

3

Distribuição das variáveis externas (granulares)

Nosso objetivo é encontrar, a partir da equação (2.28), uma equação para a derivada em relação ao tempo da função distribuição das variáveis externas que definimos como

$$W(X_T, t) = \int dx'_I \rho(X'_I, X_T, t). \quad (3.1)$$

3.1 Equação de Fokker-Plank

Uma equação diferencial para uma função de probabilidade em primeira ordem em relação ao tempo e em segunda ordem das derivadas parciais em relação as variáveis estocásticas é o que se conhece como equação de Fokker-Plank.

Uma equação diferencial exata, que envolve infinitos termos, em todas as ordens das derivadas parciais em relação as variáveis estocásticas é conhecida como a equação de Kramers-Moyal. Em geral, para poder trabalhar com uma equação diferencial, a série de Kramers-Moyal é truncada em alguma ordem e como o teorema de Pawula²⁴ diz que ordens maiores do que dois podem ter como solução uma função de probabilidade que apresente valores negativos, o truncamento deve ser feito na segunda ordem, gerando assim, uma equação de Fokker-Plank.

No presente capítulo geraremos uma equação de Fokker-Plank para a função distribuição definida acima.

3.2 Eliminação de variáveis rápidas

A equação exata (2.28), não é manejável e só pode ser tratada eliminando-se os graus de liberdade microscópicos (rápidos) através de um processo de tomada de médias²⁵. Desta maneira, nosso objetivo é encontrar uma equação efetiva para a distribuição granular reduzida, definida acima.

O método que vamos usar é o método da eliminação das variáveis rápidas. Ou seja procuraremos uma equação para as variáveis lentas corrigidas pela influência que as variáveis rápidas produzem no sistema^{26,25}. A idéia é

estimar um parâmetro pequeno que surja naturalmente e estabeleça as diferenças das escalas de tempo no sistema. Nos modelos prévios para sistemas granulares, este papel foi desenvolvido pela razão entre a massa das partículas atômicas e a massa do grão¹, $\varepsilon = \sqrt{\mu/m}$, o que reflete o grande número de átomos que constituem o grão. No obstante, em um estado estacionário granular, o parâmetro ε tem que ser modificado para poder levar em conta o fato de a temperatura granular

$$T_g \equiv \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{3m} \right\rangle$$

obedecer a $T_g \gg k_B T$. Já que

$$\frac{P^2}{m} \sim m v_g^2 \sim T_g, \quad \text{e} \quad \frac{\pi^2}{\mu} \sim \mu \dot{\xi}^2 \sim k_B T,$$

o parâmetro

$$\varepsilon \sim v_g / \dot{\xi} \sim \sqrt{\frac{\mu}{m} \frac{T_g}{k_B T}}$$

fixa a separação da escala de tempo no gás granular. Um valor típico para este parâmetro é da ordem de 10^{-3} enquanto em modelos prévios¹ este era da ordem de 10^{-9} .

3.3 Aplicação do método

Começamos escrevendo a equação (2.28) com o parâmetro ε que servirá para identificar a parte lenta e a rápida desta equação.

$$\partial_t \rho = L^{(0)} \rho + \varepsilon L^{(1)} \rho, \quad (3.2)$$

onde, usando (2.6)

$$L^{(0)} = L_I + \nabla_{\varepsilon N} \phi \cdot \nabla_{\pi N} \quad \text{e} \quad L^{(1)} = L_T + \nabla_{rN} \phi \cdot \nabla_{pN} + M_\zeta \nabla_{pN} \cdot \nabla_{pN}.$$

3.3.1 Operador de projeção

Conforme detalhado no apêndice, precisamos encontrar o operador de projeção $\mathcal{P}$ que satisfaça a condição (A.3). Podemos ver facilmente que o operador de projeção que satisfaz esta condição é um que atue numa variável dinâmica $g \equiv g(\chi_T, \chi_I, t)$ da seguinte maneira

$$\mathcal{P}g = \tilde{\rho}(r, \chi_I) \int d\chi'_I g(\chi_T, \chi'_I, t), \quad (3.3)$$

onde $\tilde{\rho}$ é uma função da forma

$$\tilde{\rho}(r, \chi_I) \equiv \frac{e^{-\beta(H_I + \phi)}}{\int d\chi_I e^{-\beta(H_I + \phi)}},$$

tal que

$$\int d\chi_I \tilde{\rho}(r, \chi_I) = 1;$$

Com ϕ dado por (2.4). As duas identidades

$$\int d\chi_I (\mathbf{L}_I + \nabla_{\xi^N} \phi \cdot \nabla_{\pi^N}) \equiv 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{L}_I + \nabla_{\xi^N} \phi \cdot \nabla_{\pi^N}) \tilde{\rho} = 0$$

garantem que a condição (A.3) seja satisfeita²⁶.

3.3.2 Obtenção da equação de Fokker-Planck

Vamos escrever a equação para as variáveis lentas (A.23). Calculamos cada termo do lado direito dessa equação. Lembremos que $y = \mathcal{P}\rho$ e que no presente caso $y = \tilde{\rho}(r, \chi_I)W(\chi_T, t)$, assim, temos a sequência:

Termo Ay

$$\begin{aligned} Ay &= \mathcal{P}L^{(1)}y \\ &= \tilde{\rho}(r, \chi_I) \int d\chi_I' (\mathbf{L}_T + \nabla_{r^N} \phi \cdot \nabla_{p^N} + M_\zeta \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) \tilde{\rho}(r, \chi_I') W(\chi_T, t) \\ &= \tilde{\rho}(r, \chi_I) (\mathbf{L}_T + \langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o \cdot \nabla_{p^N} + M_\zeta \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) W(\chi_T, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde

$$\langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o = \int d\chi_I \tilde{\rho} \nabla_{r^N} \phi.$$

Termo $BE^{-1}Cy$

Para calcular este termo fazemos primeiro agir C em y

$$\begin{aligned} Cy &= \mathcal{Q}L^{(1)}Py \\ &= \mathcal{Q}\{(\mathbf{L}_T + \nabla_{r^N} \phi \cdot \nabla_{p^N} + M_\zeta \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) \tilde{\rho}(r, \chi_I) W(\chi_T, t)\} \\ &= \mathcal{Q}\{\tilde{\rho}(r, \chi_I) \mathbf{L}_T W(\chi_T, t) + W(\chi_T, t) \mathbf{L}_T \tilde{\rho}(r, \chi_I) + \tilde{\rho}(r, \chi_I) \nabla_{r^N} \phi \cdot \nabla_{p^N} W(\chi_T, t) \\ &\quad + \tilde{\rho}(r, \chi_I) M_\zeta \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N} W(\chi_T, t)\}. \end{aligned}$$

Como o operador $\mathcal{Q}$ é linear, e por definição ele não age nas funções de variáveis externas, temos que

$$\begin{aligned} Cy &= \mathcal{Q}\{\tilde{\rho}(r, \chi_I)\} \{\mathbf{L}_T + M_\zeta \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}\} W(\chi_T, t) \\ &\quad W(\chi_T, t) \mathcal{Q}\{\mathbf{L}_T \tilde{\rho}(r, \chi_I)\} + \nabla_{p^N} W(\chi_T, t) \cdot \mathcal{Q}\{\tilde{\rho}(r, \chi_I) \nabla_{r^N} \phi\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima se cancela por causa da seguinte propriedade

$$\mathcal{Q}\{\tilde{\rho}(r, \chi_I)\} \equiv 0.$$

O segundo termo se pode simplificar assim:

$$\begin{aligned} W(\chi_T, t) \mathcal{Q}\{L_T \tilde{\rho}(r, \chi_I)\} &= W(\chi_T, t) \mathcal{Q}\left\{-\frac{p^N}{m} \cdot \nabla_{r^N} \tilde{\rho}(r, \chi_I)\right\} \\ &= W(\chi_T, t) \left\{-\frac{p^N}{m} \cdot \nabla_{r^N} \tilde{\rho}(r, \chi_I)\right\}. \end{aligned}$$

É fácil mostrar que

$$\nabla_{r^N} \tilde{\rho}(r, \chi_I) = -\beta \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi},$$

onde definimos

$$\widehat{\nabla_{r^N} \phi} \equiv \nabla_{r^N} \phi - \langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o. \quad (3.6)$$

Então temos que

$$W(\chi_T, t) \mathcal{Q}\{L_T \tilde{\rho}(r, \chi_I)\} = \beta W(\chi_T, t) \tilde{\rho}(r, \chi_I) \frac{p^N}{m} \cdot \widehat{\nabla_{r^N} \phi}.$$

Assim

$$Cy = \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \cdot \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t). \quad (3.7)$$

Vamos simplificar o operador B :

$$\begin{aligned} B &\equiv \mathcal{P} L^{(1)} \mathcal{Q} \\ &\equiv \tilde{\rho}(r, \chi_I) \int d\chi_I (L_T + \nabla_{r^N} \phi \cdot \nabla_{p^N} + \xi \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) \mathcal{Q} \\ &\equiv \tilde{\rho}(r, \chi_I) (L_T + \nabla_{r^N} \phi \cdot \nabla_{p^N}) \int d\chi_I \mathcal{Q} + \tilde{\rho}(r, \chi_I) \int d\chi_I \nabla_{r^N} \phi \cdot \nabla_{p^N} \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Como pode verificar-se a partir da definição do operador $\mathcal{Q}$

$$\int d\chi_I \mathcal{Q} \equiv 0.$$

Ao usarmos a definição (3.6) obtemos

$$B \equiv \tilde{\rho}(r, \chi_I) \int d\chi_I \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \cdot \nabla_{p^N} \mathcal{Q}. \quad (3.8)$$

Portanto

$$BE^{-1}Cy = \tilde{\rho}(r, \chi_I) \int d\chi_I \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \cdot \nabla_{p^N} \mathcal{Q} E^{-1} \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \cdot \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t). \quad (3.9)$$

O operador inverso de E pode ser escrito como

$$E^{-1} = - \int_0^\infty e^{\tau L^{(0)}} d\tau. \quad (3.10)$$

Notemos que a ação do operador $\mathcal{Q}$ sobre as potências de $L^{(0)}$ é

$$\mathcal{Q}\{L^{(0)}\}^k = \{L^{(0)}\}^k,$$

e também que

$$\int d\chi_I \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi} = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi} = \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi}.$$

Portanto ao inserir a equação (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} BE^{-1}Cy &= -\tilde{\rho}(r, \chi_I) \int_0^\infty d\tau \int d\chi_I \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \cdot \nabla_{p^N} e^{\tau L^{(0)}} \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \cdot \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t) \\ &= -\tilde{\rho}(r, \chi_I) \int_0^\infty d\tau \left\{ \int d\chi_I \widehat{\nabla_{r^N} \phi} e^{\tau L^{(0)}} \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \right\} : \nabla_{p^N} \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t), \end{aligned}$$

onde a expressão entre chaves é um produto interno. Então

$$BE^{-1}Cy = -\tilde{\rho}(r, \chi_I) \int_0^\infty d\tau \left\{ \int d\chi_I \tilde{\rho}(r, \chi_I) \widehat{\nabla_{r^N} \phi} e^{\tau L^{(0)\dagger}} \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \right\} : \nabla_{p^N} \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t). \quad (3.11)$$

Pode-se mostrar, integrando por partes, que

$$L^{0\dagger} = (L_I + \nabla_{\xi^N} \phi \cdot \nabla_{\pi^N})^\dagger = -(L_I + \nabla_{\xi^N} \phi \cdot \nabla_{\pi^N}).$$

Usando esta identidade e a definição de $\langle \dots \rangle_o$ temos

$$BE^{-1}Cy = -\tilde{\rho}(r, \chi_I) \int_0^\infty d\tau \langle \widehat{\nabla_{r^N} \phi} e^{-\tau L^{(0)}} \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \rangle_o : \nabla_{p^N} \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t). \quad (3.12)$$

Definindo o tensor

$$\Gamma(r^N) = \int_0^\infty d\tau \langle \widehat{\nabla_{r^N} \phi} e^{-\tau L^{(0)}} \widehat{\nabla_{r^N} \phi} \rangle_o, \quad (3.13)$$

obtemos finalmente

$$BE^{-1}Cy = -\tilde{\rho}(r, \chi_I) \Gamma(r^N) : \nabla_{p^N} \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t). \quad (3.14)$$

Equação de Fokker-Planck

A equação para a variável y que procuramos é, em primeira ordem em ε , na escala $s = \varepsilon t$, equação (A.22), a seguinte:

$$\begin{aligned} \partial_s y = & \tilde{\rho}(r, \chi_I) (\mathbf{L}_T + \langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o \cdot \nabla_{p^N} + M_\zeta \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) W(\chi_T, t) \\ & + \varepsilon \tilde{\rho}(r, \chi_I) \Gamma(r^N) : \nabla_{p^N} \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t), \end{aligned} \quad (3.15)$$

ao substituir y por $\tilde{\rho}(r, \chi_I) W(\chi_T, t)$ o fator $\tilde{\rho}(r, \chi_I)$ se cancela em ambos lados da equação. Na escala de tempo $t = \varepsilon^{-1} s$ temos

$$\begin{aligned} \partial_t W(\chi_T, t) = & \varepsilon (\mathbf{L}_T + \langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o \cdot \nabla_{p^N} + M_\zeta \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) W(\chi_T, t) \\ & + \varepsilon^2 \Gamma(r^N) : \nabla_{p^N} \left\{ \beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N} \right\} W(\chi_T, t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Esta é a equação de Fokker-Planck para a distribuição do sistema granular.

3.4 Coeficiente de dissipação

Vamos fazer algumas modificações na equação de Fokker-Planck para podê-la escrever em termos do coeficiente de dissipação que será definido nesta seção.

Escrevemos $\nabla \phi(r^N)$ em função de cada componente vetorial como

$$\nabla_{r_i} \phi = \sum_{k=1}^N \nabla_{r_i} \phi(r_{ik}),$$

para mostrar que

$$\int d\chi_I \tilde{\rho}(r, \chi_I) \nabla_{r_i} \phi = \sum_{k=1}^N \langle \nabla_{r_{ik}} \phi(r_{ik}) \rangle_o.$$

Como consequência disso

$$\widehat{\nabla_{r_i} \phi} = \sum_{k=1}^N \nabla_{r_{ik}} \widehat{\phi(r_{ik})}. \quad (3.17)$$

O termo de segunda ordem da equação de Fokker-Planck com os produtos internos escritos explicitamente é

$$\varepsilon^2 \sum_{ij} \int_0^\infty d\tau \Gamma(r_i, r_j, \tau) : \nabla_{p_j} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) W(\chi_T, t) \quad (3.18)$$

onde

$$\Gamma(r_i, r_j, \tau) = \langle \widehat{\nabla_{r_i} \phi} [e^{-\tau \mathbf{L}^{(0)}}] \widehat{\nabla_{r_j} \phi} \rangle_o. \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.17) obtemos

$$\varepsilon^2 \sum_{jk, il} \int_0^\infty d\tau \Gamma(r_{ik}, r_{jl}, \tau) : \nabla_{p_j} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) W(\chi_T, t), \quad (3.20)$$

onde

$$\Gamma(r_{ik}, r_{jl}, \tau) = \langle \widehat{\nabla_{r_{ik}} \phi} [e^{-\tau L^{(0)}}] \widehat{\nabla_{r_{jl}} \phi} \rangle_o. \quad (3.21)$$

Notemos que

$$\nabla_{r_{ij}} \phi = \phi'_{ij} \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|} = \phi'_{ij} \hat{r}_{ij}, \quad \text{onde} \quad \phi'_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial r_{ij}} \phi(r_{ij}, \xi_i, \xi_j). \quad (3.22)$$

Então

$$\nabla_{r_{ik}} \widehat{\phi}(r_{ik}) \equiv \widehat{\phi'_{ij}} \hat{r}_{ij}. \quad (3.23)$$

Como $L^{(0)} \equiv L_I + \nabla_{\xi N} \phi \cdot \nabla_{\pi N}$ só age nas variáveis internas podemos escrever

$$\varepsilon^2 \sum_{jk, il} \int_0^\infty d\tau \gamma(|r_{ik}|, |r_{jl}|, \tau) \hat{r}_{ik} \hat{r}_{jl} : \nabla_{p_j} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) W(\chi_T, t), \quad (3.24)$$

onde

$$\gamma(|r_{ik}|, |r_{jl}|, \tau) = \langle \widehat{\phi'_{ik}} [e^{-\tau L^{(0)}}] \widehat{\phi'_{jl}} \rangle_o. \quad (3.25)$$

Já que iremos trabalhar com **sistemas diluídos** supomos que há correlação somente entre ϕ'_{ik} de índices iguais, ou seja somando nos índices (j, l) e considerando os termos com $(j, l) = (i, k)$ e $(j, k) = (k, i)$ obtemos

$$\begin{aligned} &\approx \varepsilon^2 \sum_{ik} \int_0^\infty d\tau \gamma(|r_{ik}|, |r_{ik}|, \tau) \hat{r}_{ik} \hat{r}_{ik} : \nabla_{p_i} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) W(\chi_T, t) \\ &+ \varepsilon^2 \sum_{ik} \int_0^\infty d\tau \gamma(|r_{ik}|, |r_{ki}|, \tau) \hat{r}_{ik} \hat{r}_{ki} : \nabla_{p_k} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) W(\chi_T, t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Como

$$\widehat{\phi'_{ik}} = \widehat{\phi'_{ki}} \quad \text{e} \quad \hat{r}_{ki} = -\hat{r}_{ik},$$

fazendo

$$\gamma_{ik} = \int_0^\infty d\tau \gamma(|r_{ik}|, |r_{ki}|, \tau)$$

obtemos

$$\approx \varepsilon^2 \left\{ \sum_{ik} \gamma_{ik} \hat{r}_{ik} \hat{r}_{ik} : \nabla_{p_i} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) - \sum_{ik} \gamma_{ik} \hat{r}_{ik} \hat{r}_{ik} : \nabla_{p_k} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) \right\} W(\chi_T, t). \quad (3.27)$$

A função γ_{ik} é o coeficiente de atrito que aparece após a eliminação dos graus rápidos de liberdade: é o que resta da influência dos mesmos no movimento dos grãos. Permutando j por k na equação acima e lembrando que $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ e que $\phi'_{ki} = \phi'_{ik}$ e $\hat{r}_{ik} = -\hat{r}_{ki}$ obtemos

$$\approx \varepsilon^2 \left\{ \sum_{ik} \gamma_{ik} \hat{r}_{ik} \hat{r}_{ik} : \nabla_{p_k} (\nabla_{p_k} + \beta \frac{p_k}{m}) - \sum_{ik} \gamma_{ik} \hat{r}_{ik} \hat{r}_{ik} : \nabla_{p_i} (\nabla_{p_k} + \beta \frac{p_k}{m}) \right\} W(\chi_T, t). \quad (3.28)$$

Somamos (3.27) e (3.28) e dividimos por 2;

$$\approx \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{ik} \gamma_{ik} \hat{\mathbf{r}}_{ik} \hat{\mathbf{r}}_{ik} (\nabla_{p_i} - \nabla_{p_k}) \left\{ \nabla_{p_i} - \nabla_{p_k} + \beta \frac{p_i - p_k}{m} \right\} W(\chi_T, t). \quad (3.29)$$

Finalmente temos a equação de Fockker-Plank com alimentação de energia:

$$\begin{aligned} \partial_t W(\chi_T, t) = & \varepsilon (L_T + \langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o \cdot \nabla_{p^N} + M_\zeta \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) W(\chi_T, t) \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{ik} \gamma_{ik} \hat{\mathbf{r}}_{ik} \hat{\mathbf{r}}_{ik} : (\nabla_{p_i} - \nabla_{p_k}) \left\{ \nabla_{p_i} - \nabla_{p_k} + \beta \frac{p_i - p_k}{m} \right\} W(\chi_T, t). \end{aligned} \quad (3.30)$$

A equação acima representa a equação de movimento da função densidade de estados das partículas do sistema granular para o caso em que o sistema é diluído, com baixa densidade. Os dois primeiros termos no lado direito representam a um sistema livre com potencial efetivo $U + \omega$. O terceiro termo representa a alimentação de energia implementada ao sistema. O último termo no lado direito representa a dissipação de energia no sistema devida à transferência de energia dos graus de liberdade translacionais internos do sistema.

3.5 Energia cinética média por unidade de tempo

Usando a equação encontrada na seção anterior podemos calcular facilmente a variação da energia cinética no sistema

$$\begin{aligned} \partial_t \int d\chi_T \frac{p^{N^2}}{2m} W(\chi_T, t) = & \int d\chi_T \frac{p^N}{m} \cdot \nabla_{r^N} (U + \omega) W(\chi_T, t) + \frac{1}{2m} \sum_{ik} \int d\chi_T \gamma_{ik} W(\chi_T, t) \\ & - \frac{1}{2m} \sum_{ik} \int d\chi_T \gamma_{ik} \frac{\beta}{2m} [\hat{\mathbf{r}}_{ik} \cdot (p_i - p_k)]^2 W(\chi_T, t) + \frac{M_\zeta}{m}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde

$$\nabla_{r^N} \omega = \langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o. \quad (3.32)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima representa a média da força externa mais o força efetiva $\nabla_{r^N} \omega$ multiplicada pela velocidade da partícula. Em caso de esfriamento ($M_\zeta = 0$) este termo só se torna importante a medida de que as partículas param de interagir. No caso de alimentação externa ($M_\zeta > 0$) este termo pode considerar-se na média igual a zero.

O segundo termo e o terceiro podem ser comparados. O fator $\frac{\beta}{2m} [\hat{\mathbf{r}}_{ik} \cdot$

$(p_i - p_k)]^2 \sim T_g/k_B T \gg 1$ é muito grande quando o sistema constitui um gás granular inelástico.

Então podemos considerar este terceiro termo, negativo e muito maior em valor absoluto que o segundo, como o responsável pela dissipação da energia no sistema granular. Quando o mecanismo de alimentação de energia é acoplado gera-se o termo (M_ζ/m) que compensa esta perda de energia no sistema, ou seja, como o termo seguinte

$$\sum_{ik} \int d\chi_T \gamma_{ik} \frac{\beta}{2m} [\hat{\mathbf{r}}_{ik} \cdot (p_i - p_k)]^2 \sim \gamma \frac{T_g}{k_B T},$$

apresenta esta ordem de grandeza temos como condição para alcançar o estado estacionário que o termo M_ζ/m seja da mesma ordem de grandeza;

$$\gamma \frac{T_g}{k_B T} \sim \frac{M_\zeta}{m}. \quad (3.33)$$

No capítulo seguinte esta condição será imposta ao assinalar as ordens de grandeza aos termos que conformam as equações da hierarquia BBGKY obtida a partir da equação (3.30), com a finalidade de obter a equação de Boltzmann para o gás granular.