5
O Gás Granular livre

5.1 Estado de esfriamento Homogêneo - HCS

Ao desligar a fonte de energia, a temperatura granular tende a zero[4]. Em sistemas inicialmente homogêneos, tem sido encontradas distibuições não Gaussianas quando o sistema é considerado como tendo o coeficiente de restituição constante[30]. Contudo, esta aproximação se torna invalida quando instabilidades aparecem no sistema[31]. Como nosso modelo mostra um coeficiente de restituição que depende da velocidade, precisamos averiguar se estas instabilidades estão presentes a longo prazo ou se desaparecem como é o caso de sistemas com coeficiente de restituição que dependem do tempo[11].

5.1.1 Expansão por polinômios de Sonine

A equação (4.40) é o ponto de partida para a analise assimptótica. Expressamo-la em termos da velocidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\mathbf{v}_1) = \int d\mathbf{v}_2 d\Omega \mid \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \mid \sigma(\Omega)(f(\mathbf{v}_1')f(\mathbf{v}_2') - f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)) + \frac{\mathcal{A}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1}\Big(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} + \frac{\mathbf{v}_1}{k_B T}\Big)f(\mathbf{v}_1), \tag{5.1}$$

onde $M_\zeta = 0$.

Assumimos que a distribuição pode ser escalada[13] com a velocidade granular v_0 conforme à equação[14]

$$f(\mathbf{v}, t) = \frac{n}{v_0^3}\tilde{f}(\mathbf{c}, t) \tag{5.2}$$

onde

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \qquad n = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}, t), \qquad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma(\Omega)}{\sigma_0^2}, \tag{5.3}$$

e σ_0 é o diâmetro granular e $v_0 \equiv v_0(t)$ é dado por $T_g(t) = \frac{1}{2}mv_0^2(t)$.

Usando, a distribuição escalada (5.2) na equação (5.1) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f} = -\frac{1}{v_0^2}\frac{d v_0}{d t}\Big(3 + \mathbf{c}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}\Big)\tilde{f} + \frac{1}{v_0}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f} = \frac{\mu_2}{3}\Big(3 + \mathbf{c}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}\Big)\tilde{f} + \frac{1}{v_0}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f} = n\sigma_0^2 I(\tilde{f}, \tilde{f}), \tag{5.4}$$

onde

$$I(\tilde{f},\tilde{f}) = I_1(\tilde{f},\tilde{f}) + I_2(\tilde{f}),$$

e

$$I_1(\tilde{f},\tilde{f}) = \int d\mathbf{c}_2 d\Omega \mid \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \mid \tilde{\sigma}(\Omega)(\tilde{f}(\mathbf{c'}_1)\tilde{f}(\mathbf{c'}_2) - \tilde{f}(\mathbf{c}_1)\tilde{f}(\mathbf{c}_2)), \tag{5.5}$$

$$I_2(\tilde{f}) = \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1}\cdot\left[\frac{1}{mv_0}\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \frac{v_0 \mathbf{c}_1}{k_B T}\right]\tilde{f}(\mathbf{c}_1). \tag{5.6}$$

A função $\tilde{f}(c,t)$ será expandida por meio dos polinômios de Sonine (ver apêndice, seção A.2.3, equação A.44) até o coeficiente a_2:

$$\tilde{f}(c,t) \approx \phi(c)\left\{1 + a_2(t) S_2(c^2)\right\},$$

onde

$$\phi(c) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\, e^{-c^2}.$$

Passaremos a calcular os coeficientes

$$\mu_n = -\int d\mathbf{c}\, \mathbf{c}^n\, I(\tilde{f},\tilde{f}). \tag{5.7}$$

na seqüência.

Cálculo de μ_2

O termo $\tilde{I}_1(\tilde{f},\tilde{f})$ equivale à equação de Enskog-Boltzmann, para o caso elástico. Usamos, então, o resultado achado para a integral $\int d\mathbf{c}\, c^2\, I_1(\tilde{f},\tilde{f})$ na referência[11] com $\delta = 0$. Neste caso, o termo que corresponde a $I_1(\tilde{f},\tilde{f})$ no cálculo de μ_2 se cancela.

$$\int d\mathbf{c}\, c^2\, I_1(\tilde{f},\tilde{f}) = 0.$$

O segundo termo contribui para μ_2:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= -\int d\mathbf{c}\, c^2\, I_2 \\ &= -\frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\Big[\frac{1}{mv_0}\int d\mathbf{c} c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}\tilde{f}(\mathbf{c}) + \frac{v_0}{k_B T}\int d\mathbf{c} c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}}\cdot \mathbf{c}\tilde{f}(\mathbf{c})\Big].\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}\mu_2 &= -\frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\Big[\frac{6}{mv_0} - \frac{2v_0}{k_B T}\langle c^2\rangle\Big] \\ &= -\frac{3\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\Big[\frac{2}{mv_0} - \frac{v_0}{k_B T}\Big],\end{aligned} \tag{5.8}$$

onde usamos $\langle c^2\rangle = \frac{3}{2}$ (equação A.30).

Cálculo de μ_4

A partir da definição:

$$\mu_4 = -\int dc\, c^4\, \tilde{I}(\tilde{f},\tilde{f}) = -\int dc\, c^4 \left[\tilde{I}_1(\tilde{f},\tilde{f}) + \tilde{I}_2(\tilde{f})\right]. \tag{5.9}$$

O termo $\tilde{I}_1(\tilde{f},\tilde{f})$ equivale à equação de Enskog-Boltzmann, na referência[11], para o caso elástico. Usamos, então, o resultado achado para a integral $\int d\mathbf{c}\, c^4\, I_1(\tilde{f},\tilde{f})$ com $\delta = 0$ (caso elástico):

$$\int d\mathbf{c}\, c^4\, I_1(\tilde{f},\tilde{f}) = 4\sqrt{2\pi}\Big\{a_2 + \frac{1}{32}{a_2}^2\Big\}, \tag{5.10}$$

a segunda integral calculâmo-la diretamente para obter

$$\begin{aligned} -\int d\mathbf{c}\, c^4\, I_2(\tilde{f}) &= \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\Big[\frac{1}{mv_0}20\langle c^2\rangle - \frac{4}{k_B T}\langle c^4\rangle\Big] \\ &= \frac{15\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\Big[\frac{2}{mv_0}\langle c^2\rangle - (1+a_2)\frac{v_0}{k_B T}\Big]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Onde foi usada a igualdade

$$\langle c^4\rangle = \frac{15}{4}(1+a_2).$$

Assim o coeficiente μ_4 se escreve

$$\mu_4 = 4\sqrt{2\pi}\Big\{a_2 + \frac{1}{32}\,{a_2}^2\Big\} - \frac{15\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\Big[\frac{2}{mv_0} - (1+a_2)\frac{v_0}{k_B T}\Big]. \tag{5.12}$$

5.1.2 Comportamento a longo-prazo

A temperatura granular $T_g \equiv \frac{1}{2}\, m v_o^2(t)$ satisfaz[11] a equação (A.34) que com o coeficiente μ_2 calculado acima se escreve

$$\begin{aligned} \frac{dT_g}{dt} &= -\frac{2}{3}BT_g\mu_2 \\ &= \mathcal{A}\Big(\frac{2}{m} - \frac{v_0^2}{k_B T}\Big) \\ &= \frac{2\mathcal{A}}{m}\Big(1 - \frac{T_g}{k_B T}\Big), \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde $\mathcal{A} = \mathcal{C}\, {T_g}^{3/5}$ e $B = v_0(t) n \sigma_0^2$, equação (4.41).

Expressando a equação (5.13) em função da variável $u = T_g/T_{g_o}$, onde T_{g_o} é a temperatura granular inicial, obtemos

$$\frac{d}{dt}u = \frac{2\,\mathcal{C}}{T_{g_o}^{2/5}\, m}u^{3/5}\Big(1 - u\frac{T_{g_o}}{k_B T}\Big). \tag{5.14}$$

Dessa equação podemos ver que $k_B T/T_{g_o} < u < 1$ e dado que $T_{g_o}/k_B T \gg 1$ podemos aproximar a equação acima por

$$\frac{d}{dt}u = -\frac{2\,\mathcal{C}}{m}\frac{T_{g_o}^{3/5}}{k_B T}u^{8/5}. \tag{5.15}$$

A solução é dada por

$$u = (1 + \frac{t}{\tau_o})^{-5/3} \tag{5.16}$$

ou expressando-a como a velocidade média

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,T_{g_o}}{m}}\left(1 + \frac{t}{\tau_o}\right)^{-5/6} \tag{5.17}$$

onde

$$\tau_o = \frac{5mk_B T}{6\,\mathcal{C}\,T_{g_o}^{3/5}}.$$

Isto equivale à lei de Haff[4] para sistemas com coeficiente de restituição dependente da velocidade[20,22,23].

Vamos agora calcular o coeficiente a_2 a partir da equação diferencial (A.53) que deve ser satisfeita por este coeficiente. Então, usando os coeficientes μ_2 e μ_4 calculados acima, vemos que a dependência temporal de a_2 está dada por[11]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,a_2 &= \frac{4}{3}B\mu_2(1 + a_2) - \frac{4}{15}B\mu_4 \\
&= \frac{4}{3}nv_0\sigma_0^2\frac{3\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\Big[-\frac{2}{mv_0} + \frac{v_0}{k_B T}\Big](1 + a_2) \\
&\quad -\frac{4}{15}nv_0\sigma_0^2\left[4\sqrt{2\pi}\Big\{a_2 + \frac{1}{32}\,{a_2}^2\Big\} - \frac{15\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}\Big[\frac{2}{mv_0} - (1 + a_2)\frac{v_0}{k_B T}\Big]\right] \\
&= -\frac{16}{15}nv_0\sigma_0^2\sqrt{2\pi}\Big\{a_2 + \frac{1}{32}\,{a_2}^2\Big\} - \frac{8\mathcal{A}}{m^2 v_0^2}a_2.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

A equação acima, quando $\mathcal{A} = 0$, concorda com a equação (53) no artigo de referencia[11] que corresponde ao caso $\delta' = 0$. Escrevendo a equação 5.18 em função de u obtemos

$$\frac{d}{dt}\,a_2 + c_1 u^{-2/5}a_2 + c_2 u^{1/2}\Big\{a_2 + \frac{{a_2}^2}{32}\Big\} = 0, \tag{5.19}$$

onde

$$c_1 = \frac{4\mathcal{C}}{mT_{g_o}^{2/5}} \qquad \text{e} \qquad c_2 = \frac{32}{15}\,n\,\sigma_0^2\sqrt{\frac{2\pi\,T_{g_o}}{m}}.$$

A solução de esta equação é dada por

$$a_2(t) = \frac{a_2(0)\exp[-\int_0^t dt'(c_1 u^{-2/5} + c_2 u^{1/2})]}{1 + 1/32\, a_2(0)\, c_2 \int_0^t dt'\, u^{1/2} \exp[-\int_0^{t'} dt''\,(c_1 u^{-2/5} + c_2 u^{1/2})]}. \tag{5.20}$$

Podemos simplificar a equação acima notando que

$$\int_0^t u^{-2/5} dt = \int_0^t \frac{u^{-2/5}}{du/dt} du \ ,$$

e usando a equação (5.14)

$$\begin{aligned}\int_0^t u^{-2/5} dt &= \int_0^t \frac{u^{-2/5}}{(2\mathcal{C}/m)\, T_{g_o}^{-2/5} u^{3/5} (1 - u T_{g_o}/k_B T)} \\ &= \frac{m T_{g_o}^{2/5}}{2\mathcal{C}} \ln\Big[u \frac{1 - T_{g_o}/k_B T}{1 - u T_{g_o}/k_B T}\Big].\end{aligned} \tag{5.21}$$

Então temos que

$$\exp[-c_1 \int_0^t u^{-2/5} dt] = \Big[\frac{1 - u T_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\Big]^2.$$

Assim obtemos

$$a_2(t) = \frac{a_2(0) u^{-2} \Big[\frac{1 - u T_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\Big]^2 \exp[-\int_0^t dt'(c_2 u^{1/2})]}{1 + 1/32\, a_2(0)\, c_2 \int_0^t dt'\, u^{-3/2} \Big[\frac{1 - u T_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\Big]^2 \exp[-\int_0^{t'} dt''\,(c_2 u^{1/2})]}. \tag{5.22}$$

Como $\lim_{t\to\infty} u = k_B T/T_{g_o}$ temos que

$$\Rightarrow a_2(t \to \infty) \to 0.$$

O sistema mostra uma tendência, para grandes valores do tempo, a ter uma distribuição de velocidades Gaussiana a medida que este se torna mais elástico[11]. O estado de esfriamento para baixas densidades e baixa dissipação é assim bem descrito pela equação (5.22).

É fácil mostrar que o denominador da equação acima,

$$D = 1 + 1/32\, a_2(0)\, c_2 \int_0^t dt'\, u^{-3/2} \Big[\frac{1 - u T_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\Big]^2 \exp[-\int_0^{t'} dt''\,(c_2 u^{1/2})],$$

satisfaz as relações

$$1 \le D \le 1 + a_2/32 \qquad \text{para} \qquad a_2 > 0$$

e

$$1 + a_2/32 \leq D \leq 1 \qquad \text{para} \qquad a_2 < 0.$$

Como a_2 é um número pequeno temos que $D \approx 1$. Desta maneira

$$a_2(t) = a_2(0) u^{-2} \Big[\frac{1 - uT_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\Big]^2 \exp[-\int_0^t dt' c_2 u^{1/2}]. \tag{5.23}$$

Podemos ver que quando a_2 é positivo, $a_2(t)$ se mantém positivo e que quando a_2 é negativo, $a_2(t)$ se mantém negativo. Como $T_{g_o} \gg k_B T$ podemos fazer a aproximação

$$\int_0^t u^{1/2} dt \sim -\frac{k_B T m}{2T_{g_o}^{3/5}\mathcal{C}} \int_1^u \frac{ds}{s^{11/10}}$$
$$\sim \left(\frac{5k_B T}{\mathcal{C} T_{g_o}^{3/5}}\right)(s^{-1/10} - 1)$$

Devido a isto podemos escrever

$$a_2(t) \sim a_2(0)(k_B T/T_{g_o})^2 (1/u - T_{g_o}/k_B T)^2 \; e^{-b(u^{-1/10} - 1)} \tag{5.24}$$

onde

$$b = \frac{32 n m^{1/2} \sigma_0^2 k_B T}{3\mathcal{C} T_{g_o}^{1/10}}.$$

5.1.3 Análise da cauda da distribuição de velocidades para o estado de resfriamento homogêneo

Vamos estudar o comportamento da função distribuição de velocidades para $\mathbf{c}$ muito grande, ou seja, $\mathbf{c} \gg 1$. Partimos da equação (A.35)

$$\frac{\mu_2}{3}\left[3 + c \cdot \frac{\partial}{\partial c}\right] \tilde{f} + B^{-1}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \tilde{\mathrm{I}},$$

onde $I = I_1 + I_2$. Pode-se mostrar que[14](apêndice A.3)

$$I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) \approx -\pi \mathbf{c} \tilde{f}(\mathbf{c}, t). \tag{5.25}$$

Para poder determinar o comportamento dos outros termos da equação a grandes velocidades seguiremos o Ansatz abaixo sugerido por Pöschel[32], supondo uma superpopulação dos estados de alta velocidade:

$$f(c) \sim e^{-\varphi(t)\, C}. \tag{5.26}$$

Para I_2 notemos que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \tilde{f} = -\frac{2\varphi}{c}\tilde{f} + \varphi^2 \tilde{f},$$

e que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot (\mathbf{c}\tilde{f}) = 3\tilde{f} - \varphi c\tilde{f}.$$

Desta maneira o operador $I_2(\tilde{f})$ se escreve

$$I_2(\tilde{f}) = \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2}[\frac{-2\varphi}{mv_0}\frac{\tilde{f}}{c} + (\frac{\varphi^2}{mv_0} + \frac{3v_0}{k_B T})\tilde{f} - \frac{v_0\varphi}{k_B T}c\tilde{f}]$$

que para $c \gg 1$ se torna

$$I_2(\tilde{f}) \approx -\frac{\mathcal{A}\varphi}{nm\sigma_0^2 v_0 k_B T}c\tilde{f}$$

Por outro lado como

$$\frac{\partial}{\partial t} f = -\frac{d\varphi}{dt}\, c\, \tilde{f},$$

para $c \gg 1$ podemos escrever

$$\frac{\mu_2}{3}\left[3 + c \cdot \frac{\partial}{\partial c}\right]\tilde{f} + B^{-1}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \approx \frac{\mu_2}{3}(-\varphi c\tilde{f}) + B^{-1}(-\dot{\varphi}c\tilde{f}).$$

Portanto a equação (A.35) para $c \gg 1$ e para o Ansatz (5.26) se torna

$$\dot{\varphi} + \left[\frac{\mu_2}{3} - \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 k_B T v_0}\right]B\varphi = \pi B. \tag{5.27}$$

Substituindo a expressão achada para μ_2 e expressando B em função da temperatura granular obtemos a equação

$$\dot{\varphi} - \left(\frac{\mathcal{C}}{m}\, T_g^{-2/5}\right)\varphi = \left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} n\sigma_0^2 \pi T_g^{1/2} \tag{5.28}$$

cuja solução é

$$\varphi(t) = \left[\varphi(0) + (\frac{2}{m})^{1/2}\sigma_0^2 n\pi \int_0^t dt'\, T_g^{1/2} e^{-\frac{\mathcal{C}}{m}\int_0^{t'} T_g^{-2/5} dt''}\right] e^{\frac{\mathcal{C}}{m}\int_0^t T_g^{-2/5} dt'}. \tag{5.29}$$

Podemos simplificar esta equação notando que de acordo com a equação (5.21) para $T_{g_o} \gg k_B T$ obtemos

$$\int_0^t T_g^{-2/5} dt' = \frac{m}{2\mathcal{C}}\ \ln|\frac{T_g}{k_B T - T_g}|.$$

Assim, ao substituir este resultado na equação para φ encontramos

$$\varphi(t) = \left[\varphi(0) + (\frac{2}{m})^{1/2}\sigma_0^2 n\pi \int_0^t dt'\, (T_g - k_B T)^{1/2}\right]\left(\frac{T_g}{T_g - k_B T}\right)^{1/2}. \tag{5.30}$$

Para valores de t tal que $T_g \gg k_B T$ a equação acima se pode aproximar a

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{10\sigma_0^2 n\pi k_B T}{\mathcal{C}}(\frac{m}{2})^{1/2}[T_g^{-1/10} - T_{g_o}^{-1/10}]. \tag{5.31}$$

Substituindo a dependência temporal de T_g dada pela equação (5.17) encontramos

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{10\sigma_0^2 n\pi k_{_B}{}^T}{\mathcal{C}}\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} T_{g_o}^{-1/10}\left[\left(1+\frac{t}{\tau_0}\right)^{1/6} - 1\right]. \tag{5.32}$$

Esta equação compara-se com a equação (85) na referência[11].