

4 – Construções Inspiradas no critério de Tarski e objeções

4.1. A construção de Sher

A proposta de Sher foi delineada em seu livro “The Bounds of Logic”. A motivação imediata da investigação da autora, como ela própria nos diz no prefácio de seu livro, foi a idéia da generalização dos quantificadores empreendida originalmente por Mostowski, uma idéia que tem suas raízes na concepção fregeana dos enunciados acerca de números. O resultado é uma extensão da lógica de predicados de 1ª ordem, que Sher denomina “*unrestricted first-order logic*”. O sistema de Sher, entretanto, não se restringe à generalização elaborada por Mostowski em seu artigo original, circunscrita a quantificadores unários (“one-place quantifiers”), mas inclui quantificadores com múltiplos lugares de argumento, os chamados “quantificadores relacionais”.

A aceitação de constantes lógicas outras que as usuais requer, naturalmente, um fundamento. De acordo com Sher, o primeiro passo é a caracterização dos elementos da teoria (predicados, relações, etc.) num sistema lingüístico-conceitual que nos permita decidir, antes de determinar quais são suas constantes lógicas, qual é o nível de cada elemento. Um tal esquema lingüístico-conceitual é o sistema de níveis de Frege:

Um esquema conceitual como a hierarquia de níveis de Frege é naturalmente sugerido. Em um tal esquema, o nível de uma expressão lingüística pode ser determinado antes e independentemente de sua determinação como uma expressão lógica ou não lógica. E os princípios subjacentes à hierarquia – nomeadamente a caracterização das expressões como completas e incompletas e a caracterização destas últimas de acordo com o número e tipo das expressões que as podem completar – são universalmente aplicáveis¹¹⁷.

A formulação da lógica de 1ª ordem no sistema de Frege é constituída por uma linguagem de 1ª ordem, enriquecida por certos predicados unários de 2ª ordem, que são os quantificadores (universal e existencial). O objetivo de Sher, entretanto, é investigar a possibilidade de expansão das constantes lógicas da linguagem. Quais predicados ou relações de 2ª ordem podemos considerar

¹¹⁷ (Sher, 1991, p.2)

legitimamente como lógicos? Temos aqui três possibilidades. Podemos decidir admitir como lógicos, à maneira clássica, somente os quantificadores existencial e universal. Mas essa escolha exclui qualquer possibilidade de expansão da linguagem da nossa teoria. Por outro lado, poderíamos considerar todos os predicados ou relações de 2ª ordem como lógicos, mas isto equivaleria a trivializar a lógica. “Por esta razão, a área [intermediária entre as duas alternativas] é a mais interessante para o investigador crítico”¹¹⁸.

O sistema formal de Sher, segundo sua própria designação, é uma lógica à la Frege-Russell (com certas restrições) com uma semântica tarskiana¹¹⁹. A “semântica tarskiana”, entretanto, é entendida como a semântica de Tarski para linguagens de 1ª ordem, numa concepção de modelos de domínios variáveis. Os termos lógicos deste sistema devem ser distinguidos por uma característica básica: não distinguir as condições de identidade dos objetos (indivíduos) de um modelo. Devemos, todavia, dar a esta nossa intuição pré-teórica, uma contrapartida sistemática e científica. Os termos lógicos são formais no sentido de serem sensíveis apenas à estrutura matemática dos modelos.

O conceito que irá nos permitir elucidar a neutralidade dos termos lógicos é o de invariância. Mas como estamos numa concepção de modelos de domínios variáveis, não basta a invariância dos termos em questão sob todas as transformações ou automorfismos de um mesmo domínio. Nas palavras de Sher:

(...) ser formal é, semanticamente, ser invariante sob todas as variações não estruturais dos modelos. Isto é o mesmo que dizer, ser formal é ser invariante sob estruturas isomórficas. Resumidamente, termos lógicos são formais no sentido de serem essencialmente matemáticos. Uma vez que, intuitivamente, os parâmetros matemáticos da realidade não variam de um estado de coisas possível para outro, a reivindicação de que as conseqüências lógicas são intuitivamente necessárias é em princípio satisfeita por lógicas que permitem termos matemáticos como termos lógicos. Minha tese, portanto, é a seguinte: todos, e somente os termos formais, termos invariantes sob estruturas isomórficas, podem servir como termos lógicos em uma semântica baseada nas idéias de Tarski¹²⁰.

Na passagem citada, podemos notar a identificação dos termos lógicos com termos matemáticos. Todo termo matemático de 2ª ordem que pode ser inserido no sistema da lógica de 1ª ordem irrestrita “*in the right way*”, pode

¹¹⁸ (Sher, 1991, p.3)

¹¹⁹ Ver (Sher, 1991, p.1).

¹²⁰ (Sher, 1991, p.53). Grifo meu.

funcionar como um termo lógico. O que a expressão “*in the right way*” significa nos é explicado por Sher por meio de uma série de condições sintático-semânticas (A)-(E). Deste modo temos, em realidade, um critério múltiplo de demarcação para os termos lógicos. Em separado, cada um dos subcritérios (A), (B), (C), etc, formam uma condição necessária, enquanto que, tomados em conjunto, formam uma condição suficiente para a demarcação dos termos lógicos. De todas as condições apontadas, as mais importantes são (A) e (E). Sob a condição (A), um termo lógico é, sob o ponto de vista sintático, um predicado ou relação n -ário (em que n é um inteiro positivo) em 1ª ou 2ª ordem (mas não além). A condição (E) nos expõe em linguagem formal a condição semântica a ser cumprida pelos termos lógicos, de que eles devem ser invariantes sob todas as bijeções entre domínios, quer dizer, através de todas as estruturas isomórficas.

Igualmente importante é a condição (D), que estabelece que os termos lógicos devem ser definidos sobre todos os modelos (para a lógica de 1ª ordem). Como os termos lógicos, que fazem parte da maquinaria da metalinguagem, não são sensíveis à natureza ou às condições de identidade dos objetos do domínio de um modelo específico, sua generalidade advém do fato de que eles são definidos com base na cardinalidade dos domínios dos modelos. Uma enunciação completa da condição (D) deveria ser então: “os termos lógicos são definidos sobre todos os modelos de mesma cardinalidade”. É importante notarmos este fato, pois ele implica que, na formulação de Sher, os termos lógicos habituais como ‘ \forall ’, ‘ \exists ’, entre outros, não têm uma referência unívoca. Para usar a própria expressão de Sher, um quantificador como ‘ \forall ’, definido sobre todos os modelos de dez elementos, é um “10-operator”, definido sobre todos os modelos de vinte elementos é um “20-operator”, e assim por diante. Condições semelhantes se aplicam a todos os outros termos lógicos “standard”, como disjunção, conjunção, etc.

Vejamos agora alguns aspectos dessa extensão da “lógica fregeana de 1ª ordem”. Na lógica de 1ª ordem de Frege, de acordo com Sher, os termos lógicos são operadores de 1ª ou 2ª ordem. De acordo com Frege, uma sentença da forma ‘ $\forall x(\phi x)$ ’ é verdadeira se, e somente se, a extensão de ϕx é todo o universo, ou se sua contra extensão tem cardinalidade 0 ¹²¹. Em Frege, todavia, não temos

¹²¹ Ver (Sher, 1991, p.11).

propriamente a idéia de domínio, mas de um universo total. Na visão de Sher, ‘ \forall ’ deve ser definido, como dissemos, sobre todos os modelos de uma cardinalidade específica. Representemo-nos um domínio comum a todos os modelos de dez elementos. Nesse contexto, ‘ \forall ’ é um predicado unário de 2ª ordem que opera sobre as funções sentenciais interpretadas como subconjuntos de um modelo arbitrário de dez elementos. Assim, uma sentença da forma $\forall x(\phi x)$ é verdadeira se, e somente se, a extensão de ϕx é todo o domínio de um modelo de dez elementos.

Mas de acordo com o critério de invariância sob todas as bijeções, os quantificadores lógicos não se restringem aos quantificadores clássicos. Os números naturais, pensados como classes de classes de indivíduos, também podem ser construídos como quantificadores na linguagem da lógica irrestrita de 1ª ordem. Por exemplo, ‘!1’, ‘!2’,..., ‘!n’ (“existe exatamente 1”, “existem exatamente 2”, “existem exatamente n”), representam quantificações sobre as variáveis ligadas por eles. Pensemos, por exemplo, num quantificador definido pela expressão ‘4’. Sob a definição de Sher, uma sentença da forma ‘ $4x(\phi x)$ ’ é verdadeira se, e somente se, a extensão de ϕx é igual a quatro ¹²².

Podemos constatar, a partir dos exemplos que foram expostos nos dois parágrafos anteriores, que a construção dos termos lógicos para a lógica de 1ª ordem irrestrita feita por Sher, é uma aplicação prática da idéia filosófica de Tarski acerca das noções lógicas na construção de um sistema formal ¹²³. A

¹²² Os exemplos de Sher se estendem muito além dos simples exemplos dados aqui. Em geral, todos os termos matemáticos (conjunto-teóricos) de ordem superior podem ser definidos de acordo com o seu critério, desde que sejam introduzidos de acordo com as regras sintático-semânticas que mencionei acima (condições (A)-(E)). Dado um modelo M com um universo U, vários quantificadores podem ser definidos por meio de certas funções. Por exemplo, os quantificadores numéricos “existem finitos”, “existem incontáveis”, podem ser definidos, respectivamente, da seguinte maneira:

$$f_{\text{finitos}}(M) = \{B : (B \subseteq U) \vee (|B| < \aleph_0)\}, \text{ e}$$

$$f_{\text{incontáveis}}(M) = \{B : (B \subseteq U) \vee (|B| > \aleph_0)\}.$$

Outros quantificadores não unários podem igualmente ser definidos por este procedimento, como ‘ \in ’:

$$f_{\text{pertinência}}(M) = \{a, B, : (a \in U) \vee (B \subseteq U) \vee (a \in B)\}.$$

¹²³ Sher declara que suas idéias também são inspiradas por (Mostowski, 1957) e Mautner, que em seu artigo “*An Extension of Klein’s Erlanger Program: Logic as Invariant Theory*” (1946), desenvolve a idéia de lógica como teoria das noções invariantes. Mas seu objetivo básico é oferecer um critério de demarcação para a sua interpretação da “lógica tarskiana”.

construção de Sher, todavia, como ela própria faz questão de frisar, não foi baseada diretamente em (86): “Minhas conclusões (...) são baseadas no trabalho inicial de Tarski sobre os fundamentos filosóficos da lógica”¹²⁴. Esta pequena ressalva feita por Sher, embora possa parecer à primeira vista sem muita importância, envolve questões bastante importantes. Em primeiro lugar, Sher defende que a definição do conceito de consequência lógica dada por Tarski em (36) é uma definição modelo-teorética standard para a lógica de 1ª ordem. Se segue daí que um de seus critérios sintático-semânticos para a demarcação dos termos lógicos (a condição (A)), determina que os termos lógicos são predicados de 1ª ou 2ª ordem (mas não além). Neste ponto, vale à pena lembrarmos da definição das noções lógicas de Tarski em (86):

Considerem a classe de todas as transformações um-um do espaço, ou universo de discurso, ou ‘mundo’, sobre si mesmo. Qual será a ciência que trata com as noções invariantes sob esta ampla classe de transformações? Aqui nós iremos ter muito poucas noções, todas de um caráter bastante geral. Eu sugiro que elas são noções lógicas, que nós chamemos uma noção ‘lógica’, se ela é invariante sob todas as transformações um-um possíveis do mundo sobre si mesmo¹²⁵.

Sher identifica a definição citada acima com sua condição (E), que estabelece que todos os termos lógicos são invariantes sob todas as bijeções entre domínios. No entanto, é interessante notarmos, em primeiro lugar, que enquanto a condição (E) é definida sobre domínios variáveis de uma mesma cardinalidade, não encontramos na definição de Tarski nenhuma menção a variações de domínios. Muito ao contrário, as expressões “o mundo”, “o espaço”, “o universo de discurso”, parecem sugerir claramente uma outra interpretação. Em segundo lugar, enquanto a condição (A) restringe os termos lógicos a predicados n-ários de 1ª ou 2ª ordem, não há em Tarski nenhuma restrição quanto à ordem dos objetos lógicos. Todo objeto ou noção lógico-matemática de ordem superior, invariante sob todas as transformações do universo de todos os indivíduos, pode ser denotado por um termo lógico na construção de um sistema formal¹²⁶.

¹²⁴ (Sher, 1991, p.63). A autora declara só ter tomado contato com “What Are Logical Notions”, depois que as primeiras versões de seu capítulo sobre os fundamentos para a construção dos termos lógicos já estavam prontos.

¹²⁵ (Tarski, 1986).

¹²⁶ O fato de que Tarski não faz restrições quanto à ordem dos objetos lógicos é reconhecido pela própria Sher:

“Esta é a razão pela qual, diferentemente do Tarski tardio, o critério para os termos lógicos aqui proposto inclui, mas não é exaurido, pela condição (E). Ser um termo lógico não é somente ser um

Como já foi observado, Sher defende a tese de que, nos seus primeiros trabalhos sobre os fundamentos da lógica (em particular, (36)), Tarski estava formulando definições modelo-teoréticas standard para teorias de 1ª ordem. Por todas as razões apontadas nos dois capítulos anteriores, eu discordo desta posição. Por outro lado, é importante, para que a nossa discussão não se extravie, não confundirmos as ordens de problemas envolvidos em toda a nossa discussão sobre o problema da demarcação. Em (86), Tarski nos forneceu um critério filosófico geral para a delimitação das noções lógicas. Sua caracterização das noções lógicas não é, obviamente, restrita a esta ou aquela parte da lógica, mas deve abarcar toda a lógica, que como vimos, Tarski identifica com a teoria geral de conjuntos ou classes estratificada em tipos. A aplicação prática desta idéia filosófica depende, obviamente, dos recursos técnicos disponíveis para a sua execução. Isto não impede, de forma alguma, que o critério de demarcação tarskiano seja empregado na construção de sistemas formais ou “lógicas” em diversas concepções. Neste sentido, a construção de Sher é muito interessante, embora, como veremos ao discutir as objeções de Feferman, apresente vários problemas. É necessário diferenciarmos, com respeito às críticas feitas à idéia de Tarski, os pontos em que tais críticas se referem aos problemas técnicos relacionados à sua aplicação prática, daqueles pontos em que as críticas refletem questões de cunho filosófico

127

termo matemático de ordem superior; é ser incorporado num certo sistema sintático-semântico de tal maneira que nos seja permitido identificar todas as conseqüências lógicas por meio de uma dada regra [por ex., a definição tarskiana de conseqüência lógica].” (Sher, 1991, p.64).

¹²⁷ Por exemplo, a questão do status da lógica de ordem superior. Vários autores da atualidade, na esteira de Quine, não aceitam uma lógica de ordem superior, em razão de “seus pressupostos ontológicos exorbitantes”. Ver a este respeito (Raggio, 1970).

4.2. As objeções de Feferman

A compreensão das observações críticas de Feferman com respeito ao critério de demarcação de Tarski depende de diferenciarmos seus dois aspectos principais. Sob o primeiro destes aspectos, tais críticas refletem um ponto de vista hoje dominante, de acordo com o qual a lógica deve ser independente de questões factuais ou de existência. O segundo aspecto está relacionado mais diretamente à adaptação da formulação original que encontramos em (86) à idéia de variação dos domínios em teoria de modelos, como é o caso da construção de Sher que acabamos de expor. Nas páginas subseqüentes, procurarei diferenciar os pontos em que as objeções de Feferman trazem à baila os elementos problemáticos da formulação tarskiana, daqueles em que estas objeções estão mais diretamente relacionadas às adaptações mencionadas.

As idéias de Feferman acerca do assunto estão sintetizadas em seu artigo “*Logic, Logics, and Logicism*”¹²⁸. O estímulo imediato para as conjecturas do autor, como ele próprio ressalta, foi a caracterização das operações lógicas contida em (Mc Gee, 1996). Apresentarei desta caracterização apenas aqueles traços importantes para a discussão que irá se seguir. Consideremos, em primeiro lugar, uma linguagem infinitária L_{∞} , cujas fórmulas podem ser compostas por conjunções arbitrariamente longas, disjunções arbitrariamente longas, e quantificadores seguidos de blocos infinitos de variáveis. Segundo Mc Gee, o critério de demarcação de Tarski nos permite identificar as operações lógicas de L_{∞} como aquelas operações invariantes sob todas as permutações dos objetos que podem ser valores das variáveis desta linguagem (V-assignments, em suas palavras), considerando como domínio básico qualquer conjunto particular não vazio de indivíduos¹²⁹. Pelos motivos já apontados ao longo do presente trabalho, podemos dizer que esta idéia de que as operações lógicas são definidas relativamente a um domínio particular não condiz com a formulação que

¹²⁸ Duas interessantes análises crítico-históricas do pensamento geral e da concepção tarskiana de lógica também podem ser encontradas nos artigos aqui referidos como (Feferman, 2001) e (Feferman, 2002).

¹²⁹ No artigo em discussão, Mc Gee prova inicialmente um teorema que define operações lógicas apenas de nível 2, mostrando depois como é possível estender seus resultados para operações de nível superior. É bom lembrar que, assim como em Tarski, as permutações ou transformações em níveis superiores são induzidas por permutações no nível mais básico, que é o nível dos indivíduos.

encontramos originalmente em (86), uma vez que na formulação original de Tarski não temos propriamente a idéia de domínio. O universo de discurso, segundo esta formulação, é ‘o universo’ total, o universo de todos os indivíduos lógicos.

Mas Mc Gee prossegue, apontando as razões pelas quais, de acordo com sua interpretação, o critério de Tarski não é suficiente. Seu exemplo principal é uma pretensa operação lógica designada por ($\$$), e que ele denomina “*affluence quantifier*”. A condição de satisfação deste ‘quantificador’ é a seguinte: uma fórmula do tipo $(\$x)\phi x$ é verdadeira se, e somente se, alguma pessoa rica é um ϕ ¹³⁰. É óbvio que, se considerarmos a invariância sob permutações de um domínio particular como distintivo de logicalidade, nosso critério de demarcação falha. A constatação deste fato é bastante simples. Suponhamos que estejamos definindo as operações lógicas para um domínio S no qual todos os elementos pertencem a uma “casta superior”. Considerando a logicalidade de uma operação como invariância sob todas as permutações de S , o quantificador ($\$$) irá agir como uma operação lógica. O problema é que basta encontrarmos um domínio S' equinúmero a S , e que contenha ao menos uma pessoa pobre, para que a logicalidade de ($\$$) seja rompida.

Dadas estas limitações do (que Mc Gee considera o) critério de Tarski, é necessário incorporarmos a idéia introduzida por Sher, que como vimos anteriormente, determina como lógicos aqueles termos ou operadores invariantes sob todas as bijeções. Conseqüentemente, chegamos ao que Mc Gee denomina “*the Tarski-Sher thesis*”, e que ele define da seguinte maneira: “(...) uma operação ' \prime ' através dos domínios é invariante sob bijeções sse, para cada cardinal δ diferente de zero, existe uma fórmula $\phi\delta$ de $L_{\infty\infty}$ que descreve a ação de ' \prime ' sobre domínios de cardinalidade δ ”¹³¹. É interessante notarmos, com relação a esta definição, que ela pretende ser uma caracterização completa das operações lógicas, por meio da adaptação do critério de Sher para a lógica irrestrita de 1ª ordem a uma linguagem infinitária, renunciando, da mesma forma, ao pressuposto de que os termos lógicos devem ser de no máximo 2ª ordem.

Tendo em vista a caracterização de Mc Gee esboçada acima, Feferman desfere três críticas à tese Tarski-Sher. A discussão que irá se seguir é uma análise

¹³⁰ A definição deste ‘quantificador’ se encontra em (Mc Gee, 1996, p.569).

¹³¹ (Mc Gee, 1996, p.576)

da primeira e da terceira destas críticas, pois a segunda diz respeito mais especificamente à caracterização feita por Mc Gee, e envolveria uma investigação de teorias que ultrapassam os limites do presente trabalho. A seguir os enunciados de Feferman:

- (1) A tese assimila a lógica à matemática, mais especificamente à teoria de conjuntos.
- (3) Nenhuma explicação natural é dada acerca do que constitui a *mesma* operação lógica sobre domínios básicos arbitrários ¹³².

Segundo Feferman, o valor atribuído a (1) irá depender, em primeira instância, de considerarmos razoável ou não a assimilação da lógica à matemática. Entretanto, para avaliarmos esta crítica adequadamente, é necessário introduzirmos algumas diferenciações importantes. Na construção de Sher, por exemplo, a assimilação da lógica à matemática é explícita, visto que, de acordo com a autora, “os termos lógicos são formais no sentido de serem essencialmente matemáticos”. Não obstante, devemos notar que esta construção é conjunto-teoreticamente restritiva, pois de acordo com sua condição (A), os termos lógicos são, sintaticamente, predicados ou relações n -árias de no máximo 2ª ordem, enquanto o percurso de valores das variáveis ligadas do sistema é composto apenas por indivíduos. Já na formulação que encontramos em (86), as quantificações de ordem superior são aceitas em princípio, pois Tarski não faz restrições quanto à ordem dos objetos que podem ser valores das variáveis da linguagem, além do que, de acordo com sua concepção, todos os objetos invariantes em qualquer nível da hierarquia de tipos podem ser denotados por termos lógicos.

O ponto digno de nota com relação às duas concepções mencionadas no parágrafo anterior, é que independentemente de suas diferenças, a elas se aplica a seguinte observação de Feferman: “(...) na medida em que uma ou outra versão da tese requer a existência de entidades conjunto-teoréticas de uma certa espécie, ou ao menos de suas propriedades determinadas, é evidente que desse modo nós transcendemos a lógica como a arena das noções universais independentes do

¹³² (Feferman, 1999, p.41)

‘que existe’”¹³³. É necessário investigarmos como as diferenças entre as duas versões mencionadas irão repercutir sobre esta observação. No que se segue, avaliarei como podemos compreender estas questões de existência de acordo com Sher, com base em suas considerações a respeito, e também do ponto de vista de Tarski, a partir da compreensão alcançada no capítulo anterior.

Começemos pela versão de Sher. O ponto de vista da autora acerca das relações entre lógica e realidade nos é ilustrado por sua descrição do contraste existente entre a “semântica tarskiana” e a semântica interpretacional¹³⁴. Segundo Sher, as definições da semântica interpretacional são tentativas de explicar os conceitos semânticos em termos puramente sintáticos, sem que haja necessidade de nos referirmos ao ‘mundo’¹³⁵. A “semântica tarskiana”, por outro lado, como uma teoria que trata das relações entre a linguagem e o mundo, depende de uma caracterização prévia da estrutura da realidade em seu aspecto formal e necessário, que é o aspecto matemático. Em termos práticos, isto significa que a semântica tarskiana depende, para seu desenvolvimento, de uma teoria matemática subjacente que nos permita representar *todos os estados de coisas formalmente possíveis da realidade*. Mas que teoria seria essa?

Com base na caracterização das constantes lógicas que encontramos em (Sher, 1991), podemos dizer que a teoria referida por Sher é uma teoria de conjuntos do tipo *Zermelo-Fraenkel*. Aqui começamos a compreender o sentido da observação de Feferman: se a característica básica da lógica é uma ausência de compromissos com a espécie de objetos que há no mundo, então a semântica da lógica não pode estar comprometida com entidades cuja existência é determinada por uma certa teoria, como, por exemplo, uma teoria de conjuntos de 1ª ordem. Pensemos, por exemplo, no sistema de *ZF*. Se essa teoria determina a existência de certas entidades básicas que compõem a realidade, que são os *Ur-elements*, e uma vez que a “semântica tarskiana” de Sher a adota como teoria subjacente, então a caracterização das constantes lógicas feitas por tal semântica depende de que a estrutura da realidade esteja composta por certos objetos específicos, no nosso caso, os objetos determinados pelos axiomas de *ZF*. Considerando esse

¹³³ (Feferman, 1999, p.42)

¹³⁴ Ver (Sher, 1991, pp.138-139).

¹³⁵ Já vimos as limitações desse tipo de explicação com respeito à definição substitucional do conceito de consequência lógica, quando mostrei em 2.3 que Tarski rejeita a condição (F), por considerá-la insuficiente.

estado de coisas, podemos dizer que o cerne da crítica de Feferman quanto à questão da assimilação da lógica à teoria de conjuntos, é que neste caso as definições dos conceitos de constante lógica e forma lógica, sobre os quais estão calcados todos os outros conceitos lógicos, são relativas à existência das entidades determinadas pelos axiomas da teoria subjacente. O ponto importante aqui é que fica bastante difícil, parece mesmo que impossível, coadunar esta concepção com a idéia da universalidade da lógica.

A posição de Sher quanto a essa questão da universalidade da lógica não é muito clara, de modo que não é possível darmos uma resposta conclusiva. Vejamos as suas próprias declarações. No Prefácio de seu livro, lemos o seguinte: “A lógica fornece uma estrutura especial para formalizar teorias, uma estrutura que extrai suas conseqüências necessárias e formais. Toda conseqüência necessária e formal é identificada por alguma lógica, e somente conseqüências necessárias e formais passam no teste de logicalidade”¹³⁶. De acordo com a concepção expressa nesta citação, a lógica está dividida em diversos sistemas formais, cada um dos quais nos permite extrair uma série de conseqüências formais e necessárias. As conseqüências que podem ser extraídas de um determinado sistema formal são relativas às constantes lógicas que definimos em princípio para este sistema.

Isto implica que não há uma “lógica”, como um sistema de símbolos, capaz de codificar todas as inferências formais. A universalidade seria então alcançada na metateoria, assumido o pressuposto de que a teoria subjacente seja capaz de nos fornecer uma representação de todas as conseqüências necessárias e formais. É fácil percebermos que se a representação em questão é fornecida por uma teoria matemática, então as “conseqüências necessárias e formais” são simplesmente identificadas com verdades matemáticas. Sob este aspecto, o fato de a espécie de entidades que aceitamos como componentes dos estados de coisas possíveis na realidade ser determinado pelos axiomas de uma teoria particular parece adquirir uma importância secundária. Sher ressalta em algumas passagens, que embora a metateoria seja usualmente constituída por um fragmento da linguagem natural acrescido de uma teoria de conjuntos standard, a incorporação desta teoria de conjuntos não é essencial ao empreendimento lógico, pois “nós

¹³⁶ (Sher, 1991, p.xiii)

poderíamos contemplar uma linguagem subjacente diferente daquela correntemente usada”¹³⁷, ou seja, qualquer teoria matemática capaz de representar todas as conseqüências necessárias e formais (todos os estados de coisas formalmente possíveis), irá servir ao propósito da semântica da lógica.

Tendo em vista o que foi exposto, podemos concluir que Sher se desvia das questões relacionadas a problemas ontológicos, substituindo-as por questões de ordem pragmática¹³⁸. Uma vez que os nossos recursos metamatemáticos nos permitam identificar todos os estados de coisas formalmente possíveis, podemos obter definições materialmente adequadas dos conceitos lógico-semânticos. Mas aqui podemos perguntar: há uma teoria matemática cujo poder representacional nos permita atingir esse objetivo? Em particular, a teoria de conjuntos standard de 1ª ordem adotada por Sher cumpre este papel? Sher não entra em detalhes sobre essas questões, deixando-as em aberto, como nos mostram as seguintes indagações:

Os fundamentos da semântica tarskiana penetram profundamente na metafísica, mas a ligação entre os modelos e a realidade podem ter algumas articulações fracas. Em particular, Tarski nunca mostrou que as estruturas conjunto-teoréticas que compõem os modelos constituem representações adequadas de todos os estados de coisas (formalmente) possíveis. Esta discussão está além do escopo do presente livro, mas duas questões que podem surgir são as seguintes: é formalmente necessário que a realidade consista de objetos contáveis e discretos do tipo que pode ser representado pelos *Ur-elements* (ou outros constituintes) de uma teoria de conjuntos standard? A descrição modelo-teorética de todos os estados de coisas possíveis tem parâmetros suficientes para representar todos os aspectos relevantes das situações possíveis (relevantes, quer dizer, para identificar todas as conseqüências formalmente necessárias)? Estas e questões similares se encontram na base dos modelos não-standard para a física, a lógica probabilística e, se colocamos de lado a formalidade, as teorias do discurso, tais como a ‘semântica situacional’¹³⁹.

Esta citação nos mostra que não é possível, com base na caracterização dos termos lógicos oferecida por Sher, dar uma resposta direta à crítica (1). O ponto de vista negativo de Feferman quanto à assimilação da lógica à matemática tem em princípio um cunho filosófico, mas repercute igualmente sobre questões de ordem prática. Vimos como Sher se desvia de questões relacionadas à espécie de objetos que compõem a realidade por meio de dois expedientes. Em primeiro

¹³⁷ (Sher, 1991, p.53)

¹³⁸ Sobre a perspectiva pragmática adotada por Sher ver (Sher, 1991, p.36).

¹³⁹ (Sher, 1991, p.139)

lugar, ela argumenta que a incorporação de uma teoria de conjuntos standard não é essencial ou necessária para a caracterização metateórica dos termos lógicos. Neste ponto, e aqui entra o segundo expediente mencionado, poderíamos rebater a crítica de Feferman com uma resposta pragmática: qualquer teoria poderosa o bastante para representar todos os estados de coisas formalmente possíveis serve aos propósitos da semântica lógica. Mas neste caso ainda seria preciso responder se a teoria que subjaz à descrição modelo-teorética nos fornece parâmetros suficientes para representar todos os aspectos formais da realidade. Como Vimos, Sher não responde a essa questão ¹⁴⁰, de maneira que fica difícil avançarmos mais na discussão sobre o assunto. Me limitarei a observar que, não obstante os méritos que possa ter a expansão dos termos lógicos para a lógica de 1ª ordem promovida por Sher, a primeira objeção de Feferman nos revela, de fato, um aspecto problemático desta teoria. Vejamos agora como a objeção em questão repercute sobre a formulação de Tarski.

Sabemos que o sentido da solução para o problema da demarcação que encontramos em (86) só pode ser compreendido se levarmos em conta que esta solução é o corolário de um amplo projeto, cujas raízes já se encontram nos artigos escritos por Tarski na década de 30 do século passado. A tentativa tarskiana de unificação das ciências dedutivas por meio de definições teóricas gerais dos conceitos lógicos fundamentais está intimamente conectada ao intenso desenvolvimento na área de teoria de conjuntos, a partir da descoberta das antinomias e dos resultados de Gödel. Concretamente, o alcance das definições semânticas depende do estágio de desenvolvimento das pesquisas fundacionais, bem como do aprimoramento das teorias matemáticas existentes. Devemos notar, todavia, que em seus escritos de caráter mais filosófico, Tarski faz grandes prospecções sobre os rumos que as pesquisas devem tomar, em vista de seu objetivo principal. Neste sentido, a parte final de (36) é bastante ilustrativa, assim como a quarta seção de (86). É sob esta perspectiva que procurarei analisar os efeitos da objeção (1) de Feferman sobre o critério de demarcação de Tarski.

No capítulo anterior, procurei ressaltar que há em (86) duas acepções distintas sob as quais podemos tomar a expressão ‘teoria de conjuntos’. De um

¹⁴⁰ Caso fosse demonstrada a possibilidade de representarmos modelo-teoreticamente todos os aspectos formais da realidade, e que existe mais de uma metamatemática capaz de satisfazer esta condição, deveríamos ainda explicar abstratamente as relações entre as teorias matemáticas capazes de fornecer tal representação.

determinado ponto de vista, várias formulações concretas distintas podem ser qualificadas como teoria de conjuntos. Por outro lado, a expressão é tomada numa acepção bastante vaga e geral, que é num certo sentido independente das teorias concretas em desenvolvimento ¹⁴¹. É importante que mantenhamos esta distinção em mente, pois ela desempenha um papel central na articulação que irá se seguir. A bem da organização, dividirei a discussão de (1) em dois pontos principais. Em primeiro lugar, podemos considerar a questão da assimilação da lógica à matemática, para depois analisarmos o que parece ser sua consequência imediata, que é a questão acerca de qual espécie de entidades existem.

Um ponto bastante interessante pelo qual podemos começar, é a discussão levantada por Feferman sobre a relevância do critério de Tarski para o programa logicista. O ponto de partida de Feferman é aquela passagem de (86) em que Tarski considera, à luz do seu critério de demarcação, o problema de saber se as formas lógicas são formas matemáticas. Como apontei anteriormente, Tarski não via a possibilidade de se chegar a uma resposta definitiva, em razão das diferenças nos métodos de construção da teoria de conjuntos. O problema é que uma vez assentada a afirmação de que “a tese de Tarski assimila a lógica a uma parte substancial da matemática conjunto-teorética”, parece haver uma circularidade envolvida na questão de saber se as formas matemáticas são formas lógicas ¹⁴².

Analisemos de perto a acusação de circularidade feita por Feferman, seguindo os passos da argumentação de Tarski. Num primeiro momento, Tarski coloca a questão da redução da matemática à lógica, especificando então o problema de que irá se ocupar: ele quer saber se as noções ou formas matemáticas são noções ou formas lógicas, e não se verdades matemáticas são verdades lógicas. Em seguida, encontramos a afirmação de que “é bem sabido que o todo da matemática pode ser desenvolvido na teoria de conjuntos”, de modo que a questão se resume a sabermos se as noções conjunto-teoréticas são lógicas. A

¹⁴¹ Com efeito, numa nota editorial, Corcoran ressalta a diferença entre as duas acepções aqui mencionadas. Nas palavras de Corcoran:

“Tarski está usando o termo ‘teoria de conjuntos’ aqui num sentido vago e geral, no qual as diversas teorias concretas podem ser todas qualificadas como teoria de conjuntos. Em particular, a teoria dos tipos de Withehead e Russell, e a teoria de (1ª ordem) de Zermelo-Fraenkel, são ambas qualificadas como teoria de conjuntos. É importante notar aqui que Tarski considerava a variedade corrente das ‘teorias de conjunto’ apenas como um pequeno exemplo do que pode ser desenvolvido neste campo”. (Tarski, 1986, p.151, n. 9).

¹⁴² (Feferman, 1999, p.48)

partir daí, Tarski passa a considerar duas respostas contraditórias, advindas dos métodos de construção de *ZF* e dos *Principia*.

Para compreendermos se há ou não uma circularidade envolvida na questão colocada por Tarski, devemos nos voltar mais uma vez para o seu ideal de unificação das ciências dedutivas. Em termos práticos, este ideal importa em ver as teorias formais, incluindo os sistemas de lógica, como teorias matemáticas, que em conjunto devem compor um bloco único capaz de descrever e sistematizar uma estrutura fixa. Podemos, em princípio, identificar essa estrutura com aquela noção geral e vaga de teoria de conjuntos que mencionei acima, que não é identificada com as diversas formulações concretas desta teoria. Penso que é com esta noção vaga e geral em mente que Tarski formula sua caracterização das formas lógicas.

Desconsiderando as possíveis controvérsias quanto ao aspecto ontológico da caracterização tarskiana das formas lógicas, podemos dizer que esta caracterização parece pressupor uma certa intuição acerca da estrutura da realidade, e que tal estrutura é uma espécie de princípio guia para o que pode ser desenvolvido no campo das pesquisas lógico-matemáticas. Para respondermos se as formas matemáticas são formas lógicas, seria preciso termos uma teoria de conjuntos unificada e plenamente desenvolvida. Mas o fato é que há dois métodos distintos que nos fornecem respostas incompatíveis, o que significa que ainda não há uma resposta. Não vejo como essa questão envolveria uma circularidade.

Com base nas distinções que acabamos de fazer, podemos dizer que a tese de Tarski realmente assimila a lógica à matemática ou, se quisermos ser mais precisos, que ela não estabelece uma distinção essencial entre as duas disciplinas, com a ressalva de que a ‘teoria de conjuntos’ considerada aqui não se confunde com nenhuma de suas formulações concretas. Neste sentido, a objeção de Feferman nos revela o aspecto vago da posição filosófica de Tarski quanto ao caráter da lógica, embora deva ser observado que esta vagueza é o resultado de uma perspectiva de universalidade que se depara com as dificuldades decorrentes do estágio de desenvolvimento das teorias atuais.

A questão acerca da ‘espécie de entidades que existem’, de acordo com o critério de demarcação de (86), esbarra em dificuldades similares àquelas apontadas no parágrafo anterior, além do que, como salientei no capítulo anterior, Tarski parece tratar essa questão sob um ponto de vista pragmático. Todos os

problemas que o autor se propôs a resolver, como o da validade das ω -inferências, e da necessidade de uma explicação das formas lógicas em termos não relativos, estabelecem a exigência de que a realidade esteja configurada de um certo modo específico. A posição negativa de Feferman, porém, reflete antes de tudo sua rejeição à idéia de uma lógica de ordem superior, tendência natural em um autor que tem “sido levado cada vez mais à posição de que a lógica de predicados de 1^a ordem em sua forma clássica tem um papel privilegiado no nosso pensamento”¹⁴³.

A posição de Feferman quanto ao status da lógica de predicados de 1^a ordem, somada à concepção de teoria de modelos com domínios variáveis, foram os fatores que o levaram a formular a objeção (3), que ele considera a mais forte de suas objeções. Tendo em vista a interpretação que fizemos do critério formulado em (86), pode-se dizer que exigência de que as constantes lógicas tenham o mesmo significado, independente do domínio de indivíduos sobre os quais elas são aplicadas, é incompatível com o critério de Tarski em sua forma original. Isto acontece, antes de tudo, porque no entender de Feferman, as quantificações de ordem superior não pertencem ao domínio da lógica. Em segundo lugar, mesmo que considerássemos apenas as constantes lógicas do cálculo de predicados de 1^a ordem, não há como exigir que estas tenham o mesmo significado sob permutações através dos domínios, simplesmente porque não há variações de domínios. As constantes lógicas se referem a formas fixas, identificadas com conjuntos ou classes de uma cardinalidade determinada.

Quanto ao efeito de (3) sobre a tese de Sher, é evidente que esta objeção revela um problema, desde que queiramos manter a posição de que a lógica (de 1^a ordem) é a “arena das noções universais independentes do que existe”. Como vimos, tal não é a perspectiva de Sher, uma vez que ela reconhece prontamente a relatividade das constantes lógicas em seu sistema à cardinalidade dos domínios. Assim é que um quantificador universal para um domínio de dez elementos é um

¹⁴³ Há várias passagens nas quais Feferman manifesta o seu repúdio à lógica de ordem superior, como nas declarações que se seguem:

“Eu também concordo com Quine [quando ele diz que] as quantificações de 2^a ordem e de ordem superior ultrapassam os limites da lógica. Ele as considera (famosamente) como exemplos de ‘teoria de conjuntos em pele de cordeiro’ e é certamente verdadeiro que a compreensão do significado de tais quantificadores depende de quais conjuntos existem ou, alternativamente – se tais quantificadores são considerados como ligando variáveis predicativas – de quais predicados existem”. (Feferman, 1999 p.52).

10-operator, para um domínio de 20 indivíduos é um *20-operator*, e assim por diante. Em favor de Sher, um partidário da teoria de modelos standard poderia perguntar: qual a outra alternativa?

No artigo aqui em discussão, Feferman reconhece este problema, propondo que “se existe uma explicação da noção de operação lógica em termos semânticos, ela tem de ser uma que mostre por qual maneira uma operação se comporta quando aplicada a um domínio M_0 [de indivíduos] se conecta naturalmente com a maneira como ela se comporta sobre qualquer outro domínio M_0' .” (Feferman, 1999, pp.42-43). Com base nesta exigência, Feferman sugere a noção de invariância sob todos os homomorfismos como distintivo de logicalidade, que exclui o que ele considera os problemas dos critérios de Tarski e Sher. De acordo com este novo critério, todos os quantificadores cardinais que envolvem um número incontável de indivíduos, assim como as quantificações de 2ª ordem em diante, pertencem à teoria de conjuntos, e não à lógica. A invariância sob homomorfismos exclui da mesma forma a relação de identidade como uma noção lógica. Os detalhes do critério de Feferman dão ensejo a uma outra discussão, que não será feita aqui. Numa primeira aproximação, entretanto, poderíamos nos indagar se a adoção de um critério que exclui a identidade como uma noção lógica não seria um preço muito alto a pagar para manter o ponto de vista de que a única lógica genuína é a lógica de 1ª ordem.

Encerro a presente seção com algumas observações. A primeira observação diz respeito à dificuldade que encontramos em confrontar as objeções de Feferman, a partir do significado que elas têm em seu próprio contexto, com a interpretação que fizemos do critério original de Tarski no capítulo anterior. Isto porque estas objeções, em vários aspectos, são direcionadas mais propriamente à tese de Sher, ampliada pelo trabalho de Mc Gee, fundida sob a designação de “tese Tarski-Sher”. O critério de invariância sob todas as transformações é bastante modificado quando incorporado à teoria de modelos standard atual. Em segundo lugar, as idéias de Tarski sobre definições de conceitos para a lógica como um todo adquirem muitas vezes um caráter difuso. Um exemplo disso é a possibilidade de definir o conceito de verdade para a teoria geral de classes considerada no pós-escrito de (33), onde a teoria das categorias semânticas é abandonada por meio da incorporação de níveis transfinitos na metateoria. A exposição ali contida tem o caráter de um esboço e os detalhes não são

considerados. Por fim, como procurei apontar algumas vezes, as idéias filosóficas de Tarski tem o caráter de previsões ou objetivos a serem alcançados, de modo que sua avaliação depende principalmente dos progressos técnicos a serem desenvolvidos em lógica e matemática.