5.
Formulação Matemática do Modelo

5.1.
Descrição do Problema

O problema do gerenciamento de ativos e passivos de um investidor comum pode ser representado por um modelo complexo de programação linear que inclui um grande número de variáveis e restrições. O modelo apresentado é multiperíodo (anual), e representa o conjunto de ativos e passivos que compõem a situação financeira de um indivíduo.

A posição financeira do individuo ou de uma família pode ser verificada pela avaliação de seus balanços, além da contabilidade de suas rendas e despesas. Nesses balanços estão abordados os ativos e os passivos do investidor, e nas contas de renda e despesa estão contabilizadas as várias fontes de renda e as despesas, as quais os indivíduos ou famílias estão sujeitos.

O investidor precisa decidir periodicamente como distribuir os seus investimentos em diferentes classes de ativos e que taxa de contribuição do seu salário deve ser realizada para cobrir as suas obrigações.

Modelo Estocástico de Consiglio et. al.

O modelo proposto contém quatro tipos de variáveis: **1**. Variáveis de decisão, **2**. Variáveis de estado, **3**. Parâmetros determinísticos e **4**. Parâmetros estocásticos. Variáveis de decisão representam a solução ótima, enquanto os valores atribuídos às variáveis de estado são apenas consequência dos valores atribuídos às primeiras variáveis descritas. Essas duas variáveis definem por completo a situação do *portfolio* no período que está sendo investigado. Os parâmetros determinísticos, por sua vez, são parâmetro fixos, cujos valores são conhecidos *a priori*. Já os parâmetros estocásticos (ou fatores de risco) são parâmetros que variam. As variáveis utilizadas no modelo proposto estão descritas a seguir:

1. **Variáveis de decisão:**

x_i = Valor (percentual) investido no ativo *i*;

2. **Variáveis de estado:**

R_{Pt}^{s} = retorno do *portfolio* no período *t*, no cenário *s*;

y_{+t}^{s} = variável usada para medir o superávit sobre a meta, no cenário *s*;

y_{-t}^{s} = variável usada para medir o déficit sobre a meta, no cenário *s*;

3. **Parâmetros determinísticos:**

λ = índice determinante de aversão ao risco do investidor;

4. **Parâmetros estocásticos:**

$r_{i,t}^{s}$ = retorno do ativo *i* no período *t*, no cenário *s*;

rf_t^s = taxa livre de risco no período *t*, no cenário *s*;

g_t^s = taxa de crescimento (fluxo de caixa nominal) dos passivos no período *t*, no cenário *s*;

Conforme mencionado anteriormente, o modelo a ser desenvolvido neste capítulo utiliza programação linear estocástica multi-período.

Formulação Matemática

A formulação matemática do modelo descrito na seção anterior pode ser visualizada a seguir:

A principal questão do modelo é combinar perfeitamente os ativos e obrigações (ativos) para cada período. Com isso, pode-se escrever a equação abaixo:

$$A_t^s = L_t^s \tag{5.1}$$

para $\mathrm{t} = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{T}$ e para todo $\mathrm{s} \in \Omega$. Denota-se o final do horizonte de planejamento do investidor como (T), onde $\mathrm{t} = \{0, 1, 2, \dots, \mathrm{T}\}$, são pontos discretos no tempo.

Dessa forma, ao final de cada período *t*, os ativos e as obrigações são ajustadas para que a equação 5.1 seja verdadeira.

Dado a atual, no tempo 0, disponibilidade de ativos (A_0), pode-se descrever o montante final de ativos como (A_T). Este é o montante necessário para que o investidor cubra as suas obrigações (L_T) no final do horizonte de planejamento. A taxa de crescimento utilizada para capitalizar o fator A_0 é calculada da seguinte maneira:

$$A_T = A_0(1+g)^T \tag{5.2}$$

Ainda considerando a equação 5.1, o objetivo do modelo é alcançar o nível final de ativos (A_T) necessários para cobrir as obrigações do investidor (L_T), de forma que $A_T^s = L_T^s$. Com isso, pode-se reescrever a fórmula 5.2 da seguinte maneira:

$$L_T = A_0(1+g)^T \tag{5.3}$$

Realizando algumas manipulações na equação 5.3, é possível, então, encontrar a taxa de capitalização dos ativos, conhecida também como "Retorno Alvo".

$$L_T = A_0(1+g)^T \quad \rightarrow \quad \frac{L_T}{A_0} = (1+g)^T \tag{5.4}$$

$$(1+g) = \left(\frac{L_T}{A_0}\right)^{\left(\frac{1}{T}\right)} \quad \rightarrow \quad g = \left(\frac{L_T}{A_0}\right)^{\left(\frac{1}{T}\right)} - 1 \tag{5.5}$$

A incerteza relacionada ao mercado financeiro é capturada na forma de cenários discretos denotados por $\Omega = \{1, 2, \ldots, \mathrm{S}\}$.

O investidor escolhe o portfolio a partir de um universo de ativos disponíveis $\mathcal{I} = \{1,2, \ldots, \mathrm{N}\}$. Os retornos de cada ativo, do período $\mathrm{t}-1$ para o período t, é dado por $\mathrm{r}_{\mathrm{i,t}}^{\mathrm{s}}$ para cada $\mathrm{i} \in \mathcal{I}$ e $\mathrm{s} \in \Omega$.

A taxa de crescimento real considera taxas de inflação para cada cenário: $\mathrm{I}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}$.

$$g_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} = g + \mathrm{I}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{s}} \tag{5.6}$$

A riqueza inicial A_0 é alocada integralmente em ativos, em proporções não negativas:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad e \qquad x_i \geq 0$$

O retorno do portfolio é obtido de acordo com a seguinte equação:

$$R_{Pt}^{s} = \sum_{i}^{N} x_i r_{i,t}^{s} \tag{5.7}$$

para $t = 0, 1, 2, \dots, T$ e para todo $s \in \Omega$.

Conforme pode ser verificado, neste modelo desenvolvido pelos autores Consiglio, Cocco e Zenios (2002), as obrigações fazem o papel de objetivos financeiros que devem ser alcançados a cada período pelo portfolio de ativos, a fim de que possa garantir que no final do horizonte de planejamento o objetivo seja cumprido. Para tanto, a obrigação também deve crescer à taxa dada por g_t^s:

$$L_t^s = L_{t-1}^s (1 + g_t^s) \tag{5.8}$$

para $t = 0, 1, 2, \dots, T$ e para todo $s \in \Omega$.

Onde o valor de L_0 foi arbitrado como sendo igual a 1 (um), com o objetivo de normalizar os valores. Ou seja, se $L_0 = 4$, por exemplo, esse fator é normalizado de forma que seja igual a uma unidade (1).

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo primário é alcançar o nível final de ativos (A_T) necessários para cobrir as obrigações do investidor (L_T), o modelo foi construído de forma a cobrir qualquer déficit com injeção de capital e retirar qualquer superávit para cobrir desvios deficitários que ocorram no futuro. Dessa forma, ao final de cada período, os ativos são corrigidos de acordo com os rendimentos do portfolio e ajustados para o caso de ocorrência de um déficit ou superávit. Com isso, pode-se escrever a equação dinâmica dos ativos da seguinte maneira:

$$A_t^s = A_{t-1}^s (1 + R_{Pt}^s) - u_t^s + d_t^s \tag{5.9}$$

para $t = 0, 1, 2, \dots, T$ e para todo $s \in \Omega$.

Onde u_t^s é o valor do superávit calculado no período *t,* cenário s e d_t^s é o valor do déficit dado no período *t*, no cenário *s*. É importante ressaltar que, se em um período $u_t^s > 0$, nesse mesmo período $d_t^s = 0$ e vice-versa.

Considerando as equações 5.1, 5.8 e 5.9, é possível encontrar os fatores u_t^s e d_t^s:

Para o período *t = 1*, por exemplo, têm-se:

$$A_1^s = L_1^s \tag{5.10}$$

$$A_0^s(1 + R_{P1}^s) - u_1^s + d_1^s = \mathrm{L}_0^s(1 + g_1^s) \tag{5.11}$$

$$A_0^s(1 + R_{P1}^s) = \mathrm{L}_0^s(1 + g_1^s) + u_1^s - d_1^s \tag{5.12}$$

Se $u_1^s > 0$:

$$u_1^s = \max[A_0^s(1 + R_{P1}^s) - L_0^s(1 + g_1^s)\,, 0] \tag{5.13}$$

$$u_1^s = \max[L_0^s(1 + R_{P1}^s) - L_0^s(1 + g_1^s)\,, 0] \tag{5.14}$$

$$u_1^s = \max[(1 + R_{P1}^s - 1 - g_1^s)L_0^s\,, 0] \tag{5.15}$$

$$u_1^s = \max[(R_{P1}^s - g_1^s)L_0^s\,, 0] \tag{5.16}$$

$$u_1^s = \max[(R_{P1}^s - g_1^s)\,, 0]\, L_0^s \tag{5.17}$$

Generalizando para $\mathrm{t} = 0, 1, 2, \ldots, \mathrm{T}$ e para todo $\mathrm{s} \in \Omega$:

$$u_t^s = \max[(R_{Pt}^s - g_t^s), 0]\, L_{t-1}^s \tag{5.18}$$

De forma análoga, déficit pode ser definido conforme abaixo:

$$d_t^s = \max[-(R_{Pt}^s - g_t^s), 0]\, L_{t-1}^s \tag{5.19}$$

Pode-se dizer, então, que o valor de d_t^s depende somente da incompatibilidade entre o retorno do portfolio e a taxa de crescimento multiplicado pelo nível de passivo (obrigação) do período anterior.

O déficit total é dado pelo déficit total do período anterior, rentabilizado a taxa livre de risco mais a parcela do déficit, d_t^s, do período atual. A mesma lógica é válida para o superávit. Dessa forma, ambas as equações, de déficit e superávit, podem ser descritas conforme abaixo:

$$D_t^s = \mathrm{D}_{t-1}^s\left(1 + r_{f(t-1)}^s\right) + d_t^s \tag{5.20}$$

$$U_t^s = \mathrm{U}_{t-1}^s\left(1 + r_{f(t-1)}^s\right) + u_t^s \tag{5.21}$$

Onde:

$\mathrm{r}_{\mathrm{ft}}^{\mathrm{s}}$ = taxa de curto prazo para o período t sob o cenário s.

As equações de máximo (5.18) e (5.19) introduzem uma descontinuidade no modelo. Para que esse problema seja solucionado, as variáveis relacionadas abaixo deverão ser introduzidas nas equações.

$\mathrm{y}_{+\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}$ = variável usada para medir o retorno excessivo sobre a meta;

$\mathrm{y}_{-\mathrm{t}}^{\mathrm{s}}$ = variável usada para medir o déficit, abaixo da meta de retorno.

As referidas variáveis devem satisfazer a seguinte condição, para $\mathrm{t} = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{T}$ e para todo s ϵ Ω:

$$R_{Pt}^s - g_t^s = y_{+t}^s - y_{-t}^s \tag{5.22}$$

Observa-se, também, que as duas variáveis acima são não negativas (≥ 0).

Desse modo, substituindo a equação 5.22 nas equações 5.18 e 5.19, o déficit e o superávit também podem ser descritos da seguinte forma:

$$d_t^s = \mathrm{L}_{t-1}^s\, y_{-t}^s \tag{5.23}$$

$$u_t^s = \mathrm{L}_{t-1}^s\, y_{+t}^s \tag{5.24}$$

para $\mathrm{t} = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{T}$ e para todo s ϵ Ω.

O portfolio ótimo é escolhido de forma a maximizar o valor esperado do superávit final e minimizar o valor esperado do déficit final. A função objetivo é construída por meio de uma função utilidade linear, e o parâmetro de aversão ao risco introduz a escolha entre o problema de maximização do superávit e o de minimização do déficit. Matematicamente, pode-se escrever o que foi dito acima da seguinte maneira:

$$Maximizar \quad E(U_T - \lambda\, D_T) \tag{5.25}$$

Com isso, o parâmetro λ dá o peso relacionado à aversão ao risco e serve como uma penalização de flutuações negativas em torno do valor esperado. Quanto mais alto é este parâmetro, mais sensível a perdas é este investidor.

À exceção da equação de A_t^s – equação (5.10) –, todas as restrições relacionadas acima são lineares. Além disso, para simplificar o modelo, as expressões para U_t^s e D_t^s podem ser determinadas analiticamente, conforme pode ser visto abaixo:

Ao combinar as equações (5.20) e (5.23), observa-se a seguinte relação:

$$D_t^s = D_{t-1}^s\left(1 + r_{f(t-1)}^s\right) + y_{-t}^s L_{t-1}^s \tag{5.26}$$

Pode-se dizer que no tempo $t = 0$, nenhum déficit ocorreu e, portanto, $D_0 = 0$. Dessa forma, no tempo $t = 1$:

$$D_1 = D_0\left(1 + r_{f0}\right) + y_{-1}L_0 \tag{5.27}$$

No tempo $t = 2$, $D_2 = D_1(1 + r_{f1}) + y_{-2}L_1$ e substituindo D_1 pela equação acima, (5.27), obtém-se:

$$D_2 = y_{-1}\left(1 + r_{f1}\right) + y_{-2}(1 + g_1) \tag{5.28}$$

Para o tempo $t = 3$, pode-se obter:

$$\begin{gathered} D_3 = y_{-1}\left(1 + r_{f1}\right)\left(1 + r_{f2}\right) + y_{-2}(1 + g_1)\left(1 + r_{f2}\right) + \\ y_{-3}(1 + g_1)(1 + g_2) \end{gathered} \tag{5.29}$$

Como $L_t^s = L_{t-1}^s(1 + g_t^s)$, equação 5.8, pode-se descrever L_1 como:

$$L_1 = L_0(1 + g_1) \tag{5.30}$$

De forma similar, L_2 e L_3 podem ser escritos da seguinte maneira:

$$L_2 = L_1(1 + g_2) = L_0(1 + g_1)(1 + g_2) \tag{5.31}$$

$$L_3 = L_2(1 + g_3) = L_0(1 + g_1)(1 + g_2)(1 + g_3) \tag{5.31}$$

Como foi determinado anteriormente que $L_0 = 1$, podemos concluir, para todos os cenários que: $\mathrm{L_T} = \prod_{\mathcal{T}=1}^{\mathrm{T}}(1 + \mathrm{g}_{\mathcal{T}})$.

Estendendo a relação definida na equação 5.29 para o período T, conclui-se que:

$$D_T = \sum_{t=1}^{T} y_{-t} \prod_{\mathcal{T}=0}^{t-1}(1 + g_{\mathcal{T}}) \prod_{\mathcal{T}=t}^{\mathrm{T}-1}(1 + r_{f\mathcal{T}}) \tag{5.32}$$

Aplicando os mesmos argumentos, obtém-se:

$$U_T = \sum_{t=1}^{T} y_{+t} \prod_{\mathcal{T}=0}^{t-1}(1 + g_t) \prod_{\mathcal{T}=t}^{\mathrm{T}-1}(1 + r_{fT}) \tag{5.33}$$

Com isso, pode-se substituir as equações 5.32 e 5.33 na função objetivo, $Maximizar \quad E(U_T - \lambda\, D_T)$, a qual pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Maximizar\ \ E\Bigg[&\left(\sum_{t=1}^{T} y_{+t} \prod_{\mathcal{T}=0}^{t-1}(1 + g_t) \prod_{\mathcal{T}=t}^{\mathrm{T}-1}\big(1 + r_{fT}\big)\right) \\ &- \lambda \left(\sum_{t=1}^{T} y_{-t} \prod_{\mathcal{T}=0}^{t-1}(1 + g_{\mathcal{T}}) \prod_{\mathcal{T}=t}^{\mathrm{T}-1}\big(1 + r_{f\mathcal{T}}\big)\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{5.34}$$

Simplificando a equação acima pode ser formulada da seguinte maneira:

$$Maximizar\ \ E\left[\sum_{s\epsilon\Omega} \sum_{t=1}^{T} \left(y_{+t}^{s} - \lambda y_{-t}^{s}\right) \prod_{\mathcal{T}=0}^{t-1}(1 + g_t) \prod_{\mathcal{T}=t}^{\mathrm{T}-1}\big(1 + r_{fT}\big)\right] \tag{5.35}$$

O modelo de programação linear, então, pode ser escrito conforme formulação abaixo:

Modelo 5.1: Planejador Financeiro Pessoal – Modelo de Consiglio, Cocco e Zenios

Maximizar $\frac{1}{S}\sum_{s\epsilon\Omega}\sum_{t=1}^{T}[(y_{+t}^{s}-\lambda y_{-t}^{s})\ \phi^{s}(t,T)\ \psi^{s}(t)]$ (I)

sujeito a

$$R_{Pt}^{s} - g_{t}^{s} = y_{+t}^{s} - y_{-t}^{s} \qquad \text{(II)}$$

$$R_{Pt}^{s} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{it}^{s} \qquad \text{(III)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad \text{(IV)}$$

$$x_i \geq 0 \qquad \text{(V)}$$

$i = 1,2,3 \ldots N$ e t = 1,...,T;
$s \epsilon \Omega$

Onde:

$$\phi^{s}(t,T) = \prod_{\mathcal{T}=t}^{\mathrm{T}-1}(1 + r_{ft}^{s}) \qquad (5.36)$$

$$\psi^{s}(t) = \prod_{\mathcal{T}=0}^{t-1}(1 + g_{t}^{s}) \qquad (5.37)$$

Com condições de limite: $\phi^{s}(\mathrm{T},\mathrm{T}) = 1$ e $\psi^{s}(1) = 1$.

Ressalta-se que foi considerado, no âmbito do modelo, que todos os cenários possuem a mesma probabilidade de ocorrência.

A meta do modelo acima é maximizar o valor esperado do superávit final, subtraído do déficit final, sujeitando-se às seguintes restrições:

Restrição de balanço:

A restrição II garante que no período *t* nível de riqueza será igual à diferença entre o superávit e o déficit obtidos. Essa restrição pode ser visualizada no Modelo 5.1

$$R_{Pt}^{s} - g_{t}^{s} = y_{+t}^{s} - y_{-t}^{s}$$

Restrição do portfolio:

A restrição III, presente no Modelo 5.1, abaixo, é utilizada para estabelecer o valor do retorno do portfolio (variável de estado). Ela determina que o valor do retorno esperado do portfolio é igual ao valor investido no ativo, multiplicado pelo retorno obtido sob cada ativo.

$$R_{Pt}^{s} = \sum_{i=1}^{N} x_i r_{it}^{s}$$

Como o modelo só considera três ativos: ações, moeda e renda fixa; pode-se reescrever a equação acima como:

$$R_{Pt}^{s} = x_1 r_{1t}^{s} + x_2 r_{2t}^{s} + x_3 r_{3t}^{s}$$

Restrição de Investimento do capital:

As próximas restrições presentes no modelo descrevem o nível de investimento do capital. A restrição (IV) garante que todo o capital disponível seja investido. Enquanto a restrição (V) assegura que não haverá investimento negativo.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \ \text{ e } \ x_i \geq 0$$