Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Bárbara Valéria de Abreu Lavôr

Otimização Topológica de Estruturas Planas sob a Ação de Cargas Dinâmicas utilizando o Método do Carregamento Estático Equivalente

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Anderson Pereira

Rio de Janeiro
Setembro de 2019

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Bárbara Valéria de Abreu Lavôr

Otimização Topológica de Estruturas Planas sob a Ação de Cargas Dinâmicas utilizando o Método do Carregamento Estático Equivalente

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Anderson Pereira
Orientador
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Ivan Fábio Mota de Menezes
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

Prof. Rodrigo Bird Burgos
UERJ

Rio de Janeiro, 27 de Setembro de 2019

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Bárbara Valéria de Abreu Lavôr

Engenheira Civil graduada em pela Universidade Federal do Pará em 2010, UFPA, sob orientação do Prof. Remo Magalhães de Souza.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Ficha Catalográfica

Lavôr, Bárbara Valéria de Abreu

Otimização Topológica de Estruturas Planas sob a Ação de Cargas Dinâmicas utilizando o Método do Carregamento Estático Equivalente / Bárbara Valéria de Abreu Lavôr; orientador: Anderson Pereira. – Rio de janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2019.

v., 74 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Otimização Estrutural;. 3. Carregamento Estático Equivalente;. 4. Múltiplos Casos de Carga;. 5. Otimização Topológica.. I. Pereira, Anderson. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

A gratidão é um dos sentimentos mais bonitos e necessários, porque ter consciência e valorizar o que temos é reconhecer as dádivas do universo e isso abre caminhos para novas conquistas. Portanto, eu não poderia deixar de começar agradecendo a Deus em todas as Suas formas e manifestações na minha vida. Todos os próximos parágrafos são dedicados a pessoas que hoje sei que foram um presente dado a mim por esse Poderoso Ser.

Gratidão à minha família, principalmente minha mãe. Ela sempre me mostrou, algumas vezes sem uma palavra sequer a importância de ter força, ser resiliente e suportar todos os intempéries da vida. Com o passar dos anos, mostrou também que é importante ter flexibilidade e manter o equilíbrio. Obrigada, D. Carmélia por sintetizar tantos conceitos. Essa dissertação também é sua.

Obrigada, Prof. Anderson Pereira, meu orientador, que aceitou a tarefa de me orientar mesmo antes de me conhecer como aluna. Posteriormente, cursei duas disciplinas com ele: Teoria da Elasticidade e Análise da Sensibilidade. Espero que eu possa deixá-lo orgulhoso, ou no mínimo satisfeito, aplicando todas as lições que ele pacientemente me mostrou.

Ao Bruno Cesar Cayres Andrade, grande amor, grande amigo e grande incentivador, bem como inspiração. Graças a ele, em 2017 retomei o sonho de seguir minha carreira acadêmica. Essa dissertação também é tua.

Agradeço também a todos os meus professores da PUC-Rio, aos do Departamento de Engenharia Mecânica, do Departamento de Engenharia Civil e do Departamento de Engenharia Industrial, que me deram bases para prosseguir na carreira acadêmica. Em especial ao Prof. Ivan Fabio Mota Menezes que é um exemplo de educador e pesquisador o qual admiro muito. E ao Prof. Hans Ingo Weber que me ajudou muito nas aulas de dinâmica e sempre ensina com muita paciência e simpatia.

Aos professores e amigos da UFPA, minha *alma mater*, principalmente Remo Magalhaes, Regina Sampaio, Alcebíades Macêdo, Hebe Ripardo e a todos meus amigos do PET (Programa de Educação Tutorial) da engenharia civil.

Não posso deixar de citar todos meus amigos da PUC-Rio, os da Civil e mais recentemente os da Mecânica, destacando, Abel Arrieta Castro, Luiz Fernando Nazaré Marques, Miguel Angel Ampuero Suarez, Giovanny Alberto Meneses, Eduardo Goicoechea, Bernando Landim, Thiago Almeida, Ingrid Pires Macedo O. dos Santos, Mariana Gomes Dias dos Santos e Marilia Maurell Assad, pelos cafés, pelas habilidades em vários *softwares* e saberes em várias áreas do conhecimento.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Às minhas companheiras da sala de estudos, popularmente conhecida como favelinha, sobretudo na reta final do mestrado: Gabriela Martins e Beatriz Teixeira. Os dias foram especiais devido às palavras de conforto, às risadas, às coisas avulsas, lanches, cafés, conversas e amenidades.

Agradeço a quem mora no meu coração e está geograficamente longe agora, mas se faz presente em oração e sentimento, me apoiando e ajudando.

Obrigada a todos os funcionários da PUC-Rio, que possibilitam a infraestrutura e o andamento das atividades, desde o pessoal de serviços gerais até os de setores administrativos.

Meu agradecimento especial aos membros da banca e aos presentes na audiência durante a defesa da minha dissertação. O apoio de vocês e as contribuições para melhoria do trabalho são muito importantes.

À PUC-Rio pelo ensino de excelência e pela concessão da bolsa de isenção de taxas que possibilitou o meu curso de mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Resumo

Lavôr, Bárbara Valéria de Abreu; Pereira, Anderson. **Otimização Topológica de Estruturas Planas sob a Ação de Cargas Dinâmicas utilizando o Método do Carregamento Estático Equivalente**. Rio de Janeiro, 2019. 74p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A otimização topológica de estruturas sujeitas a carregamentos que variam ao longo do tempo, costuma ter custos computacionais bastante elevados. Isso acontece devido ao grande número de análises dinâmicas que são necessárias. Além disso, avaliar os gradientes da resposta, que fazem parte da análise de sensibilidade, também resulta em alto custo de computação e requer um grande espaço de armazenamento. Nesta dissertação, em vez de resolver o problema dinâmico original diretamente, é resolvida uma sequência de problemas de otimização de resposta estática com múltiplos casos de carga. Essa abordagem, chamada de método do carregamento estático equivalente, gera cargas estáticas que produzem uma resposta equivalente à obtida na análise dinâmica. Para avaliar as abordagens presentes na literatura, desenvolveu-se um código em MATLAB, e diversos exemplos representativos são apresentados.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Palavras-chave

Otimização Estrutural; Carregamento Estático Equivalente; Múltiplos Casos de Carga; Otimização Topológica.

Abstract

Lavôr, Bárbara Valéria de Abreu; Pereira, Anderson (Advisor). **Topology Optimization of Plane Structures sudjected to Dynamic Loads using the Equivalent Static Loading Method**. Rio de Janeiro, 2019. 74p. Dissertação de mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Topology optimization in the time domain of structures subjected to time-dependent loads is usually computationally expensive, starting with the large number of time-dependent analyses that are required. Furthermore, the computational cost to evaluate the gradients of the response is significantly high and requires a large storage space. In this paper, instead of solving the original dynamical problem directly, we solve a sequence of static response optimization problems with many load cases. This approach, called the equivalent static loads method, generates static loads that produce a similar response in comparison to the same response that the dynamic analysis does. In order to verify the approaches present in the literature, a MATLAB code was developed, and several representative examples are presented.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Keywords

Structural Optimization; Equivalent Static Loads; Multiple Loading Condition; Topology Optimization.

Sumário

1 Introdução **14**
1.1 Programação matemática 15
1.2 Otimização estrutural 17
1.2.1 Otimização paramétrica 19
1.2.2 Otimização de forma 19
1.2.3 Otimização topológica 20
1.3 Otimização topológica de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos 20
1.4 Revisão bibliográfica 22
1.5 Objetivos da dissertação 24
1.6 Organização do trabalho 25

2 Conceitos preliminares **26**
2.1 Métodos de elementos finitos 26
2.2 Integração pelo método de Newmark-β 29
2.3 Modelo com solução analítica para verificação da dinâmica 33
2.3.1 Pórtico de dois pavimentos (*two-story shear building*) 33

3 Otimização topológica **40**
3.1 Otimização topológica de estruturas 40
3.1.1 Otimização topológica de estruturas considerando múltiplos casos de carga independentes 42
3.1.2 Otimização topológica de estruturas considerando carregamento dinâmico 43
3.1.3 Carregamento estático equivalente 43
3.1.4 Análise de sensibilidade 46
3.1.4.1 Método de diferenças finitas 47
3.1.4.2 Método Direto 47
3.1.5 Parametrização do modelo e interpolação 48

4 Resultados numéricos **50**
4.1 Exemplos numéricos analisados 50
4.1.1 Viga em balanço 1 (engastada-livre) 52
4.1.2 Viga em balanço 2 54
4.1.3 Reservatório elevado 57

5 Considerações finais da dissertação **65**
5.1 Temática abordada na dissertação 65
5.2 Contribuições e conclusões da dissertação 66
5.3 Direções para trabalhos futuros 66

Referências bibliográficas **68**

Referências bibliográficas **73**

A Artigo publicado **74**

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Lista de figuras

Figura 1.1 (a) Meandros em um rio [1]; (b) favo de mel [2]; (c) gavinha [3] . 14
Figura 1.2 Representação de um fenômeno em modelo matemático [10]. 17
Figura 1.3 Estruturas ótimas propostas por Michell (a) manivela onde β varia entre 45° e 135° [6] e; (b) treliça plana. As linhas sólidas representam os elementos tracionados e as linhas tracejadas representam os elementos comprimidos. 18
Figura 1.4 Viga de perfil "I"(a) antes da otimização e (b) após otimização paramétrica. 19
Figura 1.5 Viga de perfil circular. 19
Figura 1.6 Peça submetida a otimização de forma [14]. 20
Figura 1.7 Bloco retangular com uma abertura. Fonte: Choi e Kim [11]. 20
Figura 1.8 Processo de otimização topológica em uma viga bi-apoiada [19]. 21

Figura 2.1 Elemento finito de 4 nós. 27
Figura 2.2 Sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade. 30
Figura 2.3 Resposta do deslocamento no domínio do tempo. 30
Figura 2.4 Modelo *two-story shear building* [41]. 34
Figura 2.5 (a)Modelo do *two-story shear building* representado como massa-mola e (b) diagrama de corpo livre [41]. 34
Figura 2.6 Resposta do sistema, onde u_i é o deslocamento no i-ésimo grau de liberdade. Na cor azul o resultado obtido através da solução analítica, em vermelho o resultado calculado por integração de Newmark. 37
Figura 2.7 Sensibilidade dos deslocamentos u_1 e u_2 em relação a variável de projeto E_1. 38
Figura 2.8 Sensibilidade dos deslocamentos u_1 e u_2 em relação a variável de projeto E_2. 38
Figura 2.9 Sensibilidade dos deslocamentos u_1 e u_2 em relação a variável de projeto E_2. 39

Figura 3.1 Domínio de referência e topologia otimizada de um caso genérico (adaptado de [18]). 41
Figura 3.2 (a) Domínio do modelo de uma chave inglesa e (b) topologia final para o problema de uma chave inglesa [34]. 41
Figura 3.3 Viga em balanço com apio circular. (a) Domínio, carregamento e condições de contorno e (b) solução obtida com o programa em MATLAB GRAND *GRround structure ANalysis and Design* [47]. 42
Figura 3.4 Fluxograma mostrando o processo de otimização topológica usando o método de ESL, onde k representa o ciclo de otimização. 45

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Figura 4.1 Viga em balanço 1: (a) modelo analisado e (b) forças aplicadas. 53
Figura 4.2 Topologia final considerando (a) **Caso 1** - com um único caso de carga englobando todas as forças aplicadas (b) **Caso 2** considerando as forças aplicadas como casos de carga diferentes. Em (c) é mostrada uma comparação entre as funções objetivo para cada caso. 53
Figura 4.3 Topologia final (a) **Caso 3** - utilizando a análise dinâmica. (b) **Caso 4** - utilizando o vetor de ESL. A comparação entre as funções objetivo para cada caso é mostrada em (c). 54
Figura 4.4 Viga engastada 2: (a) modelo analisado e (b) forças aplicadas. 55
Figura 4.5 Topologia final considerando (a) **Caso 1** - com um único caso de carga englobando todas as forças aplicadas (b) **Caso 2** considerando as forças aplicadas como casos de carga diferentes. Em (c) é mostrada uma comparação entre as funções objetivo para cada caso. 56
Figura 4.6 Topologia final (a) considerando carregamento estático e (b) *design* considerando o carregamento dinâmico. Figuras publicadas po Zhao e Wang [28]. 56
Figura 4.7 (a) Topologia final considerando o método de ESL - Caso 4 e (b) função objetivo após otimização. 56
Figura 4.8 Torre metálica com tanque de aço [55]. 57
Figura 4.9 (a) Domínio Ω da estrutura e (b) divisão entre elementos fixos (cor cinza) e elementos que serão afetados na otimização (cor branca). 59
Figura 4.10 Carregamento F aplicado no modelo de reservatório elevado. O número de ciclos máximo necessário para a convergência foi de $k = 5$. 60
Figura 4.11 (a) Malha inicial destacando na cor preta os elementos com valor de $\rho = 1$ fixo e na cor cinza, a região em que a pseudo-densidade pode variar para redistribuir o material durante o processo de otimização, (b) topologia final para o Caso 1, (c) topologia final para o Caso 2, ou seja, a função objetivo é o somatório das respostas da estrutura submetida aos 2 casos de carga e (d) topologia final utilizando o método de ESL e considerando o amortecimento igual a zero. 61
Figura 4.12 Topologia final para (a) o Caso 4 - amortecimento 1, (b) o Caso 4 - amortecimento 2, (c) o Caso 4 - amortecimento 3 e (d) o Caso 4 - amortecimento 4. 61
Figura 4.13 Valores de $\mathbf{F}^T\mathbf{u}$ ao longo do tempo após análise dinâmica utilizando as topologias obtidas para o Caso 1 e Caso 2. 62
Figura 4.14 Valores de $\mathbf{F}^T\mathbf{u}$ ao longo do tempo após análise dinâmica utilizando as topologias obtidas para o Caso 4, ou seja, utilizando o método de ESL para todos os valores de amortecimento empregados. 62

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Figura 4.15 Comparação dos valores de $\mathbf{F}^T\mathbf{u}$ ao longo do tempo após análise dinâmica utilizando as topologias obtidas para o Caso 4 evidenciando a diferença da análise com amortecimento e sem amortecimento. 63

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Lista de tabelas

Tabela 4.1 Analises realizadas. 52
Tabela 4.2 Parâmetros do modelo viga em balanço 1. 52
Tabela 4.3 Valores da função objetivo minimizada para o caso da viga em balanço 1. 54
Tabela 4.4 Parâmetros referentes a viga engastada 2. 55
Tabela 4.5 *Compliance* após otimização topológica para a viga em balanço 2. 57
Tabela 4.6 Parâmetros referentes ao modelo de reservatório elevado. 58
Tabela 4.7 Resultados da função objetivo para o modelo de reservatório elevado. 59
Tabela 4.8 Convergência da função objetivo. 64

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Por um mundo onde sejamos socialmente iguais, humanamente diferentes e totalmente livres.

Rosa Luxemburgo, *Filósofa.*

1
Introdução

Muito antes de Euclides ser denominado o "pai da geometria", antes dos homens darem nomes aos desenhos das figuras geométricas, e antes mesmo de criarem as primeiras fórmulas matemáticas, a mãe natureza já possuia formas ideais para estruturas orgânicas, embalagens e transportadores ao longo da evolução da vida no planeta: resultado de milhares de anos na evolução do universo. Exemplos dessa evolução são os cursos dos rios até o mar com a formação de meandros; as colmeias e seus favos como embalagens em formato hexagonal para o mel; as gavinhas para fixação na estrutura de plantas trepadeiras; ou ainda as formas perfeitas das flores e das suas estruturas orientadas para polinização (exemplos mostrados na Figura 1.1).

(a)

(b)

(c)

Figura 1.1: (a) Meandros em um rio [1]; (b) favo de mel [2]; (c) gavinha [3] .

O que ocorre naturalmente, o ser humano busca desvendar matematicamente. A natureza faz isso há tanto tempo e de uma maneira tão fascinante seguindo uma lei: a lei da maior eficiência utilizando o menor custo de energia possível. Em outras palavras, a natureza busca "o ótimo". Problemas de *otimização* (a busca pelo "ótimo") estão ligados à *programação matemática*, dentro da área multidisciplinar da Pesquisa Operacional. As primeiras abordagens científicas neste sentido aconteceram durante a segunda guerra mundial, quando os militares se viram envolvidos em situações críticas para gerenciamento de seus recursos e informações [4].

Após a guerra, as indústrias passaram a se interessar por essas técnicas para minimizar seus custos e aumentar suas receitas. Um marco na história foi a apresentação do método *simplex* para a solução de problemas lineares de otimização, por Dantzig [5]. No entanto, a otimização estrutural já ensaiava seus primeiros passos em 1872 (Rozvany e Bendsøe [6] *apud* Silva [7]) quando James Clerk Maxwell (físico e matemático britânico) não se contentou em

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

apenas calcular as tensões em um modelo de ponte que lhe foi proposto. Maxwell queria obter um projeto de ponte que, além de não falhar, utilizasse a menor quantidade de material possível. Então, passou a estudar alguns problemas simples usando os conceitos de teoria da elasticidade e concluiu que uma estrutura ótima, que utilizasse menos material, seria constituída de barras alinhadas com as direções das tensões principais.

Em 1904 essa ideia foi retomada por Michell [8], porém seus resultados foram considerados muito acadêmicos e com pouca aplicação prática devido a problemas de manufatura. Podemos dizer que estes estudos tem relação com os primeiros passos na direção da otimização topológica (abordagem de otimização estrutural que será discutida na seção 3.1). Somente na década de 1980, com o advento de *softwares* computacionais de otimização é que os trabalhos de Michell foram reproduzidos.

Na engenharia, normalmente, encontramos problemas com uma grande quantidade de variáveis, que devem ser tratados com foco em obter um produto eficiente, seguro e com custos mínimos de fabricação. É nesta etapa em que o engenheiro se depara com uma atividade complexa, devido às inúmeras opções disponíveis e às restrições de projeto que devem ser consideradas. Em muitos casos, é comum que sejam aplicadas soluções obtidas em projetos anteriores. No entanto, ainda que seja prudente e favorável utilizar a experiência adquirida, um projeto tratado dessa forma acaba se tornando limitado, obsoleto e pode infringir custos maiores que o realmente necessário, já que diversas possibilidades poderiam ser avaliadas por meio de uma solução otimizada.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

1.1 Programação matemática

A programação matemática é uma poderosa ferramenta usada para introduzir estratégias numéricas buscando soluções ótimas para os problemas de várias áreas do conhecimento. Consiste em uma série de procedimentos que buscam minimizar (ou maximizar) uma determinada função, ou seja, busca-se uma variável que satisfaça o problema. No entanto, o campo de abrangência dessa variável pode ser restringido para atender condições exigidas.

O problema geral da programação matemática é dado abaixo [9]:

$$\begin{cases} min & f(\mathbf{b}) \\ s.a.: & h_k(\mathbf{b}) = 0 \qquad k = 1, ..., m \\ & c_l(\mathbf{b}) \leqslant 0 \qquad l = 1, ..., p \\ & b_i^l \leqslant b_i \leqslant b_i^u \quad i = 1, ..., n, \end{cases} \tag{1-1}$$

sendo:

- $\mathbf{b}$ - vetor de variáveis de projeto;
- $f(\mathbf{b})$ - função objetivo (algumas vezes chamada também de função de custo);
- $h_k(\mathbf{b})$ - restrições de igualdade;
- $c_l(\mathbf{b})$ - restrições de desigualdade;
- b_i^l e b_i^u - limite superior e limite inferior das variáveis de projeto, respectivamente.

Embora já tenha sido dito nesse texto que, para proceder com a complexidade e com a quantidade dos cálculos envolvidos nos problemas de programação matemática, o avanço das técnicas computacionais tenha sido importantíssimo, a palavra "programação" neste caso, originalmente não se refere somente a computação, mas sim a um jargão militar relacionado a planejamento, alocação de recursos e cronograma [10].

As variáveis presentes da forma padrão da Eq. (1-1) são os parâmetros de projeto que podem ser alterados pelo projetista durante a análise, tais como tamanhos de comboios, distâncias, deslocamentos nodais, dimensões de peças estruturais, área, densidade de material, módulo de elasticidade, etc. Estes parâmetros são quantidades mensuráveis que sofrem modificação para promover a otimização de uma medida de desempenho, ou medida de performance, por exemplo: custo operacional, custos logísticos, lucros, peso de uma estrutura, rigidez, fadiga em um componente mecânico, níveis aceitáveis de vibração, entre outros.

A aplicação das técnicas é ampla em diversas áreas da engenharia. No entanto, o escopo deste trabalho está relacionado a programação matemática voltada para problemas de otimização estrutural.

Para melhorar o desempenho estrutural, é necessário reduzir ou aumentar certos parâmetros que determinam este desempenho. Então, a função objetivo é fruto da combinação de certas medidas de performance, que por sua vez, possuem restrições nos valores que podem ser assumidos.

Para entender a situação, imaginemos que o objetivo é reduzir o peso de uma estrutura para diminuir o gasto com materiais e o carregamento repassado para suas fundações. Por mais absurdo e apelativo que isso pareça, caso não haja limitações, o menor peso corresponderia a inexistência da estrutura (o que não é desejado). Além disso, ela precisa resistir aos carregamentos, sem que as tensões admissíveis sejam violadas. Portanto, a função objetivo é o peso da estrutura, as variáveis são as dimensões dos componentes estruturais e, as restrições são as tensões admissíveis e a dimensão das peças disponíveis no mercado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Consequentemente, é obvio concluir que para que essa função objetivo seja válida, ela deve estar relacionada com as variáveis (parâmetros). Caso contrário, seria impossível atingir a otimização por meio de mudanças no projeto. Então, definir a função objetivo adequada é importantíssimo.

A função objetivo acaba sendo um critério de avaliação para que uma determinada solução seja considerada melhor ou pior para o problema em questão. A boa notícia é que a maioria dos problemas presentes no mundo real pode ser simplificada e transformada em modelos de estudo. De acordo com Choi *et. al.* [11],"um problema de engeharia simplifica um problema físico em um problema matemático que pode representar um problema real com o nível de acurácia desejado". A Figura 1.2 mostra de forma esquemática representação de um problema em um modelo.

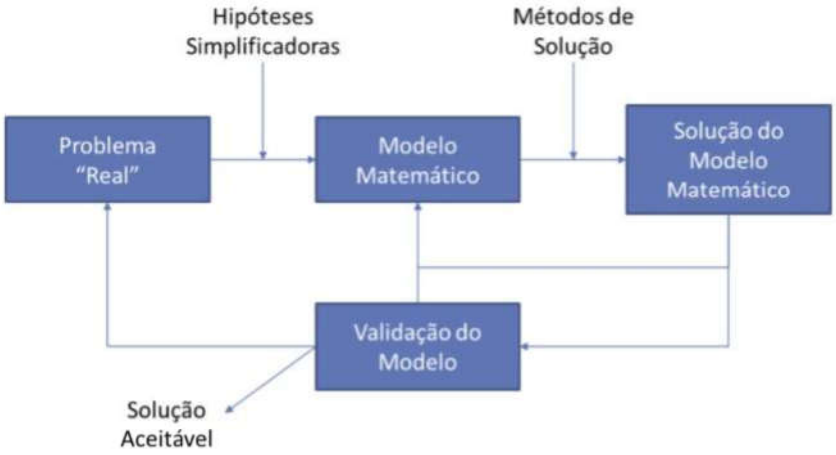


Figura 1.2: Representação de um fenômeno em modelo matemático [10].

O foco deste trabalho não é modelagem, mas é válido ressaltar a importância da validação dos modelos utilizados e das limitações que cada modelo possui de acordo com as informações disponíveis e com os recursos computacionais ou experimentais existentes. Lembrando que os modelos matemáticos são perfeitos, e somente perfeitos em seu mundo onde dados e informações são perfeitas [10]. Um dos trabalhos do engenheiro/projetista consiste em validar um modelo e definir se aquela solução é aceitável para o problema em questão.

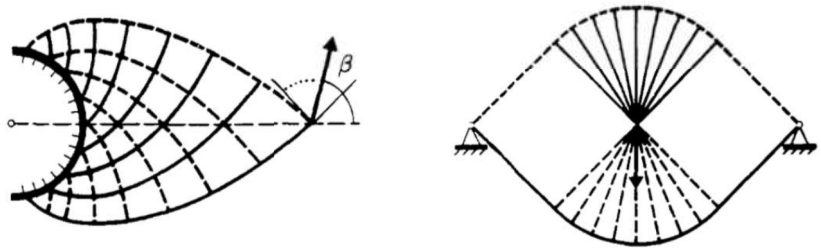
1.2 Otimização estrutural

Enquanto a maior preocupação dos engenheiros do final do século XIV era calcular com precisão as tensões em uma determinada estrutura já concebida, Maxwell estava a frente de seu tempo com a ambição de fazer um projeto em que a menor quantidade de material fosse utilizada. A idéia principal de Maxwell era considerar um determinado carregamento atuando num domínio

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

infinito e os pontos onde esse domínio estaria apoiado [6] (pontos de apoio de uma ponte, por exemplo). Lembrando que não havia computadores em 1872, portanto, valendo-se somente da teoria da elasticidade, Maxwell calculou as tensões principais da estrutura e sugeriu de forma conceitual que a estrutura ótima, que utilizasse menos material, seria constituída de elementos de treliça alinhados com as direções principais [6].

No início deste capítulo 1, foi falado sobre Michell e como seus estudos foram significativos, embora não devidamente valorizados na sua época. Em seu trabalho *The limits of economy of material in frame structures* [8], de 1904, ele retomou os estudos realizados em 1872 por Maxwell que aplicou o método para o projeto de vários tipos de estruturas com o menor volume de material [6]. As Figuras 1.3(a) e 1.3(b) mostram estruturas ótimas de Michell (as linhas sólidas representam os elementos tracionados e as linhas tracejadas representam os elementos comprimidos).



(a) (b)

Figura 1.3: Estruturas ótimas propostas por Michell (a) manivela onde β varia entre 45° e 135° [6] e; (b) treliça plana. As linhas sólidas representam os elementos tracionados e as linhas tracejadas representam os elementos comprimidos.

Um fator que possibilitou grande avanço nesse meio, além dos cálculos computacionais, foi o surgimento do Método dos Elementos Finitos ainda na década de 1960 - com a publicação de *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams* por Ngo e Scordelis em 1967 [12, 13]. Assim, nos anos seguintes, problemas práticos de otimização, estrutural passaram a ser amplamente estudados nas indústrias automotiva, aeronáutica e espacial. Nesse contexto, são originadas as técnicas de otimização de forma e posteriormente a otimização topológica que se constitui em uma ferramenta genérica e poderosa, proposta inicialmente por Bendsøe e Kikushi em 1988 [15], considerando uma equação constitutiva homogeneizada que depende da densidade relativa do material. Tanto o Método de Elementos Finitos quanto a Otimização Topológica citados aqui, serão abordados com mais detalhes no capítulo 2.

Existem três principais abordagens na otimização estrutural: paramétrica, de forma e topológica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

1.2.1 Otimização paramétrica

A otimização paramétrica (*sizing optimization*) normalmente é aplicada para otimizar alguma dimensão da estrutura, como altura, raio da seção transversal, espessura, ou ainda a razão entre suas dimensões. Por exemplo, em uma viga, podemos otimizar a relação entre as dimensões do seu perfil, como na Figura 1.4, ou reduzir a área da seção transversal modificando o seu raio no caso da Figura 1.5.

Figura 1.4: Viga de perfil "I"(a) antes da otimização e (b) após otimização paramétrica.

Figura 1.5: Viga de perfil circular.

1.2.2 Otimização de forma

A otimização de forma (*shape optimization*) atua no formato da estrutura, como o próprio nome já sugere, porém ela busca alterar os parâmetros que definem o contorno. Por exemplo, as variáveis consideradas podem ser parâmetros de uma curva que define o contorno do objeto, conforme mostrado na Figura 1.6 e na Figura 1.7, isto é, o contorno interno e externo podem ser alterados, ou furos existentes podem ser remodelados, mas nenhum furo pode ser criado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

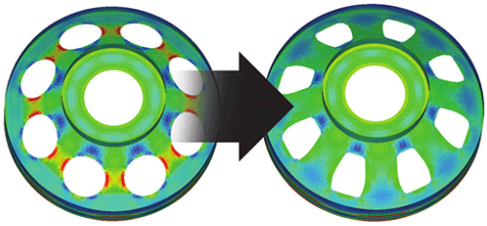


Figura 1.6: Peça submetida a otimização de forma [14].

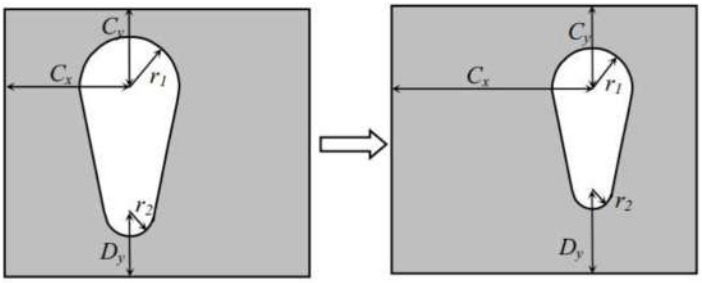


Figura 1.7: Bloco retangular com uma abertura. Fonte: Choi e Kim [11].

1.2.3 Otimização topológica

A abordagem da otimização topológica permite a obtenção de um *design* a partir de um domínio submetido a determinadas condições de contorno. O resultado final, ou seja, a topologia da estrutura após a otimização, dependerá do comportamento da função objetivo diante das restrições impostas. A Figura 1.8 exemplifica o processo de otimização.

Também podemos dizer que a otimização topológica pode ser usada para gerar conceitos de *layout* [11] no caso do *design* de produtos e a otimização de forma pode refinar e aprimorar uma topologia dentro de um determinado conceito. Atualmente, a otimização topológica tem sido bastante utilizada em mecanismos flexíveis, MEMS, atuadores piezoelétricos, antenas, etc. [16, 17, 18].

1.3 Otimização topológica de estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos

De acordo com a natureza do carregamento imposto, a otimização pode ser baseada na resposta estática ou na resposta dinâmica dessa estrutura. No entanto, vale ressaltar que a maioria das estruturas existentes no mundo real está sujeita a cargas dinâmicas, como vento, ondas do mar e/ou vibração de máquinas rotativas. Exemplos assim podem ser observados em torres metálicas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

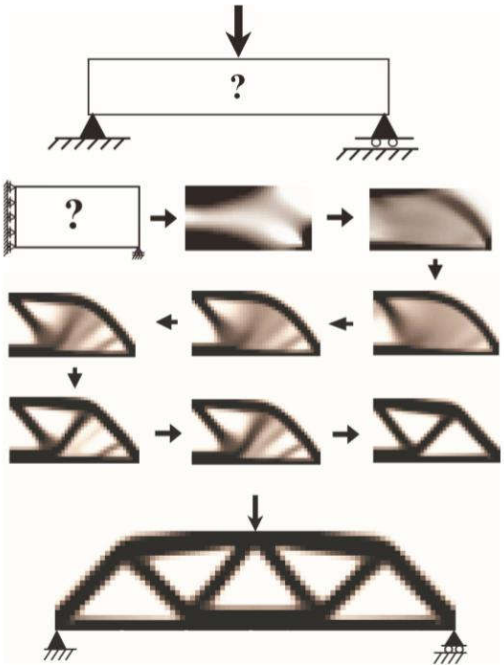


Figura 1.8: Processo de otimização topológica em uma viga bi-apoiada [19].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

para turbinas eólicas, píers, pontes e castelos d'água [20, 21, 22]. Dessa forma, o uso de cargas estáticas na análise pode não fornecer soluções adequadas.

A otimização de estruturas sujeitas a carregamentos que variam no domínio do tempo exige um grande custo computacional, pois além de ser necessária uma análise dinâmica a cada iteração, também é preciso calcular a sensibilidade da função objetivo e das matrizes de massa, rigidez e amortecimento em relação às variáveis de projeto. Portanto, esse tipo de análise é limitado a pequenas estruturas e modelos simplificados com poucos graus de liberdade [23]. Para resolver este problema, o método do carregamento estático equivalente (***E**quivalent **S**tatic **L**oad*), ou ESL *method*, foi investigado em algumas pesquisas [24, 25, 26].

Considerando uma avaliação completa da equação dinâmica, há o trabalho de Behrou e Guest (2017) [27] em que a resposta dinâmica foi calculada usando o método de integração Newmark-β. Outras pesquisas também têm uma contribuição significativa em relação a este estudo, que podem ser encontradas em [28, 23, 24].

Nesta presente contribuição, foi utilizado o método de ESL baseado em deslocamentos para representar o carregamento dinâmico. O ESL foi aplicado à otimização topológica como uma maneira de reduzir os custos computacionais para atingir os objetivos de otimização sem prejudicar o resultado final.

1.4 Revisão bibliográfica

Desde que a otimização estrutural utilizando análise pelo método de elementos finitos foi introduzida por L.A. Schmit (1960) [29] *apud* Kang *et. al.* [24], foram realizados muitos trabalhos sobre otimização da resposta estática. Atualmente esse tipo de pesquisa se encontra bem desenvolvido. No entanto, é comum que no mundo real as estruturas apresentem uma resposta dinâmica, pois são submetidas a esforços dinâmicos.

Na engenharia Civil alguns trabalhos em transformação de carregamento dinâmico em carregamento estático foram realizados, como podemos citar a pesquisa de Balling *et. al* (1983) [30] e o trabalho de Cheng e Juang (1988) [31], mas foram trabalhos experimentais isolados e restritos a análise sísmica e aplicáveis a um design com pequenas variações.

Uma pesquisa numérica mais rigorosa foi realizada em 2001 por Kang *et. al.* [24] em *Structural optimization under equivalent static loads transformed from dynamic loads based on displacement*, onde uma carga estática equivalente foi calculada para gerar um campo de deslocamentos idêntico ao campo de deslocamentos gerado por uma carga dinâmica. As cargas estáticas equivalentes foram calculadas em pontos específicos onde havia picos no domínio do tempo. Como os nós onde ocorrem essas cargas podem ser diferentes dos nós onde ocorrem as cargas dinâmicas, a transformação resulta em vários conjuntos de carregamentos. Neste referido trabalho, os exemplos de treliças foram analisados com os softwares CSAR/NASTRAN e GENESIS Engineering e foi utilizado um processo de otimização matemática para desenvolver um método de aproximação para resolver os sistemas de equações. O método proposto se mostrou adequado, porém, a avaliação das tensões dos elementos submetidos ao carregamento estático equivalente foi ligeiramente diferente das tensões analisadas com a dinâmica estrutural.

O Carregamento Estático Equivalente (em inglês ESL's - *equivalente static loads*) também tem sido verificado para otimização estrutural não-linear. Na otimização topológica baseada na densidade, ocorre distorção na malha de elementos finitos nos pontos onde há baixa densidade de elementos e isso impacta negativamente nos resultados dos ciclos seguintes da otimização, devido a não linearidade [32]. Ahmad *et. al.* [32] (2017) realizou um estudo de caso abrangendo três tipos de não linearidades (de geometria, de material e por contato). O objetivo era reduzir os efeitos negativos de distorção da malha de elementos finitos nos ciclos de otimização. Para isso, recorreu-se à técnica de ESL e os resultados foram favoráveis corroborando para justificar a utilização do método como uma alternativa à otimização de modelos estruturais com não

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

linearidades.

Como comentado anteriormente, a conversão de carregamentos dinâmicos em carregamento estático equivalente pode resultar em uma quantidade extensa de conjuntos de carregamentos. Esse número pode ser bem significativo quanto maior for o número de variáveis de projeto e maior for a quantidade de intervalos de tempo em análise. Então, métodos para reduzir o número de componentes do vetor precisam ser analisados. Zhang *et. al.* publicou em 2017 um trabalho intitulado *Stochastic sampling for deterministic structural topology optimization with many load cases: Density-based and groundstructure approaches* [33], que apresenta um método estocástico para otimização topológica de estruturas submetidas a múltiplos casos de carga. Embora o método de ESL não seja o enfoque do trabalho realizado por ela, é possível fazer uma adaptação para o caso de estruturas submetidas a carregamentos estáticos equivalentes em substituição a carregamentos dinâmicos. Em seu trabalho, Zhang *et. al.* [33] utiliza um método probabilístico por meio de um algoritmo que se baseia em *simulated annealing*. Seu método de otimização aleatória com uma amostragem estocástica de cargas apresentou uma drástica redução no custo computacional para obtenção de topologias finais semelhantes àquelas obtidas com o algoritmo padrão. Vários exemplos são analisados tanto em otimização topológica de treliças quanto em estruturas contínuas e em um dos casos a redução partiu de 108 casos de carga para apenas 6, mantendo a topologia esperada e comprovando o benefício de usar a técnica.

Existem alguns programas comerciais que trabalham com análise estrutural e possuem módulo para otimização topológica, como ANSYS, NASTRAN e GENESIS, no entanto são códigos fechados e o usuário não tem muita liberdade para verificar alguns métodos empregados por esses *softwares*. Talischi *et. al.* [34] publicou em 2012 o código `PolyTop`, uma implementação em MATLAB para otimização estrutural que inclui análise estrutural em elementos finitos e utiliza elementos paramétricos poligonais. É necessário construir um *script* que contenha as informações sobre o domínio, o formato da malha e o carregamento aplicado, então o `PolyTop` faz uma análise estática por método de elementos finitos e procede com a otimização topológica baseada na densidade do elemento fornecendo a topologia da estrutura ao final dos cálculos. A rotina de otimização executada também trabalha em conjunto com outras funções. Para construção da malha é utilizada a rotina `PolyMesher`, para mitigar problemas de malha é utilizado o `PolyFilter` e a interpolação do material é feita com a rotina `MatIntFnc`, que possui as opções de usar as formulações SIMP, RAMP, SIMP-H e RAMP-H [18, 34].

Estudos voltados para mitigar o elevado custo computacional da otimiza-

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

ção topológica baseada na resposta dinâmica tem sido realizados nesses últimos anos. Zhao e Wang [28] publicaram em 2015 um artigo sobre esse assunto, investigando a eficácia do *mode displacement method* (MDM) e do *mode acceleration method* (MAM), utilizando três funções objetivo diferentes: a *compliance* média, a energia de deformação média e o deslocamento quadrático médio. Chegando a conclusão de que o MDM não é adequado para problemas de otimização topológica devido a sua baixa precisão. Diferentemente do MAM, que se mostrou tão bom quanto a integração direta de Newmark.

Behrou e Guest [27] (2017) realizaram uma análise da otimização topológica de uma viga em balanço com resposta transiente devido a um carregamento dinâmico. Utilizando um modelo de material isotrópico linear elástico, o problema de otimização topológica foi resolvido com o critério de otimização MMA - *Method of Moving Asymptotes*, a sensibilidade foi calculada pelo método adjunto e a distribuição do material dada pelos métodos SIMP - *Solid Isotropic Material with Penalization* e HPM *Heaviside Projection Method.* São muito interessantes os gráficos que mostram a minimização da energia de deformação e ressaltam a importância da formulação da função objetivo, bem como o intervalo de tempo considerado na análise e a condição em que as cargas são aplicadas para a obtenção de resultados coerentes. Os resultados apresentados reforçam a eficiência da otimização topológica para se adaptar também à análise de problemas com comportamento dinâmico.

1.5 Objetivos da dissertação

Podemos observar que as estruturas do mundo real estão submetidas a esforços ao longo do tempo, sejam ações naturais como vento, ondas ou terremotos, ou sejam vibrações induzidas pelo uso de máquinas rotativas. Por isso, analisar a resposta dinâmica estrutural é importante. Paralelamente, a otimização das estruturas é uma área de bastante interesse pois está relacionada com redução de custos e melhorias no processo de fabricação. No entanto, trabalhar com otimização estrutural juntamente com esforços dinâmicos demanda um elevado custo computacional.

Neste contexto, esta dissertação se propõe a estudar o método denominado ESL (***E**quivalent **S**tatic **L**oad*), ou Carregamento Estático Equivalente, que tem sido abordado na literatura como uma representação do carregamento dinâmico. Com esse intuito o objetivo geral é desdobrado nos seguintes objetivos específicos:

– Implementar múltiplos casos de carga para otimização topológica a partir do `PolyTop` [34], uma *framework* já publicada e implementada

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

em MATLAB;

- Fazer a análise dinâmica de alguns modelos de estruturas utilizando o método da integração Newmark-β;
- Calcular o Carregamento Estático Equivalente com base na resposta dinâmica dos modelos analisados;
- Realizar a otimização topológica dos modelos baseando-se na resposta dinâmica e utilizando o método ESL;

1.6 Organização do trabalho

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. Primeiramente, o capítulo 1 compreende esta introdução, uma breve revisão bibliográfica sobre problemas de otimização relacionados com análise dinâmica e múltiplos casos de carga e, por fim, esclarece os objetivos do trabalho. O capítulo 2 introduz alguns conceitos que serão utilizados ao longo da dissertação com o intuito de familiarização do leitor e apresenta um modelo com solução analítica para validar o método de integração passo-apasso usado na análise dinâmica. O capítulo 3 versa sobre otimização topológica e demais conceitos envolvidos que são relevantes para esta dissertação . O capítulo 4 aborda problemas conhecidos na literatura, utilizando-os para comparação de resultados e a aplicação do método na análise de um problema um pouco mais elaborado. O capítulo 5 traz as considerações finais e sugestões de trabalhos futuros.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

2
Conceitos preliminares

Com a intenção de esclarecer alguns conceitos, situar o leitor e fornecer definições a respeito dos métodos utilizados nos capítulos seguintes, este capítulo começa tratando de alguns conceitos preliminares relacionados a análise estrutural. Para a obtenção das respostas em termos de deslocamentos, foi utilizado o método de elementos finitos. Na análise dinâmica, o método de integração de Newmark-β forneceu a resposta ao longo do tempo. Ao final do capítulo é apresentado um problema simples que possui solução analítica. O intuito disso é validar o método de integração passo a passo, que foi implementado em MATLAB para trabalhar em conjunto com o `PolyTop`, na obtenção da resposta dinâmica e da sensibilidade em relação às variáveis de projeto.

2.1
Métodos de elementos finitos

O Método de Elementos Finitos (MEF) é um procedimento numérico para resolução de problemas de valores de contorno que é muito utilizado para realizar análise de estruturas. Em outras palavras serve para encontrar soluções aproximadas da resposta de equações diferenciais. Consiste em discretizar o domínio da estrutura em partes menores denominadas *elementos finitos*.

O MEF considera um meio contínuo como discretizado, ou seja, o domínio da estrutura é dividido em partes menores (elementos) com propriedades conhecidas como rigidez, módulo de elasticidade, massa específica, etc. Estes elementos possuem nós que recebem cargas e sofrem deslocamentos, fornecendo as respostas procuradas a respeito do sistema em estudo.

Fazendo uma analogia ao 1º Princípio da Termodinâmica (lei conhecida como *princípio da conservação de energia*, existem métodos energéticos que podem ser considerados precursores do MEF, como o Princípio dos Trabalhos Virtuais e o Método de Rayleigh-Ritz, sendo que este último baseia-se na minimização da energia potencial total do sistema, escrita em função de um campo pré-definido de deslocamentos [35, 36].

Evidentemente, o avanço computacional também foi necessário para que avanços nessa área fossem possíveis, uma vez que dependendo do domínio a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

ser discretizado e do grau de discretização, calcular o número de integrações e operações matriciais necessários é infactível.

A formulação do método abrange equações de equilíbrio e compatibilidade entre os elementos, bem como de relações constitutivas, que permitem a obtenção do estado de tensões a partir de um campo de deslocamentos no domínio de um elemento. O estado de tensões obtido é transformado em esforços internos que precisam estar em equilíbrio com as ações externas [36].

A seguir é apresentada uma breve explicação da formulação do método para o caso de um elemento finito retangular plano mostrado na Figura 2.1. Evidentemente, existem particularidades de acordo com os tipos de elementos que são adotados e os seus graus de liberdade, para maiores informações, recomenda-se a leitura da literatura citada nas referências bibliográficas [35, 37, 36, 38].

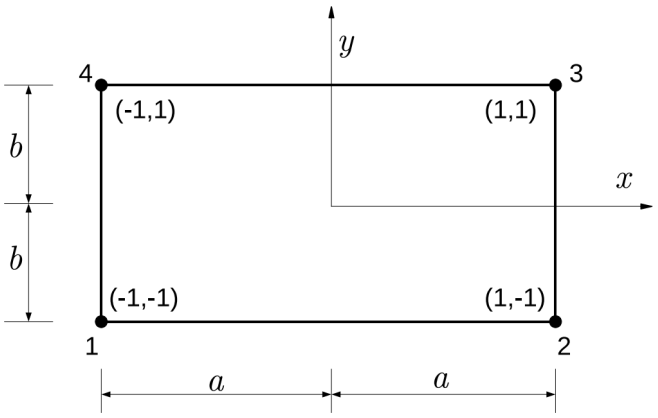


Figura 2.1: Elemento finito de 4 nós.

Primeiramente é necessário estabelecer uma relação entre as coordenadas locais do elemento discreto e as coordenadas globais do elemento. Isso é feito por meio das funções de interpolação, também chamadas de *funções de forma*, mostradas nas Eq. (2-1) e Eq. (2-2).

$$\left\{ \begin{array}{c} u(x,y) \\ v(x,y) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{array} \right\}, \qquad (2\text{-}1)$$

sendo:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ N_2(x,y) &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ N_3(x,y) &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ N_4(x,y) &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right). \end{aligned} \tag{2-2}$$

As deformações em função das componentes de deslocamentos são dadas pela Eq. (2-3):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{2-3}$$

onde $\mathbf{B}$ é a matriz de compatibilidade geométrica que relaciona deformações e deslocamentos.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{Bmatrix}. \tag{2-4}$$

A relação entre tensão e deformação possui a forma dada na equação Eq. (2-5):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2-5}$$

A matriz $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva, que no estado plano de tensões é dada pela Eq. (2-6), onde ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de Young, ou módulo de elasticidade:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{2-6}$$

Substituindo a Eq. (2-3) na Eq. (2-5), temos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{2-7}$$

– *Matriz de rigidez*: A matriz de rigidez é dada pela integral no volume:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV. \tag{2-8}$$

– *Matriz de inércia*: A matriz de inércia de massa é dada por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV. \tag{2-9}$$

– *Matriz de amortecimento*: O amortecimento é um fenômeno que se caracteriza pela dissipação de energia em um sistema mecânico. Ele depende de características como histerese do material e atrito de suas conexões. No entanto, é complicado incorporá-lo nas equações da dinâmica estrutural e isso traz dificuldades computacionais [37]. Dessa forma, o mecanismo de amortecimento das estruturas é aproximado pelo amortecimento viscoso.

Contudo, essa abordagem também possui suas complicações devido as dificuldades físicas de caracterização do coeficiente de amortecimento viscoso [39]. Assim, uma estratégia prática é a utilização do Amortecimento Proporcional de Rayleigh (formulação atribuída ao Lord Rayleigh [39]) é dada pela Eq. (2-10),

$$\mathbf{C} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K}, \tag{2-10}$$

onde as constantes de proporcionalidade α_R e β_R são determinadas com a condição de que a matriz modal seja ortogonal em relação a matriz $\mathbf{C}$ [39] e são calculadas conforme (2-11). Além da simplicidade, o amortecimento de Rayleigh fornece uma matriz de amortecimento global com as mesmas características de esparcidade da matriz de rigidez.

$$\begin{aligned} \alpha_R &= \frac{2\xi\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \\ \beta_R &= \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j}, \end{aligned} \tag{2-11}$$

onde ω_i e ω_j correspondem a i-ésima e a j-ésima frequências de vibração natural respectivamente. A razão ξ geralmente é estabelecida como $0,02$ em estruturas da construção civil [40].

2.2 Integração pelo método de Newmark-β

Para analisar a resposta dinâmica dos sistemas, existem vários métodos, como integral de Duhamel, método de Runge-Kutta (no domínio do tempo), ou a transformada de Fourier (no domínio da frequência). Esses métodos se restringem ao estudo de sistemas lineares, uma vez que trabalham com combinação de carregamentos ou superposição de efeitos. Para análise de estruturas com comportamento não-linear, existe uma outra abordagem que é iterativa, são os chamados métodos passo-a-passo [21]. A ideia básica desses métodos consiste em dividir o carregamento e o histórico de resposta

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

da estrutura em uma sequência de intervalos discretos de tempo Δt, em vez de resolver para todo t. A resposta é calculada em cada um desses intervalos a partir de condições iniciais (deslocamento e velocidade). Pode-se considerar um comportamento linear da rigidez e do amortecimento assumindo que as propriedades da estrutura permanecem constantes apenas dentro dos intervalos.

Usando o sistema massa-mola da Figura 2.2, a equação do movimento é dada em (2-12).

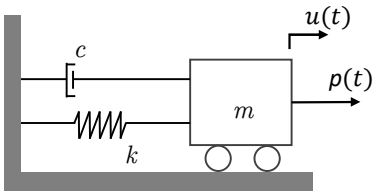


Figura 2.2: Sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{2-12}$$

Na Eq. (2-12), a variável tempo t, pode ser discretizada em i intervalos, ou passos, conforme mostrado na Figura 2.3 e equação (2-13).

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = p_i \tag{2-13}$$

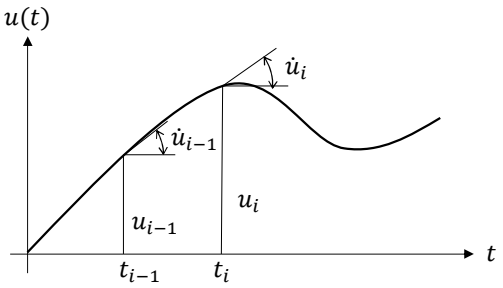


Figura 2.3: Resposta do deslocamento no domínio do tempo.

A velocidade em um determinado intervalo, pode ser obtida somando o valor no início do intervalo com a integral da aceleração até o final do intervalo, conforme mostrado na Eq. (2-14). Para o calculo do deslocamento o procedimento é análogo, Eq. (2-15)

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \int_0^{\Delta t} \ddot{u}(\tau)dt, \tag{2-14}$$

$$u_i = u_{i-1} + \int_0^{\Delta t} \dot{u}(\tau)dt. \tag{2-15}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

O primeiro passo é encontrar as acelerações inicial e final e, posteriormente calcular a aceleração constante, que pode ser obtida a partir da Eq. (2-13) de equilíbrio dinâmico no tempo $t = t_{i-1}$, ou seja:

$$\ddot{u}_{i-1} = \frac{1}{m}\left(p_{i-1} - c\dot{u}_{i-1} - ku_{i-1}\right) \tag{2-16}$$

A formulação proposta por Newmark é expressa pelas seguintes equações [21]:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + (1-\gamma)\,\Delta t\ddot{u}_{i-1} + \gamma\Delta t\ddot{u}_i \tag{2-17}$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t\dot{u}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{u}_{i-1} + \beta\Delta t^2\ddot{u}_i, \tag{2-18}$$

onde:

- γ - é um fator que atua na variação da velocidade, fazendo uma proporção linear entre as influências das acelerações inicial e final;
- β - analogamente, faz uma ponderação nas contribuições das acelerações no calculo do deslocamento.

Nota-se que se $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$, a fórmula de Newmark atende a consideração da aceleração média constante, bem como se $\gamma = 1/2$ e $beta = 1/6$, o método passa a considerar aceleração com variação linear [21].

Na formulação incremental, é importante destacar as seguintes diferenças: 1) no sistema linear, as forças atuantes são expressas em termos dos valores totais da velocidade e deslocamento que se desenvolvem na estrutura até o temo final da análise; 2) no sistema não-linear é assumido que as propriedades físicas permanecem constantes somente durante um pequeno incremento de tempo ou de deformação. Assim:

$$m\Delta\ddot{u} + c_o\Delta\dot{u}_i + k_o\Delta u = \Delta p, \tag{2-19}$$

sendo que c_o e k_o são os valores de amortecimento e rigidez, respectivamente, que são assumidos como sendo constantes no intervalo $\Delta t = t_{i-1} + t_i$.

Reescrevendo Eq. (2-17) e Eq. (2-18) com a notação incremental, temos:

$$\Delta\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + (1-\gamma)\,\Delta t\ddot{u}_{i-1} + \gamma\Delta t\ddot{u}_i \tag{2-20}$$

$$\Delta u_i = u_{i-1} + \Delta t\dot{u}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{u}_{i-1} + \beta\Delta t^2\ddot{u}_i, \tag{2-21}$$

É mais conveniente utilizar a formulação explícita para determinar a aceleração no final das iterações, conforme segue procedimento abaixo:

Podemos isolar a aceleração da Eq. (2-21):

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

$$\ddot{u}_i = \frac{\Delta u}{\Delta t^2}\frac{1}{\beta} - \frac{\dot{u}_{i-1}}{\Delta t}\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_{i-1}. \tag{2-22}$$

A Equação (2-22) pode ser substituída em Eq. (2-20):

$$\Delta\dot{u}_i = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{u}_{i-1} + \frac{\gamma}{\beta}\frac{\Delta u}{\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_{i-1}. \tag{2-23}$$

Subtraindo $\ddot{u}_{i-1}$ da Eq. (2-20), temos:

$$\Delta\ddot{u}_i = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\Delta u - \Delta t\dot{u}_{i-1} - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{i-1}\right). \tag{2-24}$$

Então, substituindo as Eq. (2-23) e Eq. (2-24) em Eq. (2-19),

$$\begin{aligned} &\frac{m}{\beta\Delta t^2}\left(\Delta u - \Delta t\dot{u}_{i-1} - \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{i-1}\right) \\ &+c_o\left[\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{u}_{i-1} + \frac{\gamma}{\beta}\frac{\Delta u}{\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_{i-1}\right] \\ &+k_o\Delta u = \Delta p. \end{aligned} \tag{2-25}$$

Podemos chamar k_c de rigidez efetiva e p_c de carregamento efetivo incremental, portanto:

$$k_c\Delta u_i = p_c, \tag{2-26}$$

onde:

$$\frac{m}{\beta\Delta t^2} + \frac{c_o\gamma}{\beta\Delta t} + k_o = k_c \tag{2-27}$$

e

$$m\left(\frac{\dot{u}_{i-1}}{\beta\Delta t} + \frac{\ddot{u}_{i-1}}{2\beta}\right) + c_o\left(-\Delta t\ddot{u}_{i-1} + \frac{\gamma}{2\beta}\Delta t\ddot{u}_{i-t} + \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_{i-1}\right) + \Delta p = p_c \tag{2-28}$$

Toda essa explanação, pode ser expandida para múltiplos graus de liberdade. Após montar as matrizes de rigidez, $\mathbf{K}$, de massa $\mathbf{M}$ e de amortecimento $\mathbf{C}$, deve-se definir os vetores dos valores iniciais de deslocamento $\mathbf{u}_0$ e velocidade $\dot{\mathbf{u}}_0$ para que o vetor de aceleração inicial $\ddot{\mathbf{u}}_0$ seja calculado:

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}\left(\mathbf{F}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0\right) \tag{2-29}$$

O passo seguinte é definir o intervalo de tempo Δt, os parâmetros β e γ e calcular as constantes c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

$$\begin{cases} c_0 = \dfrac{1}{\beta \Delta t^2} \\ c_1 = \dfrac{\gamma}{\beta \Delta t} \\ c_2 = \dfrac{1}{\beta \Delta t} \\ c_3 = \dfrac{1}{2\beta} - 1 \\ c_4 = \dfrac{\gamma}{\beta} - 1 \\ c_5 = \Delta t \left(\dfrac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \end{cases} \tag{2-30}$$

A partir das equações anteriores, a matriz de rigidez efetiva, pode ser calculada como:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + c_1 \mathbf{C} + c_0 \mathbf{M} \tag{2-31}$$

Para organizar os cálculos, é preferível definir as variáveis preditoras $\tilde{\mathbf{a}}$ e $\tilde{\mathbf{v}}$, conforme Eq. (2-32) antes de calcular o carregamento efetivo $\bar{\mathbf{F}}$, Eq. (2-33)

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{a}} = c_0 \mathbf{u}_t + c_2 \dot{\mathbf{u}}_t + c_3 \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \tilde{\mathbf{v}} = c_1 \mathbf{u}_t + c_4 \dot{\mathbf{u}}_t + c_5 \ddot{\mathbf{u}}_t \end{cases} \tag{2-32}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}} \tag{2-33}$$

A partir da matriz de rigidez do carregamento efetivos, o vetor de deslocamentos em $t + \Delta t$ é calculado pela Eq. (2-34) e, finalmente os vetores de velocidade e de aceleração conforme Eq. (2-35) e Eq. (2-36)

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \bar{\mathbf{F}} \tag{2-34}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = c_1 \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \tilde{\mathbf{v}} \tag{2-35}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = c_0 \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \tilde{\mathbf{a}} \tag{2-36}$$

2.3 Modelo com solução analítica para verificação da dinâmica

2.3.1 Pórtico de dois pavimentos (*two-story shear building*)

O modelo *two-story shear building* é um dos mais práticos e intuitivos, por isso proporciona que o calculista tenha uma interpretação mais clara dos resultados reproduzidos. Além disso, possui uma solução analítica, que é solução análoga a um modelo "massa-mola"com dois graus de liberdade.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

O modelo em questão está sujeito apenas a deslocamentos transversais, porém sem rotação entre os níveis dos pavimentos. Outra consideração assumida é que a massa total da estrutura está concentrada nos níveis dos pisos. As lajes e vigas de cada piso são extremamente rígidas em relação aos pilares que as sustentam, bem como a deformação da estrutura não depende das forças axiais e os pavimentos permanecerão horizontais após o movimento. As Figuras 2.4 e 2.5 mostram o caso retirado do Example 7.1 do livro *Structural dynamics: theory and computation* [41].

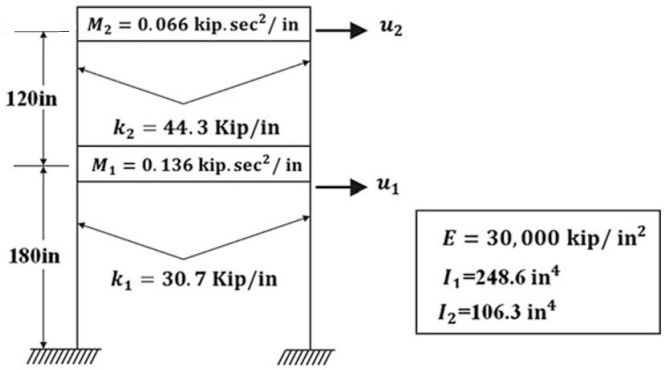


Figura 2.4: Modelo *two-story shear building* [41].

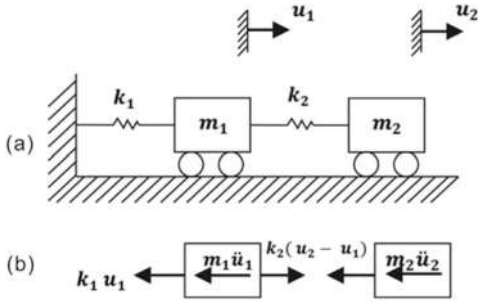


Figura 2.5: (a)Modelo do *two-story shear building* representado como massa-mola e (b) diagrama de corpo livre [41].

Desconsiderando o amortecimento e assumindo que a estrutura possui comportamento linear elástico, a equação do movimento é dada por:

$$[\mathbf{M}]\,\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\,\mathbf{u} = 0 \tag{2-37}$$

A reposta do sistema não amortecido sujeito a vibrações livres é dada pela Eq. (2-38), em notação vetorial:

$$\{u\} = \{a_i\}\sin(\omega t - \alpha), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2-38}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

onde $\{a_i\}$ é um fator relacionado ao movimento no i-ésimo grau de liberdade e n é o número de graus de liberdade. Substituindo a Eq. (2-38) na Eq. (2-37), temos:

$$-\omega^2 [\mathbf{M}] \{a\} \sin(\omega t - \alpha) + \omega^2 [\mathbf{K}] \{a\} \sin(\omega t - \alpha) = \{0\} \tag{2-39}$$

$$\left[[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]\right] \{a\} = \{0\} \tag{2-40}$$

A Equação (2-40) é um problema de autovalores e autovetores. Para a solução não trivial, é necessário que o determinante da Eq. (2-41) seja nulo:

$$\left|[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}]\right| = \{0\} \tag{2-41}$$

Relembrando que para o modelo que estamos analisando as vigas são rígidas e fixas na duas extremidades, a rigidez de cada pavimento é dada pela equação abaixo:

$$k = \frac{12E(2I)}{L^3} \tag{2-42}$$

As equações do movimento, considerando o diagrama de corpo livre da Figura (2.5), são dadas a seguir:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) &= 0 \\ m_2\ddot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) &= 0 \end{aligned} \tag{2-43}$$

A solução analítica dessas equações é dada por:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 \sin(\omega t - \alpha) \\ u_2 &= a_2 \sin(\omega t - \alpha) \\ \ddot{u}_1 &= -a_1\omega^2 \sin(\omega t - \alpha) \\ \ddot{u}_2 &= -a_2\omega^2 \sin(\omega t - \alpha) \end{aligned} \tag{2-44}$$

Assim, em notação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2-45}$$

Como já foi mostrado na Eq. (2-41), a solução do determinate da Eq. (2-46), resulta no polinômio quadrático da Eq. (2-47) que é a equação característica do sistema.

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-46}$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - [(k_1 - k_2) m_2 + m_1 k_2] \omega^2 + k_1 k_2 = 0 \tag{2-47}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Utilizando os valores numéricos do problema, chegamos aos seguintes resultados:

$$\omega_1 = 11.83\, rad/sec \quad ; \quad \omega_2 = 32.89\, rad/sec \tag{2-48}$$

Com os valores das frequências, é possível encontrar o valor das componentes dos autovetores (fatores dos modos de vibração). Adotando o primeiro valor como unitário, o outro é um valor proporcional, conforme é mostrado a seguir em Eq. (2-49):

$$a_{1\omega_1} = 1.000 \quad ; \quad a_{2\omega_1} = 1.263 \quad ; \quad a_{1\omega_2} = 1.000 \quad ; \quad a_{1\omega_2} = -1.629. \tag{2-49}$$

Para os fins computacionais, eliminamos o ângulo de fase mostrado na solução da equação do movimento e expandimos a Eq. (2-38), assim obtemos:

$$\begin{aligned} u_1(t) = C_1 a_{1\omega_1} \sin\omega_1 t + C_2 a_{1\omega_1} \cos\omega_1 t \\ + C_3 a_{1\omega_2} \sin\omega_2 t + C_4 a_{1\omega_2} \cos\omega_2 t \end{aligned} \tag{2-50}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) = C_1 a_{2\omega_1} \sin\omega_1 t + C_2 a_{2\omega_1} \cos\omega_1 t \\ + C_3 a_{2\omega_2} \sin\omega_2 t + C_4 a_{2\omega_2} \cos\omega_2 t \end{aligned} \tag{2-51}$$

Adotando as condições iniciais abaixo (em $t = 0$) , chegamos nas equações que nos permitem calcular os valores de C_1, C_2, C_3 e C_4.

$$u_1(0) = u_{01} \quad ; \quad u_2(0) = u_{02} \quad ; \dot{u}_1(0) = \dot{u}_{01} \quad ; \quad \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{02} \tag{2-52}$$

$$\begin{aligned} u_{01} &= C_2 a_{1\omega_1} + C_4 a_{1\omega_2} \\ u_{02} &= C_2 a_{2\omega_1} + C_4 a_{2\omega_2} \\ \dot{u}_{01} &= \omega_1 C_1 a_{1\omega_1} + \omega_2 C_3 a_{1\omega_2} \\ \dot{u}_{02} &= \omega_1 C_1 a_{2\omega_1} + \omega_2 C_3 a_{2\omega_2} \end{aligned} \tag{2-53}$$

Finalmente, a solução da equação do movimento para o modelo *two-story shear building* mostrado na Eq. (2.4) é:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 0.0563\cos(32.9t) + 0.047\cos(11.83t) \\ u_2(t) &= -0.0941\cos(32.9t) + 0.0594\cos(11.83t) \end{aligned} \tag{2-54}$$

Uma vez que a solução analítica do modelo *two-story shear building* foi calculada, os resultados servem para verificar a consistência de uma rotina implementada em MATLAB que utiliza o método de integração de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Newmark-β para fornecer a resposta da estrutura ao longo do tempo. Além de fornecer o vetor de deslocamentos, o *script* `FEANewmarkChol` retorna também a sensibilidade dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto.

Por conveniência, a variável de projeto adotada foi o módulo de elasticidade E, uma vez que é um valor fixo para todas as colunas do modelo e que influencia somente na matriz de rigidez (não na matriz de massa). Assim, não é necessário calcular a derivada de todas as matrizes para que sejam fornecidos os parâmetros de entrada da função no MATLAB.

Os gráficos mostrados nas Figuras 2.6, 2.7 e 2.8 ilustram os principais resultados para os deslocamentos e sua sensibilidade (o assunto Análise de Sensibilidade é melhor abordado na seção 3.1.4), mostrando que o código utilizado e a solução analítica estão bem relacionados.

Na Figura 2.9 pode-se verificar que a medida que o aumenta o tempo de análise, a solução numérica obtida pelo método de integração de Newmark tende a se distanciar da solução analítica, o que é um tipo de comportamento esperado para esse tipo de solução.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

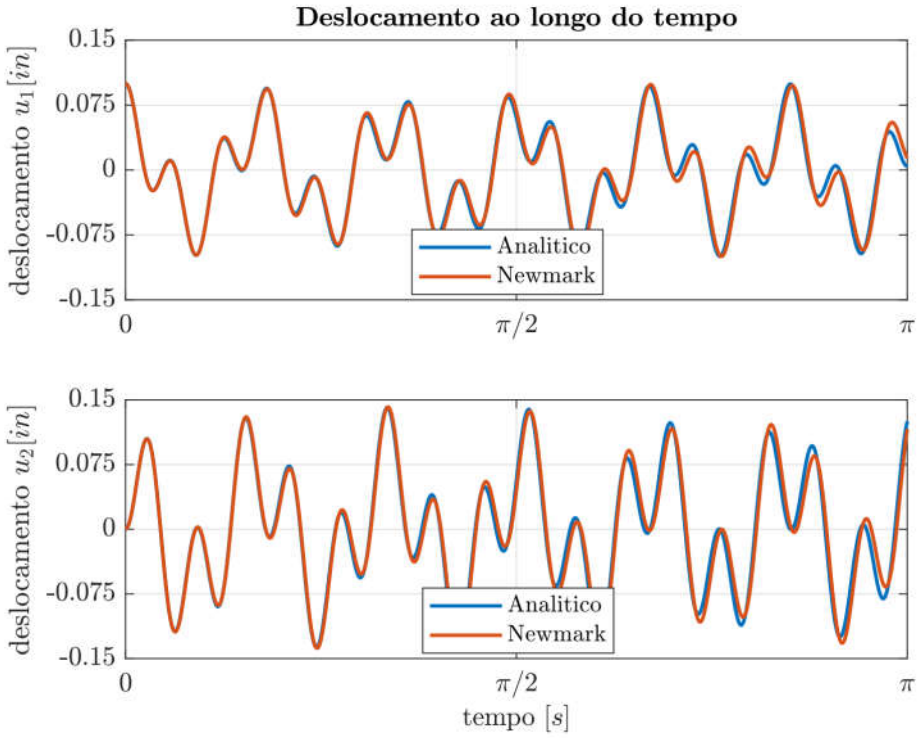


Figura 2.6: Resposta do sistema, onde u_i é o deslocamento no i-ésimo grau de liberdade. Na cor azul o resultado obtido através da solução analítica, em vermelho o resultado calculado por integração de Newmark.

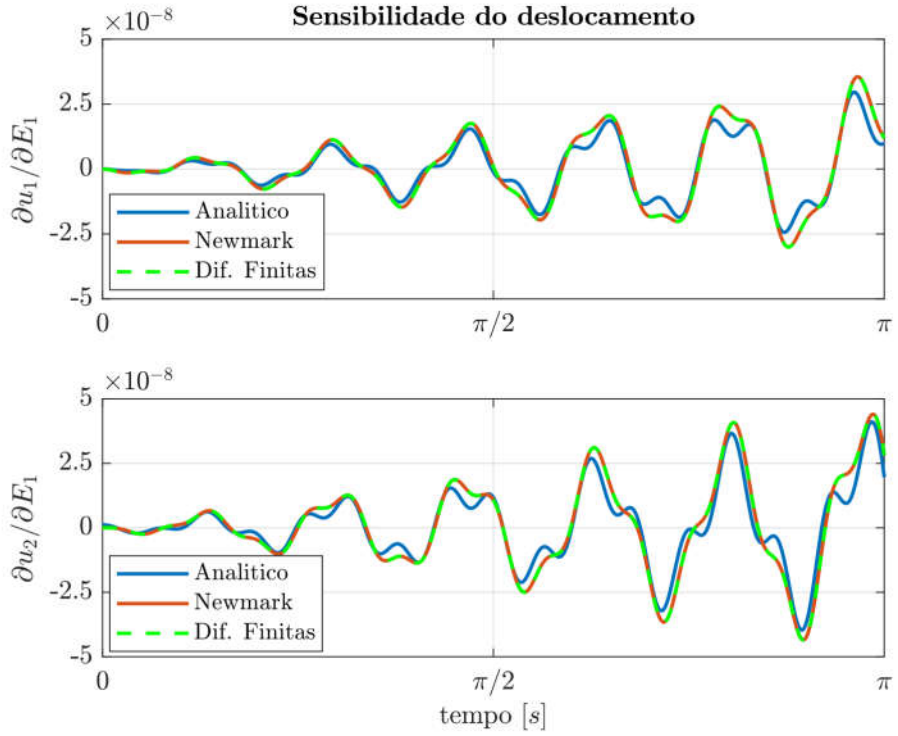


Figura 2.7: Sensibilidade dos deslocamentos u_1 e u_2 em relação a variável de projeto E_1.

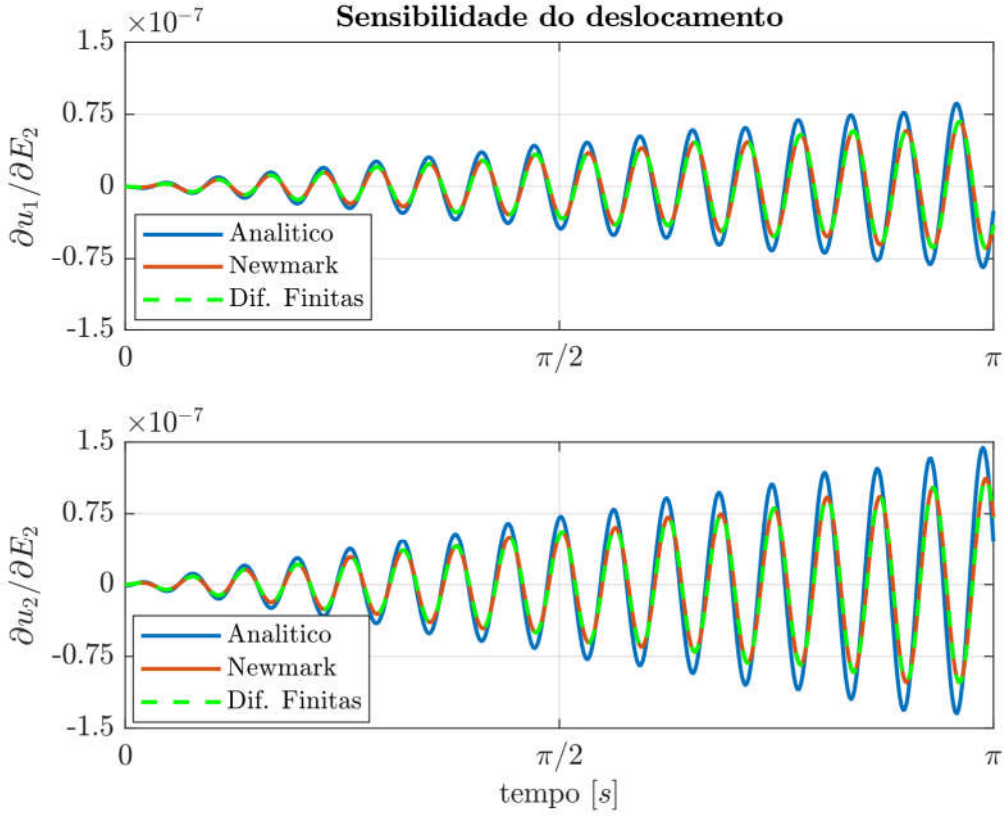


Figura 2.8: Sensibilidade dos deslocamentos u_1 e u_2 em relação a variável de projeto E_2.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

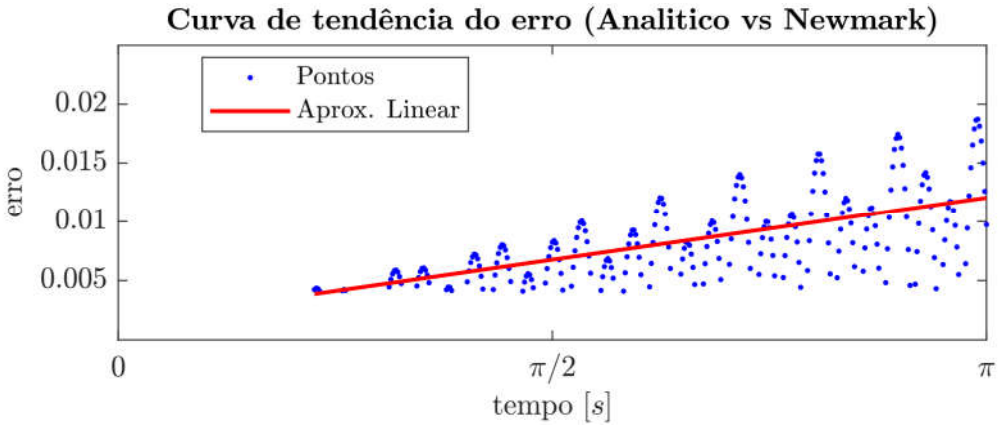


Figura 2.9: Sensibilidade dos deslocamentos u_1 e u_2 em relação a variável de projeto E_2.

3
Otimização topológica

Sob o ponto de vista da matemática, a topologia é considerada uma extensão da geometria, no entanto, esse ramo se diferencia pois não se prende ao formato ou tamanho. A geometria descreve matematicamente um objeto, enquanto a topologia analisa as possibilidades das formas em que o objeto pode se configurar [42, 43].

O avanço dos estudos na topologia estão bastante relacionados com o avanço da pesquisa operacional (PO). Na primeira metade do século XVIII, em *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [44], Leonhard Euler apresentou o problema das sete pontes de Konigsberg, que pode ser considerado como um dos primeiros resultados a relacionar a topologia matemática com a teoria dos grafos [45] (grafos são objeto de estudo da programação matemática, que por sua vez trabalha com problemas de otimização dentro da pesquisa operacional e podemos citar como exemplo, "algoritmo dos mínimos sucessivos", "o problema do caixeiro viajante" e "o problema do fluxo máximo").

Uma vez contextualizado o significado do termo *topologia*, podemos falar da abordagem topológica dentro da otimização estrutural. Nesse contexto, o objetivo da otimização topológica é encontrar a distribuição mais eficiente de material em uma região previamente especificada, satisfazendo as restrições de projeto estabelecidas pelo usuário.

3.1
Otimização topológica de estruturas

A otimização topológica de meios contínuos aliada ao MEF foi publicada por Bendsøe e Kikuchi em 1988 no trabalho intitulado *"Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method* [15] e desde então, muito tem sido publicado a respeito e ainda há muito o que pesquisar. Em sua definição mais ampla e geral, a otimização de estruturas contínuas deve consistir em determinar a cada ponto do espaço se haverá material ou não. Alternativamente, para uma discretização em elementos finitos, cada elemento é um vazio potencial ou membro estrutural [46].

De acordo com Bendsoe e Sigmund (2003) [18], a otimização topológica (OT) consiste em determinar o número, a localização, a forma de furos e a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

conectividade em um determinado domínio. Ou seja, a partir da definição desse domínio Ω, dependendo das condições de contorno, do tipo de carregamento atuante e das restrições atribuídas, a estrutura tem "liberdade" para assumir a forma que vai garantir o melhor desempenho conforme os critérios de otimização. A Figura 3.1 ilustra de maneira genérica o domínio de referência e a forma da estrutura após a otimização.

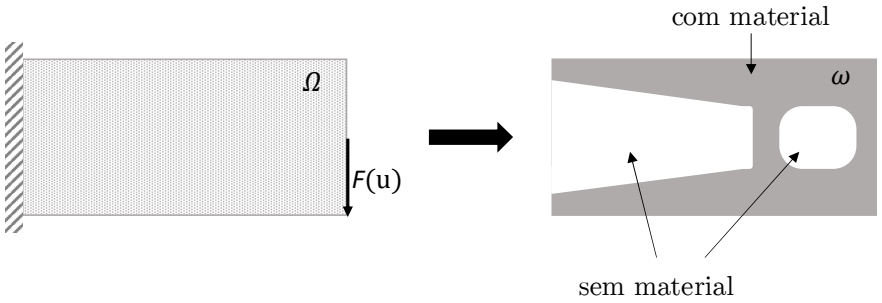
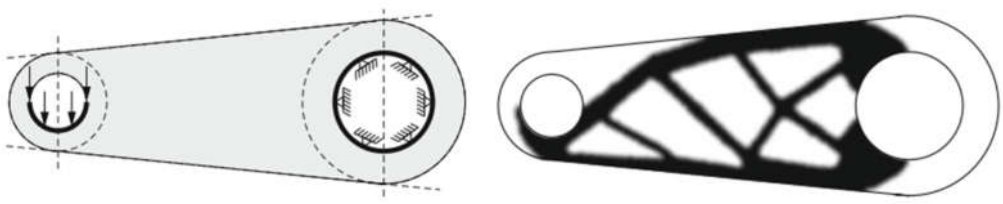


Figura 3.1: Domínio de referência e topologia otimizada de um caso genérico (adaptado de [18]).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

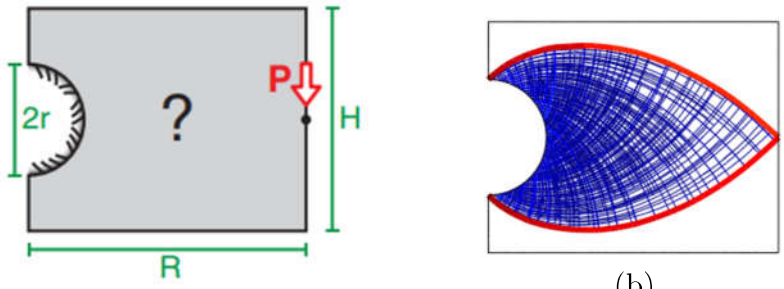
Neste cenário, a topologia da estrutura não é fixa *a priori*, e a formulação geral deve permitir a previsão do *layout* de uma estrutura. Da mesma forma, a disposição de uma estrutura de treliça pode ser encontrada permitindo-se que todas as conexões entre um conjunto fixo de pontos nodais sejam membros estruturais potenciais ou elementos que desaparecem.

Isso pode ocorrer por métodos de densidade ou *ground structure*. Nos métodos de densidade, cada elemento discreto que forma o domínio pode ser um membro integrante da estrutura ou um vazio em potencial e isso dependerá do valor da densidade desse material, que pode assumir valores entre zero e um. Na abordagem de *ground structure* o domínio é preenchido com pontos conectados entre si por diversos elementos e após a otimização, de acordo com as condições de contorno e os carregamentos considerados, o *layout* é um subconjunto desses elementos e suas conexões. As Figuras 3.2 e 3.3 mostram as duas abordagens citadas.



(a) (b)

Figura 3.2: (a) Domínio do modelo de uma chave inglesa e (b) topologia final para o problema de uma chave inglesa [34].



(a) (b)

Figura 3.3: Viga em balanço com apio circular. (a) Domínio, carregamento e condições de contorno e (b) solução obtida com o programa em MATLAB GRAND *GRround structure ANalysis and Design* [47].

O projeto de estruturas envolve a determinação de parâmetros com o objetivo de garantir um bom desempenho estrutural mediante a sua utilização. Dentre as métricas de desempenho existentes, podemos citar a fadiga de um componente mecânico, o nível de vibração aceitável em um piso, o peso, a rigidez ou a *compliance* de uma estrutura, dentre outros. Podemos recorrer à otimização estrutural para determinar esses parâmetros de uma maneira mais esperta e eficiente e garantir o desempenho estrutural desejado.

A *compliance*, muitas vezes traduzida como "flexibilidade" representa a medida de flexibilidade da estrutura [11], ou seja, é o inverso da rigidez e é dada por:

$$\phi(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}. \tag{3-1}$$

Uma vez que há um domínio de referência, ao considerarmos que a função objetivo é a flexibilidade (ou seja, a inversa da rigidez) na otimização topológica por método de densidade é possível dizer que o problema de otimização topológica consiste em encontrar o melhor tensor de rigidez ao longo desse domínio (maximização da rigidez ou minimização da flexibilidade).

3.1.1 Otimização topológica de estruturas considerando múltiplos casos de carga independentes

Geralmente o dimensionamento de estruturas envolve muitos casos de carga. Dessa forma, a função objetivo a ser minimizada na otimização topológica pode ser definida como a soma da *compliance* de cada caso de carga. Para um conjunto de casos de carga m dados $\mathbf{F}_i$ (para $i = 1, \ldots, m$), o problema geral da otimização já apresentado na Eq. (1-1) pode ser reformulado da seguinte forma:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

$$\begin{cases} \min & \phi_s(\mathbf{u}(\mathbf{b})) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{F}_i^T \, \mathbf{u}_i(\mathbf{b}), \\ \text{s.a.:} & \sum_{e=1}^{n} V_e - V_{max} \leqslant 0 \\ & 0 < b_{min} \leqslant b_e \leqslant b_{max}, \quad e = 1, ..., n \\ \text{com} & \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}_i(\mathbf{b}) = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{3-2}$$

onde $\mathbf{b}$ é o vetor de variáveis de projeto, $\mathbf{F}$ e $\mathbf{u}$ denotam o vetor de forças externas e deslocamentos nodais, respectivamente. O número de casos de carga é indicado por m. V_e e V_{max} correspondem ao volume de cada elemento e ao volume máximo permitido. $\mathbf{K}$ representa a matriz de rigidez e n é o número de elementos em que a estrutura foi discretizada.

3.1.2 Otimização topológica de estruturas considerando carregamento dinâmico

O problema de otimização topológica de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos pode ser escrito como,

$$\begin{cases} \min & \phi_d(\mathbf{u}(\mathbf{b}), t) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{F}^T(t)\mathbf{u}(t)\mathrm{d}t \\ \text{s.t.:} & \sum_{e=1}^{n} V_e - V_{max} \leqslant 0 \\ & 0 < b_{min} \leqslant b_e \leqslant b_{max}, \qquad e = 1, \ldots, n \\ \text{with} & \mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \qquad t = t_0, ..., t_f, \end{cases} \tag{3-3}$$

onde ϕ_d é a *compliance* da estrutura submetida a carregamentos dinâmicos, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$ são as matrizes de massa e amortecimento, respectivamente e $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ são os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração, nessa ordem. Neste trabalho, a equação do movimento escrita na última linha da equação (3-3), é discretizada no tempo e resolvida pelo método implícito de integração Newmark-β (apresentado na seção 2.2), que calcula a resposta estrutural no tempo $t + \Delta t$ como

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}. \tag{3-4}$$

3.1.3 Carregamento estático equivalente

A otimização de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos possui altíssimo custo computacional e é de difícil realização devido ao tamanho do sistema de equações que precisa ser resolvido e ao grande número de configurações possíveis na otimização topológica. Para diminuir essa dificuldade foi

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

desenvolvido o método do carregamento estático equivalente (***E**quivalent **S**tatic **L**oad*) - ESL. O carregamento estático equivalente é definido como aquele que em uma análise estática, irá produzir um campo de deslocamentos equivalente ao produzido pelas cargas dinâmicas [48].

O método do carregamento estático equivalente foi introduzido por Kang *et. al.* (2001) [24] e Choi e Park (2002) [23], no qual o problema de otimização considerando a resposta estática da estrutura Eq. (3-2) é resolvido sucessivamente para obter uma aproximação da resposta do problema dinâmico Eq. (3-3).

O fluxograma na Figura 3.4 mostra como o método ESL é usado na otimização topológica. Observa-se que o processo começa com as variáveis de projeto iniciais $\mathbf{b}^k = \mathbf{b}^0$, considerando o ciclo inicial $k = 0$. Em seguida, a equação de equilíbrio dinâmico, apresentada na última linha da Eq. (3-3), é resolvida e os deslocamentos encontrados são usados para calcular o vetor de carregamento estático equivalente de acordo com a Eq. (3-5),

$$\mathbf{F}_{ESL}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{u}}(t). \tag{3-5}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

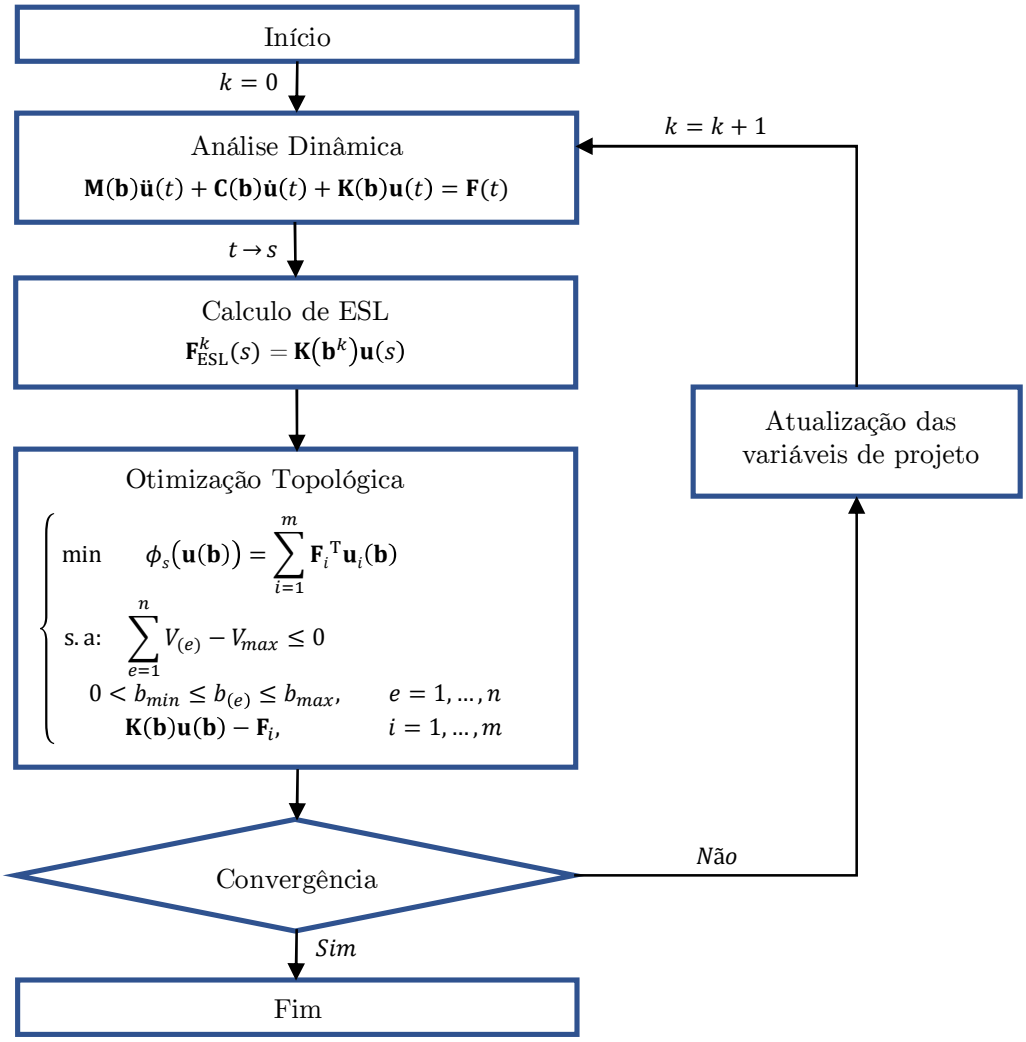


Figura 3.4: Fluxograma mostrando o processo de otimização topológica usando o método de ESL, onde k representa o ciclo de otimização.

O tempo de análise é dividido em etapas de tempo (*time steps*) de tamanho Δt e cada um desses intervalos discretos corresponde a um caso de carga. Assim, a variável de tempo t é substituída por s, que representa o número de casos de carga, ou seja, o número de conjuntos de ESL. A otimização topológica é realizada com $\mathbf{b}^k$ e $\mathbf{F}$ passa a ser igual ao vetor de carregamento estático equivalente $\mathbf{F}_{ESL}$ e o problema de otimização a ser calculado é semelhante ao problema padrão de otimização topológica da Eq. (3-2), abordado na seção 3.1.1. Pode-se notar que o número de conjuntos de ESL definido por s é o mesma quantidade de etapas de tempo l usadas na análise dinâmica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

3.1.4 Análise de sensibilidade

A análise da sensibilidade é uma ferramenta que serve para verificar a influência da variação de um item ou parâmetro no resultado do problema em estudo. Essa análise em otimização estrutural, pode ser utilizada para calcular a taxa de variação da medida de desempenho (*performance measure*) em relação as alterações em uma variável de projeto. Assim, matematicamente sensibilidade é dada por uma derivada [9]:

$$\frac{\partial \phi_i(\mathbf{b})}{\partial b_j}, \tag{3-6}$$

onde $\phi_i(\mathbf{x})$ é uma dada função de desempenho i; e b_j é a componente j de um vetor de variáveis de projeto.

Presume-se que a medida de desempenho é uma função diferenciável em relação a variável de projeto [11]. Suponhamos que na otimização de uma viga de seção transversal circular, a medida de performance seja o volume e a variável de projeto seja o raio r, conforme Eq. (3-7), onde o comprimento da peça é dado por l,

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \pi r^2 l, \\ \frac{d\phi}{dr} &= 2\pi r l. \end{aligned} \tag{3-7}$$

Nesse caso a sensibilidade é dada pela derivada do volume em relação ao raio da peça. Podemos constatar que trata-se de uma função explicitamente dependente da variável de projeto, porém, nem sempre é simples e direto assim. Para essa mesma estrutura, caso a medida de desempenho seja a tensão, o calculo da sensibilidade em relação ao raio envolve a regra da cadeia e mostra a dependência implícita, pois a tensão é diretamente determinada pelo deslocamento (variável de estado) e não pela variável de projeto,

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{d\sigma}{du}^T \frac{du}{dr}, \tag{3-8}$$

onde u é o deslocamento e $\frac{du}{dr}$ faz parte da parcela implícita.

No caso deste trabalho, é utilizado o método de elementos finitos para a análise estrutural, portanto, calculo dos deslocamentos que é necessário para a obtenção das tensões é realizado pelo MEF. A sensibilidade dos deslocamentos, que são variáveis de estado do problema em questão, pode ser obtida por meio de diferentes métodos. Os três principais métodos de análise da sensibilidade são o método de aproximação por diferenças finitas, o método de diferenciação direta e o método adjunto, porém, este último não faz parte do escopo deste

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

trabalho, portanto não será abordado aqui. Para uma leitura mais aprofundada so assunto, consultar [11, 49].

3.1.4.1 Método de aproximação por diferenças finitas

Para o calculo da sensibilidade, a Eq. (3-6) pode ser aproximada pelo método de diferenças finitas. O método mais simples é o das Diferenças Finitas Frontais, dado pela Eq. (3-9) abaixo:

$$\frac{\partial \phi_i(\mathbf{b})}{\partial b_j} \approx \frac{\Delta \phi_i(\mathbf{b})}{\Delta b_j} = \frac{\phi_i(\mathbf{b} + \Delta b_j \mathbf{e}_j) - \phi_i(\mathbf{b})}{\Delta b_j}, \tag{3-9}$$

onde:

- Δb_j é uma perturbação na componente x_j do vetor de variáveis de projeto $\mathbf{b}$;
- $\mathbf{e}_j$ é um vetor com a j-ésima componente igual a 1 e nas demais componentes igual a 0.

3.1.4.2 Método de diferenciação direta

Considerando que ϕ pode estar representando uma função objetivo ou uma função restrição do problema, utilizar o método direto significa resolver diretamente a dependência da variável de estado em relação a variável de projeto e posteriormente calcular a sensibilidade da resposta utilizando a regra da cadeia. Sejam as equações abaixo:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(\mathbf{u}(\mathbf{b}), \mathbf{b}), \\ \mathbf{R}(\mathbf{u}(\mathbf{b}), \mathbf{b}) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3-10}$$

sendo $\mathbf{R}$ a função resíduo da solução numérica da equação algébrica linear que rege o problema. Utilizando a regra da cadeia temos:

$$\frac{d\phi}{db_j} = \frac{\partial \phi}{\partial b_j} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}}^T \frac{d\mathbf{u}}{db_j}, \tag{3-11}$$

Para encontrar o valor de $\frac{d\mathbf{u}}{db_j}$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{db_j} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial b_j} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{db_j} = \mathbf{0}, \\ \frac{d\mathbf{u}}{db_j} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial b_j} \right). \end{aligned} \tag{3-12}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

3.1.5 Parametrização do modelo e interpolação

Como já foi conceituado anteriormente, a otimização topológica busca a forma mais eficiente de distribuição do material dentro de um domínio Ω. Existem várias possibilidades com relação ao formato que essa estrutura pode assumir dentro do domínio de projeto e é necessária uma parametrização do conjunto dessas formas admissíveis, o que é feito por meio de uma parametrização do material, de modo que cada ponto do domínio assume o valor de zero ("0" representa a ausência de material) ou um ("1" corresponde a um material sólido).

No entanto, esta parametrização resulta em um problema mal-posto e a solução desse problema de programação inteira se torna um grande desafio [50]. A abordagem mais disseminada consiste em substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas e em seguida fazer uma relaxação no problema contínuo, permitindo que as variáveis assumam valores intermediários entre 0 e 1.

Uma técnica bastante utilizada é a formulação SIMP, ***S**olid **I**sotropic **M**aterial with **P**enalization* [51, 52]. Nesta formulação, válida para materiais isotrópicos, uma variável contínua ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, é apresentada de maneira análoga à densidade do material [50] e seu volume é dado por:

$$V = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) dV. \tag{3-13}$$

Nos cálculos computacionais é imposto um limite inferior $0 \leqslant \rho_{min} \leqslant \rho$ para evitar problemas de singularidade no método de elementos finitos [50]. A relação entre o tensor constitutivo $\mathbf{D}$ e a pseudo-densidade ρ é dada por:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{D}_0. \tag{3-14}$$

A relaxação que permite que ρ assuma valores intermediários e possibilita a solução do problema, gera outro inconveniente, pois permite regiões em escala de cinza. Para evitar o excesso dessas ocorrências, as pseudo-densidades intermediárias ρ são penalizadas [50], conforme equação a seguir:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})^p \mathbf{D}_0 \tag{3-15}$$

onde p é o fator que penaliza as pseudo-densidades e faz com que elas se aproximem de 0, ou de 1, mitigando a aparência em escala de cinza da topologia.

Contudo, uma abordagem comum na otimização topológica é o modelo de material de Ersatz, que consiste em preencher as regiões de "vazio" com um material compatível de rigidez ϵD, o que equivale a subtituir ρ por $\epsilon + (1-\epsilon)\rho$, onde ϵ é um valor muito pequeno para evitar singularidade na solução do

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

problema [34]. Assim, a equação passa a ser,

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = [\epsilon + (1 - \epsilon)\rho(\mathbf{x})^p]\,\mathbf{D}_0. \tag{3-16}$$

Existe também outra formulação chamada RAMP, ***R**ational **A**pproximation of **M**aterial **P**roperties*, porém ela não foi utilizada e nem será abordada neste trabalho. Caso o leitor tenha interesse, pode ler sobre em que estão presentes nas referências bibliográficas [18, 53, 54].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

4
Resultados numéricos

Usar estruturas relativamente simples e/ou com solução analítica conhecida é uma estratégia bastante utilizada para entender e aprimorar métodos de análise numérica. Dessa forma, os problemas analisados aqui são de grande importância para compreensão da metodologia aplicada. Uma vez compreendida e validada com modelos que possuem solução analítica ou que a solução é conhecida na literatura, a metodologia poderá ser aplicada em casos mais complexos. Neste trabalho, primeiro são analisados dois modelos de estruturas já tratados na literatura, posteriormente, é analisado um modelo que representa um reservatório elevado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

4.1
Exemplos numéricos analisados

A otimização topológica empregada nos exemplos analisados neste trabalho foi realizada usando o programa `PolyTop` [34] desenvolvido no MATLAB, porém algumas modificações foram necessárias. Em relação às condições de carregamento, a opção de usar múltiplos casos de carga foi adicionada ao `PolyTop`. Foi criada uma função usando o método de integração Newmark-β para calcular a resposta dinâmica ao longo do tempo. Essa mesma função também calcula a sensibilidade da função objetivo e das variáveis de projeto. Além disso, a matriz de massa, a matriz de amortecimento e o cálculo das suas respectivas derivadas também foram adicionados ao `PolyTop`.

Nos problemas analisados aqui, a função objetivo a ser minimizada é a *compliance*, que é o equivalente a maximizar a rigidez. A montagem das matrizes de rigidez, massa e amortecimento e, a análise estrutural para a obtenção das respostas seguiu o procedimento do método de elementos finitos (MEF).

A análise dinâmica foi realizada com o método de integração de Newmark-β. Para os parâmetros α e β, os valores escolhidos foram $1/2$ e $1/4$, respectivamente. Tais valores significam que a aceleração média é constante dentro de cada intervalo de tempo, uma vez que essa consideração garante a melhor acurácia, permanecendo no limite de estabilidade do esquema de integração [21]. Considerando os valores iniciais do vetor de deslocamentos $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$

e do vetor de velocidades iniciais $\dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0}$, a aceleração foi calculada conforme Eq. (2-29) e, para obter as respostas em termos das variáveis de estado, foram utilizadas as espressões descritas de Eq. (2-30) até Eq. (2-36) que já foram abordadas na seção 2.2.

Para prosseguir com a análise de sensibilidade, que é importante para a avaliação da função objetivo e para o critério de convergência, é necessário calcular a derivada dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto. Tendo em conta que o problema sofre ação de uma força variável no tempo, a resposta é governada pela equação do movimento. Portanto, é necessário derivar a equação do movimento em relação à variável de design para encontrar o termo $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_j}$.

Foi utilizado o método direto para análise de sensibilidade e o procedimento, encadeado com a integração de Newmark-β inicia com o cálculo das devivadas das variáveis preditoras em relação a variável de projeto b_j:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}}{\partial b_j} &= c_0 \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial b_j} + c_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_t}{\partial b_j} + c_3 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_t}{\partial b_j}, \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial b_j} &= c_1 \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial b_j} + c_4 \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_t}{\partial b_j} + c_5 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_t}{\partial b_j}. \end{aligned} \tag{4-1}$$

O carregamento efetivo também deve ser derivado conforme segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} \mathbf{u}_{t+\Delta t}, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial b_j} &= \mathbf{P} + \mathbf{M} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}}{\partial b_j} + \mathbf{C} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial b_j}. \end{aligned} \tag{4-2}$$

Com os termos obtidos em Eq. (4-1) e Eq. (4-2) a derivada do deslocamento $\frac{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}}{\partial b_j}$ no tempo $t + \Delta t$ é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}}{\partial b_j} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial b_j}. \tag{4-3}$$

E finalmente é possível calcular as derivadas dos vetores de velocidade e aceleração:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial b_j} &= c_1 \frac{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}}{\partial b_j} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial b_j}, \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}}{\partial b_j} &= c_0 \frac{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}}{\partial b_j} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}}{\partial b_j}. \end{aligned} \tag{4-4}$$

Em uma primeira abordagem, os modelos foram analisados como um problema estático submetido a duas condições diferentes de carregamento. Primeiro, a estrutura otimizada é submetida a um único caso de carga e, posteriormente, a otimização é realizada considerando dois casos de carga

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

independentes (múltiplos casos de carga). Para prosseguir com a análise estrutural, levando em consideração o comportamento dinâmico, foi utilizado o método de integração Newmark - β. Finalmente, o método de ESL é usado para otimização topológica. Para os modelos abordados neste trabalho, algumas análises foram realizadas considerando os casos descritos em Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Analises realizadas.

	Descrição
Caso 1	Otimização com análise estática e um único caso de carga
Caso 2	Otimização com análise estática e dois casos de carga
Caso 3	Otimização considerando análise dinâmica
Caso 4	Otimização usando o método de ESL

4.1.1 Viga em balanço 1 (engastada-livre)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

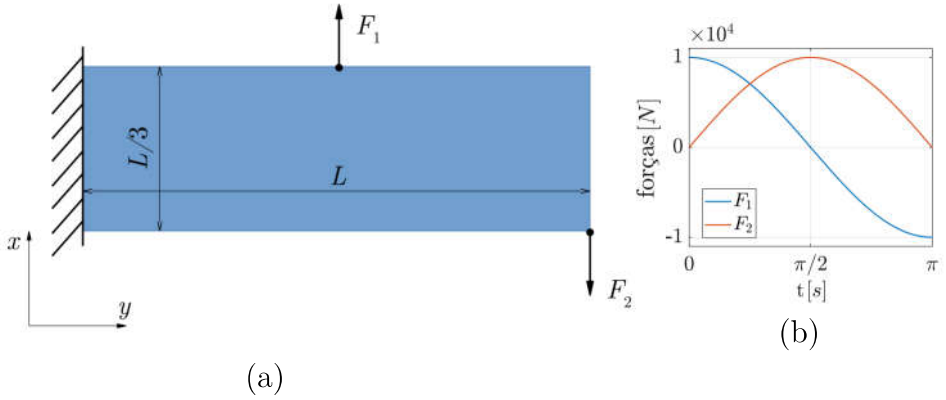
Prosseguindo com a verificação do Método do Carregamento Estático Equivalente, este estudo de caso aborda uma viga em balanço retirada de um artigo publicado por Behrou e Guest [27].

Neste primeiro exemplo, analisamos a viga submetida a uma condição de carga, como mostrado na Figura 4.1 e suas propriedades e são apresentadas na Tabela 4.2. Inicialmente, investigamos esse problema usando os valores máximos das forças dinâmicas F_1 e F_2 mostrados na Figura 4.1 que corresponde a $F_{1max} = F_{2max} = 1,0 \times 10^4\ N$. Os *layouts* obtidos após a otimização topológica são ilustrados na Figura 4.2 (a) e Figura 4.2 (b).

Tabela 4.2: Parâmetros do modelo viga em balanço 1.

	parâmetro	valor	unid.
Raio	r_{min}	0.01375	m
Módulo de Young	E_0	2.0×10^{11}	Pa
Coeficiente de poisson	ν	0.33	-
Comprimento	L	0.9	m
Espessura	$thick$	0.01	m
Tempo	t_f	π	s
Intervalo de tempo	Δt	$\pi/20$	s
Volume máximo	V_{max}	0.35	-

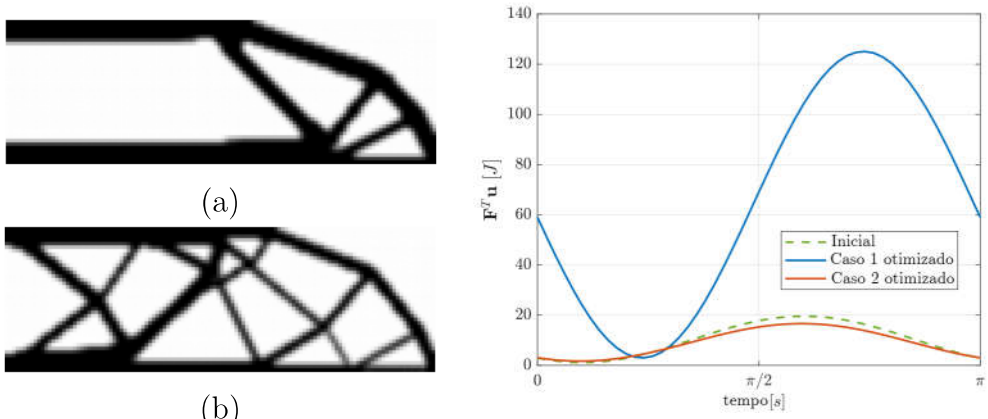
É importante enfatizar a necessidade de realizar a otimização topológica, levando em consideração que, para cargas que ocorrem em diferentes pontos da estrutura, mesmo que ocorram simultaneamente, devem ser considerados casos de carga diferentes, conforme formulação definida na seção 3.1.1. Isto ocorre



(a) (b)

Figura 4.1: Viga em balanço 1: (a) modelo analisado e (b) forças aplicadas.

porque a topologia obtida não possui um bom desempenho na análise dinâmica. Em outras palavras, a topologia pode não refletir a interpretação física do modelo. Na Figura 4.2 (a), percebe-se que não há material distribuído na região do domínio que compreende desde o apoio até o meio da viga, porque a tensão é zero nessa região, levando à ausência de material. Esse resultado mostra que a tensão causada pela carga tende a se cancelar quando a função objetivo não considera o somatório das respostas como duas cargas independentes. A topologia mostrada na Figura 4.2 (b) exibe melhor a interpretação física do problema.



(a) (b) (c)

Figura 4.2: Topologia final considerando (a) **Caso 1** - com um único caso de carga englobando todas as forças aplicadas (b) **Caso 2** considerando as forças aplicadas como casos de carga diferentes. Em (c) é mostrada uma comparação entre as funções objetivo para cada caso.

A otimização topológica baseada na resposta dinâmica da estrutura é mostrada na Figura 4.3 (a). A topologia final da viga usando o carregamento estático equivalente é apresentada na Figura 4.3 (b). A partir de uma avaliação visual, podemos dizer que o método de ESL fornece uma aproximação muito

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

boa para esse caso de carregamento dinâmico.

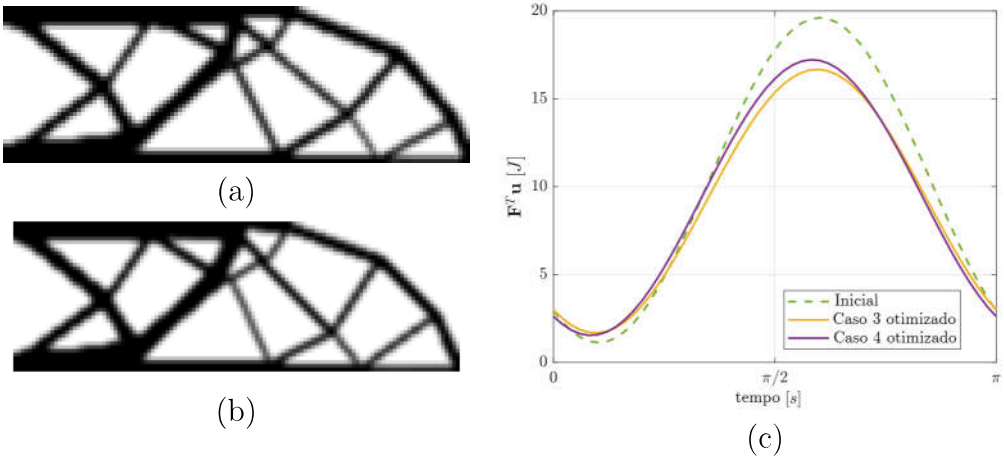


Figura 4.3: Topologia final (a) **Caso 3** - utilizando a análise dinâmica. (b) **Caso 4** - utilizando o vetor de ESL. A comparação entre as funções objetivo para cada caso é mostrada em (c).

Conforme exibido na Figura 4.3, os projetos finais no Caso 3 e no Caso 4 mostram uma boa correlação. A Figura 4.3 (c) mostra que a função objetivo foi minimizada após a otimização topológica e Tabela 4.3 resume os valores da função objetivo para cada caso analisado.

Tabela 4.3: Valores da função objetivo minimizada para o caso da viga em balanço 1.

	Inicial	**Caso 1**	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**
Compliance	1036.60	6402.00	917.52	916.64	937.13

4.1.2 Viga em balanço 2

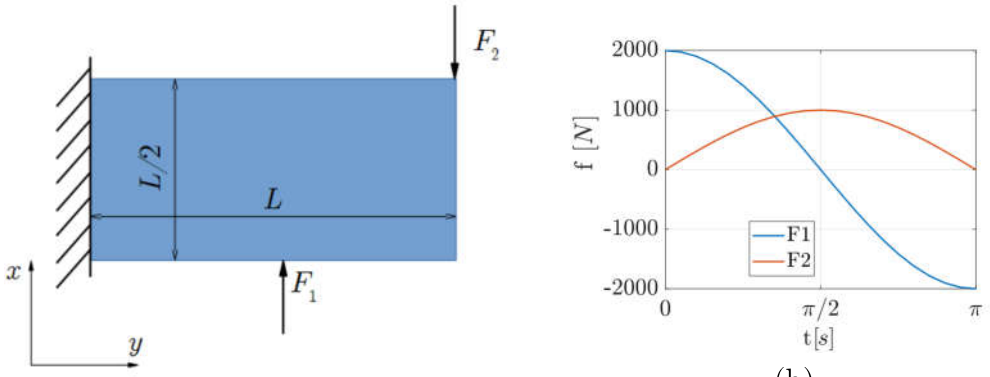
Este segundo modelo foi publicado em [28] e também corresponde a uma viga em balanço, porém com as cargas aplicadas em diferentes direções e pontos, conforme mostrado na Figura 4.4. As propriedades deste modelo são mostradas na Tabela 4.4.

Analogamente ao exemplo anterior, primeiro foi feita uma otimização levando em consideração a resposta estática desse modelo usando os valores máximos de F_1 e F_2 que correspondem a $F_{1max} = 2,0 \times 10^3\ N$ e $F_{2max} = 1,0 \times 10^4\ N$, respectivamente (veja Figura 4.4(b)). A Figura 4.5(a) ilustra a topologia se apenas um caso de carga for considerado e a Figura 4.5(b) representa a topologia final quando as duas forças são consideradas como dois casos de carga separados.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Tabela 4.4: Parâmetros referentes a viga engastada 2.

	parâmetro	valor	unid.
Raio	r_{min}	0.20	m
Módulo de Young	E_0	2.0×10^{11}	Pa
Coeficiente de Poisson's	ν	0.3	-
Comprimento	L	12	m
Espessura	$thick$	0.01	m
Tempo	t_f	0.5	s
Intervalo de tempo	Δt	0.025	s
Volume máximo	V_{max}	0.50	-



(a) (b)

Figura 4.4: Viga engastada 2: (a) modelo analisado e (b) forças aplicadas.

Neste trabalho, a otimização da topológica, considerando a análise dinâmica não foi executada para este modelo viga em balanço 2. De acordo com os resultados obtidos para o primeiro modelo (viga em balanço 1) e mostrados na seção 4.1.1, já se sabe que esse tipo de análise tem um enorme custo computacional. No entanto, a topologia final da otimização com o método de ESL mostrada na Figura 4.7 ilustra uma boa correlação com o design mostrado na Figura 4.6 publicado por [28] no qual, uma análise dinâmica foi aplicada para otimizar esse mesmo modelo. Os valores minimizados da função objetivo são mostrados na Tabela 4.5, destacando como o Caso 1 (considerando todas as forças externas em apenas um caso de carga) não possui uma topologia com boa performance mediante a consideração de um carregamento dinâmico.

Para a análise com o ESL, foram utilizados 21 casos de carga (o que corresponde aos 21 intervalos de tempo utilizados na análise dinâmica antes do cálculo das cargas estáticas equivalentes). Os valores da função objetivo minimizada são mostrados na Tabela 4.5.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

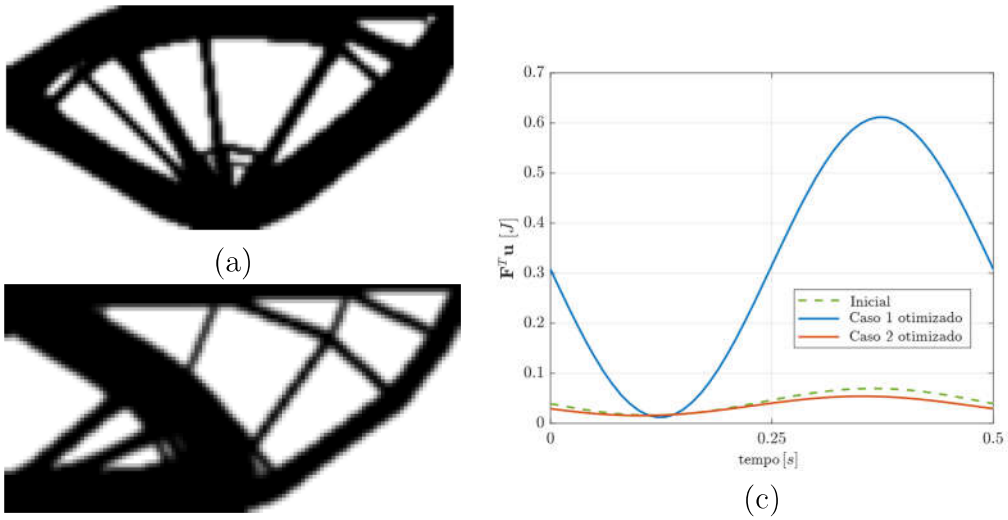


Figura 4.5: Topologia final considerando (a) **Caso 1** - com um único caso de carga englobando todas as forças aplicadas (b) **Caso 2** considerando as forças aplicadas como casos de carga diferentes. Em (c) é mostrada uma comparação entre as funções objetivo para cada caso.

Figura 4.6: Topologia final (a) considerando carregamento estático e (b) *design* considerando o carregamento dinâmico. Figuras publicadas po Zhao e Wang [28].

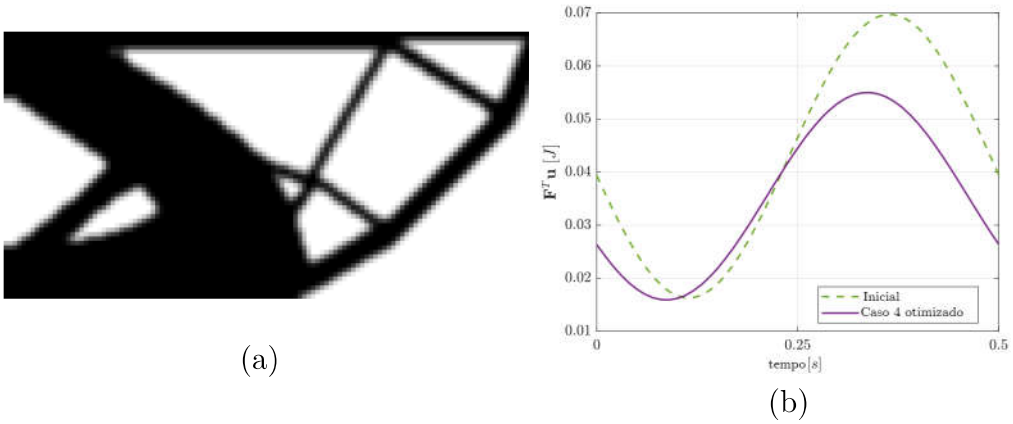


Figura 4.7: (a) Topologia final considerando o método de ESL - Caso 4 e (b) função objetivo após otimização.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Tabela 4.5: *Compliance* após otimização topológica para a viga em balanço 2.

	Inicial	**Caso 1**	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**
Compliance	2.15	15.59	1.78	–	1.77

4.1.3 Reservatório elevado

Normalmente os esforços dinâmicos aos quais as estruturas construídas no mundo real são submetidas, tratam-se de rajadas de vento, correntes marítimas ou sismos, entre outros. Essas forças externas caracterizam-se por ter caráter aleatório. No entanto, as forças aplicadas nos exemplos anteriores foram carregamentos harmônicos simples. Para aumentar a complexidade dos problemas resolvidos até agora neste trabalho, este último modelo representa um reservatório elevado de água submetido a um esforço que simula a ação do vento incidindo na lateral da estrutura. A Figura 4.8 ilustra de maneira genérica o tipo de estrutura um reservatório elevado.

Figura 4.8: Torre metálica com tanque de aço [55].

O comportamento do vento é em geral turbulento, forma vórtices e redemoinhos, de diferentes tamanhos e características rotacionais. Isso faz com que o vento apresente variações bruscas de velocidade. Essas características e a estocástica envolvida nesse tipo de carregamento não fazem parte do escopo dessa dissertação. Contudo, para manter a coerência e aplicar um carregamento que faça sentido, tomou-se como base outros trabalhos que abordam essa temática [56, 57, 58].

De acordo com Jefferis e Madsen [58], um valor comum para projetos residenciais equivale a um vento de aproximadamente 173 km/h e 1.44 kN/m^2.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Tabela 4.6: Parâmetros referentes ao modelo de reservatório elevado.

	parâmetro	valor	unid.
Raio	r_{min}	0.12	m
Módulo de Young	E_0	2.0×10^{11}	Pa
Coeficiente de Poisson's	ν	0.3	-
Comprimento	L	3.0	m
Altura	H	15.0	m
Espessura	$thick$	0.01	m
Tempo	t_f	5.0	s
Intervalo de tempo	Δt	0.1	s
Fração de Volume	V	0.42	-

Em áreas sujeiras a ventos fortes, ou furacões as construções devem ser capazes de suportar ventos de 201 km/h com rajadas de 257 km/h, ou 1.92 kN/m^2.

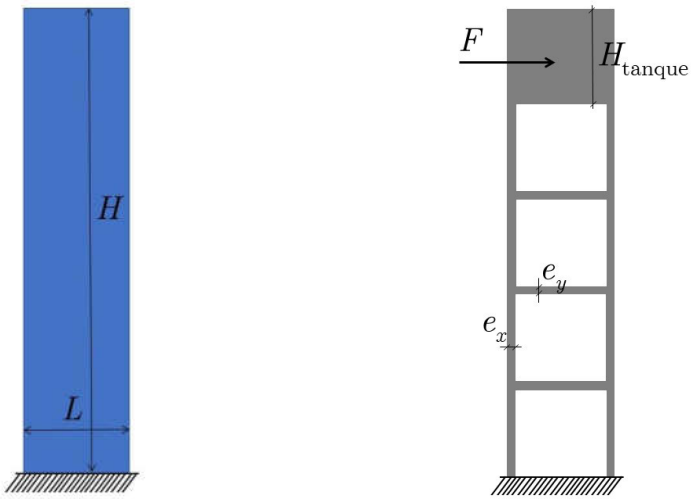
Em sua dissertação de mestrado com o título *Efeito de amortecedores no comportamento dinâmico de edifícios altos sob cargas de vento* [56], Rios (2005) utilizou o método dos ventos sintéticos para realizar uma análise dinâmica em um edifício submetido ao carregamento do vento. O objetivo foi estudar diferentes configurações de amortecedores fluidos para encontrar a melhor distribuição ao longo da estrutura e reduzir a resposta a níveis aceitáveis de conforto ao usuário. No trabalho realizado por Rios, o carregamento de vento para o espectro de potência de Davenport [59, 60] utilizado no edifício para a altura de 36 m possuía amplitudes máximas em torno de $1,1$ kN/m^2.

Para a análise do modelo de reservatório elevado que está em estudo na presente seção, algumas hipóteses simplificadoras foram adotadas: 1) o reservatório está repleto de água e a dinâmica do fluido não faz parte do modelo, embora o peso da água faça parte do carregamento de forma estática e; 2) o carregamento que representa o vento incidente na estrutura está todo aplicado como força resultante em um único nó no meio do reservatório

O domínio definido para estrutura possui possui a dimensão total mostrada na Figura 4.9(a). No entanto, para garantir a aparência de pórtico ao final do processo de otimização foi feita uma modificação na função de interpolação do material: foi atribuída uma pseudo-densidade $\rho = 1$ fixa nos elementos localizados na região do reservatório, das vigas intermediárias horizontais de contraventamento e na região dos pilares de sustentação (ver Figura 4.9(b)). Os valores definidos para a largura e_x dos pilares e altura e_y das vigas intermediárias foram ambos iguais a 15 cm. Os demais parâmetros do modelo são exibidos na Tabela 4.6.

O carregamento F aplicado foi gerado com uma função em MATLAB, baseada em um algoritmo para geração de multisenos publicada por Schoukens,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA



(a) (b)

Figura 4.9: (a) Domínio Ω da estrutura e (b) divisão entre elementos fixos (cor cinza) e elementos que serão afetados na otimização (cor branca).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

et. al em *Mastering System Identification* [61]. Foi considerada uma pressão de $1,4\ kN/m^2$ aplicada em uma área de $9\ m^2$ com amplitude variando em 5% durante um tempo de $5\ s$, conforme mostrado na Figura 4.10.

Analogamente ao que foi feito nos modelos anteriores, para este modelo do reservatório elevado também foi analisada a performance das topologias equivalentes aos Caso 1, Caso 2 e Caso 4. Além disso, foi feita uma comparação entre as topologias levando em consideração diferentes valores de amortecimento. Nesse caso, foi utilizado o amortecimento proporcional de Rayleigh e as constantes de proporcionalidade α_R e β_R foram calculadas de acordo com a Eq. (2-11). A Tabela 4.7 mostra os valores da função objetivo para cada caso analisado.

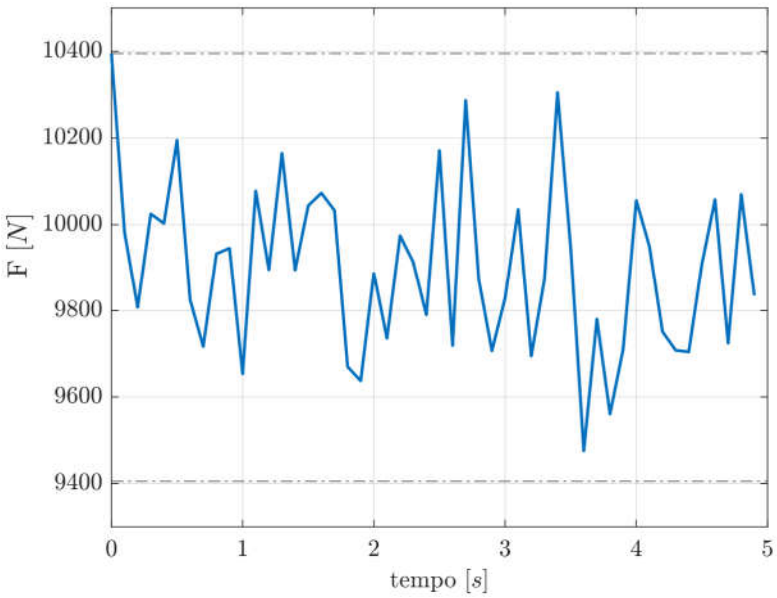
Tabela 4.7: Resultados da função objetivo para o modelo de reservatório elevado.

	α_R	β_R	ω_i e ω_i	*Compliance*
Inicial	–	–	–	3.322×10^3
Caso 1	–	–	–	7.3413×10^3
Caso 2	–	–	–	3.0373×10^3
Caso 4: sem amortecimento	0	0	–	3.0255×10^3
Caso 4: amortecimento 1	130.130	1.380×10^{-6}	ω_1 e ω_2	2.2062×10^3
Caso 4: amortecimento 2	695.370	4.976×10^{-7}	ω_3 e ω_4	2.2091×10^3
Caso 4: amortecimento 3	1.768×10^3	2.198×10^{-7}	ω_5 e ω_6	2.2113×10^3
Caso 4: amortecimento 4	144.360	3.639×10^{-7}	ω_1 e ω_6	2.2062×10^3

A Figura 4.13 evidencia que as considerações feitas para o Caso 1 não

resultam em uma topologia com boa performance mediante a consideração de um carregamento dinâmico. Conforme os dados da Tabela 4.7 e as ilustrações das Figura 4.14 e Figura 4.15, verificamos que a função objetivo minimizada possui valores menores quando o amortecimento é considerado. O que já era esperado, pois o amortecimento funciona reduzindo a amplitude dos deslocamentos provocados por excitações próximas das frequências naturais de vibração da estrutura. De acordo com Savi [40], a primeira e a segunda frequência são as mais preponderantes na participação da resposta dinâmica da estrutura, o que corresponde ao Caso 4: amortecimento 1.

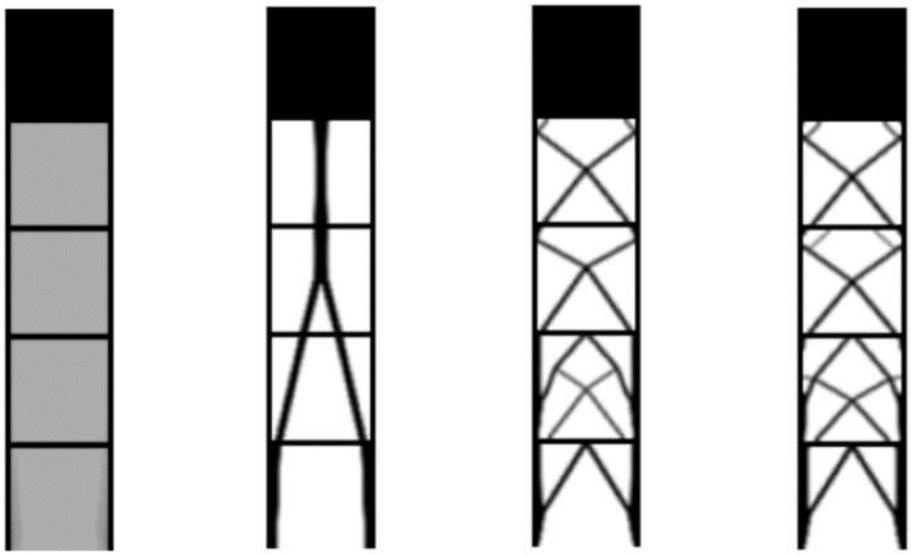
O número máximo de ciclos de otimização topológica utilizando o método de ESL foi definido como $k = 10$. Porém, durante o processo, o número não excedeu 5 ciclos para nenhum dos modelos analisados. A Tabela 4.8 mostra a convergência da função objetivo para os modelos analisados.



(c)

Figura 4.10: Carregamento F aplicado no modelo de reservatório elevado. O número de ciclos máximo necessário para a convergência foi de $k = 5$.

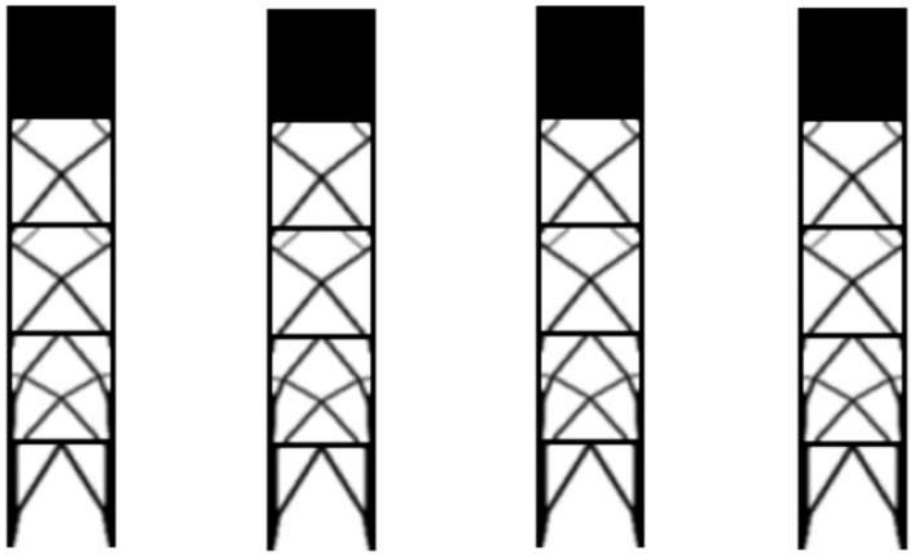
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.11: (a) Malha inicial destacando na cor preta os elementos com valor de $\rho = 1$ fixo e na cor cinza, a região em que a pseudo-densidade pode variar para redistribuir o material durante o processo de otimização, (b) topologia final para o Caso 1, (c) topologia final para o Caso 2, ou seja, a função objetivo é o somatório das respostas da estrutura submetida aos 2 casos de carga e (d) topologia final utilizando o método de ESL e considerando o amortecimento igual a zero.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.12: Topologia final para (a) o Caso 4 - amortecimento 1, (b) o Caso 4 - amortecimento 2, (c) o Caso 4 - amortecimento 3 e (d) o Caso 4 - amortecimento 4.

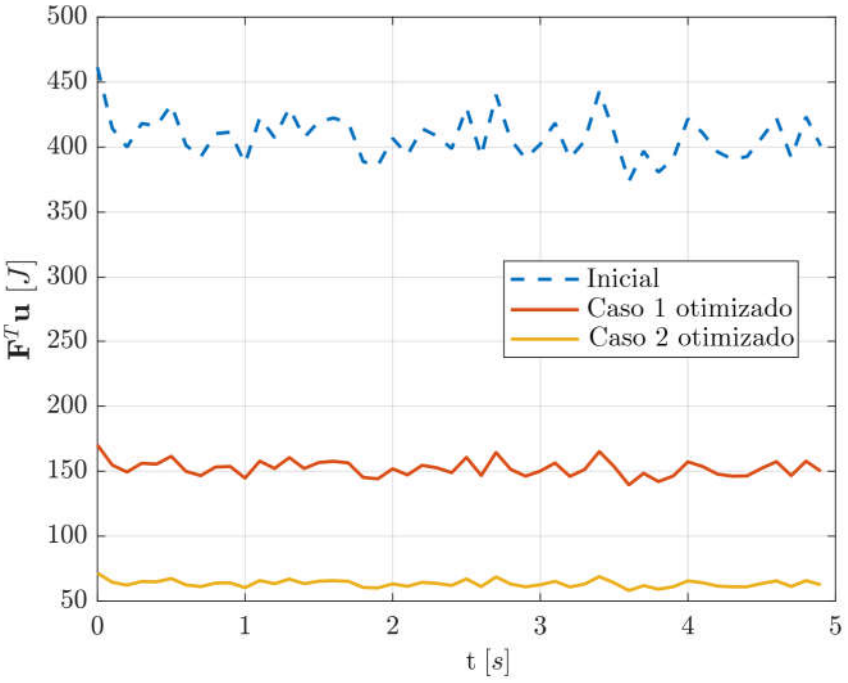


Figura 4.13: Valores de $\mathbf{F}^T\mathbf{u}$ ao longo do tempo após análise dinâmica utilizando as topologias obtidas para o Caso 1 e Caso 2.

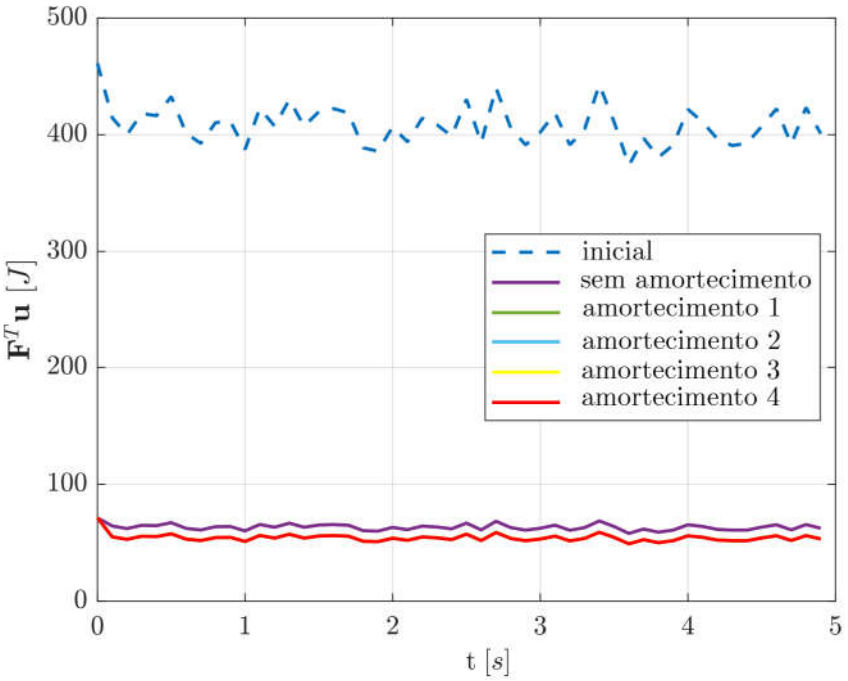


Figura 4.14: Valores de $\mathbf{F}^T\mathbf{u}$ ao longo do tempo após análise dinâmica utilizando as topologias obtidas para o Caso 4, ou seja, utilizando o método de ESL para todos os valores de amortecimento empregados.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

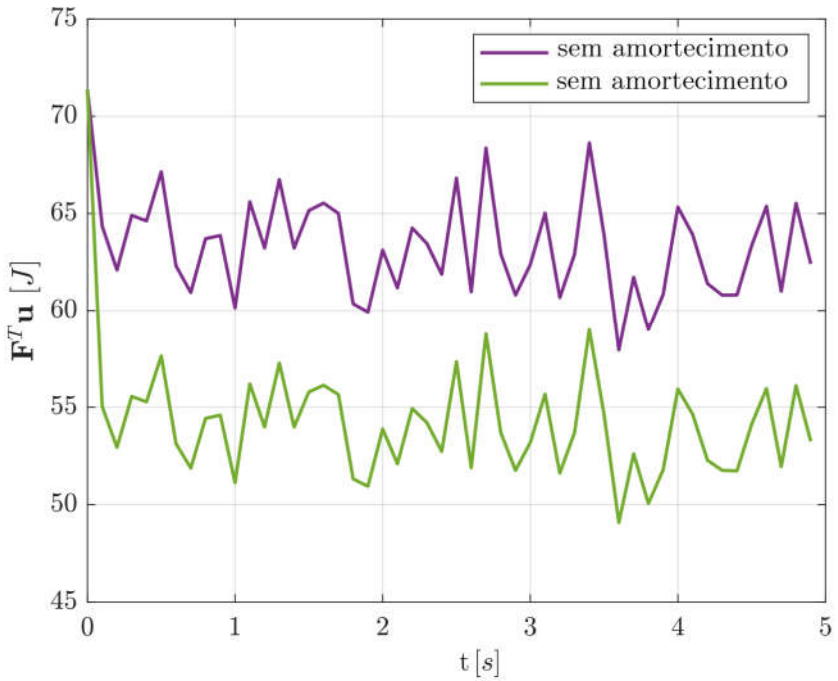


Figura 4.15: Comparação dos valores de $\mathbf{F}^T\mathbf{u}$ ao longo do tempo após análise dinâmica utilizando as topologias obtidas para o Caso 4 evidenciando a diferença da análise com amortecimento e sem amortecimento.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Tabela 4.8: Convergência da função objetivo.

	Ciclo k	ϕ^k/ϕ^1	$\left\|\mathbf{b}^k - \mathbf{b}^{k-1}\right\|_\infty$
sem amortecimento	1	1.000	0.584
	2	2.272	0.997
	3	2.265	0.985
	4	2.262	0.138
	5	2.262	0.007
amortecimento 1	1	1.000	0.584
	2	2.218	0.996
	3	2.212	0.998
	4	2.210	0.108
	5	2.210	0.009
amortecimento 2	1	1.000	0.584
	2	1.750	0.999
	3	1.747	0.644
	4	1.745	0.008
amortecimento 3	1	1.000	0.584
	2	0.945	0.997
	3	0.933	0.008
amortecimento 4	1	1.000	0.584
	2	2.218	0.999
	3	2.211	0.998
	4	2.208	0.110
	5	2.208	0.008

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

5
Considerações finais da dissertação

Finalizando esta dissertação, este capítulo contém uma breve rememoração da temática abordada, as principais contribuições e conclusões, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros.

5.1
Temática abordada na dissertação

O projeto de estruturas precisa levar em consideração muitos fatores. Segurança é o fator mais importante. Tendo isto em mente, alguns projetos estruturais apresentam superdimensionamento de seus componentes. Por sua vez, este superdimensionamento pode acarretar em um maior peso estrutural, levando a fundações mais robustas e, consequentemente, tudo isso implica em um aumento do custo de implantação da obra.

A otimização estrutural utiliza-se de conceitos matemáticos para encontrar pontos de mínimo (ou máximo) de uma determinada função que representa uma medida de performance do projeto. Este fator pode ser o peso da estrutura, a rigidez, etc. A função objetivo, por sua vez, estará sujeita a restrições, como por exemplo tensões máximas de projeto, volumes mínimos e máximos das partes, frequência naturais, etc. Em outras palavras, busca-se a melhor configuração da estrutura para atender uma ou mais medidas de performance do projeto.

Muitas estruturas existentes são submetidas a carregamentos que variam no tempo. Nesse caso, podemos citar como exemplo: prédios sob ação de ventos; plataformas *off-shore* sob efeitos de ondas do mar; pontes, que além da incidência de ventos e choques de ondas nos seus pilares de sustentação, ainda recebem o tráfego de veículos; entre outros. Realizar a otimização dessas estruturas considerando a sua resposta dinâmica demanda recursos computacionais elevados. Mesmo hoje em dia, com o avanço da tecnologia, ainda é necessário trabalhar na redução desses custos. Neste contexto, esta dissertação buscou contribuir com uma técnica que tem sido empregada na otimização estrutural como forma de representar carregamentos dinâmicos em estruturas, que é o método do carregamento estático equivalente ou ESL.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

5.2 Contribuições e conclusões da dissertação

Tomando como base o *framework* `PolyTop` escrito em MATLAB, foram implementadas modificações que abrangeram:

- Aplicação de múltiplos casos de carga na estrutura para posterior análise da função objetivo;
- A obtenção da resposta estrutural no domínio do tempo;
- Otimização topológica de estruturas levando em consideração a resposta dinâmica;
- Otimização topológica utilizando o método de ESL.

A otimização topológica de estruturas sujeitas a carregamento dinâmico foi resolvida com sucesso utilizando o método de ESL. O carregamento estático equivalente, definido a partir de uma análise dinâmica linear, foi utilizado como um vetor de carregamento externo e uma sequência de otimização da resposta estática linear foi realizada. As topologias finais obtidas usando o método de ESL possuem boa correlação com as topologias obtidas com o método tradicional.

As estruturas otimizadas para os projetos estáticos quando as cargas são aplicadas simultaneamente levam a projetos muito sensíveis em relação às cargas dinâmicas, conforme ilustrado nas Figuras 4.2(c) e 4.5(c). Por outro lado, pode ser observado um comportamento dinâmico aprimorado para o caso que usa o carregamento dinâmico e para o que usa o método de ESL (consulte as Figuras 4.3(c) e 4.7(b)). Este fato reforça a importância de uma formulação adequada na análise de problemas de engenharia.

Apesar de considerarmos apenas a análise dinâmica linear neste trabalho, o método do carregamento estático equivalente também pode ser usado quando a estrutura apresenta uma resposta não linear [32]: uma sequência de problemas de otimização de resposta estática é resolvida, na qual o custo da otimização é muito menor quando comparado com a otimização da resposta dinâmica.

5.3 Direções para trabalhos futuros

Existem outros tipos de análise e outros tipos de modelo que poderiam ser avaliados para complementar os estudos realizados nessa dissertação

- Podem ser estudadas formas para reduzir a quantidade de casos de cargas geradas pelo método de ESL. Essa redução pode ser baseada nos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

picos de deslocamentos, ou pode ser uma redução baseada em métodos estocásticos [33];

- Para complementar os estudos, os modelos numéricos analisados podem ser comparados com modelos experimentais;
- Considerar não linearidades nos problemas estudados, sejam elas de geometria, de material ou de contato, pois o método de ESL também pode ser usado quando a estrutura apresenta uma resposta não linear;
- Implementar modelos em 3 dimensões.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

Referências bibliográficas

[1] **Meandros conceitos de hidrologia**. http://conceitosdehidrologia.blogspot.com/2009/03/meandros.html. Accessed: 2019-07-10.

[2] **Favos por que os favos de mel são hexagonais?** http://apicultura.to.gov.br/?p=378. Accessed: 2019-07-10.

[3] **Gavinhas dicionário virtual de biologia**. http://www.biowiki.com.br/doku.php?id=gavinha. Accessed: 2019-07-10.

[4] HILLIER, F. S.. **Introduction to operations research**. Tata McGraw-Hill Education, 2012.

[5] GASS, S. I.; ASSAD, A. A.. **An annotated timeline of operations research: An informal history**, volumen 75. Springer Science & Business Media, 2005.

[6] ROZVANY, G. I.; BENDSØE, M. P. ; KIRSCH, U.. **Layout optimization of structures**. Applied Mechanics Reviews, 48(2):41–119, 1995.

[7] SILVA, E. C. N.. **Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas**. Escola Politécnica da USP, 2008.

[8] MICHELL, A. G. M.. **Lviii. the limits of economy of material in frame-structures**. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 8(47):589–597, 1904.

[9] VAZ, L. E.; PEREIRA, A. ; MENEZES, I. F.. **Programaçao matemática: Teoria, algoritmos e aplicaçoes na engenharia**. http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~ivan/MEC2403/ProgMatematica_VazPereiraMenezes-Ago2012.pdf.

[10] MARTINELLI, R.. **Notas de aula de programação linear**. http://www.ind.puc-rio.br.

[11] CHOI, K. K.; KIM, N. H.. **Structural sensitivity analysis and optimization 1: linear systems**. Springer Science & Business Media, 2006.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

[12] NGO, D.; SCORDELIS, A. C.. **Finite element analysis of reinforced concrete beams**. In: JOURNAL PROCEEDINGS, volumen 64, p. 152–163, 1967.

[13] SOUTO FILHO, M. V.. **Modelagem numérica de reforço estrutural em vigas de concreto armado**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

[14] **Shape optimization altair engineering inc.** `https://altairenlighten.com/in-depth/shape-optimization/`. Accessed: 2019-07-12.

[15] BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N.. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method**. Computer methods in applied mechanics and engineering, 71(2):197–224, 1988.

[16] KIKUCHI, N.; NISHIWAKI, S.; FONSECA, J. S. O. ; SILVA, E. C. N.. **Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151(3-4):401–417, 1998.

[17] NISHIWAKI, S.; MIN, S.; YOO, J. ; KIKUCHI, N.. **Optimal structural design considering flexibility**. Computer methods in applied mechanics and engineering, 190(34):4457–4504, 2001.

[18] BENDØSE, M.; SIGMUND, O.. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. ISBN: 3-540-42992-1**. Springer, 2003.

[19] SILVA, E. C. N.. **Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas**. Departamento de Engenharia Mecatrôncia e de Sistemas Mecânicos Escola Politécnica da USP, 2001.

[20] CHOPRA, A. K.. **Dynamics of structures, a primer**, volumen 2. Earthquake Engineering Research, 1995.

[21] CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J.. **Dynamics of Structures**. McGraw-Hill Education, 1995.

[22] TONG, W.. **Wind power generation and wind turbine design**. WIT press, 2010.

[23] CHOI, W.-S.; PARK, G.-J.. **Structural optimization using equivalent static loads at all time intervals**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191(19-20):2105–2122, 2002.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

[24] KANG, B.; CHOI, W. ; PARK, G.. **Structural optimization under equivalent static loads transformed from dynamic loads based on displacement**. Computers & Structures, 79(2):145–154, 2001.

[25] CHOI, W.-S.; PARK, K. ; PARK, G.. **Calculation of equivalent static loads and its application**. Nuclear engineering and design, 235(22):2337–2348, 2005.

[26] PARK, G.-J.. **Technical overview of the equivalent static loads method for non-linear static response structural optimization**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 43(3):319–337, 2011.

[27] BEHROU, R.; GUEST, J. K.. **Topology optimization for transient response of structures subjected to dynamic loads**. In: 18TH AIAA/ISSMO MULTIDISCIPLINARY ANALYSIS AND OPTIMIZATION CONFERENCE, p. 3657, 2017.

[28] ZHAO, J.; WANG, C.. **Dynamic response topology optimization in the time domain using model reduction method**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 53(1):101–114, 2016.

[29] SCHMIT, L. A.. **Structural design by systematic synthesis**. In: PROCEEDINGS OF THE SECOND NATIONAL CONFERENCE ON ELECTRONIC COMPUTATION, ASCE, SEPT., 1960, 1960.

[30] BALLING, R. J.; PISTER, K. S. ; CIAMPI, V.. **Optimal seismic-resistant design of a planar steel frame**. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 11(4):541–556, 1983.

[31] CHENG, F. Y.; JUANG, D.. **Assessment of various code provisions based on optimum design of steel structures**. Earthquake engineering & structural dynamics, 16(1):45–61, 1988.

[32] AHMAD, Z.; SULTAN, T.; ZOPPI, M.; ABID, M. ; JIN PARK, G.. **Nonlinear response topology optimization using equivalent static loads—case studies**. Engineering Optimization, 49(2):252–268, 2017.

[33] ZHANG, X. S.; DE STURLER, E. ; PAULINO, G. H.. **Stochastic sampling for deterministic structural topology optimization with many load cases: Density-based and ground structure approaches**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 325:463–487, 2017.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

[34] TALISCHI, C.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A. ; MENEZES, I. F.. **Polytop: a matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 45(3):329–357, 2012.

[35] BATHE, K. J.. **Finite element procedures**. Prentice Hall, 1996.

[36] ASSAN, A. E.. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. Ed. da UNICAMP, 2003.

[37] COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. ; WITT, R. J.. **Concepts and applications of finite element analysis**, volumen 4. Wiley New York, 2002.

[38] CARVALHO, M.; VALÉRIO, J.. **Introdução ao Método de Elementos Finitos: Aplicação em Dinâmica dos Fluidos**. SBMAC-Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012.

[39] SORIANO, H. L.. **Introdução a dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro - Elsevier, 2014.

[40] SAVI, MARCELO AMORIN, P. A. S. D.. **Vibrações mecânicas**. LTC, 2007.

[41] PAZ, M.; KIM, Y. H.. **Structural dynamics: theory and computation**. Springer, 2004.

[42] SOUZA, A. C.. **Topologia Geral por vários ângulos**. Publicação Livre, 2014.

[43] MUNKRES, J. R.. **Topology**. Prentice Hall, 2000.

[44] EULER, L.. **Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis**, 1736.

[45] PEREIRA, G. M. R.; DA CÂMARA, M. A.. **Algumas aplicações da teoria dos grafos**. FAMAT em Revista, (11), 2008.

[46] BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O.. **Optimization of structural topology, shape, and material**, volumen 414. Springer, 1995.

[47] ZEGARD, T.; PAULINO, G. H.. **Grand—ground structure based topology optimization for arbitrary 2d domains using matlab**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 50(5):861–882, 2014.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

[48] JANG, H.; LEE, H.; LEE, J. ; PARK, G.. **Dynamic response topology optimization in the time domain using equivalent static loads**. AIAA journal, 50(1):226–234, 2012.

[49] CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A.. **An introduction to structural optimization**, volumen 153. Springer Science & Business Media, 2008.

[50] BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O.. **Material interpolation schemes in topology optimization**. Archive of applied mechanics, 69(9-10):635–654, 1999.

[51] BENDSØE, M. P.. **Optimal shape design as a material distribution problem**. Structural optimization, 1(4):193–202, 1989.

[52] ZHOU, M.; ROZVANY, G.. **The coc algorithm, part ii: Topological, geometrical and generalized shape optimization**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89(1-3):309–336, 1991.

[53] STOLPE, M.; SVANBERG, K.. **An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 22(2):116–124, 2001.

[54] HVEJSEL, C. F.; LUND, E.. **Material interpolation schemes for unified topology and multi-material optimization**. Structural and Multidisciplinary Optimization, 43(6):811–825, 2011.

[55] **Water tank tower qingdao xinguangzheng steel structure co.** `http://www.xgzbuildings.com/product/AircraftHangar/product_show_965.html#.XYOWhihKjIU`. Accessed: 2019-09-18.

[56] RIOS, M.. **Efeito de amortecedores no comportamento dinâmico de edifícios altos sob cargas de vento**. Rio de Janeiro, 2015.

[57] CARRIL JÚNIOR, C. F.. **Análise numérica e experimental do efeito dinâmico do vento em torres metálicas treliçadas para telecomunicações.** PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2000.

[58] JEFFERIS, A.; MADSEN, D. A.. **Architectural drafting and design**. Delmar Cengage Learning, 2011.

[59] DAVENPORT, A.. **The response of slender structures to wind**. In: WIND CLIMATE IN CITIES, p. 209–239. Springer, 1995.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

[60] DAVENPORT, A.. **The generalization and simplification of wind loads and implications for computational methods**. In: COMPUTATIONAL WIND ENGINEERING 1, p. 409–417. Elsevier, 1993.

[61] SCHOUKENS, J.; PINTELON, R. ; ROLAIN, Y.. **Mastering system identification in 100 exercises**. John Wiley & Sons, 2012.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA

A
Artigo publicado

Os estudos envolvidos nessa dissertação possibilitaram a produção de um artigo aceito no 25th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2019.

25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering
October 20-25, 2019, Uberlândia, MG, Brazil

COB-2019-2306

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURES SUBJECTED TO DYNAMIC LOADS USING EQUIVALENT STATIC LOADS

Bárbara Valéria de Abreu Lavôr
Anderson Pereira
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio
R. Marquês de São Vicente, 225. Gávea, Rio de Janeiro - RJ. CEP: 22451-900
barbaralavor@gmail.com
anderson@puc-rio.br

Abstract. *Topology optimization in the time domain of structures subjected to time-dependent loads is usually computationally expensive, starting with the large number of time-dependent analyses that are required. Furthermore, the computational cost to evaluate the gradients of the response is significantly high and requires a large storage space. In this paper, instead of solving the original problem directly, we solve a sequence of static response optimization problems with many load cases. This approach, called the Equivalent Static Loads Method (ESLM), generates static loads that produces a similar response in comparison to the same response that the dynamic analysis does. The optimization of two cantilever beam models under dynamic forces is presented as a validation of the ESL implementation.*

Keywords: *Structural optimization, equivalent static loads, multiple loading condition, topology optimization.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1721364/CA