

3

EXEMPLOS NUMÉRICOS: ANÁLISES ESTÁTICAS NÃO-LINEARES

3.1

INTRODUÇÃO

Nesse capítulo são realizadas análises estáticas de alguns exemplos estruturais com resposta fortemente não-linear. Em particular, concentra-se a atenção em dois exemplos estruturais clássicos: o arco senoidal abatido e o os pórticos em L.

Além de possibilitar um melhor entendimento da influência de parâmetros geométricos e físicos na resposta não-linear e, conseqüentemente, na estabilidade destas estruturas, estas análises são suficientes para ilustrar a eficiência da metodologia apresentada no Capítulo 2 em se resolver problemas estruturais estáticos com forte não-linearidade. Entretanto, vários outros exemplos estruturais podem ser encontrados em trabalhos que utilizaram a mesma base computacional, dos quais pode-se citar a tese de doutorado de Silveira (1995), as dissertações de mestrado de Galvão (2000) e Pinheiro (2003). A Figura 3.1 exibe um resumo das estruturas estudadas neste capítulo.

Os arco circulares ilustrados nas Figura 3.1a e 3.1b exibem caminhos de equilíbrio extremamente não-lineares. Para o primeiro, são usados como referência a solução analítica apresentada em Wood e Zienkiewicz (1977), e os resultados apresentados pelo segundo arco (Figura 3.1b) são comparados com os fornecidos por Yang e Kuo (1994).

O arco senoidal sob carregamento distribuído da Figura 3.1c tem seus resultados comparados aos apresentados por Bergan (1980) e, em seguida, é feito um estudo da influência de imperfeições de carregamento e da rigidez das ligações nos apoios.

Finalmente, é desenvolvida uma análise paramétrica detalhada para os pórticos em L (Figura 3.1d). Dois casos clássicos deste tipo de pórtico têm seus resultados comparados aos da literatura: o pórtico de Lee e o pórtico de Roorda.

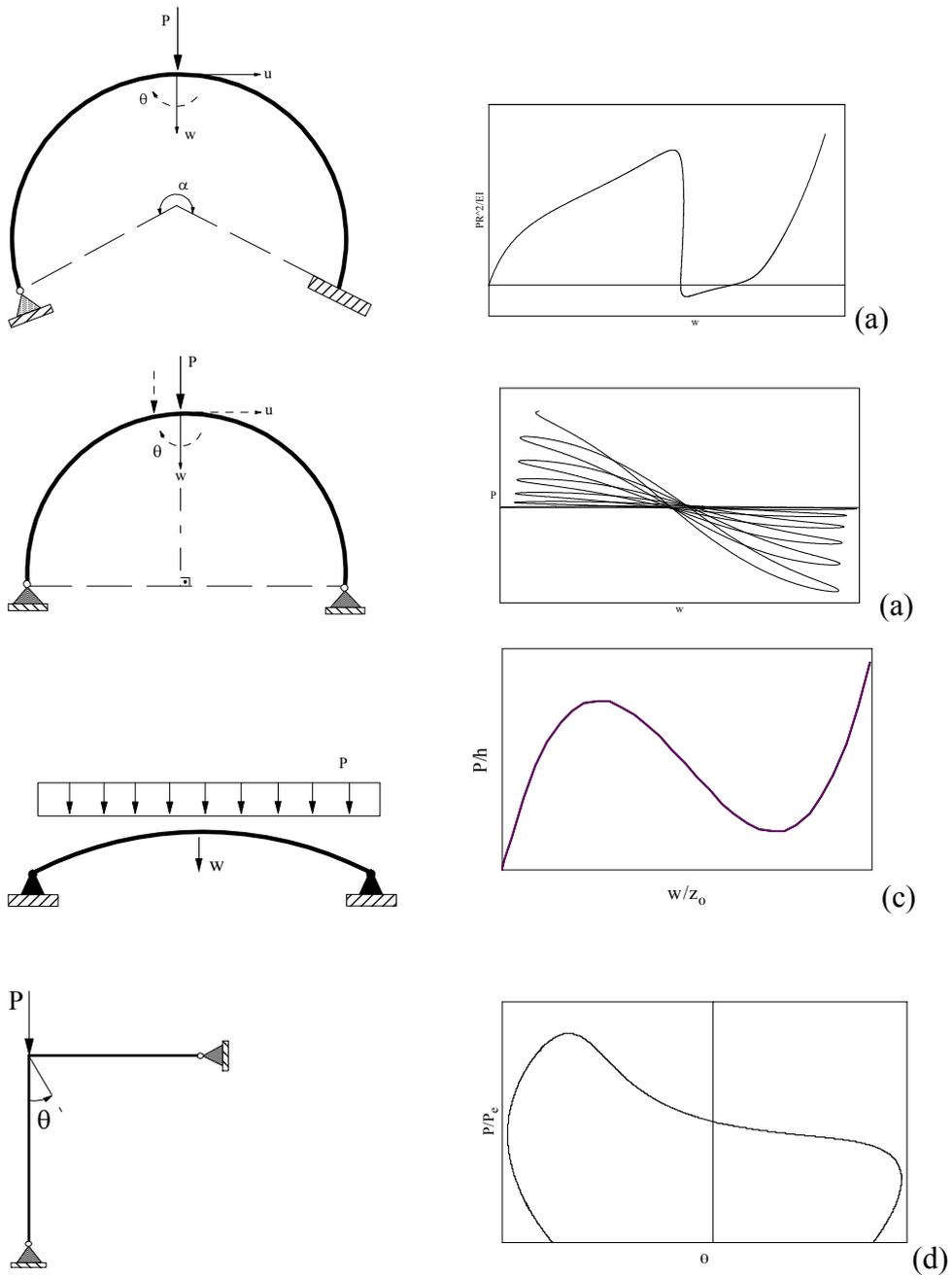


Figura 3.1: Sistemas estruturais analisados neste capítulo.

3.2

ARCOS

Os arcos esbeltos são sistemas estruturais que podem exibir, dependendo da magnitude e tipo de carregamento, assim como das condições de apoio, um comportamento fortemente não-linear. Com o objetivo então de verificar a eficiência das formulações apresentadas no capítulo anterior (ou Cap 2) serão analisadas nesta seção as respostas não-lineares de três arcos considerando o carregamento aplicado estaticamente. Tratam-se de exemplos clássicos de problemas de equilíbrio e estabilidade que possuem resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura.

Nestas análises a foi utilizado o método de Newton-Raphson modificado junto com as técnicas do *comprimento de arco cilíndrico* ou do *deslocamento generalizado* (Apêndice A). Os incrementos automáticos do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, foram também controlados por essas duas técnicas. Por fim, adotou-se, em geral, uma tolerância $\zeta = 10^{-4}$ para indicar a convergência da resposta.

3.2.1

Arco circular rotulado-engastado

Como primeiro exemplo tem-se o arco circular rotulado-engastado submetido a uma carga pontual centrada em seu eixo de simetria, conforme indicado na Figura 3.2. Para modelar esse sistema estrutural, adotou-se no presente trabalho uma malha de 32 elementos finitos.

Na Figura 3.3 são exibidas as trajetórias de equilíbrio do arco, indicando como o parâmetro de carga adimensional PR^2/EI varia em função do deslocamento transversal w e da rotação θ no topo do arco. A solução analítica para esse problema, até o primeiro ponto limite de carga, foi fornecida por Wood e Zienkiewicz (1977); Kouhia e Mikkola (1989) apresentaram resultados numéricos obtidos através de um modelo formado por 64 elementos. Observe a boa concordância dos resultados obtidos pelo presente trabalho com aqueles das referências citadas.

A Figura 3.4 exhibe as configurações deformadas do arco nas configurações A, B, C e D indicadas na Figura 3.3a.

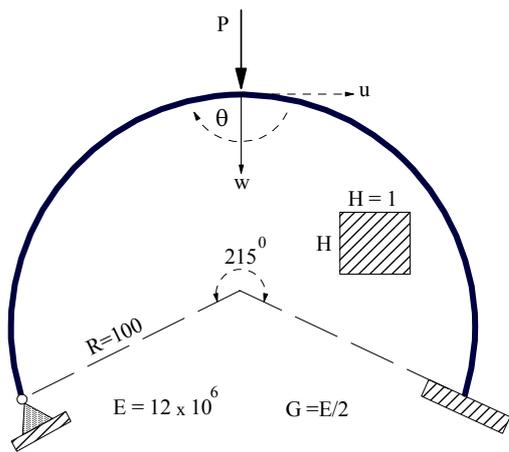
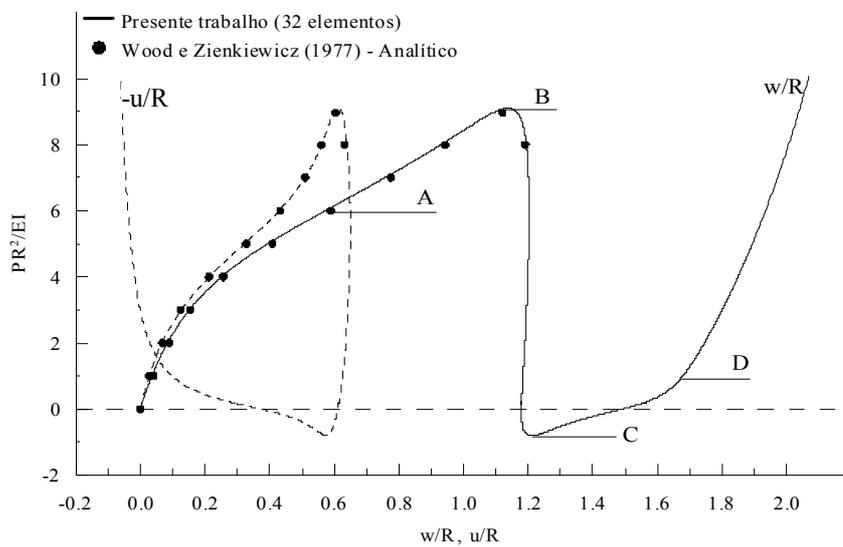
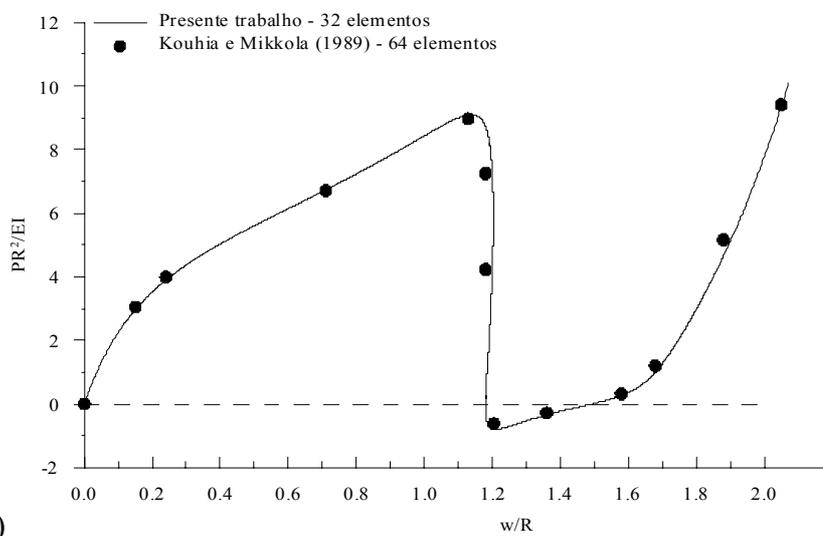


Figura 3.2: Arco circular rotulado-engastado sob carga pontual centrada.

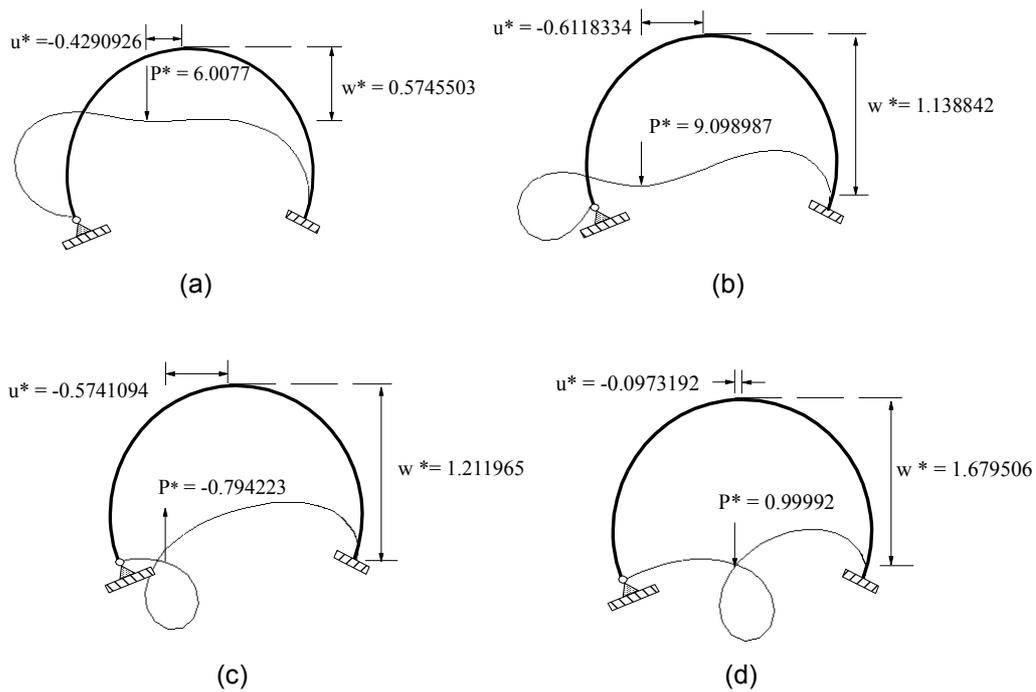


(a)



(b)

Figura 3.3: Trajetórias de equilíbrio do arco circular rotulado-engastado.



$$P^* = PR^2/EI; \quad w^* = w/R; \quad u^* = u/R$$

Figura 3.4: Configurações deformadas do arco circular rotulado-engastado.

3.2.2

Arco circular biarticulado

A resposta não-linear de um arco circular biarticulado, quando submetido às duas situações de carga concentrada indicadas na Figura 3.5, será estudada nesta seção.

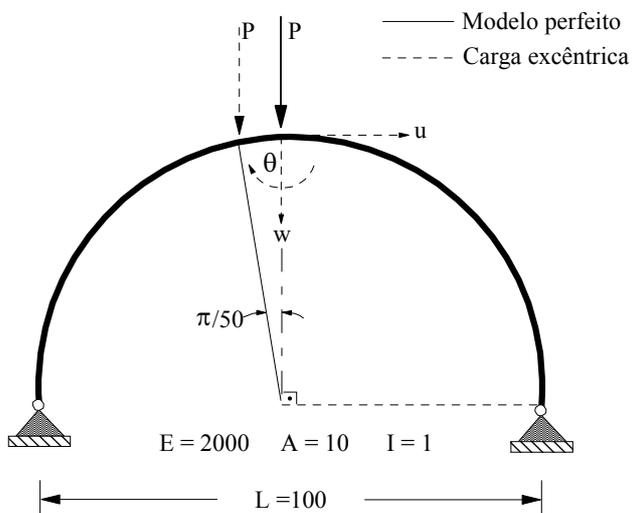
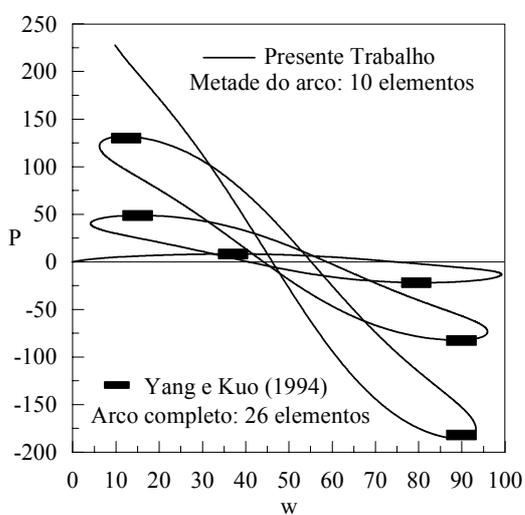


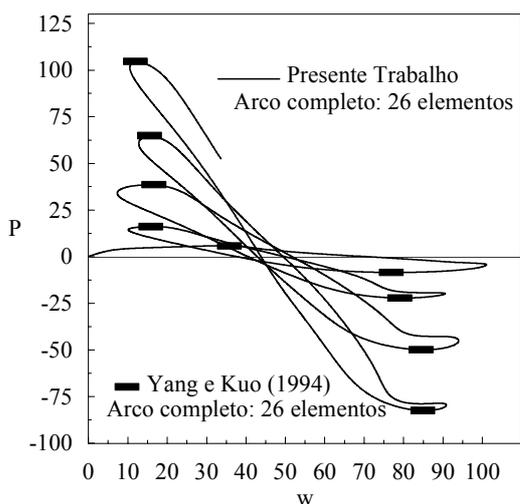
Figura 3.5: Arco circular biarticulado.

Para realizar a análise do modelo perfeito com carga pontual perfeitamente centrada, apenas metade do arco foi discretizada e adotou-se 10 elementos finitos. No caso do modelo com carga excêntrica, foi adotada uma malha composta de 26 elementos para modelar o arco completo.

Essas duas situações de carga provocam respostas fortemente não-lineares do arco, como mostradas através das trajetórias de equilíbrio ilustradas nas Figuras 3.6a e 3.6b. Observe que resultados obtidos pelo presente trabalho apresentam boa concordância com os disponíveis na literatura (Yang e Kuo, 1994).



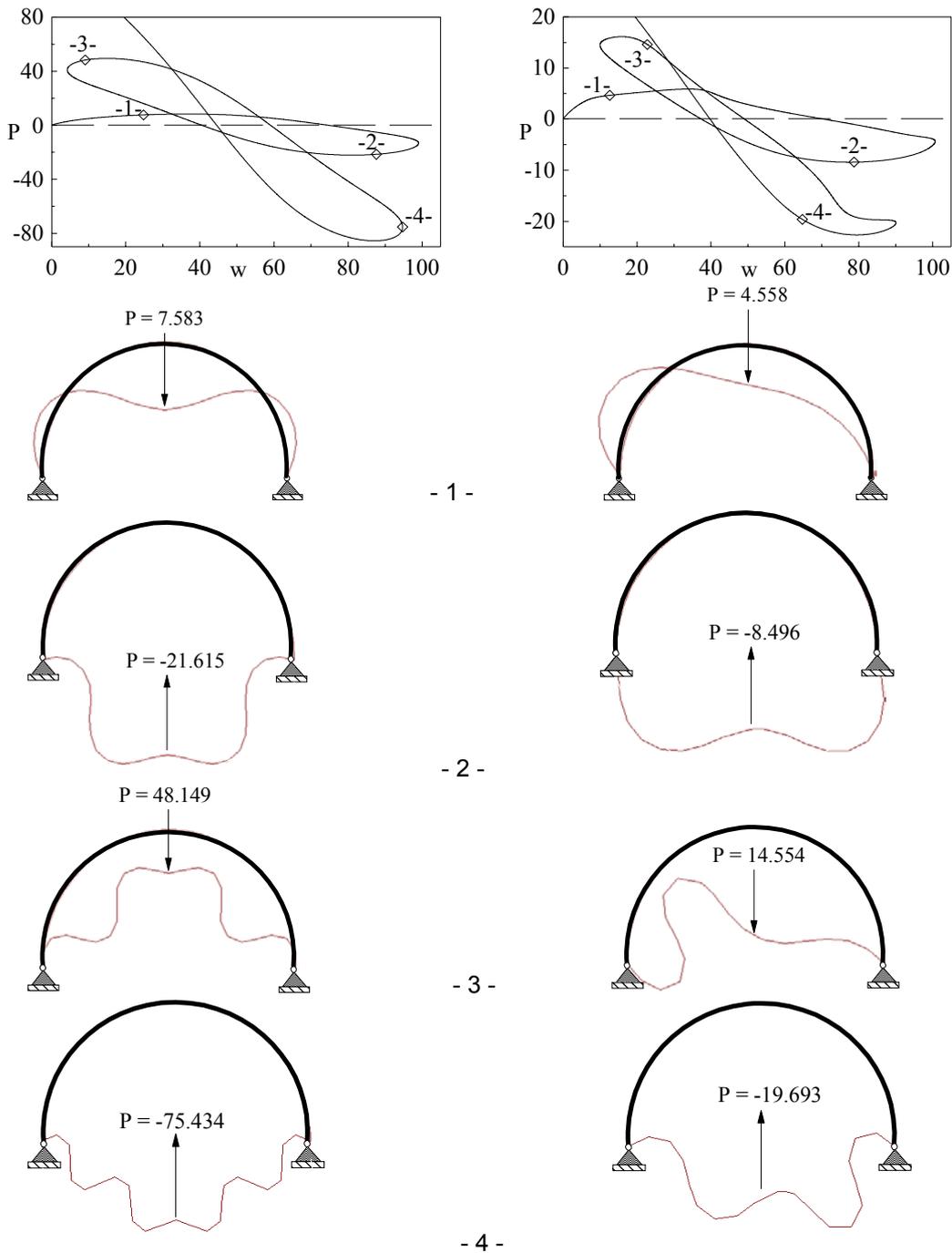
(a) Modelo simétrico.



(b) Modelo assimétrico.

Figura 3.6: Arco circular biarticulado: trajetórias de equilíbrio

Para essas duas situações de carga o arco apresenta uma resposta cíclica. Esse comportamento pode ser notado através da Figura 3.7, onde são mostradas as deformadas da estrutura em alguns pontos das duas trajetórias. Dessa observação conclui-se que, após cada ciclo, os resultados tornam-se menos precisos, pois o número de elementos utilizados no modelo estrutural torna-se menos eficiente na representação da estrutura.



(a) Carga centrada.
 Figura 3.7: Configurações deformadas da estrutura.

3.2.3

Arco senoidal sob carregamento distribuído

Pretende-se nesta seção analisar a influência de imperfeições nas condições de apoio e de carregamento na resposta não-linear do arco senoidal apresentado na Figura 3.8. Entretanto, considera-se inicialmente o sistema estrutural clássico encontrado na literatura (Bergan, 1980), ou seja, o arco biarticulado e submetido a uma carga vertical P uniformemente distribuída, como mostrado na mesma figura.

A resposta do arco senoidal biarticulado a esse carregamento uniforme é apresentada através da trajetória de equilíbrio não-linear fornecido na Figura 3.9, onde mais uma vez fica comprovada a eficiência e exatidão das formulações implementadas neste trabalho. Na Tabela 3.2 são comparados os valores obtidos da carga P nos pontos críticos da trajetória de equilíbrio.

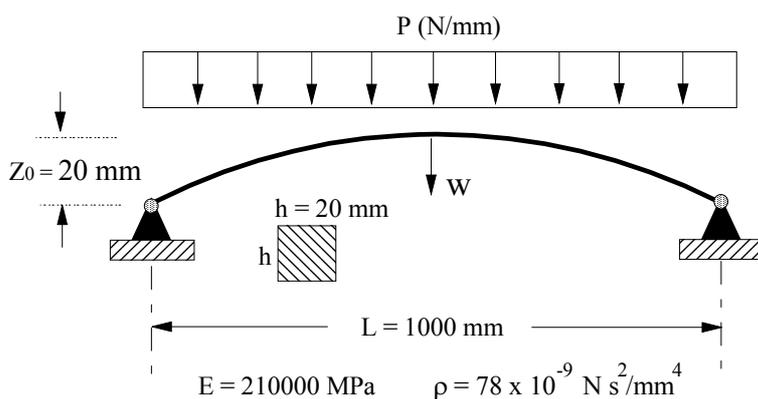


Figura 3.8: Arco senoidal biarticulado sob carga distribuída.

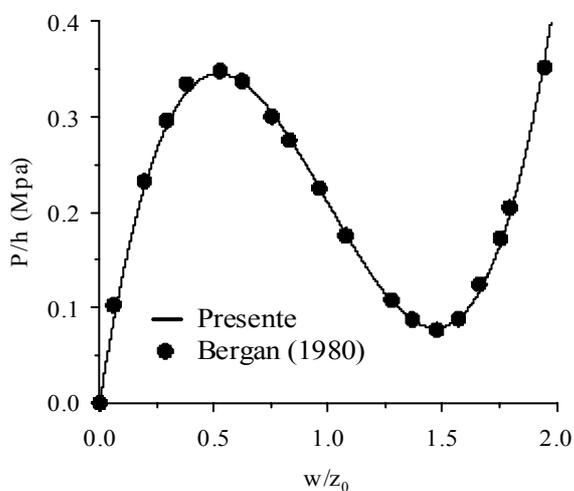


Figura 3.9: Trajetória de equilíbrio do arco senoidal biarticulado.

Com o objetivo de verificar a sensibilidade da resposta do arco senoidal a variações na rigidez dos apoios, analisa-se novamente o mesmo sistema, mas agora com ligações semi-rígidas, como ilustrado na Figura 3.10. Primeiramente, consideram-se as ligações flexíveis nas duas extremidades do arco com o mesmo valor da rigidez à rotação Sc (Figura 3.10a); em seguida, valores diferentes de Sc são adotados para essas ligações flexíveis (Figura 3.10b).

As trajetórias de equilíbrio para a primeira situação de apoio são apresentadas na Figura 3.11a. É interessante observar que o aumento da rigidez Sc ameniza o efeito de perda de estabilidade por ponto limite de carga seguido de salto (*snap-through*). Para Sc maiores que $20EI/L$, não se observam mais a presença de pontos críticos ao longo da trajetória.

A sensibilidade do arco à diferentes valores de Sc das ligações pode ser verificada através das trajetórias apresentadas na Figura 3.11b. Para esse estudo, procurou-se fixar a rigidez da extremidade esquerda do arco considerando $Sc_1 = 5EI/L$; e variou-se a rigidez da ligação do apoio da direita seguindo a relação $Sc_2 = Sc_1 (1 - \alpha)$. Note que a medida que a diferença entre Sc_1 e Sc_2 aumenta, como o acréscimo de α , o valor da carga crítica diminui e a inclinação da trajetória pós-crítica torna-se mais acentuada.

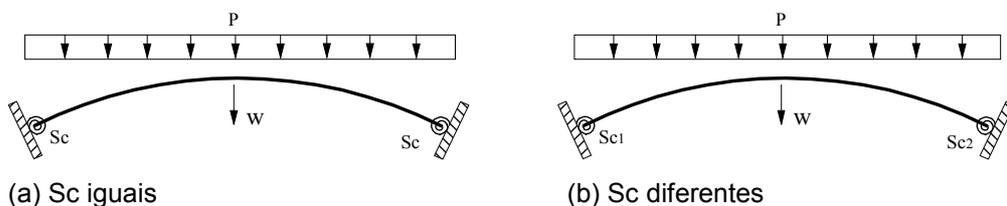
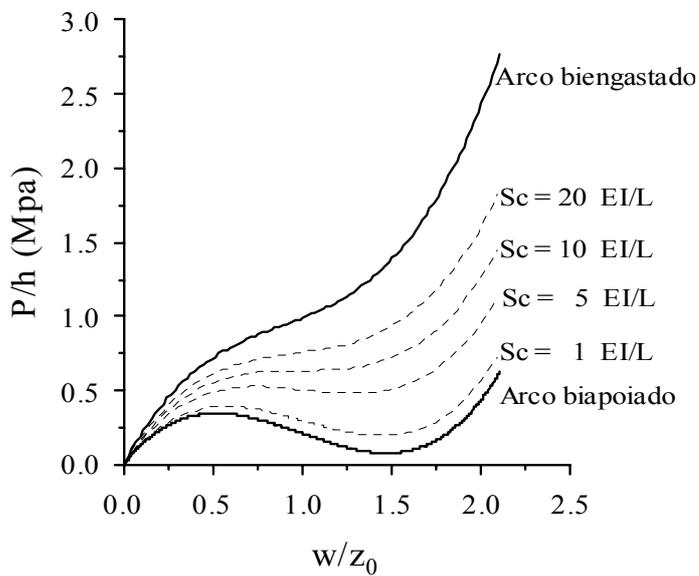


Figura 3.10: Arco senoidal com ligações semi-rígidas.

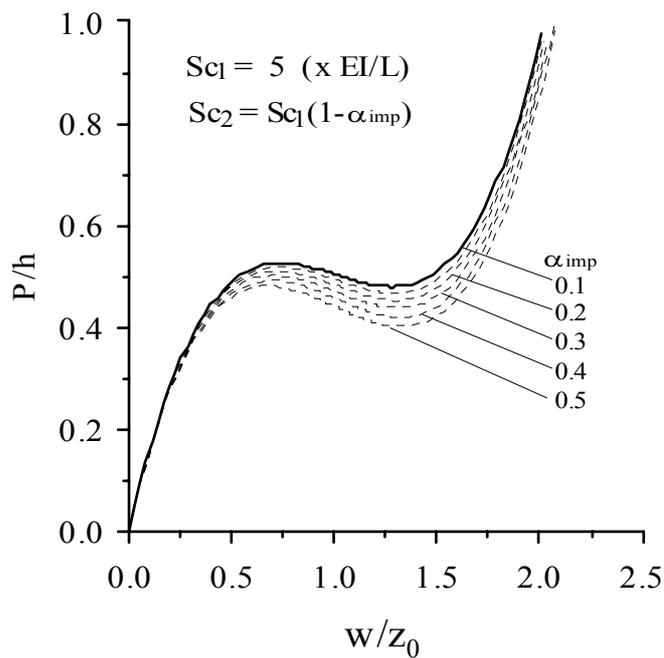
Por fim, analisam-se os efeitos de um carregamento imperfeito na resposta não-linear do arco com ligações idênticas semi-rígidas ($Sc = 5EI/L$). Como observado, essa imperfeição é associada a um carregamento distribuído adicional, de magnitude αP , introduzido do lado direito do arco. Os caminhos não-lineares de equilíbrio, para diferentes valores de α , são fornecidos na Figura 3.11.

Observa-se que à medida o valor do parâmetro α é incrementado, aumentando-se conseqüentemente a assimetria do carregamento, o valor da carga crítica diminui. Entretanto, essas imperfeições não ocasionaram o surgimento de

pontos de bifurcação, o que levaria a uma perda muito mais drástica da capacidade de carga.



(a) Sc iguais (Figura 3.10a)



(b) Sc diferentes (Figura 3.10b)

Figura 3.11: Trajetórias de equilíbrio do arco senoidal como ligações semi-rígidas.

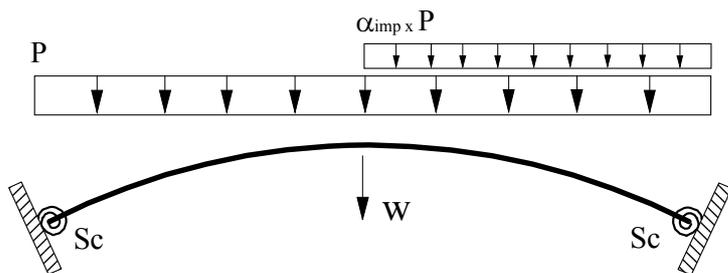


Figura 3.12: Arco senoidal com ligações semi-rígidas e carregamento imperfeito.

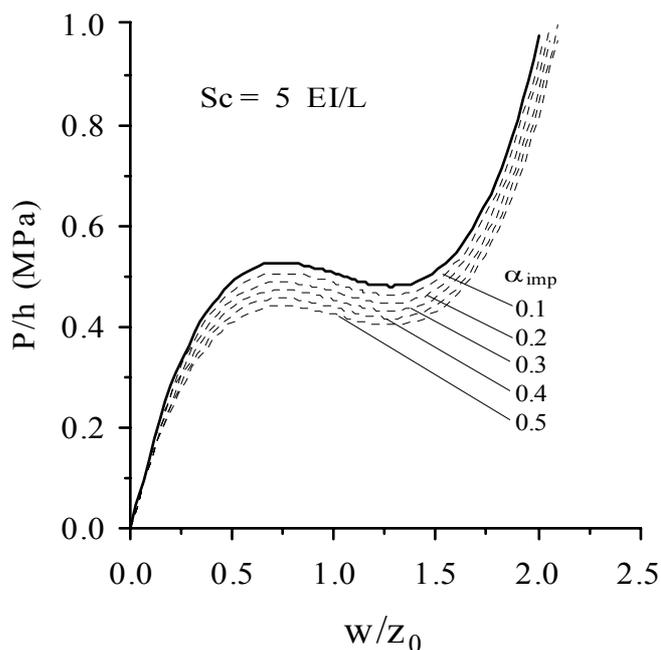


Figura 3.13: Trajetórias de equilíbrio do arco senoidal com ligações semi-rígidas e carregamento imperfeito.

3.2.3.1

Estudo do parâmetro geométrico z_0

Na literatura são encontrados alguns trabalhos que apresentam uma relação entre geometria do arco e o tipo de trajetória de equilíbrio que este deve apresentar. Em Schreyer e Masur (1966) foi definido o parâmetro geométrico $\lambda = 2z_0/h$, onde z_0 é a altura do arco e h a altura da seção transversal, como já indicado pela Figura 3.8. Neste mesmo trabalho, foram apresentados os seguintes limites de comportamento para um arco circular biengastado submetido a carregamento distribuído:

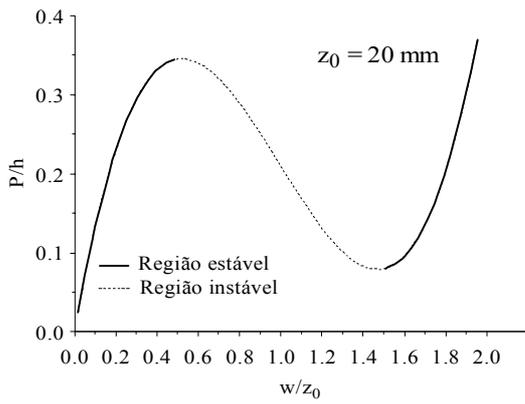
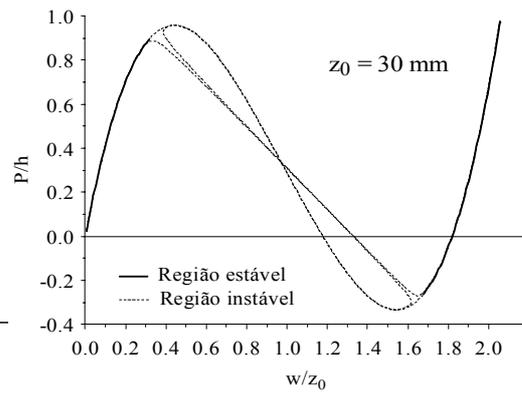
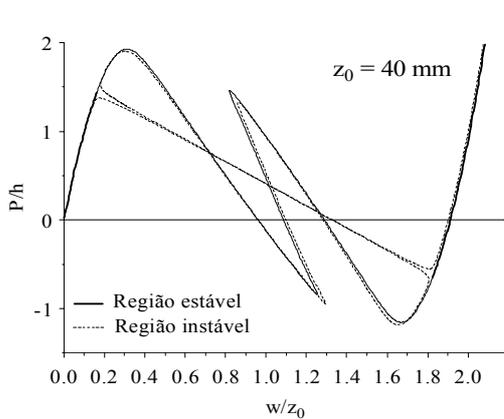
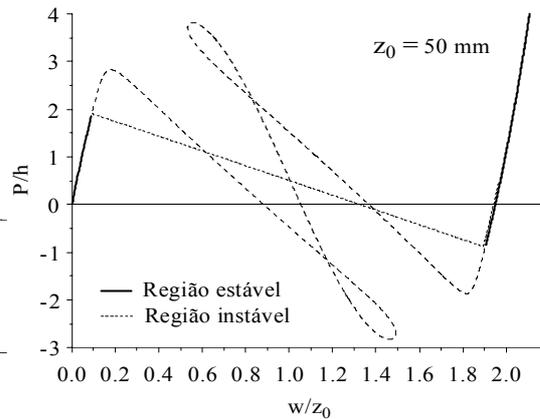
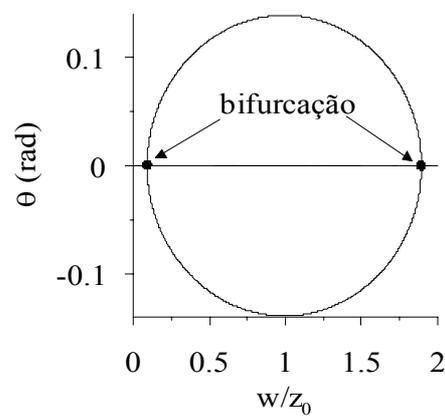
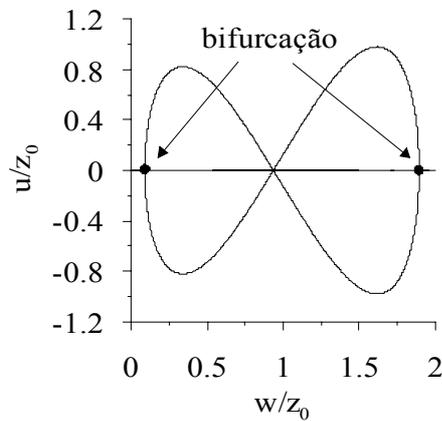
- (i) Se $2.85 > \lambda \rightarrow$ A trajetória de equilíbrio não apresenta pontos limites;
- (ii) Se $5.02 \geq \lambda \geq 2.85 \rightarrow$ Ocorrência de ponto limite seguido por salto dinâmico
- (iii) Se $5.74 \geq \lambda \geq 5.02 \rightarrow$ Ocorrência de ponto de bifurcação no ramo instável após o ponto limite;
- (iv) Se $\lambda \geq 5.74 \rightarrow$ Ponto de bifurcação ocorre antes do ponto limite;

Um estudo semelhante foi apresentado para um arco circular biarticulado em Dickie e Broughton (1971), e os seguintes limites de comportamento foram fornecidos:

- (v) Se $1.11 > \lambda \rightarrow$ A trajetória de equilíbrio não apresenta pontos limites;
- (vi) Se $2.24 \geq \lambda \geq 1.11 \rightarrow$ Ocorrência de ponto limite seguido por salto dinâmico
- (vii) Se $2.65 \geq \lambda \geq 2.24 \rightarrow$ Ocorrência de ponto de bifurcação no ramo instável após o ponto limite;
- (viii) Se $\lambda \geq 2.65 \rightarrow$ Ponto de bifurcação ocorre antes do ponto limite;

No presente trabalho é fixado o valor de $h = 20$ mm. Deste modo, a análise da influencia da geometria do arco no tipo de resposta estrutural se resume no estudo da influencia da altura z_0 do arco senoidal no comportamento estrutural.

A Figura 3.11 exhibe as trajetórias de equilíbrio para valores de z_0 iguais, respectivamente, a 20, 30, 40 e 50 mm. Para obter as trajetórias do modo simétrico dos arcos foi utilizado o procedimento de modelar apenas metade do arco, restringindo no nó do topo a deslocabilidade horizontal e a rotação. O modo assimétrico foi obtido com o modelo do arco inteiro e a introdução de pequenas imperfeições na geometria.

(a) $z_0 = 20$ mm(b) $z_0 = 30$ mm(c) $z_0 = 40$ mm(d) $z_0 = 50$ mm(e) $z_0 = 50$ mm(f) $z_0 = 50$ mmFigura 3.14: Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de z_0 .

A primeira observação feita em relação aos caminhos de equilíbrio é o surgimento de um ponto de bifurcação ao longo do caminho não-linear para valores de z_0 acima de 20 mm. A este ponto de bifurcação segue uma perda de estabilidade do arco. O caminho pós-crítico encontrado tangencia a trajetória do

modo simétrico no ponto de bifurcação e volta a tangenciar este caminho em um outro ponto do caminho fundamental na região associada a configurações pós-flambagem logo após o ponto limite mínimo. Para se entender a forma desse caminho pós-crítico, apresenta-se nas Figuras 3.14e e 3.14f duas projeções deste caminho para o arco com z_0 igual a 50 mm.

Uma outra observação importante é que à medida que se reduz o valor de z_0 , o ponto limite associado ao modo assimétrico se aproxima do ponto limite do modo simétrico. Para tentar compreender melhor esse fenômeno, serão analisados no Capítulo 5 os modos de vibração e a variação das frequências naturais para estes diferentes valores de z_0 .

Em seguida, considerando-se o arco com altura $z_0 = 50$ mm, que, como foi visto, apresenta um ponto de bifurcação bem definido, pretende-se avaliar a sensibilidade da estrutura a imperfeições de carga e também de apoio.

A imperfeição de carregamento pode ser modelada como mostra a Figura 3.15. A sensibilidade da estrutura à imperfeição de carregamento é mostrada na Figura 3.16.

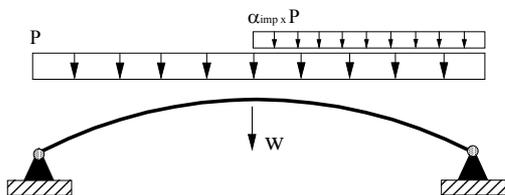


Figura 3.15: Imperfeição de carga.

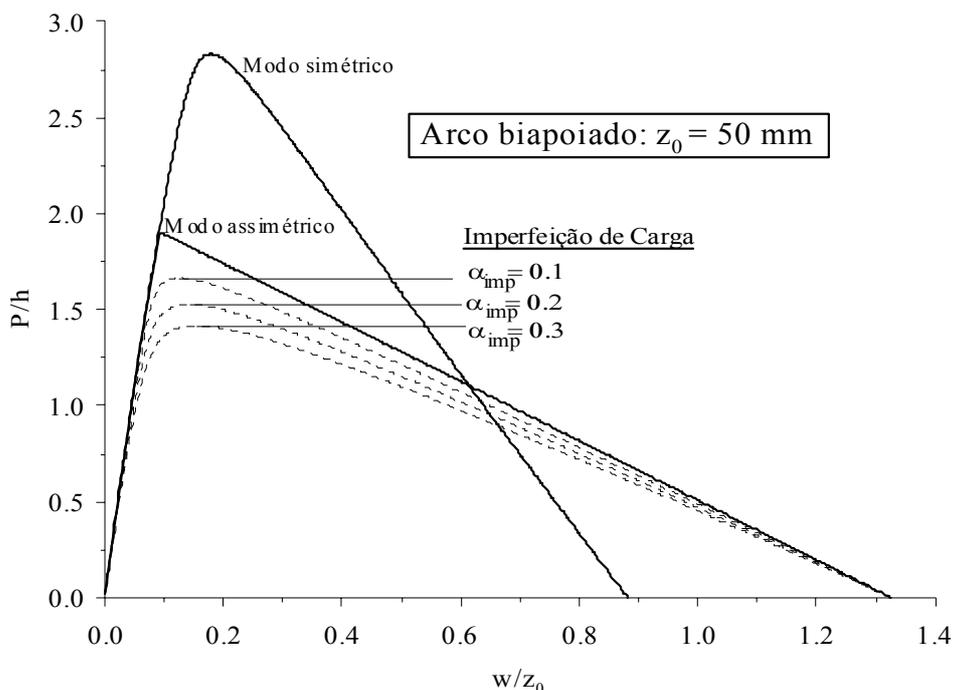


Figura 3.16: Sensibilidade à imperfeição de carga: arco biapoiado com $z_0 = 50 \text{ mm}$.

Para o presente arco o efeito de imperfeições iniciais é extremamente relevante, reduzindo consideravelmente a capacidade de carga.

Da mesma forma deve-se avaliar a sensibilidade da estrutura na presença de imperfeições dos apoios. Supondo um arco apoiado em suas extremidades por conexões semi-rígidas de Rigidez Sc_1 e $Sc_2 = (1 + \alpha_{imp})Sc_1$ (Figura 3.17), obtém-se, como mostrado na Figura 3.18, duas situações de imperfeição: $\alpha_{imp} > 0$, em que a imperfeição de Sc_2 implica em uma maior rigidez na conexão e $\alpha_{imp} < 0$, em que a imperfeição de Sc_2 implica em redução de rigidez.

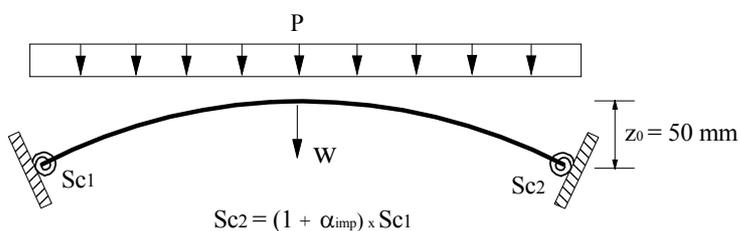


Figura 3.17: Arco $z_0 = 50 \text{ mm}$ e apoios semi-rígidos: $Sc_1 = Sc_2 = 5 \text{ EI/L}$.

É interessante observar que um acréscimo de rigidez em uma das conexões leva a estrutura à perda de simetria fazendo-a perder capacidade de carga, entretanto, a variação na magnitude destes acréscimos para estrutura assimétrica não provoca grandes variações no primeiro ponto de bifurcação. A diferença é

mais sensível no segundo ponto de bifurcação. Por outro lado, a redução na rigidez de uma das ligações é fortemente sentida no primeiro ponto de bifurcação.

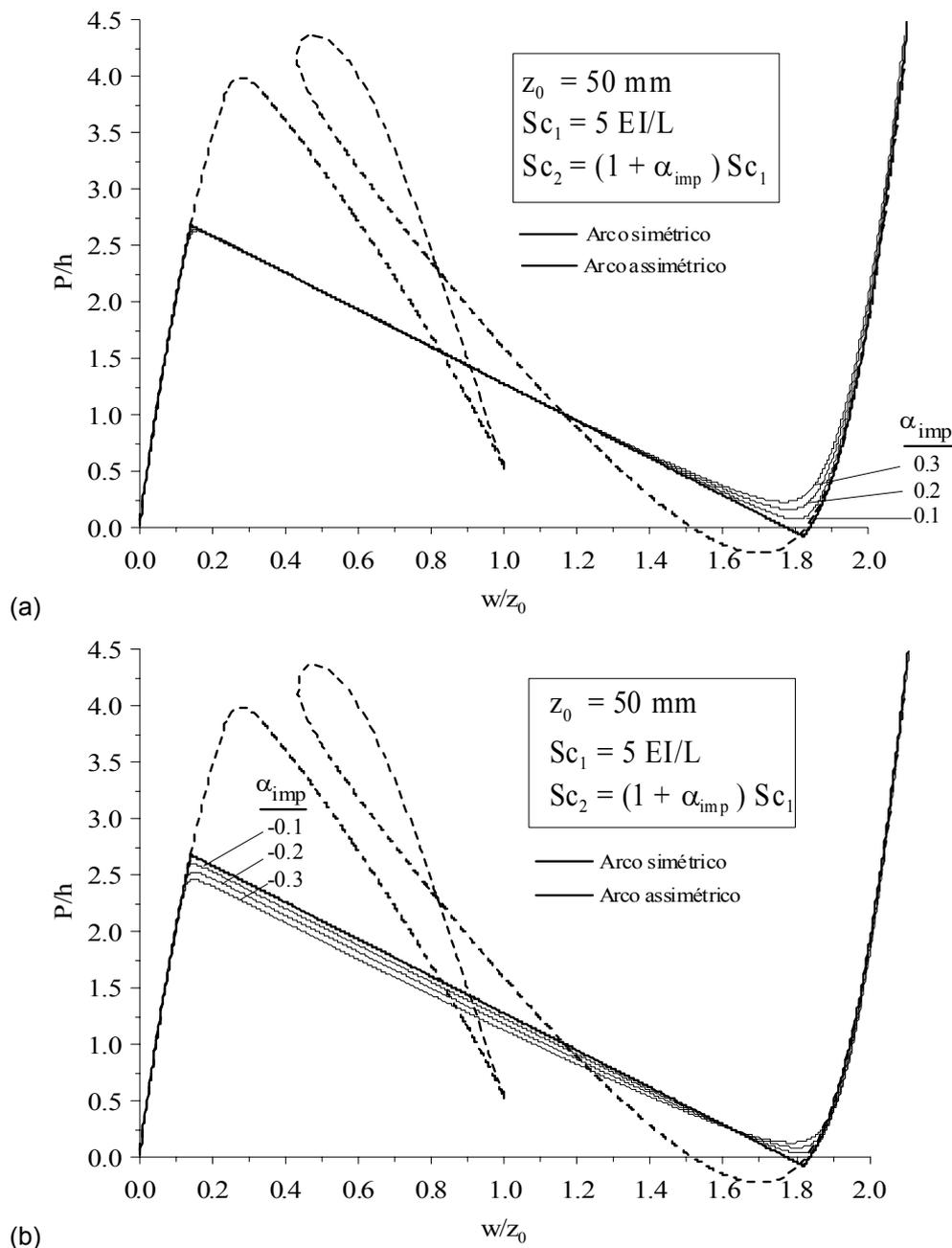


Figura 3.18: Arco $z_0 = 50$ mm e apoios semi-rígidos: $Sc_1 = 5 EI/L$ e $Sc_2 = Sc_1 (1 + \alpha_{imp})$.

No Capítulo 5 é apresentada uma análise paramétrica detalhada envolvendo o problema de vibração livre e resposta dinâmica não-linear para essa família de arcos.

3.3

PÓRTICOS EM L

Em algumas estruturas aperticadas esbeltas sujeitas a grandes deflexões, certos membros podem apresentar configurações de equilíbrio crítico e, principalmente, configurações pós-críticas, fortemente dependentes das características dos membros adjacentes. Esse é o caso dos pórticos em L, conhecidos na literatura como *L-Frames*. A Figura 3.19 mostra dois exemplos clássicos de pórticos em L, o *Pórtico de Lee* (Lee et al., 1968; Schweizerhof e Wriggers, 1986; Galvão et al., 2004) e o *Pórtico de Roorda* (Roorda, 1965; Koiter, 1967; Roorda e Chilver, 1970).

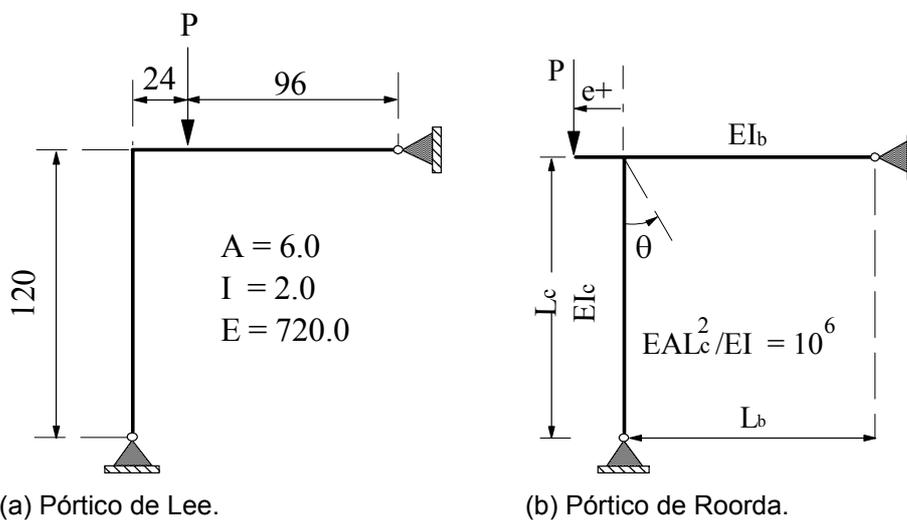


Figura 3.19 : Exemplos de pórticos em L.

Em 1967, Koiter (1967) mostrou que alguns pórticos em L apresentavam bifurcação assimétrica e, conseqüentemente, sua capacidade pós-crítica era afetada por imperfeições. Seus resultados puderam ser comparados com os obtidos experimentalmente por Roorda (1965). Desde então, o comportamento pós-crítico desse tipo de estrutura tem sido fartamente estudado. Vários autores no passado (Koiter, 1967; Roorda e Chilver, 1970; Brush e Almroth, 1975; Rizzi *et al.*, 1980; Gioncu e Ivan, 1983; Bazant e Cedolin, 1991), estudaram a região inicial da trajetória pós-crítica dessas estruturas através de expansões assintóticas da energia potencial ou das equações de equilíbrio que governam seu comportamento não-linear. Esses estudos normalmente tinham a preocupação de

determinar a inclinação e a curvatura do início da resposta pós-crítica, pois, como se sabe, esses dois parâmetros são suficientes para caracterizar o tipo de bifurcação, podendo ainda ser usados para estimar a sensibilidade da estrutura a imperfeições.

Essas soluções aproximadas podem, entretanto, descrever somente a região inicial do comportamento pós-crítico do pórtico e ainda gerar erros significativos quando houver grandes deslocamentos ou grandes imperfeições no sistema estrutural.

Devido à constatação da forte não-linearidade no seu comportamento pós-crítico, os *pórticos em L* têm sido usados por vários autores para testar a eficiência de várias formulações de elementos finitos, bem como o desempenho computacional de várias estratégias de solução de sistemas de equações não-lineares (Salerno e Lanzo, 1997; Meek e Xue, 1996; Pacoste e Eriksson, 1997; Waszczyszyn e Janus-Michalska, 1998; Silveira et al., 2000; Galvão e Silveira, 2000).

Entretanto, pouca coisa se sabe sobre a influência de vários parâmetros, tais como, condições de contorno, imperfeições geométricas e de carregamento, e rigidez da barra lateral no comportamento pós-crítico dessas estruturas aperticadas.

Será realizada então nesta seção um estudo para verificar a influência desses parâmetros na resposta não-linear e na sensibilidade a imperfeições dos *pórticos em L*. Serão mostrados inicialmente, no entanto, alguns resultados que validam as formulações apresentadas no Capítulo 2.

Em todas essas análises se adotou, em função da eficiência computacional observada, o método de Newton-Raphson modificado junto com a técnica do comprimento de arco cilíndrico para resolver o sistema de equações não-lineares. A tolerância utilizada para indicar a convergência em cada passo de carga foi de $\xi=10^{-3}$.

3.3.1

Pórtico de Lee

A primeira estrutura a ser analisada é a mostrada na Figura 3.20. Esse sistema estrutural, normalmente conhecido como *Pórtico de Lee* (Lee *et al.*, 1968), é composto por duas barras idênticas, uma vertical e outra horizontal, conectadas rigidamente entre si e com apoios articulados em suas extremidades. Uma única carga vertical P é aplicada na barra horizontal, a uma distancia de 24 unidades de comprimento da ligação.

A modelagem desse sistema estrutural neste trabalho foi feita usando-se 20 elementos finitos do mesmo tamanho (10 para cada barra). Para começar o processo de solução não-linear, adotou-se um parâmetro inicial de carga $\Delta\lambda_1^0 = 0.7 P_e$, com $P_e = \pi^2 EI/L^2$. As configurações deformadas do pórtico nos pontos críticos, bem como as trajetórias de equilíbrio referentes aos deslocamentos verticais e horizontais do nó onde a carga é aplicada são mostradas na Figura 3.21.

Como pode ser visto, a estrutura exibe um comportamento fortemente não-linear, com dois pontos limites de carga e dois pontos limites de deslocamento ao longo do caminho não-linear de equilíbrio. Note também que os resultados obtidos pelo presente trabalho são praticamente iguais aos fornecidos por Schweizerhof e Wriggers (1986), demonstrando a eficiência da formulação e metodologia de solução não-linear utilizadas aqui.

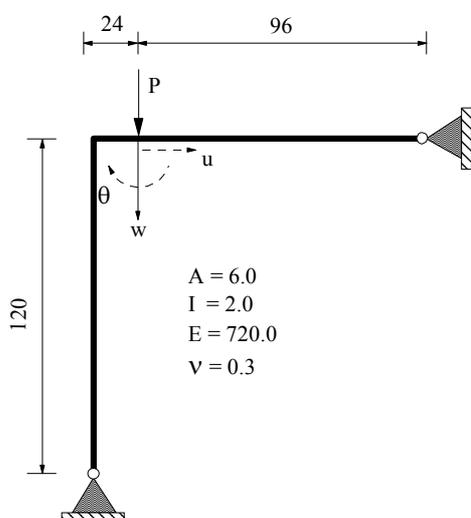


Figura 3.20: Pórtico de Lee.

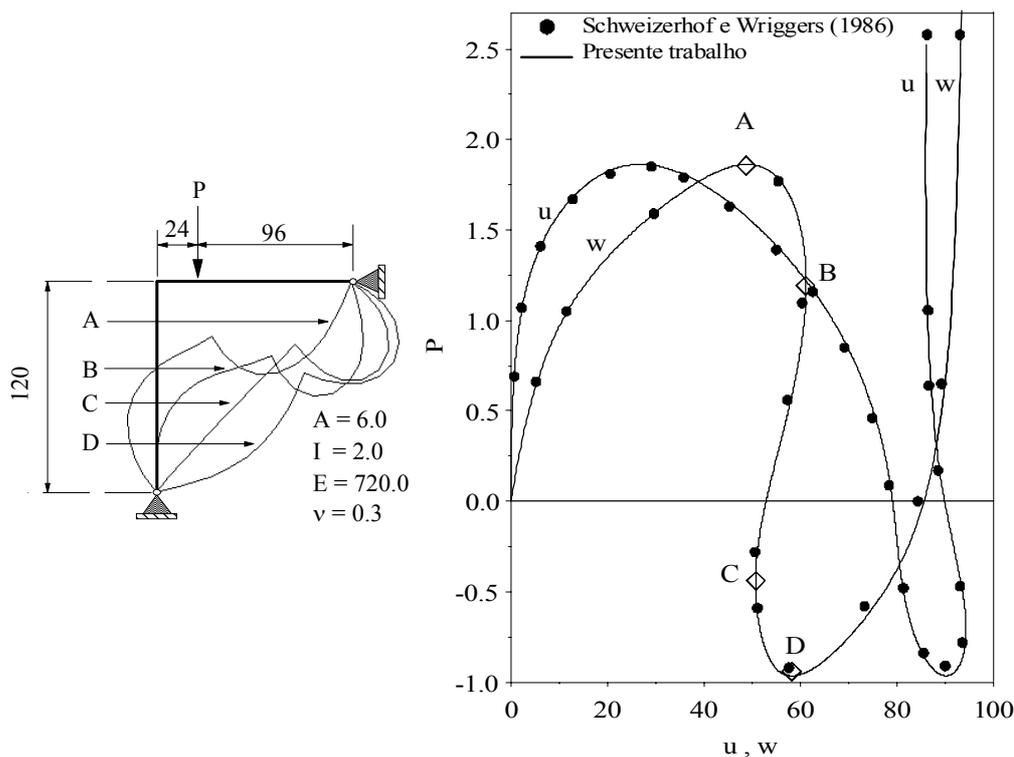


Figura 3.21: Trajetórias de equilíbrio do Pórtico de Lee.

3.3.2

Pórtico de Roorda

O segundo sistema estrutural a ser analisado é ilustrado na Figura 3.22a e é conhecido na literatura como o *pórtico de Roorda* (Roorda, 1965). Como será mostrado, trata-se de uma estrutura que apresenta bifurcação assimétrica.

Como no caso do pórtico de Lee, considerou-se 10 elementos para modelar cada membro e, com a finalidade de se obter as duas regiões da trajetória pós-crítica (bifurcação assimétrica), foram inseridas pequenas excentricidades ($e = L/10000$) na carga P (Figura 3.22b), gerando assim: (i) uma excentricidade positiva (θ^-) para a carga aplicada na extremidade livre de um elemento horizontal de comprimento $e = L/10000$, inserido à esquerda da conexão entre as barras; e (ii) uma excentricidade negativa (θ^+) para a carga aplicada na extremidade direita de um elemento de comprimento $e = L/10000$, à direita da ligação.

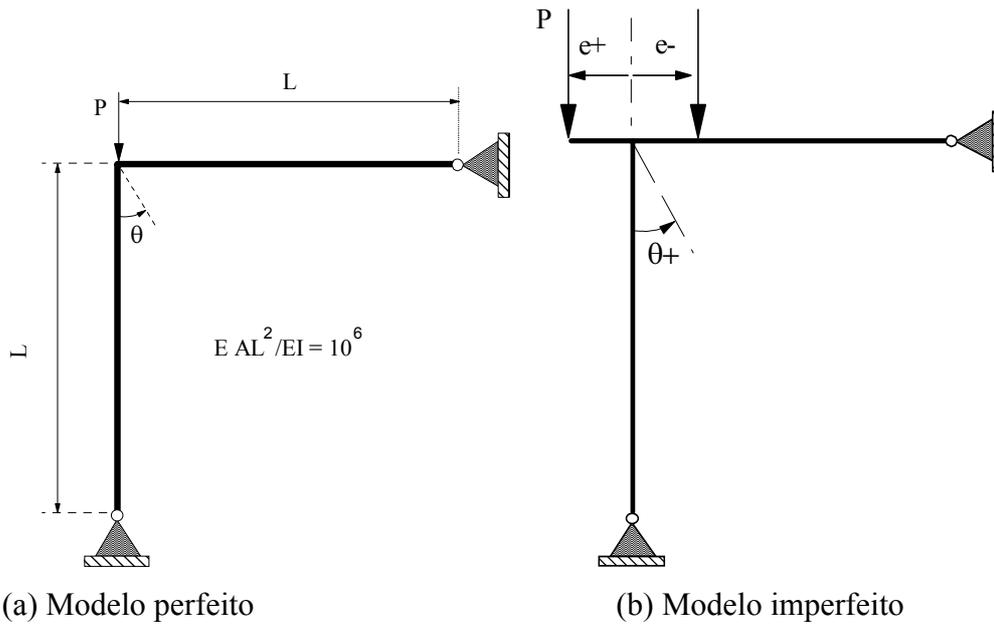


Figura 3.22: Pórtico de Roorda.

A Figura 3.23 fornece a variação do parâmetro de carga P/P_e , $P_e = \pi^2 EI/L^2$, com a rotação θ do nó de ligação entre as duas barras. Nessa figura, valores positivos de θ representam rotações anti-horárias do nó.

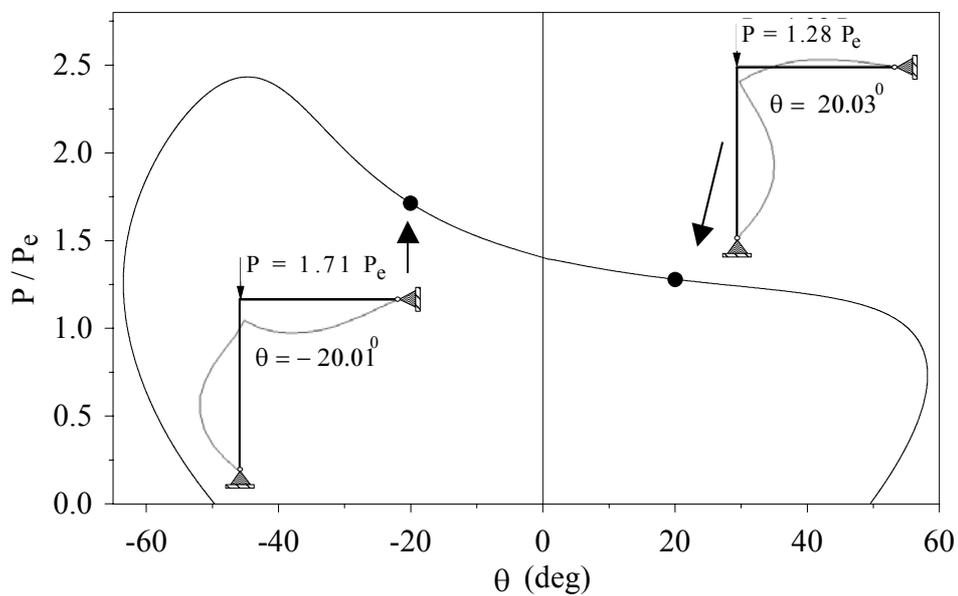


Figura 3.23: Trajetórias de equilíbrio do Pórtico de Roorda.

Observe que o pórtico apresenta bifurcação assimétrica, isto é, a resposta pós-crítica apresenta uma inclinação finita no ponto de bifurcação. Isso distingue

o comportamento de pórticos em geral do comportamento de colunas, que exibem uma bifurcação simétrica estável.

Esse comportamento do pórtico de Roorda acontece devido à influência do incremento das forças cisalhantes e encurtamento axial das barras em função dos seus respectivos deslocamentos. Assim, quando a coluna flamba para a direita ($\theta+$), um incremento de força cisalhante é produzido na viga fazendo com que as forças axiais de compressão na coluna sejam maiores que a carga aplicada, e assim a resistência do sistema diminui com o incremento da deformação do sistema. Nesse caso, então, a resposta pós-crítica é instável.

Analogamente, se o pórtico se desloca para esquerda ($\theta-$), uma força de tração secundária é induzida na coluna. Como consequência, a carga externa que a estrutura pode suportar cresce com o incremento da deformação do sistema. Nesse caso a configuração pós-crítica é estável e a inclinação da trajetória cresce até um ponto limite associado a grandes deslocamentos, após o qual este segmento da trajetória pós-crítica também se torna instável.

Através de uma análise clássica de estabilidade do pórtico de Roorda, chega-se a seguinte expressão para a carga crítica (Bazant e Cedolin, 1991):

$$P_{cr} = 1.407 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.1)$$

Através de expansões assintóticas das equações de equilíbrio que governam o comportamento não-linear do pórtico, Koiter (1967) obteve a seguinte aproximação para o início de sua da trajetória pós-crítica:

$$P/P_{cr} = 1 + 0.3805 \theta \quad (3.2)$$

que representa uma reta tangente à trajetória no ponto de bifurcação. Uma aproximação mais refinada foi introduzida por Rizzi et al. (1990), considerando, além da inclinação inicial, a curvatura inicial da trajetória pós-crítica, ou seja:

$$P/P_{cr} = 1 - 0.3805 \theta + 0.4638 \theta^2 \quad (3.3)$$

Os resultados obtidos através das Equações (3.2) e (3.3) são comparados na Figura 3.24 com a parte inicial da trajetória de equilíbrio secundária obtida no presente trabalho. A mesma figura fornece os pontos obtidos experimentalmente por Roorda (1965). Observe, mais uma vez, a boa concordância entre as soluções apresentadas para pequenos valores da rotação θ . Entretanto, como esperado, à medida que o valor de θ aumenta, cresce a diferença entre as respostas obtidas no presente trabalho e as das aproximações analíticas. Há também uma concordância satisfatória entre os resultados do presente trabalho e os resultados experimentais de Roorda (1965), atestando assim a precisão das formulações não-lineares empregadas aqui.

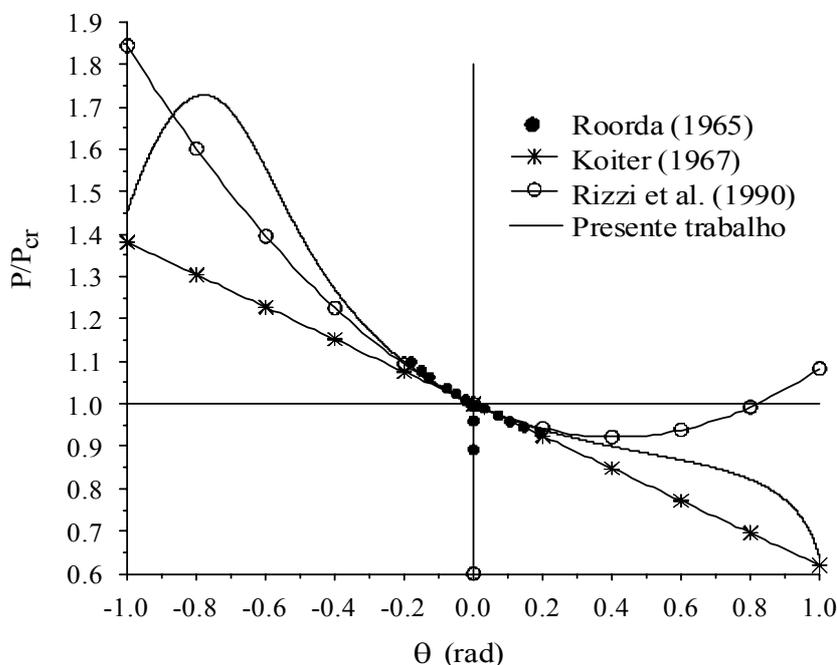


Figura 3.24: Pórtico de Roorda: comparação dos resultados numéricos e analíticos.

3.3.3

Estudo paramétrico

Enquanto várias soluções analíticas aproximadas são encontradas na literatura, poucos são os trabalhos destinados a uma análise paramétrica detalhada desses pórticos em L (Galvão et al., 2000). Entretanto, este estudo é essencial para a compreensão da influência dos parâmetros geométricos, condições de contorno e

imperfeições no comportamento crítico e pós-crítico dessas estruturas, podendo ser de grande ajuda a projetistas estruturais na avaliação da influência das barras de suporte lateral na estabilidade de estruturas.

Nas próximas seções será investigada a influência das condições de bordo, das imperfeições (carregamento) e da flexibilidade da ligação viga-coluna, no comportamento do pórtico com as propriedades físicas e geométricas estudado por Roorda (1965).

3.3.3.1

Influência das condições de apoio

Com o intuito de verificar a influência das condições de apoio, quatro tipos de suporte são considerados na extremidade direita da viga, como mostrado na Figura 3.25. As trajetórias de equilíbrio pós-crítico para essas quatro condições de bordo da viga são fornecidos na Figura 3.26 junto com as configurações deformadas dos pórticos para o valor de $\theta = \pm 10^\circ$. Neste gráfico, como nos demais, o carregamento é adimensionalizado pela divisão por $P_e = \pi^2 EI/L^2$.

Dessas trajetórias pode-se concluir que as condições de bordo da viga têm grande influência no comportamento do pórtico não apenas no que diz respeito ao valor da carga crítica, mas também na sua resposta pós-crítica e sensibilidade a imperfeição. Observe que para a condição de bordo C, quando é permitido o movimento horizontal do apoio, o valor da carga crítica é uma pequena fração da carga crítica do pórtico original de Roorda. Adicionalmente, o pórtico exibe uma bifurcação assimétrica, indicando que em situações práticas reais a carga máxima seria ainda menor.

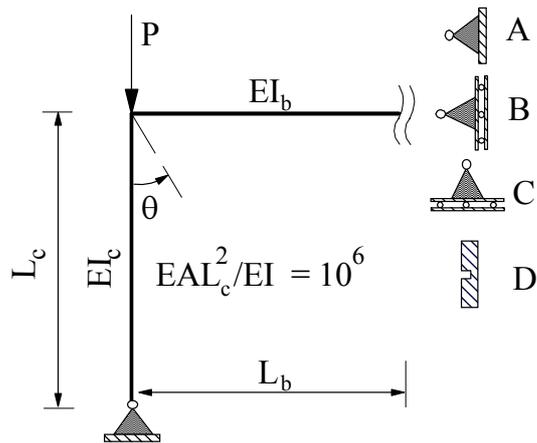
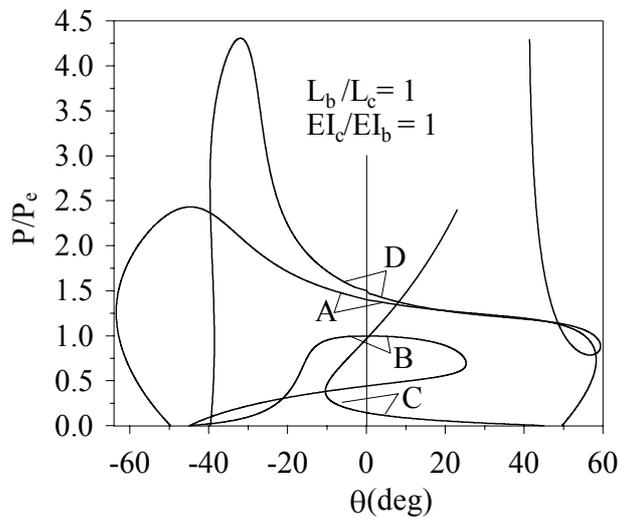
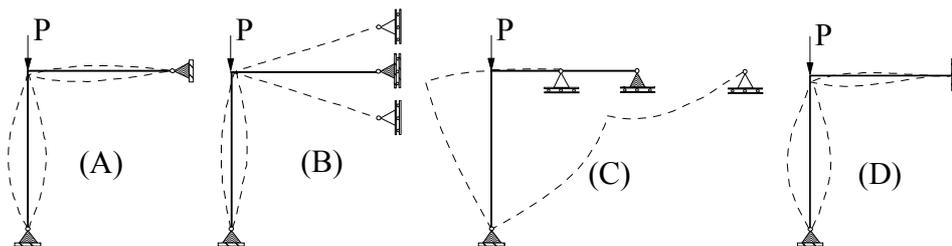


Figura 3.25: Pórtico em L com diferentes condições de apoio.



(a) Trajetórias de equilíbrio



(b) Configurações deformadas

Figura 3.26: Trajetórias de equilíbrio e configurações deformadas de um pórtico em L com diferentes condições de apoio.

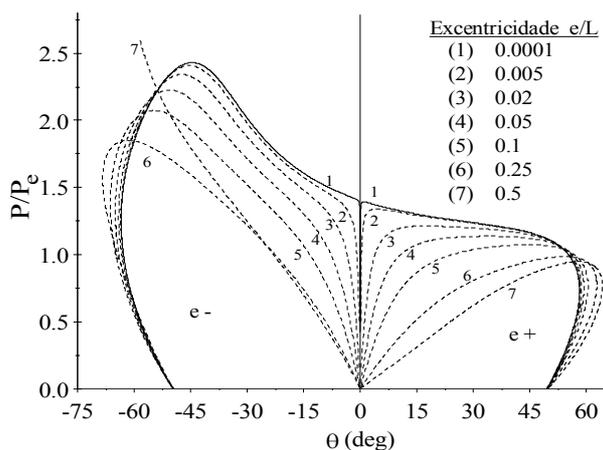
3.3.3.2

Influência da posição do carregamento

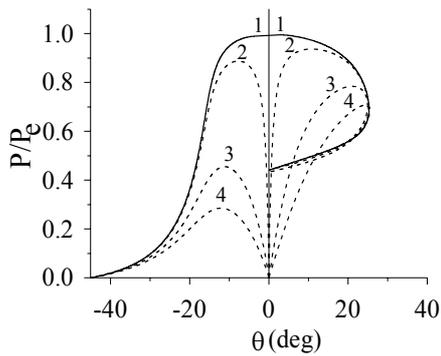
A influência da posição da carga P aplicada à esquerda ou à direita da coluna (Figura 22b), para as diferentes condições de contorno A, B, C e D da seção anterior (Figura 3.25), é mostrada nas Figuras 3.27a,b,c,d, onde o parâmetro de carga P/P_e é apresentado em função da rotação θ (ponto nodal localizado na conexão das barras) para diferentes valores do parâmetro e ($0 \leq e \leq L/2$), sendo e definido como a distancia entre o eixo da coluna e o ponto de aplicação da carga como mostrado na Figura 3.22b.

Analisando essas figuras pode-se constatar que, de um modo geral, quando há uma excentricidade positiva de carregamento, o pórtico exibe uma capacidade de carga P_{lim} inferior a P_{cr} ; e quanto maior a imperfeição, ou inclinação inicial do caminho pós-crítico, menor é P_{lim} . Quando a excentricidade é negativa, a resposta do sistema estrutural é estável até atingir uma carga limite associada a grandes deslocamentos e rotações. Mas, mesmo nessa situação, a excentricidade tem um efeito negativo na redução da rigidez efetiva do pórtico, como mostrado através da inclinação inicial da trajetória.

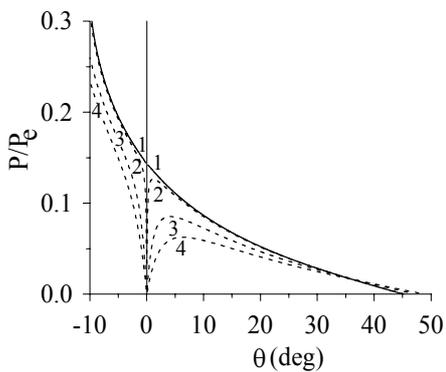
Para o caso de apoio B, quando a excentricidade tende a zero, a carga crítica do sistema estrutural tende à carga crítica de Euler.



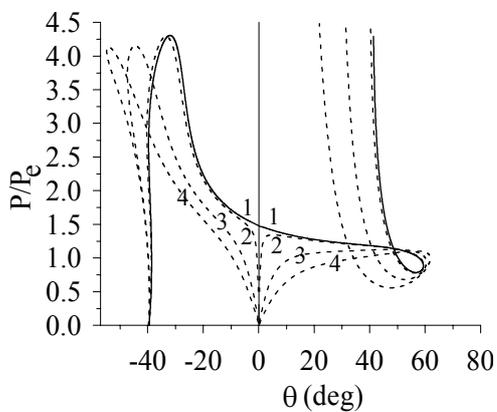
(a) Caso A



(b) Caso B



(c) Caso C



(d) Caso D

Figura 3.27: Trajetórias de equilíbrio do pórtico em L para carga em diferentes posições.

Por fim, a variação da carga limite do pórtico imperfeito (caso A) com o parâmetro e/L é mostrado na Figura 3.28, onde, como pode ser observado, os valores de P_{lim} obtidos no presente trabalho apresentam boa concordância com os obtidos experimentalmente por Roorda (1965) e analiticamente por Brush e Almroth (1975) através da expressão:

$$P_{\text{lim}}/P_{\text{cr}} = 1 - 1.15(e/L)^{1/2} \quad (3.4)$$

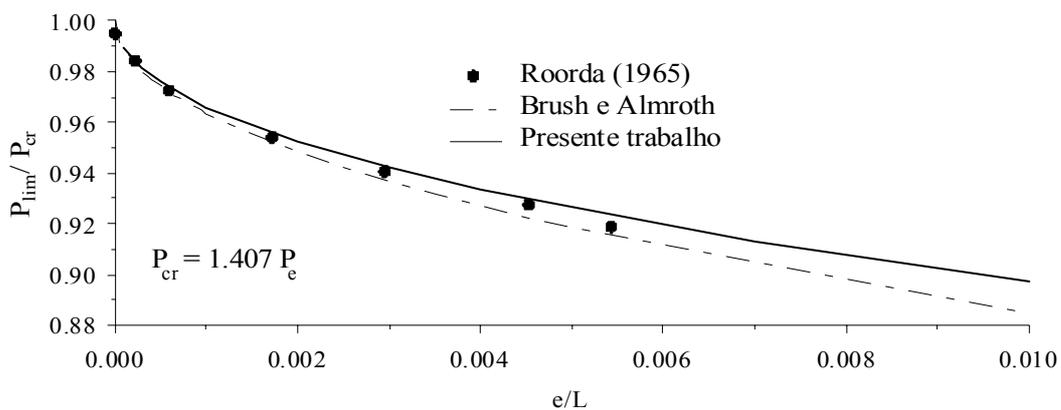


Figura 3.28: Comparação dos resultados numérico, experimental e analítico para P_{lim} .

3.3.3.3

Carregamento distribuído

Um caso muito comum de carregamento é o carregamento distribuído sobre a viga (Figura 3.29). A Figura 3.30 ilustra este caso comparando, para o caso de apoio A, as trajetórias de equilíbrio obtidas para algumas excentricidades e o caminho de equilíbrio de um carregamento distribuído sobre a viga.

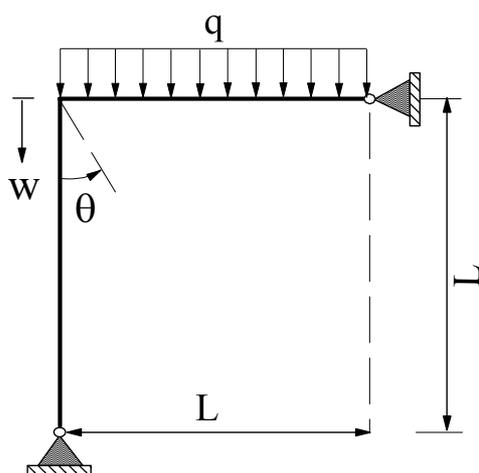


Figura 3.29: Pórtico em L com carga distribuída.

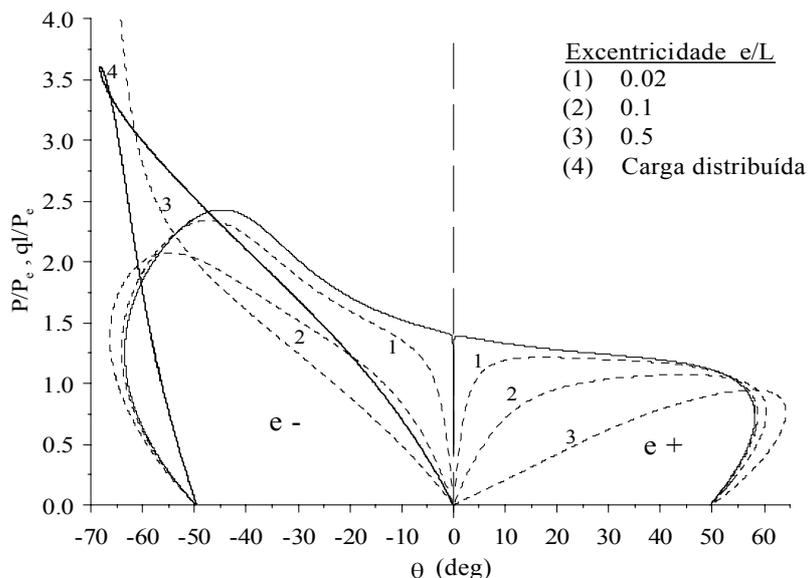


Figura 3.30: Comparação entre as trajetórias obtidas para diferentes posições da carga pontual e a trajetória de equilíbrio de uma carga distribuída sobre todo o vão da viga.

3.3.3.4

Influência da rigidez da ligação entre as barras

A última seção deste capítulo é destinada à verificação da influência da rigidez a rotação da ligação S_c entre as barras nas respostas crítica e pós-crítica do pórtico em L mostrado na Figura 3.31. Nessa mesma figura estão as quatro possibilidades de modelagem do sistema na região de aplicação da carga e do elemento híbrido de comprimento $L_{sr} = e = L/10000$ adotado, para possibilitar a obtenção das trajetórias pós-bifurcação. As trajetórias de equilíbrio do pórtico para esses modelos são apresentadas na Figura 3.32.

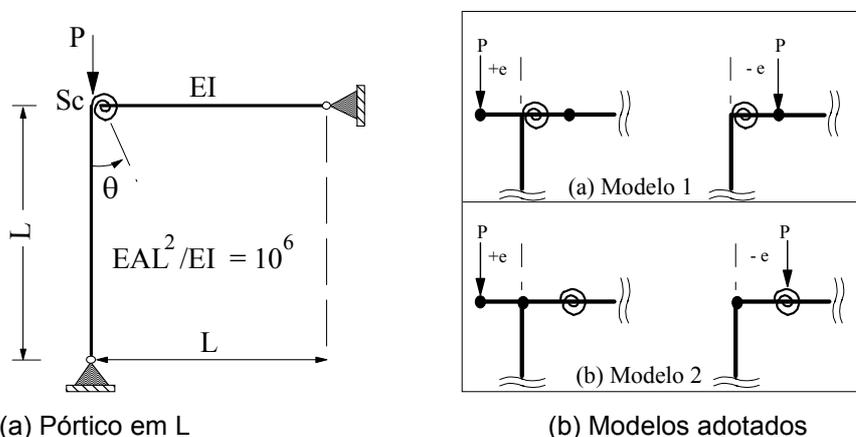
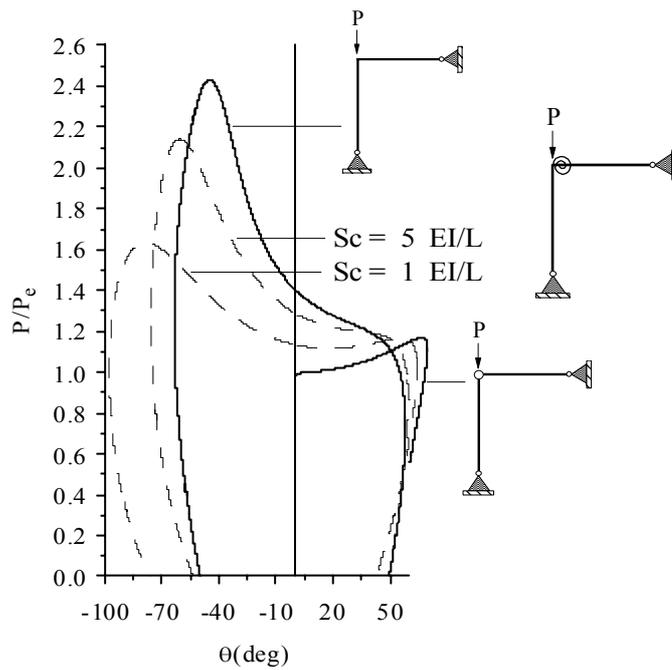
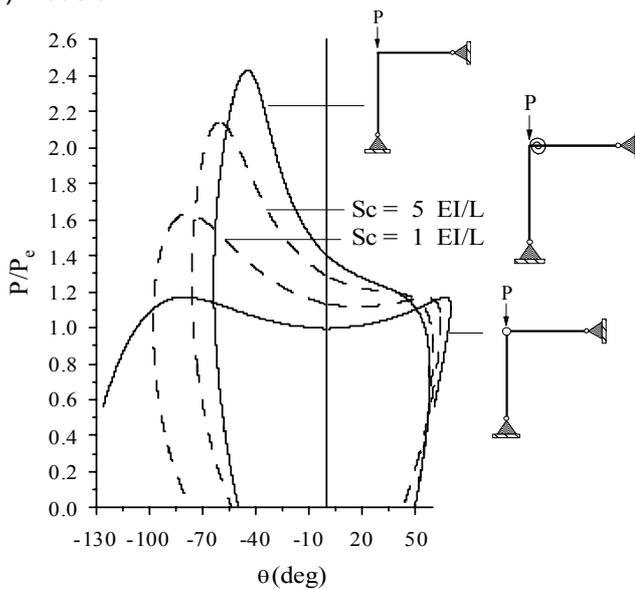


Figura 3.31: Pórtico em L com ligação semi-rígida entre as barras.



(a) Modelo 1



(b) Modelo 2

Figura 3.32: Trajetórias de equilíbrio do pórtico em L com ligação semi-rígida.

Pode-se observar inicialmente para os dois conjuntos de trajetórias de equilíbrio são semelhantes, principalmente para o caso da excentricidade positiva (trechos das trajetórias do lado direito nas duas figuras). No caso da excentricidade negativa (trechos das trajetórias do lado esquerdo), a medida que Sc diminui, a resposta pós-crítica dos dois conjuntos começam a apresentar diferenças, chegando até a situação limite de $Sc = 0$, onde o caminho pós-crítico

não pode ser obtido através do modelo 1. Isso já era esperado, pois nesse modelo o momento fletor não pode ser transmitido quando $Sc = 0$.

Adicionalmente, como já era também esperado, o aumento da rigidez da ligação promoveu um acréscimo do valor da carga crítica do pórtico. Entretanto, esse acréscimo de P_{cr} foi acompanhado por um aumento da inclinação da trajetória pós-crítica, o que caracteriza uma maior sensibilidade a imperfeições.

Essa é uma característica interessante apresentada por alguns sistemas estruturais sensíveis a imperfeições: a carga crítica cresce devido à variação de certos parâmetros, mas a sensibilidade a imperfeições também cresce. Desse modo, o aparente acréscimo na capacidade de carga pode ser totalmente destruído pela inevitável presença de imperfeições.

Para concluir, é importante observar que, geralmente, na prática, as relações das estruturas de aço são tais que efeitos de plasticidade podem ocorrer durante as fases iniciais da resposta pós-crítica ou até mesmo antes da ocorrência da flambagem do sistema. Nessas circunstâncias, é obviamente necessário considerar uma formulação que considere a plastificação de algumas seções. Esse tipo de abordagem certamente será considerado futuramente na continuidade do presente trabalho de pesquisa.