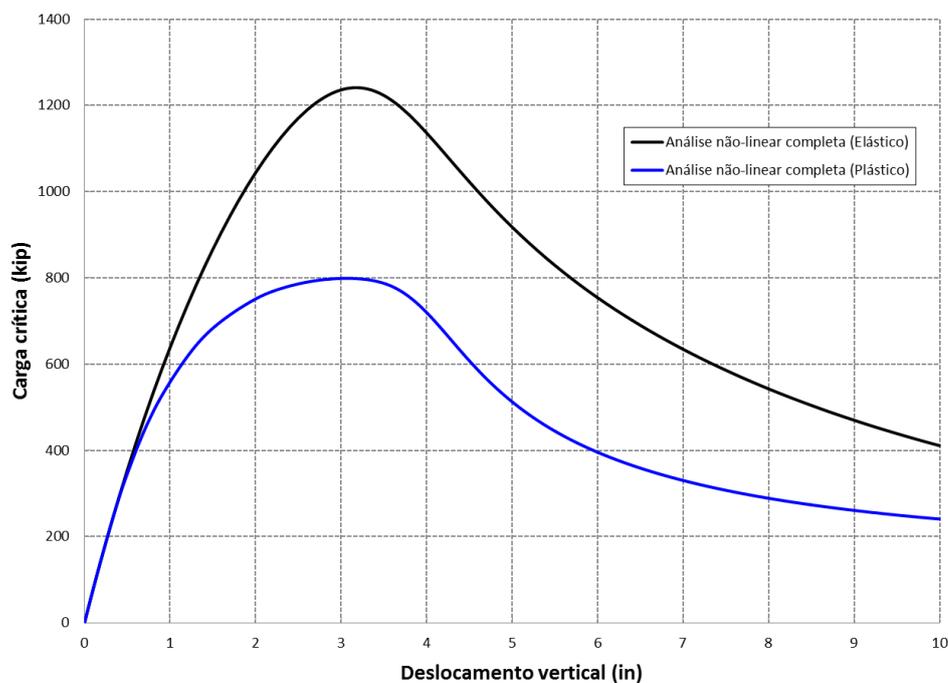


Figura 4.45 Trajetória de equilíbrio do exemplo 4.2.3.

Os valores obtidos nas três técnicas apresentam diferenças na estimativa do valor da carga crítica. As diferenças também estão presentes nos três métodos abordados na análise incremental da carga crítica. Na Figura 4.46 são mostrados os valores obtidos para a carga crítica.

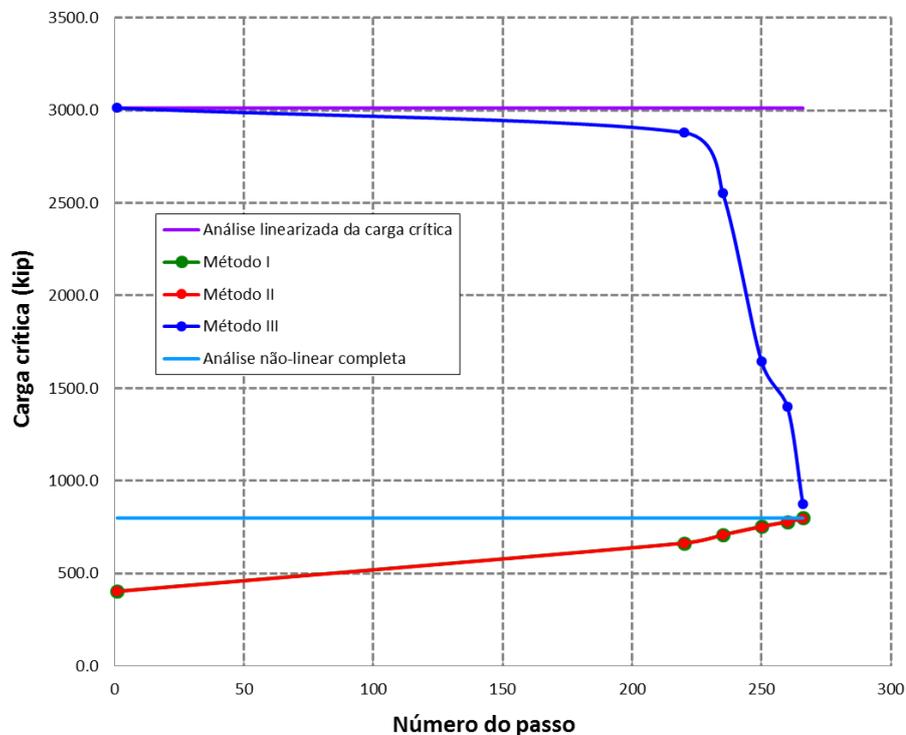


Figura 4.46 Valores obtidos para a carga crítica no exemplo 4.2.3.

Da Figura 4.46 pode-se observar que os valores obtidos na análise incremental de carga crítica, convergem para um valor próximo do valor obtido na análise não linear completa. Neste exemplo, os métodos I e II apresentam valores muito semelhantes, com uma convergência melhor e mais rápida que a do método III. Pode-se observar também que os valores obtidos na análise incremental da carga crítica e análise não linear completa diferem significativamente do valor obtido na análise linearizada da carga crítica. Esta diferença entre os valores obtidos pode ser devido à mudança da geometria e distribuição das tensões. As tensões equivalentes de Von Mises, para o caso linear e não linear, são mostradas na Figura B.11 e Figura B.12 do Apêndice B, respectivamente.