

3

Métodos Numéricos de Análise de Antenas

3.1.

Métodos Numéricos

Problemas de espalhamento eletromagnético e absorção devido a corpos dielétricos, não homogêneos, resistivos, e de formas arbitrárias, têm sido extensivamente tratados na literatura por causa da sua presença na maioria das situações práticas, incluindo microondas para terapia em câncer, acoplamento de mísseis com aberturas preenchidas com dielétricos e análise de antenas de comunicação na presença de não homogeneidades elétricas e magnéticas.

Quando o tamanho do objeto dielétrico não é nem grande, nem pequeno, comparado ao comprimento de onda da excitação, métodos assintóticos não podem ser aplicados e soluções rigorosas das equações de Maxwell são necessárias.

Assim, nesses casos, é praticamente impossível a aplicação de qualquer tratamento analítico. Isto ocorre devido principalmente, às geometrias e às condições de contorno às quais os problemas estão submetidos.

Desta maneira, observa-se a grande importância dos métodos numéricos e experimentais.

Devido ao alto custo das soluções experimentais, os métodos numéricos são os mais utilizados, encontrando-se em uma posição de destaque junto às diversas áreas de pesquisa.

Métodos numéricos então, podem ser descritos como "métodos numéricos" para resolução, com a utilização de computadores, de certos tipos de equações que modelam matematicamente problemas da nossa vida real.

No entanto, vale lembrar que essas equações nunca modelam "exatamente" o problema real em si, afinal, simular computacionalmente um problema real é bastante complicado. Apenas modelos simplificados são tratados, mas é sempre possível obter, através desses modelos, uma boa aproximação para o problema real.

A crescente evolução da tecnologia computacional possibilitou a aplicação de métodos numéricos em diversos ramos da física e da engenharia.

Em problemas de radiação e espalhamento, onde as equações de Maxwell são analisadas, os métodos numéricos podem ser basicamente divididos em duas classes: métodos de solução de equações integrais e métodos de solução de equações diferenciais.

Dentre as várias aproximações de equações integrais, formulações de superfície são as mais atrativas para condutores perfeitos, impedância ou estruturas de materiais em camadas, enquanto as formulações de volume são particularmente mais adequadas para modelar espalhadores não homogêneos.

Na solução destas equações integrais, os mais conhecidos métodos são o *Método dos Momentos* [9] e o *Método dos Elementos de Contorno* [10]-[12]. Ambos têm sido aplicados em uma variedade de problemas de duas e três dimensões, e são também chamados de técnicas exatas, por causa de sua garantia de convergência em discretizações densas. Entretanto, eles possuem a desvantagem de serem difíceis de implementar para objetos complexos, e também resultam em matrizes cheias, cujo tratamento requer uma quantidade enorme de memória. Isto é particularmente verdade para aplicações tridimensionais e, por causa disto, aproximações de equações diferenciais tornam-se mais populares.

Estes métodos por sua vez, podem ser sub divididos em *Método de Elementos Finitos* [13] e *Método de Diferenças Finitas* [14].

Ao contrário da aproximação das equações integrais, estes métodos de equações diferenciais levam a formulações bem simples e são, portanto atrativos para simular estruturas complexas. Entretanto, eles não incorporam a condição de radiação de Sommerfeld, fazendo com que o domínio de discretização seja estendido para longe do espalhador, onde a condição de Sommerfeld pode ser imposta.

Esta é maior desvantagem dos métodos de equações diferenciais, e esforços recentes têm sido realizados no estudo de condições de fronteiras absorventes, de maneira a reduzir a região de discretização fora do espalhador. Infelizmente, a precisão desta condição depende da composição e da forma do espalhador, o que pode implicar em resultados imprecisos.

Claramente, qualquer método híbrido que possua as características mais eficientes de ambos métodos de equação-diferencial e métodos de equação-integral, é computacionalmente mais vantajoso.

Alguns dos métodos híbridos desenvolvidos mais utilizados são: *Método Híbrido Momento / FD-TD* [15] e o *Método Híbrido dos Elementos Finitos / Integral de Fronteira (FE-BI)* [17].

O princípio básico destes métodos é utilizar um método de solução de equação diferencial a fim de tratar a região não homogênea e finita, enquanto o outro método, cuja solução é dada por uma equação-integral, é utilizado na região ilimitada e homogênea.

Abaixo são descritos os métodos de interesse para o presente trabalho, ou seja, o *Método dos Momentos*, o *Método dos Elementos Finitos* e o *Método Híbrido dos Elementos Finitos / Integral de Fronteira (FE-BI)*.

3.1.1.

Método dos Momentos

O objetivo da técnica é determinar uma certa função resposta g , tendo sido especificado um operador integro-diferencial F e uma função de excitação h , como pode ser observado na equação (3.1):

$$F(g) = h \quad (3.1)$$

O método então, expande a função resposta desconhecida g , em uma combinação linear de N termos:

$$g(z') \cong a_1 g_1(z') + a_2 g_2(z') + \dots + a_N g_N(z') = \sum_{n=1}^N a_n g_n(z') \quad (3.2)$$

Cada coeficiente a_n é uma constante a ser determinada e cada $g_n(z')$ é uma função conhecida, geralmente denominada de função de base ou função de expansão. O domínio das funções $g_n(z')$ é o mesmo que aquele para $g(z')$. Substituindo a equação (3.2) em (3.1), tem-se:

$$\sum_{n=1}^N a_n F(g_n) = h \quad (3.3)$$

As funções de base g_n são escolhidas de maneira que $F(g_n)$ na equação (3.3) possa ser encontrado convenientemente. Desta forma, só o que resta é a determinação dos coeficientes a_n .

A expansão realizada em (3.3) leva a uma única equação para N incógnitas, de maneira que ela sozinha não é capaz de determinar as N incógnitas a_n . Isto, porém, pode ser facilmente solucionado definindo-se N funções de teste e um produto escalar, e efetuando-se o produto escalar de cada uma das N funções de teste por ambos os membros da equação (3.3).

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, F(g_n) \rangle = \langle w_m, h \rangle \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

onde w_m são as funções de teste, e $\langle w_m, F(g_n) \rangle$ são os produtos escalares. Na forma matricial, a equação (3.4) pode ser expressa por:

$$[F_{mn}][a_n] = [h_m] \quad (3.5)$$

$$\text{onde } [F_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, F(g_1) \rangle & \langle w_1, F(g_2) \rangle \Lambda \\ \langle w_2, F(g_1) \rangle & \langle w_2, F(g_2) \rangle \Lambda \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.5 \text{ a})$$

$$[a_n] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \mathbf{M} \\ a_N \end{bmatrix} \quad (3.5 \text{ b})$$

$$[h_n] = \begin{bmatrix} \langle w_1, h \rangle \\ \langle w_2, h \rangle \\ \vdots \\ \mathbf{M} \\ \langle w_N, h \rangle \end{bmatrix} \quad (3.5 \text{ c})$$

Os coeficientes podem então ser encontrados por:

$$[a_n] = [F_{mn}]^{-1} [h_m] \quad (3.6)$$

A escolha das funções de teste são importantes pois os elementos de $\{w_m\}$ devem ser linearmente independentes para que as N equações em (3.4) sejam também linearmente independentes. Além disso, é mais vantajoso escolher funções de teste que minimizem os cálculos computacionais necessários ao se efetuar os produtos escalares.

Isto é importante também para as funções de base e por causa disso, muitas vezes tipos similares de funções de base e funções de teste são utilizadas. Quando as duas funções são iguais, a técnica é conhecida como Método de Galerkin [27].

Apesar de toda sua facilidade, algumas desvantagens surgem quando o método é empregado. Em problemas de radiação/espalhamento, onde a função de Green é utilizada, há o problema desta ser específica para cada tipo de geometria. Outra grande desvantagem diz respeito à simplicidade dos modelos de excitação presentes. Além disso, diversas complexidades surgem com a possibilidade do substrato ser anisotrópico ou não-homogêneo.

3.1.2. Método dos Elementos Finitos

Com o intuito de melhor representar problemas possuindo domínios físicos contendo uma geometria intrincada, e de forma a simplificar as aplicações das condições de contorno associadas, eliminando assim algumas das dificuldades do método das diferenças finitas, foi criado o método dos elementos finitos.

A técnica se baseia na solução de equações diferenciais parciais. Por exemplo, uma equação diferencial parcial envolve uma função $f(x)$ definida para todo x no domínio que diz respeito à determinada condição de contorno. O propósito do método é determinar uma aproximação da função $f(x)$.

O método ainda tem como uma das principais características a discretização do domínio, dividindo-o em sub-regiões ou células. Num caso bidimensional, estas poderiam ser aproximadas por triângulos, quadriláteros ou retângulos. Já para um caso tridimensional, os elementos finitos podem ser desde tetraedros, a prismas triangulares ou tijolos retangulares, como ilustrado na figura 3.1:

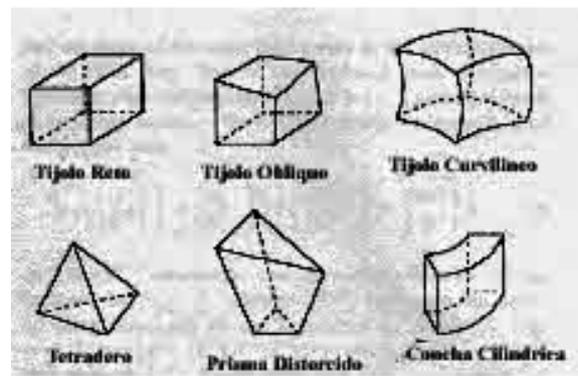


Figura 3.1 – Ilustração dos vários elementos utilizados em volumes tridimensionais.

Em cada célula a função é aproximada por uma forma característica. Isto é, $f(x)$ pode ser aproximada, por exemplo, por uma função linear em cada elemento.

Os denominados elementos finitos são pequenas porções do domínio físico do problema, onde a variação das incógnitas do problema no interior de tais elementos é aproximada através da aplicação das chamadas funções de interpolação.

Estabelece-se então, um somatório de *Resíduos Ponderados*, a fim de proporcionar uma distribuição do erro envolvido em tal aproximação ao longo de todos os elementos finitos que compõem o domínio físico do problema.

As formulações dos elementos finitos são normalmente estabelecidas através do método de Galerkin ou de método variacional. A primeira técnica é mais flexível, porém, quando for possível é vantajoso utilizar o método variacional, especialmente quando se quer determinar um parâmetro global.

O objetivo de qualquer formulação de elementos finitos é obter a solução da equação de onda vetorial (3.7) em um volume V qualquer, sujeito a um conjunto de condições de contorno em uma superfície S_0 que engloba este volume V , como exemplificado pela figura 3.2:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \bar{E} - k_0^2 \epsilon_r \bar{E} + jk_0 Z_0 \bar{J}^{\text{int}} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \bar{M}^{\text{int}} \right) = 0 \quad (3.7)$$

onde: ϵ_r = permissividade relativa do meio.

k_0 = número de onda no espaço livre.

Z_0 = impedância de onda no espaço livre.

μ_r = permeabilidade relativa do meio.

$(\bar{J}^{\text{int}}, \bar{M}^{\text{int}})$ = fontes internas, elétrica e magnética respectivamente.

\bar{E} = campo elétrico total.

Aplicando o método de Galerkin, a fim de determinar o peso residual R , deve-se efetuar o produto escalar de ambos os membros de (3.7) por funções de peso vetoriais \bar{W}_i , integrando-se no volume V .

Através do Teorema Vetorial de Green e após algumas manipulações vetoriais, o resultado é uma equação integro-diferencial (3.8), como a mostrada abaixo:

$$R = \int_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \bar{E}) \cdot (\nabla \times \bar{W}_i) \right] \cdot dV - k_0^2 \int_V \epsilon_r \bar{E} \cdot \bar{W}_i dV + \int_{S_0} [\bar{W}_i \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \bar{E})] dS + \int_V \nabla \times \left[\frac{\bar{M}^{\text{int}}}{\mu_r} \right] \cdot \bar{W}_i dV + jk_0 Z_0 \int_V \bar{J}^{\text{int}} \cdot \bar{W}_i dV \quad (3.8)$$

Na equação (3.8), as fontes internas $(\bar{J}^{\text{int}}, \bar{M}^{\text{int}})$, serão expressas por (\bar{f}^{int}) :

$$\bar{f}^{\text{int}} = \int_V \left\{ \nabla \times \left[\frac{\bar{M}^{\text{int}}}{\mu_r} \right] + jk_0 Z_0 \bar{J}^{\text{int}} \right\} \cdot \bar{W}_i dV \quad (3.9)$$

O objetivo é então minimizar o resíduo R , ou seja, fazer $R = 0$, de maneira que a diferença entre a solução discreta do método FE e a realidade física seja mínima.

Esse procedimento gera N_e equações, onde N_e é o número de funções de base associadas ao campo elétrico no volume em questão.

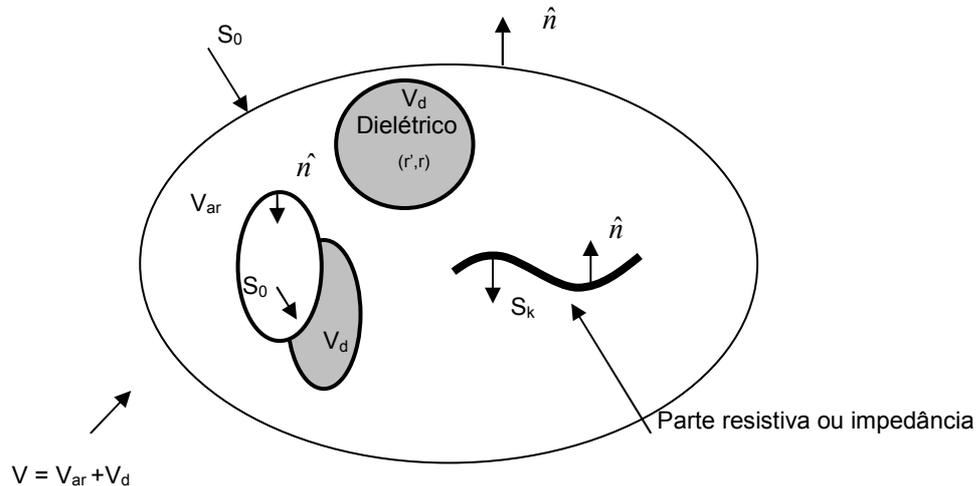


Figura 3.2 – Estrutura não-homogênea fechada por uma malha S_0 , condutora eletricamente perfeita.

A solução segue através da discretização do domínio em elementos finitos, e posterior expansão do campo elétrico volumétrico \bar{E}^{int} , do campo elétrico tangencial \bar{E}^{ext} , e do campo magnético \bar{H}^{ext} , em termos das funções de base:

$$\bar{E}^{int} = \sum_{j=1}^{N_V} E_j \cdot \bar{W}_j \quad (3.10. a)$$

$$\bar{E}^{ext} = \sum_{j=1}^{N_{ES}} E_j \cdot \bar{V}_j \quad (3.10. b)$$

$$\bar{H}^{ext} = \sum_{j=1}^{N_{HS}} H_j \cdot \bar{Q}_j \quad (3.10. c)$$

onde:

N_V = número de incógnitas do campo elétrico volumétrico

N_{ES} = número de incógnitas do campo elétrico superficial

N_{HS} = número de incógnitas do campo magnético superficial

$N = N_V + N_{ES} + N_{HS}$ = número de incógnitas total

Esta expansão dos campos é realizada em termos de funções vetoriais contínuas tangencialmente, eliminando assim a possibilidade de problemas espúrios na solução numérica, além de lidar com as descontinuidades das propriedades do material.

Além disso, ao se utilizar o método de Galerkin, faz-se as funções de base iguais as funções de peso, de forma que:

$$\bar{E}^{\text{int}} = \sum_{j=1}^{N_r} E_j \cdot \bar{W}_j \quad (3.11. a)$$

$$\bar{E}^{\text{ext}} = \sum_{j=1}^{N_{es}} E_j \cdot \bar{W}_j \quad (3.11. b)$$

$$\bar{H}^{\text{ext}} = \sum_{j=1}^{N_{hs}} H_j \cdot \bar{W}_j \quad (3.11. c)$$

E substituindo em (3.9) tem-se:

$$\sum_{j=1}^{N_r} E_j \left\{ \int_V \frac{\nabla \times \bar{W}_i \cdot \nabla \times \bar{W}_j}{\mu_r} dV - k_0^2 \int_V \epsilon_r \bar{W}_i \cdot \bar{W}_j dV \right\} - \sum_{j=1}^{N_{hs}} jk_0 Z_0 H_j \int_{S_0} \hat{n} \times \bar{W}_j \cdot \bar{W}_i dS = -f^{\text{int}} \quad (3.12)$$

A equação (3.12) pode ser expressa matricialmente como:

$$[A]_{N_r \times N_r} \{E\}_{N_r \times 1} + [B]_{N_r \times N_r} \{E\}_{N_r \times 1} + [C]_{N_r \times N_s} \{H\}_{N_s \times 1} = [D]_{N_r \times 1} \quad (3.13)$$

onde $\{E\} = [E_1, E_2, \dots, E_{N_r}]^T$, $\{H\} = [H_1, H_2, \dots, H_{N_s}]^T$, e o sobrescrito T denota a transposta do vetor.

O número de arestas de elementos que se encontram na superfície de S_0 é dado por N_s e os elementos de $[A]$, $[B]$, $[C]$ e $[D]$ são dados por:

$$A_{ij} = \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \bar{W}_i) \cdot (\nabla \times \bar{W}_j) \right] dV \quad (3.14 a)$$

$$B_{ij} = - \iiint_V \left[k_0^2 \epsilon_r \bar{W}_i \cdot \bar{W}_j \right] dV \quad (3.14 b)$$

$$C_{ij} = -jk_0 Z_0 \oiint_{S_0} \bar{W}_i \cdot (\bar{W}_j \times \hat{n}) dS \quad (3.14 c)$$

$$D_i = - \iiint_V \bar{W}_i \cdot \left[jk_0 Z_0 \bar{J}^{\text{int}} - \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \bar{M}^{\text{int}} \right) \right] dV \quad (3.14 d)$$

No método, a aplicação das condições de contorno processa-se de maneira simples, e tem-se a possibilidade da representação de problemas com domínios possuindo uma geometria intrincada.

As desvantagens deste método consistem na dificuldade de modelar meios infinitos e na grande entrada de dados necessária para a discretização de todo o domínio físico do problema. Este fato torna-se ainda mais relevante em problemas tridimensionais.

Além disso, em algumas situações o método apresenta resultados imprecisos, embora exista uma certa convergência com o aumento do grau de refinamento utilizado na discretização.

O fato do método dos elementos finitos apresentar resultados imprecisos ocorre, principalmente, para os casos onde as incógnitas apresentam descontinuidades, singularidades ou uma elevada taxa de variação.

O método dos elementos finitos foi inicialmente utilizado em aplicações relacionadas à Aeronáutica, Engenharia Estrutural e Mecânica dos Sólidos, mas atualmente apresenta-se altamente difundido nos diversos ramos da Engenharia, nos problemas que possam ser expressos na forma de equações diferenciais parciais.

3.1.3.

Método Híbrido Elementos Finitos – Integral de Fronteira (FE-BI)

Embora o método dos momentos continue sendo a aproximação mais precisa e eficiente para corpos de tamanho de sub comprimentos de onda de geometrias simples, métodos de soluções de equações parciais diferenciais (PDE), e versões híbridas mostraram um melhor resultado nas simulações de larga escala sem restrições à geometria e à composição de material da estrutura.

Uma das primeiras implementações do FE-BI para radiação e espalhamento de antenas / abertura retangulares, foi dada por Jin e Volakis [18], [19], [20] sendo depois estendida para análise de antenas em plataformas planas e cilíndricas.

Esta técnica então, é uma das ferramentas computacionais mais poderosas em uso atualmente e representa uma hibridização do tradicional método dos momentos com o método dos elementos finitos.

O grande interesse por esse método provém do fato de que equações-integrais de volume têm dificuldades em modelar estruturas de metal e dielétricas, levando ao uso computacional intensivo se comparado ao método dos elementos finitos.

No método FE-BI, as integrais de fronteira (ou equações-integrais) são utilizadas para satisfazer as seguintes necessidades:

1. Limitar ou terminar o domínio computacional no qual o método dos elementos finitos é usado.
2. Relacionar os campos elétrico e magnético na fronteira.

Assim, a técnica FE-BI também se utiliza do princípio da equivalência para subdividir o problema original em duas regiões, as quais são acopladas através de condições de continuidade dos campos.

Os campos em cada região são formulados via aproximações variacionais ou via equação-integral, levando a um conjunto de equações que são resolvidas pelo método dos elementos finitos.

Para isso, a estrutura a ser analisada deve ser envolvida por uma superfície fictícia: em seu interior, o método dos elementos finitos é empregado na formulação do campo; já exteriormente, os campos são representados pela radiação de fontes externas e as correntes elétricas e magnéticas equivalentes.

Considerando a análise de uma antena tipo fenda em uma cavidade, divide-se o problema inicial em dois: uma questão a ser resolvida trata-se de uma cavidade e, portanto, um problema volumétrico; a outra questão a ser analisada, diz respeito à abertura sendo então um problema superficial.

Como característica do método FE, a técnica pode ser aplicada em qualquer tipo de superfície, seja ela não homogênea ou composta por diversos materiais.

O método FE-BI foi introduzido nos anos 70, como uma extensão natural do método dos elementos finitos para a modelagem de problemas sem fronteiras. Entretanto, devido às grandes necessidades computacionais, o método não foi bem aproveitado até a década de 80.

Como demonstrado no item 3.1.2., o problema interior pode ser resolvido fazendo-se a equação (3.8) igual a zero, como na equação (3.15) mostrada abaixo:

$$\int_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \bar{E}) \cdot (\nabla \times \bar{W}_i) \right] \cdot dV - k_0^2 \int_V \epsilon_r \bar{E} \cdot \bar{W}_i dV + \int_{S_0} [\bar{W}_i \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \bar{E})] dS + \int_V \nabla \times \left[\frac{\bar{M}^{int}}{\mu_r} \right] \cdot \bar{W}_i dV + jk_0 Z_0 \int_V \bar{J}^{int} \cdot \bar{W}_i dV = 0 \quad (3.15)$$

Já a excitação externa pode ser expressa considerando-se os campos incidente \bar{H}^i e espalhado \bar{H}^{scat} separadamente. Assim, o campo magnético total externo pode ser escrito pelo somatório (3.16):

$$\bar{H}^{ext} = \bar{H}^i + \bar{H}^{scat} \quad (3.16)$$

Considerando que o campo \bar{H}^i é conhecido, e que o campo \bar{H}^{scat} pode ser encontrado pelo princípio da equivalência, uma equação integral de campo magnético (MFIE) [19], [21], pode ser obtida:

$$\begin{aligned}
-\hat{n} \times [\bar{H}^i(\bar{r})] = & -\frac{\bar{J}(\bar{r})}{2} - \oint_{S_0} \hat{n} \times [\nabla \times \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{J}(\bar{r}')] dS' + \\
& jk_0 Y_0 \oint_{S_0} \hat{n} \times \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{M}(\bar{r}') dS' \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Desta maneira, os campos no interior da fronteira fictícia encontram-se na equação (3.15) enquanto que na equação (3.17) os campos exteriores a fronteira podem ser determinados.

Para haver a hibridização, estes campos precisam então estar ligados e isto é realizado através das condições de contorno na superfície, que garantem a continuidade tangencial do campo:

$$\hat{n} \times \bar{H}^{int} = \hat{n} \times \bar{H}^{ext} \quad (3.18 \text{ a})$$

$$\hat{n} \times \bar{E}^{int} = \hat{n} \times \bar{E}^{ext} \quad (3.18 \text{ b})$$

Combinando as equações (3.15), (3.17), (3.18 a) e (3.18 b), obtêm-se as equações FE e BI:

$$\int_V \frac{\nabla \times \bar{E}^{int} \cdot \nabla \times \bar{W}_i}{\mu_r} dV - k_0^2 \int_V \epsilon_r \bar{E}^{int} \cdot \bar{W}_i dV - jk_0 Z_0 \int_{S_0} \hat{n} \times \bar{H}^{int} \cdot \bar{W}_i dS = -\bar{f}^{int} \quad (3.19 \text{ a})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \oint_{S_0} \bar{Q}_i \cdot (\hat{n} \times \bar{H}^{int}) dS - \oint_{S_0} \oint_{S_0} \bar{Q}_i \cdot [\hat{n} \times \nabla \times \bar{G} \times \hat{n}'] \cdot \bar{H}^{int} dS' dS - \\
& jk_0 Y_0 \oint_{S_0} \oint_{S_0} \bar{Q}_i \cdot [\hat{n} \times \bar{G} \times \hat{n}'] \cdot \bar{E}^{ext} dS' dS = \bar{f}^{ext} \quad (3.19 \text{ b})
\end{aligned}$$

onde a fonte de excitação externa \bar{f}^{ext} é dada por:

$$\bar{f}^{ext} = -\oint_{S_0} \bar{Q}_i \cdot \hat{n} \times [\bar{H}^{int}] dS \quad (3.20)$$

É importante notar que a condição de continuidade de campo magnético foi imposta em (3.19), porém a condição de continuidade de campo elétrico não. Isto pode ser realizado de duas maneiras: com a utilização das mesmas funções de base para \bar{E}^{int} e \bar{E}^{ext} ; ou através da relação auxiliar:

$$-\oint_{S_0} \left[\bar{Q}_i \cdot \hat{n} \times (\bar{E}^{\text{int}} - \bar{E}^{\text{ext}}) \right] dS = 0 \quad (3.21)$$

Expandindo agora os campos de acordo com as funções de base dadas pela equação (3.11), e substituindo em (3.19), têm-se as seguintes equações:

Teste interior do campo elétrico volumétrico:

$$\sum_{j=1}^{N_r} E_j \left\{ \int_V \frac{\nabla \times \bar{W}_i \cdot \nabla \times \bar{W}_j}{\mu_r} dV - k_0^2 \int_V \epsilon_r \bar{W}_i \cdot \bar{W}_j dV \right\} - \sum_{j=1}^{N_{HS}} jk_0 Z_0 H_j \int_{S_0} \hat{n} \times \bar{W}_j \cdot \bar{W}_i dS = -f^{\text{int}} \quad i=1,2,\dots,N_e$$

Teste exterior do campo magnético superficial:

$$\sum_{j=N_e+1}^N H_j \left\{ -\frac{1}{2} \oint_{S_0} \bar{Q}_i \cdot (\hat{n} \times \bar{Q}_j) dS - \oint_{S_0} \oint_{S_0} \bar{Q}_i \cdot [\hat{n} \times \nabla \times \bar{G} \times \hat{n}] \cdot \bar{Q}_j dS' dS \right\} - jk_0 Y_0 \sum_{j=1}^{N_e} E_j \left\{ \oint_{S_0} \oint_{S_0} \bar{Q}_i \cdot [\hat{n} \times \bar{G} \times \hat{n}] \cdot \bar{W}_j dS' dS \right\} = \bar{f}^{\text{ext}} \quad i= N_e + 1, N_e + 2, \dots, N \quad (3.22)$$

O sistema linear representado pela equação (3.22) é então solucionado através de métodos diretos ou iterativos a fim de determinar os campos elétrico e magnético desconhecidos.

Este conjunto de equações é aquele com o menor número de incógnitas e de mais fácil formulação a ser implementado. Entretanto, essa aproximação limita a flexibilidade do método, já que a discretização utilizada para os campos no interior da cavidade deve ser a mesma para os campos no exterior.

A figura 3.3 mostra o perfil de uma típica matriz FE-BI: a parte negra corresponde às entradas da matriz que são diferentes de zero, enquanto que os espaços brancos denotam os zeros e, portanto correspondem as porções da matriz que não precisam ser calculadas ou armazenadas:

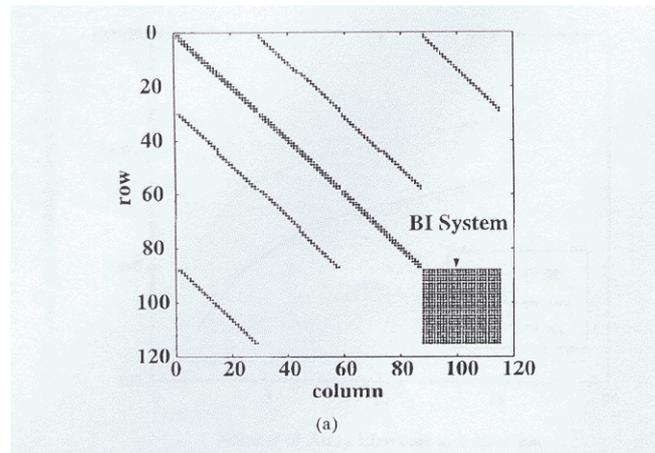


Figura 3.3 – Exemplos de sistemas de matrizes geradas pelo método FE-BI.

3.1.3.1.

Caso Especial – Cavity Terminada por um Plano de Terra

Uma das aplicações de maior sucesso do método FE-BI é aquela que envolve uma antena situada numa cavidade terminada por um plano de terra metálico e infinito. Isto porque a porção da formulação relativa a integral de fronteira, que é a mais custosa, é minimizada, enquanto que a flexibilidade da geometria encontrada no método dos elementos finitos pode ser mantida. A figura 3.4 ilustra este caso:

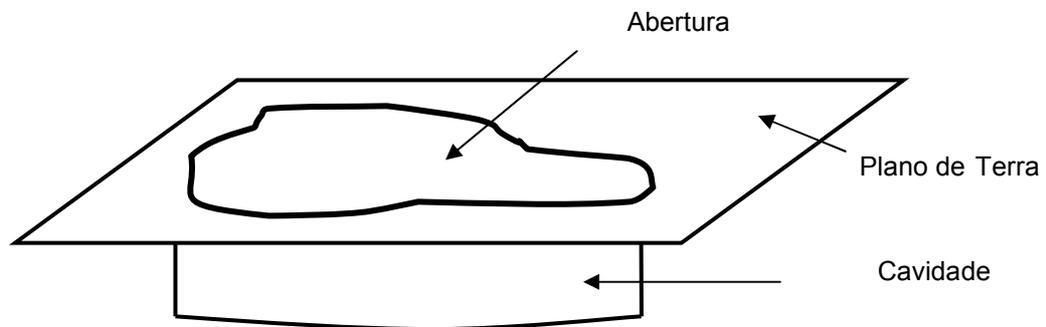


Figura 3.4 – Ilustração de uma cavidade terminada por um plano de terra.

Assim, quando S_0 coincide com a abertura no plano de terra, a equação-integral pode ser simplificada substancialmente.

A continuidade do campo magnético através da interface é realizada equacionando-se os campos magnéticos interno e externo através da fronteira do volume, S_0 , isto é:

$$\hat{n} \times \bar{H}^{\text{int}} = \hat{n} \times \bar{H}^{\text{ext}}(\bar{M}) \quad (3.23)$$

E substituindo em (3.19 a):

$$\int_V \frac{\nabla \times \bar{E}^{\text{int}} \cdot \nabla \times \bar{W}_i}{\mu_r} dV - k_0^2 \int_V \epsilon_r \bar{E}^{\text{int}} \cdot \bar{W}_i dV - jk_0 Z_0 \int_{S_0} \hat{n} \times \bar{H}^{\text{ext}}(\bar{M}) \cdot \bar{W}_i dS + \bar{f}^{\text{int}} = 0 \quad (3.24)$$

A solução segue através da expansão do campo elétrico volumétrico, do campo elétrico tangencial, e do campo magnético em termos das funções de base dadas pela equação (3.11).

Sabendo que $\bar{M} = \bar{E}^{\text{ext}} \times \hat{n}$ e pela equação (3.11 b) chega-se à:

$$\hat{n} \times \bar{H}^{\text{ext}}(\bar{M}) = \sum_{j=1}^{N_s} E_j \cdot \hat{n} \times \bar{H}^{\text{ext}}(\bar{M}_j) \quad (3.25)$$

Desta forma, a equação (3.24) pode ser reescrita por:

$$\sum_{j=1}^{N_r} E_j \left\{ \int_V \frac{\nabla \times \bar{W}_i \cdot \nabla \times \bar{W}_j}{\mu_r} dV - k_0^2 \int_V \epsilon_r \bar{W}_i \cdot \bar{W}_j dV \right\} - \sum_{j=1}^{N_{ES}} jk_0 Z_0 E_j \int_{S_0} \hat{n} \times \bar{H}^{\text{ext}}(\bar{M}_j) \cdot \bar{W}_i dS + \bar{f}^{\text{int}} = 0 \quad (3.26)$$

Reorganizando a equação (3.26) obtemos aquela por onde encaminharemos a solução final:

$$\sum_{j=1}^{N_r} E_j \left\{ \int_V \frac{\nabla \times \bar{W}_i \cdot \nabla \times \bar{W}_j}{\mu_r} dV - k_0^2 \int_V \epsilon_r \bar{W}_i \cdot \bar{W}_j dV \right\} - \sum_{j=1}^{N_{ES}} jk_0 Z_0 E_j \int_{S_0} \bar{M}_i \cdot \bar{H}^{\text{ext}}(\bar{M}_j) dS + \bar{f}^{\text{int}} = 0 \quad (3.27)$$

Na forma matricial deve ser escrita como:

$$\sum_{e=1}^M [A^e] \{E_j^e\} - k_0^2 \sum_{e=1}^M [B^e] \{E_j^e\} - jk_0 Z_0 \sum_{e=1}^M [C^e] \{E_j^e\} = -\{\bar{f}^{\text{int}}\} \quad (3.28)$$

onde

$$A_{ij}^e = \int_{V^e} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \bar{W}_i^e) \cdot (\nabla \times \bar{W}_j^e) dv \quad (3.29 a)$$

$$B_{ij}^e = \int_{V^e} \epsilon_r \bar{W}_i^e \cdot \bar{W}_j^e dv \quad (3.29 b)$$

$$C_{ij}^e = \int_S \bar{M}_i \cdot \bar{H}^{\text{ext}}(\bar{M}_j) dS \quad (3.29 c)$$