2.
Otimização de Portfolio

2.1.
Análise de Média-Variância

Portfolio (carteira, em português) é uma combinação de ativos, tais como investimentos, ações, obrigações, commodities, imóveis, entre outros. O principal objetivo de um *portfolio* é reduzir o risco por meio da diversificação. Harry Markowitz, em 1952, foi quem formalizou e aplicou aos instrumentos financeiros a ideia de diversificar. Abaixo está representado o Modelo de Média-Variância desenvolvido por Markowitz. A partir desse modelo e das críticas a ele relacionadas, outros modelos foram criados, como o Modelo de Índice Único, o CAPM e o APT. Esses modelos também serão vistos a seguir.

2.1.1.
Análise de Média-Variância

A Análise de Média-Variância desenvolvida por Markowitz (1952) é um modelo que propõem uma abordagem quantitativa ao gerenciamento de ativos. A ideia é utilizar apenas a média e o desvio-padrão das distribuições de probabilidades dos retornos sobre um período específico, para encontrar os portfolios ótimos. Neste caso, a média dos retornos é a medida de retorno, enquanto que a variância dos retornos do portfolio é a medida de risco.

Assim, somente os *portfolios* que possuem máximo retorno esperado sobre uma dada variância (desvio-padrão do retorno - risco) serão considerados (Sharpe, 2007). O modelo de Média-Variância de Markowitz pode ser descrito abaixo:

Modelo 2.1: Modelo de Média-Variância de Markowitz

Minimizar
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}x_i x_j \tag{2.1}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \bar{r}_i = \mu \qquad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (2.3)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (2.4)$$

$$i = 1,2,3 \ldots N$$

Onde:

N = número de ativos candidatos a compor o portfolio;

x_i = fração do capital a ser aplicado no ativo i;

σ_{ij} = covariância entre os retornos dos ativos i e j;

$\bar{r}_i$ = valor esperado dos retornos do ativo i;

μ = valor esperado do retorno do portfolio (dado pelo investidor).

Neste modelo, a intenção é construir um *portfolio* com risco mínimo, dado um retorno esperado (μ). Dessa forma, a Função Objetivo (2.1) do modelo acima tem como finalidade minimizar o risco (variância) do portfolio. A restrição (2.2) determina que o valor do retorno esperado do *portfolio* é igual a μ (é a meta do retorno esperado dada pelo investidor). A restrição (2.3) descreve que todo o capital disponível seja investido (a soma dos percentuais do capital a ser aplicado em todos os ativos tem que ser igual a 100%). Por fim, a restrição (2.4) garante que não haja um percentual de investimento negativo em nenhum dos ativos.

Conforme dito anteriormente, neste modelo, o risco do portfolio é representado pela variância da carteira. Este valor, portanto, depende da covariância entre pares de ativos[2]. Assim sendo, uma carteira de investimentos composta por dois ou mais ativos com uma baixa correlação pode apresentar um risco menor do que a média ponderada dos riscos individuais dos ativos que a compõe. Nesse sentido, a referida carteira poderá apresentar um nível de risco mais baixo do que do ativo de menor risco, com um retorno maior que do ativo em questão (Gonçalves Jr. et al., 2002).

[2] Ver relatório anexo ao Capítulo.

Trata-se de um modelo de programação quadrática com restrições lineares. Modelos dessa forma podem ser resolvidos com o uso de um *software* de otimização. Com isso, variando-se o retorno requerido pelo investidor é possível registrar para cada nível de retorno, um nível de risco com uma composição de portfolio ótimo. Estes registros podem ser plotados em uma curva, que pode ser visualizada abaixo:

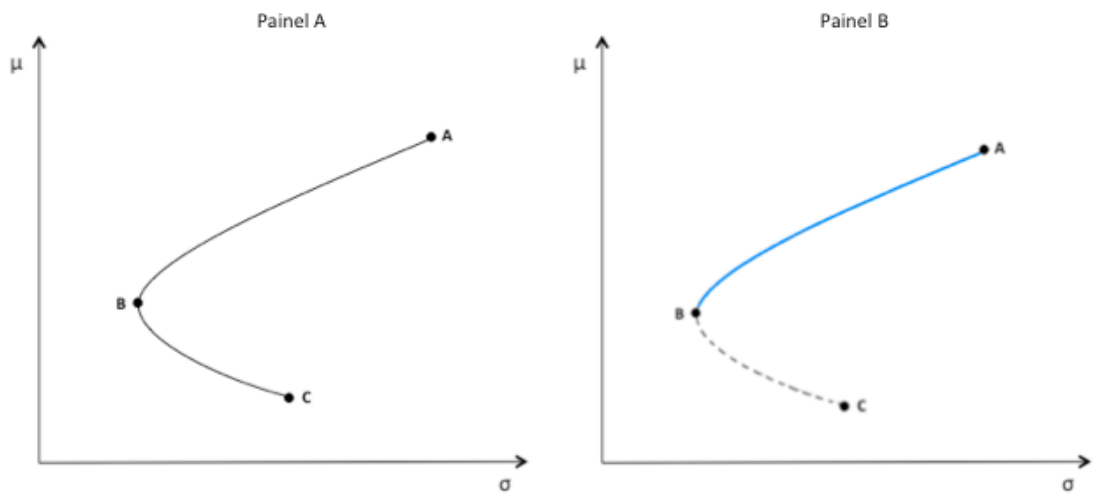

Figura 1 – Curva gerada representando os portfolios encontrados com retorno esperado ($\boldsymbol{\mu}$).

O maior retorno esperado possível é alcançado no ponto A da curva. O *portfolio* correspondente a este ponto é um *portfolio* composto por somente um ativo com maior retorno esperado.

Para encontrar *portfolios* com riscos menores, busca-se carteiras com retornos um pouco menores. A carteira com menor risco corresponde ao ponto B da curva (*portfolio* global com mínima variância). Um investidor não aplicará em *portfolios* presentes na parte da curva entre os pontos B e C, uma vez que existem *portfolios* com o mesmo nível de risco, mas com retornos superiores. Portanto, os **carteiras eficientes** são aquelas presentes na parte de cima da curva. Essa parte da curva é chamada de Fronteira Eficiente (curva em azul na figura 1).

Tobin (1958) estendeu o modelo de Markovitz incluindo ativos livre de risco, com média (r_f) e variância igual a zero. Nesse caso, a fronteira eficiente gerada se torna uma linha reta, conforme pode ser visualizado na figura a seguir:

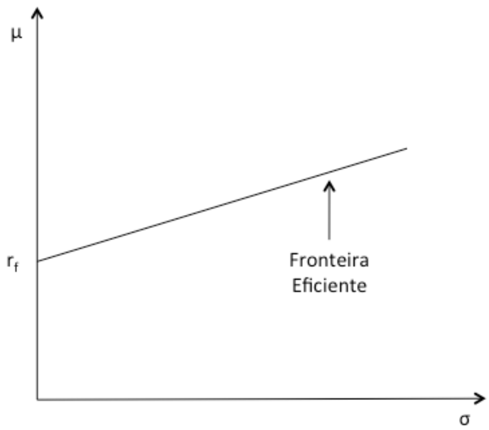

Figura 2 – Fronteira Eficiente gerada quando um ativo livre de risco está disponível.

De acordo com Tobin (1958) e sua fronteira eficiente, pode-se concluir que: “na presença de um ativo livre de risco, qualquer portfolio eficiente pode ser construído a partir da combinação do ativo livre de risco e um portfolio com risco” (Zenios, S. 2007).

Desse modo, um novo modelo pode ser escrito, com a finalidade de maximizar o retorno e minimizar o risco para se encontrar a fronteira eficiente.

Modelo 2.2: Modelo de Média-Variância para Portfolios Eficientes

Minimizar $$\lambda\sigma^2(x) - (1-\lambda)R(x;\bar{r}) \tag{2.5}$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{2.6}$$

$$x_i \geq 0 \tag{2.7}$$

$$i = 1,2,3 \ldots N$$

A Função Objetivo (2.5) é a combinação de riscos e retornos. Ou seja, para cada valor de λ no intervalo [0,1] obtém-se o portfolio com mínimo risco para o máximo retorno esperado. Variando esse parâmetro, é possível traçar a fronteira eficiente.

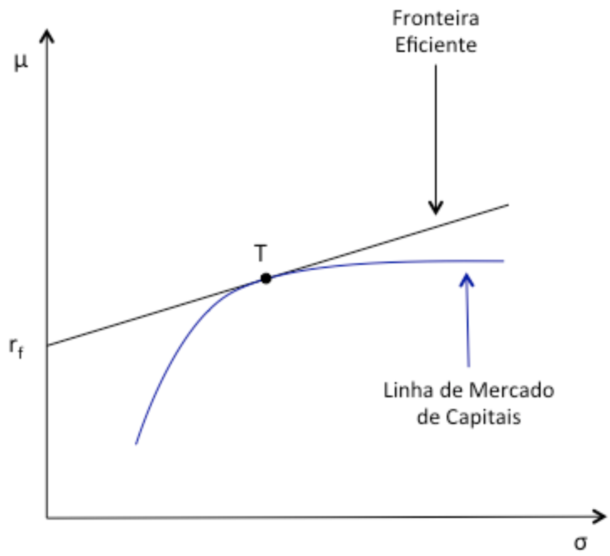

Figura 3 – A Linha de Mercado de Capitais (LMC) e fronteira eficiente.

O ponto T na figura acima corresponde ao portfolio na fronteira eficiente que encontra a tangente da LMC (Linha de Mercado de Capitais). Esse portfolio é chamado de *"Portfolio Super-Eficiente (PSE)"*. Dessa forma, a Linha de Mercado de Capitais tangencia a curva de fronteira eficiente no ponto representado pela carteira T, que contém ativos livres de risco.

Usando o ativo livre de risco, os investidores que possuem o Portfolio Super-Eficiente têm duas opções ótimas: **i.** Alavancar a sua posição vendendo o ativo livre de risco e investindo em mais participações no PSE; ou **ii.** Desalavancar a sua posição vendendo partes do PSE e investindo no ativo livre de risco. Os *portfolios* resultantes possuem risco/retorno que caem na LMC. Dessa forma, ao combinar um ativo livre de risco com um *portfolio* localizado na fronteira eficiente, é possível encontrar *portfolios* em que o índices risco/retorno são superiores àqueles dos p*ortfolios* da fronteira eficiente.

De acordo com Tobin, (1958) o trabalho do investidor pode ser separado em duas etapas. Na primeira, ele toma a decisão de investimento, ou seja, seleciona a melhor carteira de ações (T – *Portfolio* Super-Eficiente). Na segunda, ele toma a decisão de financiamento (opções ótimas descritas acima). Essa ideia é conhecida como o Teorema da Separação.

O Modelo de Markowitz, apesar de ser uma referência teórica, geralmente, não é usado em sua forma original, principalmente na construção de portfolio de larga escala. A principal razão para isto é a dificuldade computacional associada ao alcance de uma solução ótima para problemas de otimização quadrática com uma extensa matriz de covariância (Konno e Yamazaki, 1991).

Se o problema for otimizar um portfolio composto por 100 ativos (N=100), por exemplo, será necessário dispor do seguinte número de dados: **i.** Retornos Esperados = 100; **ii.** Variâncias = 100; e **iii**. Covariâncias = N(N-1) = 100*99 = 9900. Considerando que a matriz de covariância seja simétrica, o número efetivo de covariâncias a serem estimadas será de 9900/2 = 4950. O número de dados necessários aumenta exponencialmente à medida que o número de títulos aumenta.[3]

Portanto, para que a Teoria Moderna do *Portfolio* fosse usada em um grande número de ativos, o processo teve que ser simplificado. Para isso, foram desenvolvidos outros modelos, relacionados abaixo.

2.1.2.
Modelos de Fatores

A implementação de modelos de otimização de média-variância requer a utilização de estimação de vetores de $2n$ parâmetros (média e variância) e da matriz de covariância com $\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$ parâmetros (Zenios, 2007).

Pode-se inferir, em razão da assertiva acima, que o número de parâmetros pode ser bem elevado, representando uma dificuldade considerável na resolução computacional.

A seguir serão apresentados os Modelos Fatoriais.

Modelo de Índice Único

Considera-se que os retornos de alguns ativos são correlacionados em virtude de sua resposta a um fator comum. Esse fator pode ser, por exemplo, a taxa da inflação, taxa de crescimento da produção, e outras variáveis que podem

[3] C.P. Samanez, *Gestão de Investimentos e Geração de Valor*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

influenciar o preço das ações. Pode-se estimar a correlação entre os ativos, investigando os seus retornos em relação a mudanças nesse fator comum. Usando esse fator como o índice do mercado, pode-se descrever o modelo de otimização de média-variância com o uso de modelo uni-fatorial:

Modelo 2.3: Modelo de Média-Variância para Portfolios Eficientes com Modelo Uni-Fatorial

Minimizar
$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_i^2\sigma_m^2x_i^2+\sum_{i=1}^{N}\sigma_{\epsilon i}^2x_i^2+\sum_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{M}\beta_i\beta_j\sigma_m^2x_ix_j\right)-(1-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_ix_i+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\bar{r}_mx_i\right) \quad (2.8)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{N}x_i=1 \quad (2.9)$$

$$x_i\geq 0 \quad (2.10)$$

$$i=1,2,3\dots N$$

Onde:

$\bar{r}_i$ = retorno esperado do ativo i;

α_i = intercepto da regressão;

β_i = coeficiente angular da regressão;

$\tilde{\epsilon}_i$ = resíduo da regressão linear, com média 0 e variância σ^2.

$\bar{r}_m$ = rentabilidade esperada do portfolio de mercado = índice que representa o mercado;

As fórmulas usadas para a aplicação no modelo quadrático 2.3 para a geração da fronteira eficiente estão descritas no Anexo 1. Vale ressaltar que o número de parâmetros utilizados na Função Objetivo é muito inferior $(3n+2)$ ao número de parâmetros requeridos quando se encontra a média e a variância diretamente da matriz de covariância. Portanto, o uso desse modelo para encontrar os portfolios pertencentes a fronteira eficiente é muito mais simples.[4]

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Sharpe, Lintner e Mossin desenvolveram o modelo de equilíbrio de mercado conhecido como CAPM (Capital Asset Pricing Model – Modelo de Apreçamento de Ativos Financeiros). Trata-se da extensão ao trabalho de Markowitz (Teoria Moderna do Portfolio) apresentado acima, além de ser um exemplo de modelo uni-fatorial. O CAPM é um modelo baseado na combinação linear da rentabilidade de ativos livre de risco e do prêmio de risco para encontrar o retorno esperado do ativo, conforme regra abaixo:

$$\bar{r}_i = rf + \beta_i(\bar{r}_m - rf)$$

Onde:

$\bar{r}_i$ = retorno esperado do ativo i;

rf = rentabilidade dos ativos livres de risco;

$\bar{r}_m$ = rentabilidade esperada do portfolio de mercado;

β_i = beta do ativo i (volatilidade dos retornos do ativo em relação ao índice de mercado);

$\beta_i(\bar{r}_m - rf)$ = prêmio de risco.

Conforme mencionado anteriormente, o CAPM é um exemplo de um modelo uni-fatorial. Nesse caso específico, entretanto, o α_i é considerado igual a zero.

Devido à simplicidade do CAPM, esse modelo foi amplamente utilizado por empresas, investidores e analistas. Entretanto, há pontos negativos relacionados a este modelo, como a impossibilidade de ser testado empiricamente, já que não é possível observar o verdadeiro "*portfolio* de mercado", mas somente aproximações à verdadeira carteira do mercado (Roll, 1977).

[4] A resolução de sistema é um problema de programação matemática que foi resolvido por: E.J. Elton, M.J. Gruber e M. Padberg, *Simple Criteria for optimal portfolio selection*. Journal of Finance, Mar.1976.

Observe-se, contudo, que alguns pesquisadores realizaram testes empíricos com a finalidade de que o referido modelo pudesse ser suportado. Nestes testes, eles encontraram algumas anomalias (diferenças entre o retorno médio observado e o retorno esperado calculado pelo CAPM). Um exemplo, pode ser verificado no estudo de Barber e Lyon (1997) em que as ações de empresas que apresentam um baixo valor para a relação entre o valor contábil do patrimônio e seu valor de mercado têm retornos maiores do que os estimados pelo CAPM (Efeito Valor).

Modelos Alternativos ao CAPM

Como uma alternativa ao modelo CAPM, foi desenvolvido o APT (*Arbitrage Princing Theory*) por Stephen Ross (1976). Os dois modelos diferem, basicamente, pelo fato de o APT considerar que os retornos das ações são sensíveis a vários fatores de risco diferentes, enquanto o CAPM considera que os retornos dependem de apenas um tipo de risco não diversificável (risco de mercado (Samanez, 2007).

Para que o CAPM pudesse ser aplicado em mais de um período, foi desenvolvido o modelo CAPM Intertemporal (ICAPM) por Merton (1973). Esse modelo assume uma distribuição log-normal para os preços, usando o Movimento Geométrico Browniano. Nesse modelo, os investidores podem revisar a sua carteira de ativos ao longo do tempo.