

2

Conceitos básicos de topologia

Neste Capítulo são introduzidos alguns conceitos básicos de topologia combinatória e da Teoria das Alças que formam a base teórica do presente trabalho.

2.1

Topologia combinatória

Se v_0, v_1, \dots, v_p são vetores em \mathbb{R}^m , dizemos que esses $p + 1$ vetores estão em posição geral, quando os vetores $(v_1 - v_0), (v_2 - v_0), \dots, (v_p - v_0)$ são linearmente independentes. Diz-se que o vetor y é linearmente dependente de v_0, v_1, \dots, v_p se existir $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ tal que $y = \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i$. O *fecho convexo* de um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^m$ é o conjunto de todas as combinações lineares finitas dos elementos de C com coeficientes positivos cuja soma é um.

Uma *célula convexa* $\sigma \in \mathbb{R}^m$ é um conjunto compacto (limitado e fechado), não vazio de \mathbb{R}^m que é a solução de um conjunto finito de equações lineares $f_i(v) = 0$ e de desigualdades lineares $g_i(v) \geq 0$. Isto é, as funções f_i e g_i são da forma $v = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto \lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$.

Uma *face*, ou *subcélula*, de uma célula σ é a célula obtida substituindo algumas desigualdades $g_i \geq 0$ por igualdades. Um *vértice* de uma célula é uma subcélula com um só ponto. A célula σ é considerada subcélula dela mesma. Uma subcélula de σ que não é ela mesma é chamada de subcélula própria. Diz-se que uma célula tem dimensão n se ela contém $n + 1$ vetores em posição geral e não mais do que isso. Quando uma célula possui dimensão n e é gerada por $n + 1$ vetores em posição geral, ela é chamada de *simplexos*.

Observe que as subcélulas de uma célula σ são determinadas pela própria σ e não pela escolha particular de equações e inequações que a

representam. Isso vem do seguinte fato:

Proposição 2.1 *Toda célula τ é subcélula de σ se e somente se:*

1. Se P é o hiperplano gerado por τ , então $P \cap \sigma = \tau$.
2. Nenhum ponto de P pertence a uma combinação convexa entre dois pontos de $\sigma - \tau$.

Um *complexo celular* n -dimensional K é uma coleção finita de células i -dimensionais ($i = 0, \dots, n$) em \mathbb{R}^m sob as seguintes condições:

1. Se $\sigma \in K$ e $\tau < \sigma$ então $\tau \in K$.
2. Se σ e $\rho \in K$ então σ e ρ são propriamente ligadas.

Duas k -células σ e ρ de um complexo celular K são *adjacentes* quando $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$. Se $\tau \in K$ e $\rho \in K$ e τ é subcélula de ρ , diz-se que ρ é *incidente* a τ .

Note que as subcélulas de uma *2-célula* são: a própria célula, as suas arestas (*1-subcélulas*), e os seus vértices (*0-subcélulas*).

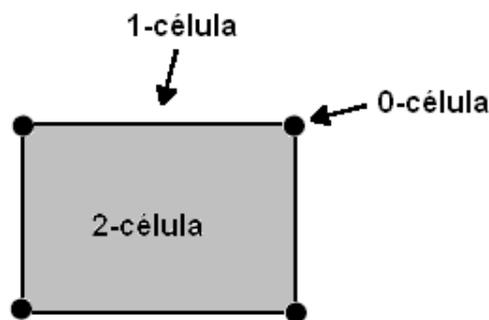


Figura 2.1: Faces de uma célula.

Duas células σ^m e σ^n são propriamente ligadas se elas não se interceptam ou se a intersecção $\sigma^m \cap \sigma^n$ é uma subcélula de ambos. Ver Figura 2.2 e Figura 2.3.

A *realização geométrica* de um complexo celular K ou o *poliedro* associado a K , denotado por $|K|$, é a união dos membros de K com a topologia do subespaço Euclidiano.

Se uma coleção de células $L \subset K$ é um complexo celular, então é chamado de um *subcomplexo* de K .

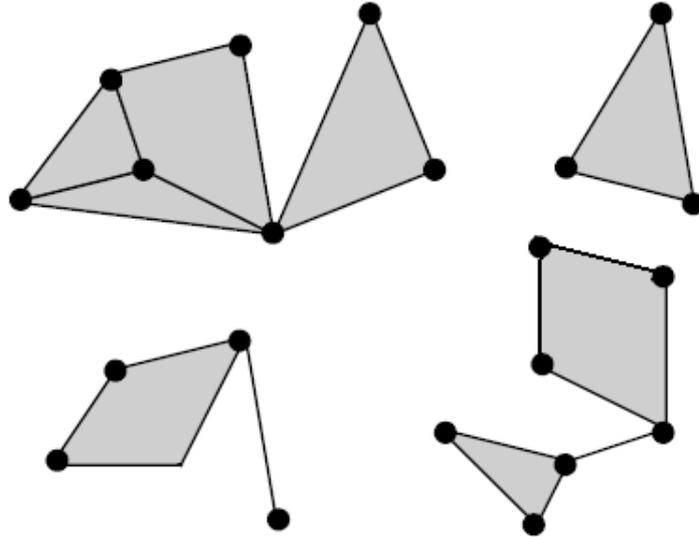


Figura 2.2: Células propriamente ligadas.

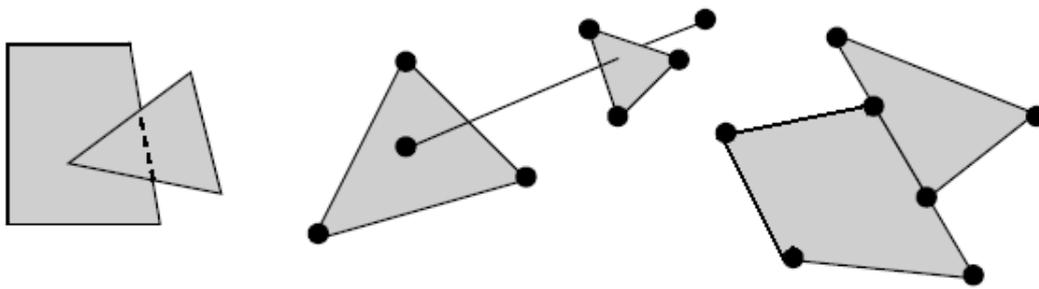


Figura 2.3: Células impropriamente ligadas.

Um complexo K é *conectado* se não pode ser representado como a união de dois subcomplexos disjuntos não vazios L e M sem células em comum. Uma *componente* de um complexo celular K é um subcomplexo conectado que não está contido em um subcomplexo conectado maior em K .

A *estrela de um vértice* $v \in K$ é um subcomplexo de K composto pela união das células e subcélulas incidentes a v e é denotado por $star(v)$. O *elo de um vértice* v que é denotado por $link(v)$ é a fronteira de $star(v)$.

Um complexo celular n -dimensional M , $|M| \subset \mathbb{R}^m$, é uma *variedade combinatória de dimensão n* com bordo se as seguintes condições são verificadas:

- 1 Um $(n - 1)$ -célula em M é incidente a uma ou duas n -células de M .

2 O elo de um vértice em M é homeomorfo a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{n-1} ou \mathbb{R}_+^{n-1} .

O subcomplexo formado pelas $(n - 1)$ -células de uma variedade combinatória de dimensão n incidente a somente uma n -célula é chamado de bordo de M e é denotado por ∂M . As células de M que pertencem a ∂M são chamadas de células de bordo, e as que não pertencem a ∂M são chamadas de células interiores à variedade.

Um resultado importante de topologia diz que o bordo de uma variedade combinatória de dimensão n é uma variedade combinatória de dimensão $(n - 1)$ sem bordo.

Portanto, o bordo de uma superfície combinatória é um conjunto (possivelmente vazio) de curvas, onde cada uma é formada por um conjunto finito de arestas e vértices de bordo que formam uma curva simples fechada chamada de curvas de bordo. Uma aresta de uma superfície combinatória é definida sendo do bordo se ela for incidente a uma única face, caso contrário a aresta é definida como do interior. Um vértice é dito ser do bordo se é incidente a uma aresta de bordo, caso contrário então o vértice é do interior da superfície.

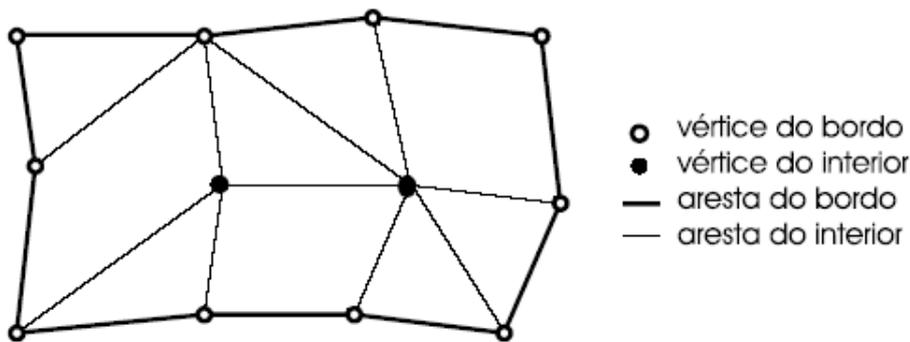


Figura 2.4: Um exemplo de superfície

Uma variedade combinatória de dimensão n é *orientável* quando é possível escolher uma orientação coerente em suas n -células, isto é duas n -células adjacentes induzem orientações opostas em suas $(n - 1)$ -células comuns.

Portanto, uma superfície combinatória orientável é aquela em que é possível orientar cada uma de suas faces de tal forma que uma aresta em faces adjacentes possui orientação oposta, isto é, uma aresta do interior

incidente aos vértices v_1 e v_2 e às faces f_1 e f_2 , possui duas orientações, uma de v_1 a v_2 na face f_1 , e outra de v_2 a v_1 na face f_2 . Quando a aresta é de bordo ela só possui uma orientação que é coerente com a orientação da face incidente a ela. Dá-se o nome de aresta orientada ou semi-aresta, à cada uma das orientações das arestas.

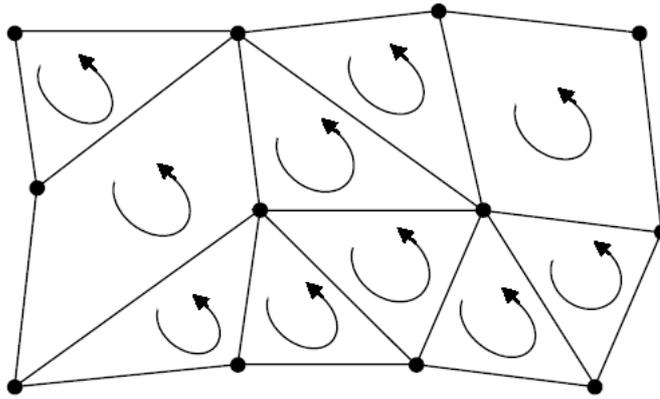


Figura 2.5: Uma superfície orientável

De agora em diante, uma superfície, e uma curva serão respectivamente uma variedade combinatória de dimensão 2 e 1 orientada com ou sem bordo. O conjunto de faces (2-células), arestas (1-células), e vértices de uma superfície \mathcal{S} será denotada respectivamente por $F(\mathcal{S})$, $E(\mathcal{S})$ e $V(\mathcal{S})$.

O processo de compressão e descompressão de malhas que será apresentado nesse trabalho se aplica a superfícies combinatórias orientáveis sem bordo. Logo o algoritmo de compressão e descompressão de malhas deve respeitar a determinados critérios que assegurem a preservação de aspectos combinatórios topológicos da malha.

A avaliação quanto a alterações no tipo de topológico de uma superfície requer a identificação da característica topológica da superfície que a definam univocamente. Usando estas características podemos comparar o tipo topológico antes e depois da operação de compressão e descompressão para avaliar possíveis alterações.

O seguinte teorema garante a existência de tal característica para superfícies combinatórias:

Teorema 2.2 *Sejam NV , NE , e NF , respectivamente, o número de vértices, arestas e faces de uma superfície combinatória \mathcal{S} . Então a soma*

$$\chi(\mathcal{S}) = NV - NE + NF$$

é uma constante para todas as superfícies com o mesmo tipo topológico de \mathcal{S} . Essa constante é chamada de *Característica de Euler*.

As conseqüências deste teorema podem ser estendidas para a inclusão de outros componentes do modelo através da Característica de Euler-Poincaré. Isto é, considere uma superfície orientável \mathcal{S} como uma só componente conexa e seja g o número de gênius (buracos) e b o número de curvas de bordo da superfície. Então, a formula de Euler-Poincaré pode ser escrita como:

$$\chi(\mathcal{S}) = NV - NE + NF = 2 - 2g - b.$$

O número de Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{S})$ define univocamente a superfície \mathcal{S} .

Quando a superfície é orientada e não possui bordo, o número de gênius g de \mathcal{S} , sabendo somente o número de vértices, arestas e faces de $\mathcal{S}(NV, NE$ e $NF)$, é obtido para fórmula de Euler-Poincaré da seguinte forma:

$$NF + NE - NV = 2 - 2g$$

$$\Downarrow$$

$$g = 1 - \frac{NF}{2} + \frac{NE}{2} - \frac{NV}{2}.$$

2.2

Teoria das Alças

A teoria clássica das *alças* (*Handlebody Theory* [3]) estuda as mudanças topológicas geradas pela junção de alças (*handles*) a variedades. O principal objetivo desta seção é fornecer uma breve introdução sobre essa teoria, em particular para o caso de superfícies.

Um conjunto $V \subset \mathbb{R}^m$ é uma variedade de dimensão n com bordo se cada ponto em V tem uma vizinhança aberta homeomorfa a \mathbb{R}^n ou a \mathbb{R}_+^n .

Seja D^i um disco i -dimensional. O bordo de um conjunto P é descrito por ∂P . Note que D^0, D^1 e D^2 correspondem respectivamente, a um ponto, uma linha e a um disco. Além disso, o conjunto ∂D^0 é um conjunto vazio, o conjunto ∂D^1 consiste de dois pontos, e o conjunto ∂D^2 é um círculo.

Seja R e S dois espaços topológicos, então temos $R \times S$ que corresponde ao conjunto obtido pelo produto cartesiano, o que significa que $R \times S$ é o

conjunto de todos os pares de elementos (r, s) tais que $r \in R$ e $s \in S$.

Existem três tipos de alças para uma variedade bidimensional, os quais serão distinguidos por um índice λ em $\{0,1,2\}$ respectivamente.

Definição 2.3 *Uma alça de índice λ , denotado por H_λ é um par de espaços topológicos (A_λ, B_λ) tal que $B_\lambda \subset \partial A_\lambda$, $A_\lambda = D^\lambda \times D^{2-\lambda}$ e $B_\lambda = \partial D^\lambda \times D^{2-\lambda}$.*

De acordo com esta definição, podemos observar que para $\lambda = 0$, o conjunto $A_0 = D^0 \times D^2$ é um disco bidimensional e $B_0 = \partial D^0 \times D^2$ é o espaço vazio, desde que ∂D^0 seja \emptyset . O conjunto $A_1 = D^1 \times D^1$ é um quadrado (produto cartesiano de dois intervalos) e o conjunto $B_1 = \partial D^1 \times D^1$ são os dois lados opostos no bordo de A_1 , desde que ∂D^1 seja composta de dois pontos e D^1 seja o intervalo. Finalmente, no caso em que $\lambda = 2$, o conjunto $A_2 = D^2 \times D^0$ é um disco bidimensional e $B_2 = \partial D^2 \times D^0$ é o círculo que é exatamente a borda de A_2 . A Figura 2.6 mostra estes tipos de alças (*handles*).

λ	$A = D^\lambda \times D^{2-\lambda}$	$B = \partial D^\lambda \times D^{2-\lambda}$
0		
1		
2		

Figura 2.6: Diferentes tipos de alças para superfícies.

Adicionar uma alça (*handle*) $H_\lambda = (A_\lambda, B_\lambda)$ ao bordo de uma variedade bidimensional \mathcal{S} significa identificar por homeomorfismo o conjunto $B_\lambda \subset \partial A_\lambda$ com um subconjunto I contido no bordo de \mathcal{S} .

O seguinte teorema é a principal ferramenta matemática na qual este trabalho se baseia, mais detalhes veja em [8].

Teorema 2.4 (Decomposição de Alças) *Para cada variedade \mathcal{S} existe uma seqüência finita de superfícies $\{\mathcal{S}_i\}$, $i = 0, \dots, N$, tal que $\mathcal{S}_0 = \emptyset$, $\mathcal{S}_N = \mathcal{S}$ e o manifold \mathcal{S}_i é obtido anexando uma alça $H_\lambda = (A_\lambda, B_\lambda)$ ao bordo de \mathcal{S}_{i-1} . Esta seqüência é chamada de Decomposição de Alças de \mathcal{S} .*

A Figura 2.7 ilustra a decomposição de alças de um toro.

As alças podem ser anexadas a uma variedade bidimensional orientada com bordo de tal forma a preservar a sua orientação, isto é: a identificação

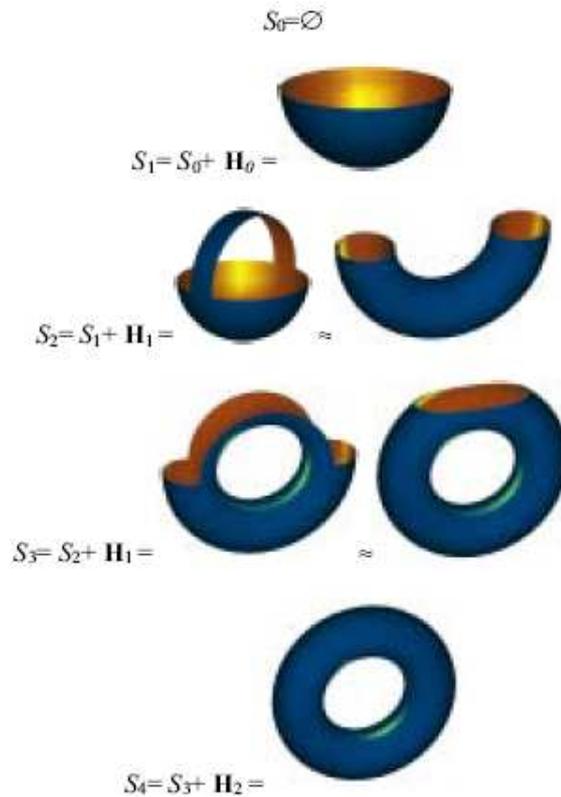


Figura 2.7: Decomposição de um toro

tem que ser coerente. Começa-se com uma variedade bidimensional orientada, após anexar uma alça esta também tem que preservar a sua orientação. Isto é não deve conter uma alça do tipo faixa de *Moebius* [17].

O teste para saber se uma alça foi anexada coerentemente é simples: basta verificar se o número de curvas de bordo mudou. Quando isso acontece, a alça preservou a orientação.

Quando uma alça H_λ é anexada coerentemente ao bordo de \mathcal{S}_{i-1} para obter \mathcal{S}_i , uma mudança topológica é gerada e tal mudança depende do índice de λ . A mudança topológica gerada ao se anexar uma alça de índice 0 é a geração de dois novos componentes com variedade bidimensional (Figura 2.7).

Quando uma alça H_1 é anexada de forma coerente a uma variedade bidimensional, três situações podem ocorrer:

1. O conjunto A_1 pode ser anexado a intervalos disjuntos no mesmo componente de bordo. Neste caso, a mudança topológica é inclusão de uma nova componente de bordo.
2. O conjunto A_1 pode ser anexado a intervalos em diferentes compo-

mentes de bordo de variedade bidimensional. A mudança topológica aqui é caracterizada pelo aumento de genus. Além disso, os números de componentes de bordo diminui em 1.

3. O conjunto A_1 pode ser anexado a intervalos em diferentes superfícies. Aqui, uma componente de bordo e uma componente de superfície são removidas.

Alças com índice 2 fecham uma componente de bordo (Veja \mathcal{S}_4 na Figura 2.7).

A modo de conclusão, para os 3 tipos de alças (*handles*), existem cinco situações diferentes nas quais as alças podem ser anexadas coerentemente ao bordo de uma variedade bidimensional.

A codificação e decodificação para compressão de malhas de superfícies triangulares/quadrangulares com ou sem gênero também define uma sequência de mudanças topológicas que a superfície sofre durante o processo de reconstrução. Neste trabalho a relação dos algoritmos apresentados com a decomposição de alças (*handlebody*) será esclarecida nas próximas seções.

2.3

Operadores de Alças

Na seção anterior foi descrita a teoria de alças (*handlebody*) para variedades bidimensionais. Nesta seção introduziremos um conjunto de operadores que permitem a implementação da decomposição de alças (*handlebody*) para superfícies combinatórias, maiores detalhes em [8].

Dada uma superfície \mathcal{S} com ou sem bordo, deseja-se construir uma sequência finita de superfícies combinatórias $\mathcal{S}_i, i = 0, \dots, n$ na qual $\mathcal{S}_0 = \emptyset$ e $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}$. Para construir tal sequência, precisa-se definir um conjunto de operadores chamados operadores de alças, e estudaremos as mudanças topológicas que estes originam.

Do ponto de vista combinatório, três tipos de operadores devem ser definidos para representar a junção de uma alça.

2.3.1

Operador de Alça do tipo 0

Este operador gera uma nova componente de superfície com uma única célula convexa (Figura 2.8).

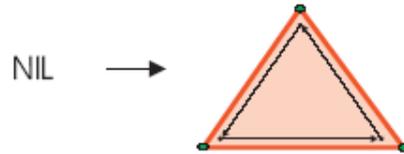


Figura 2.8: Operador de Alças do tipo 0 (construtor de superfícies)

2.3.2

Operador de Alças do tipo 1

O objetivo deste operador é identificar duas arestas de bordo com nenhum vértice em comum. Existem três situações para este grupo. Elas se distinguem de acordo com as respostas das seguintes perguntas:

As arestas estão na mesma superfície? Caso afirmativo, o operador de handle anexará as duas diferentes superfícies e removerá uma componente da curva de bordo (Figura 2.9(a)). Caso negativo, a próxima pergunta irá identificar os dois casos que faltam.

As arestas estão na mesma componente de bordo? Caso afirmativo, então o operador dividirá a curva de bordo em dois componentes diferentes (Figura 2.9(b)). Caso contrário, o número de gênes irá aumentar na superfície e o número de componentes de bordo irá diminuir em uma unidade (Figura 2.9(c)).

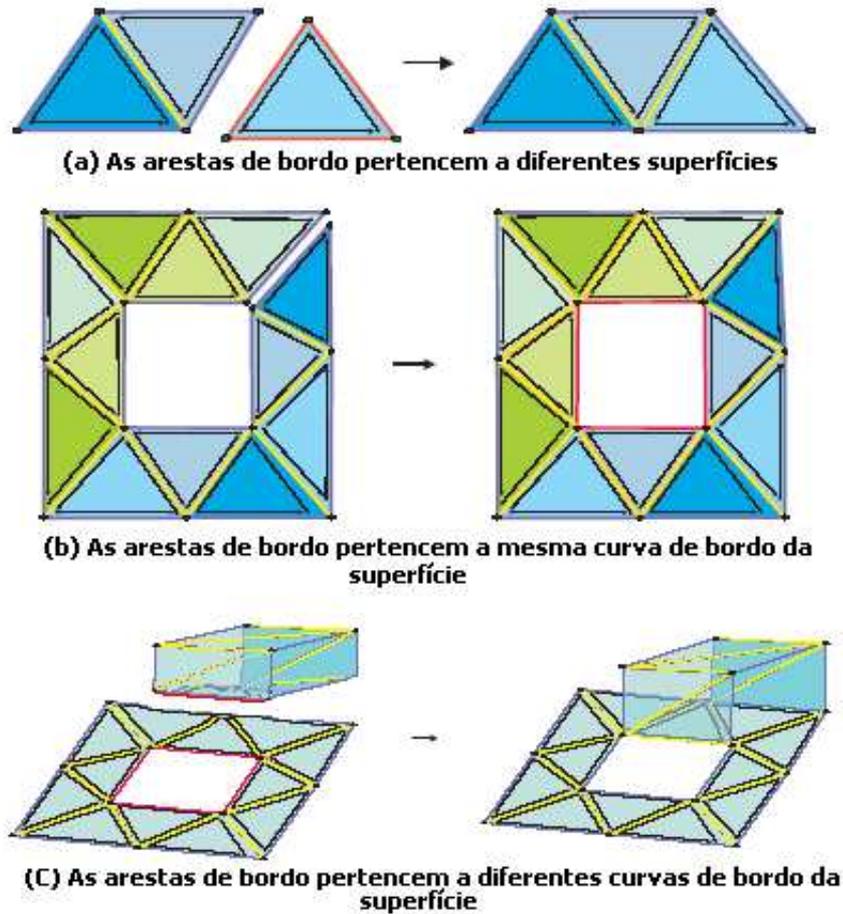


Figura 2.9: Operador de Alças do tipo 1

2.3.3

Operador de Alças do tipo 2

Neste grupo existe um só operador que é utilizado para identificar duas arestas de bordo com dois vértices em comum. O operador fecha uma componente de bordo e transforma os seus vértices de bordo em vértices interiores (Figura 2.10).

2.3.4

Operador de Zip

Este operador identifica duas arestas de bordo que tem um vértice em comum, gerando um vértice interior.

Note que esse operador não muda a topologia da superfície, e por

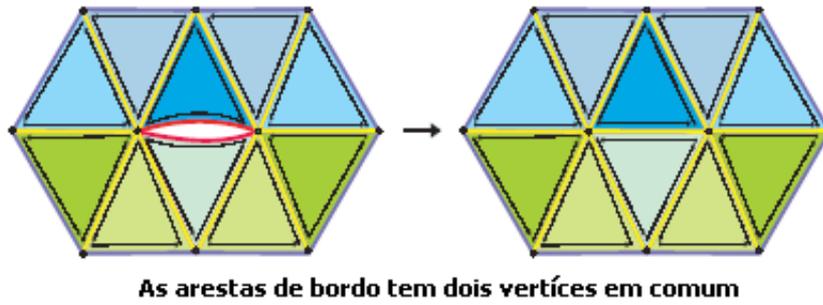


Figura 2.10: Operador de Alças do tipo 2

isso não é considerado um operador de alça, mas é fundamental para o algoritmo de descompressão. É importante notar que os operadores de alça em conjunto com o operador de Zip formam um conjunto completo de operadores para construir qualquer tipo de superfície combinatória com ou sem bordo. Veja Figura 2.11

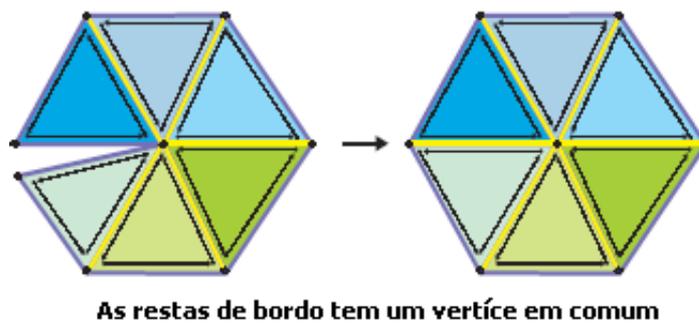


Figura 2.11: Operador de Zip

2.3.5

Operadores Inversos de Alças

Os operadores inversos de alças são naturalmente definidos por reverter a direção das setas das Figuras 2.8, 2.9, 2.10, e 2.11.

A ação inversa de um operador de alça de tipo 0 é a destruição de uma face.

Os operadores de alça do tipo 1 e 2 identificam duas arestas de bordo para criar uma aresta interior. Portanto, a operação inversa de alça do tipo 1 divide uma aresta interior com dois vértices de bordo em duas arestas de bordo. Se estes vértices estão em componentes de bordo diferentes então o

operador junta as duas curvas de bordo. Caso os dois vértices incidentes estejam na mesma curva de bordo, a curva de bordo é separada em dois componentes e depois de dividir a aresta do interior: ou a superfície é desconectada ou um gênero é removido da superfície.

O operador inverso de alça do tipo 2 também separa uma aresta do interior em duas arestas de bordo. Mas nesse caso, os dois vértices incidentes a essa aresta do interior são, igualmente, interiores a superfície. Cria-se uma nova componente de bordo na superfície.

O operador inverso do Zip separa uma aresta do interior incidente a um só vértice de bordo em duas arestas do bordo.

2.4

Conclusão

Neste Capítulo foram definidos alguns conceitos básicos sobre topologia combinatória, como o de superfície. Depois, apresentou-se a teoria de alças, que será uma ferramenta matemática importante para se elaborar uma análise do algoritmo de compressão. No próximo Capítulo é descrito como representar superfícies compostas por triângulos e quadrângulos no computador.