

Capítulo 4

Lógica de Filtros

No capítulo anterior vimos a lógica de ultrafiltros, para a qual o sistema obtido em dedução natural é correto, completo e normalizável. Veremos agora a lógica de filtros, que pode ser encarada como uma variação da lógica de ultrafiltros. A diferença é que filtros não são maximais, ou seja, podemos ter um conjunto B tal que nem B nem seu complemento \bar{B} pertencem à família \mathcal{F} .

No decorrer desse capítulo tentaremos fazer referência ao capítulo anterior sempre que possível, pois esses dois capítulos têm muitas semelhanças.

4.1 Axiomatização

A axiomatização usada para lógica de ultrafiltros é a seguinte (além da axiomatização clássica para lógica de 1ª ordem):

$$\nabla x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$$

$$\neg\nabla x\varphi \rightarrow \nabla x\neg\varphi$$

$$\nabla x\varphi \wedge \nabla x\psi \rightarrow \nabla x(\varphi \wedge \psi)$$

$$\nabla x\varphi \rightarrow \nabla y\varphi[x \leftarrow y], y \notin VAR(\varphi)$$

com a generalização desses axiomas.

Em função dos axiomas (dentre esses quatro) que preservarmos, teremos uma lógica diferente. Temos assim uma família de lógicas relacionadas. No artigo [Veloso2002] temos um tratamento sistemático dessas variações.

A axiomatização da lógica de filtros é obtida eliminando o segundo axioma e introduzindo dois outros. Assim, uma axiomatização correta e completa para lógica de filtros é obtida juntando uma axiomatização para lógica de 1ª ordem aos axiomas seguintes ([Veloso2002]):

$$\forall x\varphi \rightarrow \nabla x\varphi$$

$$\nabla x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$$

$$\nabla x\varphi \wedge \nabla x\psi \rightarrow \nabla x(\varphi \wedge \psi)$$

$$\nabla x\varphi \rightarrow \nabla y\varphi[x \leftarrow y], y \notin VAR(\varphi)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\nabla x\varphi \rightarrow \nabla x\psi)$$

4.2 Sintaxe e Semântica

A sintaxe da lógica de filtros é a mesma que a da lógica de ultrafiltros. Quanto à semântica, é quase a mesma, bastando mudar toda referência a ultrafiltro para uma referência a filtro. Assim, em resumo,

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \models \nabla x\varphi \text{ sse a extensão de } \varphi(x) \text{ pertence a } \mathcal{F}.$$

onde \mathcal{F} é um filtro definido sobre A (universo da estrutura \mathfrak{A}).

A estrutura dos rótulos é exatamente a mesma dos rótulos usados para a lógica de ultrafiltros.

4.3 Regras

Como comentado anteriormente, filtros não são maximais. Por este motivo, a regra do absurdo tal como ela existe em \mathcal{NUL} deixa de ser correta. Pois $[\neg\nabla x\varphi]$ não implica em $[\nabla x\neg\varphi]$.

Dessa forma tivemos que acrescentar uma restrição à regra do absurdo (regra 14), que se tornou:

$$\frac{[\neg\varphi^{<u>}] \quad \dots \quad \perp}{\varphi^{<u>} \perp}$$

com a restrição: onde $< u >$ contém apenas variáveis não marcadas.

Por outro lado, a regra $\rightarrow I$ teve que ser modificada pois sua correção também depende de $\neg\nabla x\varphi$ implicar em $\nabla x\neg\varphi$. Por isso, ela se torna:

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi^{<u>} \\ \vdots \\ \psi^{<v>} \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi^{<w>}} \rightarrow I$$

com a restrição: onde $\langle u \rangle$ contém apenas variáveis não marcadas.

4.4 Correção

A prova de correção é a mesma, uma vez que a maximalidade do ultrafiltro só foi usada nas provas de correção das regras do absurdo e de introdução da implicação, as quais foram alteradas para não mais depender dessa propriedade.

4.5 Completude

O cálculo é completo uma vez que podemos reproduzir todas as provas relevantes que tínhamos em \mathcal{NUL} , e que podemos mostrar provas para os dois axiomas que foram introduzidos. Esses dois axiomas são provados a seguir:

$$\forall x\varphi \rightarrow \nabla x\varphi$$

$$\frac{\frac{\forall x\varphi}{\varphi^{\bar{x}}}}{\nabla x\varphi}$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\nabla x\varphi \rightarrow \nabla x\psi)$$

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi \rightarrow \psi^{\bar{x}}}}{\psi^{\bar{x}}}}{\nabla x\psi} \quad \frac{\nabla x\varphi}{\varphi^{\bar{x}}}$$

4.6 Normalização

Não podemos mais restringir o uso da regra do absurdo apenas a fórmulas atômicas, uma vez que a redução correspondente a fórmulas do tipo $\nabla x\varphi$ (ver

apêndice 2) não é mais correta, pois viola a restrição imposta na regra do absurdo para a lógica de filtros:

$$\begin{array}{c}
 [\neg \nabla x \varphi]^1 \\
 \vdots \\
 \perp \\
 \hline
 \nabla x \varphi \perp_1
 \end{array}
 \quad \text{não se reduz a} \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{[\nabla x \varphi]^1}{\varphi^{\bar{x}}} \nabla E \\
 \hline
 [\neg \varphi^{\bar{x}}]^2 \rightarrow E \\
 \perp \\
 \hline
 \neg \nabla x \varphi \rightarrow I_1 \\
 \vdots \\
 \perp \\
 \hline
 \varphi^{\bar{x}} \perp_2 \\
 \hline
 \nabla x \varphi \nabla I
 \end{array}$$

pois observe que na prova da direita a aplicação da regra \perp não respeita as novas condições impostas. Porém, ainda deve ser investigado se esse sistema tem normalização ou não.