

## Referências Bibliográficas

- [1] R. Mantegna and H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics*, Cambridge University Press (2000).
- [2] J. Voit, *The Statistical Mechanics of Financial Markets*, Springer 2<sup>nd</sup> Edition (2003).
- [3] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Edition (2003).
- [4] R.F. Engle, *Econometrica* **50** (1982) 987; T. Bollerslev, R.Y. Chons and K.F. Kroner, *J. Econometrics* **52** (1992) 5.
- [5] R.T. Baillie, T. Bollerslev, H.O. Mikkelsen, *J. Econometrics* **74** (1996) 3.
- [6] P. Gopikrishnan, V. Plerou, L.A.N. Amaral, M. Meyer and H. E. Stanley, *Physical Review E* **60** (1999) 5305.
- [7] K. Matia, M. Pal, H.E. Stanley and H. Salunkay, preprint, <http://lanl.arXiv.org/abs/cond-mat/0308013>
- [8] L.C. Miranda and R. Riera, *Physica A* **297** (2001), 509-520.
- [9] Website da BOVESPA ([www.bovespa.com.br](http://www.bovespa.com.br)).
- [10] R.L. Costa and G. Vasconcelos, *Physica A* **329** (2003), 231-248.
- [11] Website Planeta Dinheiro ([www.pladin.com.br](http://www.pladin.com.br)).
- [12] R.N. Mantegna and H. E. Stanley, *Nature* **376** (1995), 46.
- [13] A. Matacz, *Int. J. Theoret. Appl. Fin.* **3**(1) (2000), 143.
- [14] J.A.Skjeltorp, *Physica A* **283** (2001), 486.
- [15] L. Tang, *Physica A* **324** (2003), 272.
- [16] A. Johansen, *Physica A* **324** (2003), 157.
- [17] A. Christian Silva and V. M. Yakovenko, *Physica A* **324** (2003), 303.
- [18] Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng and H. E. Stanley, *Physical Review E* **60** (1999), 1390-1400.
- [19] T. G. Andersen, T. Bollerslev, F.X.Diebold and H.Ebens, *Journal of Financial Economics* **61** (2001), 43.
- [20] M. Pasquini and M. Serva, *Physica A* **269** (1999).
- [21] J. Cavalcante and A. Assaf, *Long Range dependence in the returns and volatility of the Brazilian stock markets*, preprint.
- [22] K. Ito, *On stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society **4** (1951) 1-51.

- [23] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer (1993).
- [24] S. L. Heston, *Review of Financial Studies* **6** (1993) 327.
- [25] J. Hull, A. White, *J. Finance* **XLII** (1987), 281.
- [26] J.-P. Bouchaud, *Quantitative Finance* **1** (2001) 105.
- [27] S. Micciché, G. Bonanno, F. Lillo and R. Mantegna, *Physica A* **314** (2002) 756.
- [28] E. S. Schwartz, *J. Finance* **42** (1997) 922.
- [29] A. A. Dragulescu and A. A. Yakovenko, *Quantitative Finance* **2** (2002) 443.

## Apêndice A

### Equação de Fokker-Plank

Considere equação diferencial estocástica de Itô-Langevin cuja expressão geral é dada por:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz. \quad (\text{A.1})$$

com  $dz$  representando incrementos de Wiener, satisfazendo a  $\langle dt \rangle = 0$  e  $\langle (dz)^2 \rangle = 2dt$ .

Considere uma função arbitrária  $f(x(t))$ . Segundo Itô [22], considerando a média sobre realizações do processo estocástico (A.1) da variável aleatória  $x$ , até primeira ordem em  $dt$ , podemos escrever:

$$\langle df \rangle = \left\langle \frac{df}{dx} a(x,t) \right\rangle dt + \left\langle \frac{df}{dx} b(x,t) \right\rangle \langle dz \rangle + \left\langle \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} b^2(x,t) \right\rangle \langle (dz)^2 \rangle \quad (\text{A.2})$$

Usando que  $\langle dz \rangle = 0$  e  $\langle (dz)^2 \rangle = 2dt$  em (A.2):

$$\langle df \rangle = \left\langle a(x,t) \frac{df}{dx} \right\rangle dt + \left\langle b^2(x,t) \frac{d^2 f}{dx^2} \right\rangle dt \quad (\text{A.3})$$

Logo:

$$\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle = \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \left\langle a(x,t) \frac{df}{dx} \right\rangle + \left\langle b^2(x,t) \frac{d^2 f}{dx^2} \right\rangle \quad (\text{A.4})$$

De acordo com a definição de média sobre realizações  $\langle \dots \rangle$ :

$$\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle = \int dx \left[ a(x,t) \frac{df}{dx} + b^2(x,t) \frac{d^2 f}{dx^2} \right] P(x,t) \quad (\text{A.5})$$

Considere as condições necessárias de normalização de  $P(x,t)$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x,t) = 0, \quad (\text{A.6})$$

além da hipótese de contorno de fluxo nulo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{dx} P(x,t) = 0 \quad (\text{A.7})$$

A integração por partes de (A.5) fornece:

$$\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle = \int dx f(x) \frac{d}{dx} [-a(x,t)P(x,t)] + \int dx f(x) \frac{d^2}{dx^2} [b^2(x,t)P(x,t)] \quad (\text{A.8})$$

Também podemos escrever:

$$\frac{d}{dt} \langle f(x(t)) \rangle = \frac{d}{dt} \int dx P(x,t) f(x) = \int dx f(x) \frac{\partial}{\partial t} P(x,t) \quad (\text{A.9})$$

Usando (A.8) e (A.9), uma vez que a função  $f$  é arbitrária:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{d}{dx} [-a(x,t)P(x,t)] + \frac{d^2}{dx^2} [b^2(x,t)P(x,t)] \quad (\text{A.10})$$

A equação (A.10) acima é a equação que descreve a evolução temporal da função densidade de probabilidade  $P(x,t)$  da variável estocástica  $x$  regida pela equação de Itô-Langevin (A.1).

## Apêndice B

### Processo Estocástico de Ornstein-Uhlenbeck (O-U) Aritmético

É o modelo mais simples de reversão à média. A equação diferencial estocástica que define este processo é representada por

$$dx = -\mathbf{g}(x - \mathbf{q})dt + \mathbf{x}dz, \quad dz \in N(0, 2dt). \quad (\text{B.1})$$

onde  $dz$  é um incremento de Wiener,  $\gamma$  representa a velocidade com que o processo tende à retornar ao nível de longo prazo  $\theta$  e  $\xi$  é a amplitude da incerteza de  $x$ .

Considere agora a equação de Langevin associada:

$$\frac{dx}{dt} = -\mathbf{g}(x - \mathbf{q}) + \mathbf{x}f(t) \quad (\text{B.2})$$

onde  $f(t) \equiv \frac{dz}{dt}$  é um ruído branco:  $E[f(t)] = 0$  e  $E[f(t)f(t')] = 2\mathbf{d}(t - t')$ .

Considerando

$$x(t) = e^{-\mathbf{g}t}u(t), \quad (\text{B.3})$$

e substituindo em (B.2) obtém-se que:

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{g}e^{\mathbf{g}t}\mathbf{q} + \mathbf{x}e^{\mathbf{g}t}f(t) \quad (\text{B.4})$$

Logo,

$$u(t) - u(0) = \mathbf{q} \int_0^t \mathbf{g} e^{\mathbf{g}t'} dt' + \mathbf{x} \int_0^t e^{\mathbf{g}t'} f(t') dt' \quad (\text{B.5})$$

$$u(t) - u(0) = \mathbf{q}(e^{\mathbf{g}t} - 1) + \mathbf{x} \int_0^t e^{\mathbf{g}t'} f(t') dt'$$

Calculando o valor esperado em (B.5), isto é, a média por flutuações estatísticas:

$$E[u(t)] = u(0) + \mathbf{q}(e^{\mathbf{g}t} - 1) + \mathbf{x} \int_0^t e^{\mathbf{g}t'} \underbrace{E[f(t')]}_{=0} dt' \quad (\text{B.6})$$

Usando (B.3):

$$E[x(t)] = e^{-\mathbf{g}t} u(0) + \mathbf{q}(1 - e^{-\mathbf{g}t}) \quad (\text{B.7})$$

Esta equação mostra que, na determinação do valor esperado da variável estocástica com o tempo, existe uma ponderação entre o valor inicial da variável e o nível de equilíbrio  $\theta$ .

Repetindo o procedimento acima para calcular agora a variância, a partir de (B.5) e usando (B.6):

$$u(t) = \underbrace{u(0) + \mathbf{q}(e^{\mathbf{g}t} - 1)}_{E[u(t)]} + \mathbf{x} \int_0^t e^{\mathbf{g}t'} f(t') dt'$$

$$u(t) - E[u(t)] = \mathbf{x} \int_0^t e^{\mathbf{g}t'} f(t') dt'$$

Assim, para a variância de  $x(t)$ , dada por  $E[(x(t) - E[x(t)])^2]$ :

$$Var [u(t)] = \mathbf{x}^2 \int_0^t \int_0^t e^{\mathbf{g}t'} e^{\mathbf{g}t''} \underbrace{E[f(t')f(t'')]}_{2d(t''-t')} dt' dt''$$

$$Var [u(t)] = \mathbf{x}^2 \int_0^t 2e^{2\mathbf{g}t'} dt'$$

$$Var [u(t)] = \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{g}} (e^{2\mathbf{g}t} - 1) \quad (\text{B.8})$$

Usando (B.3):

$$Var [x(t)] = \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{g}} (1 - e^{-2\mathbf{g}t}) \quad (\text{B.9})$$

Tomando agora os limites assintóticos para (B.7) e (B.9) calculados acima, obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[x(t)] = \mathbf{q} \quad (\text{Valor esperado no longo prazo}) \quad (\text{B.10})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[x(t)] = \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{g}} \quad (\text{Variância de longo prazo}) \quad (\text{B.11})$$

A partir de (A.1) e (A.8), a equação de Fokker-Planck associada à equação diferencial estocástica (B.1) é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{g}(x - \mathbf{q})P(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathbf{x}^2 P(x, t)] \quad (\text{B.12})$$

Podemos escrever (B.12) em analogia à equação de continuidade como:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x, t) \quad (\text{B.13})$$

com

$$j(x, t) = -\mathbf{g}(x - \mathbf{q})P(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{x}^2 P(x, t)], \quad (\text{B.14})$$

representando termo de densidade de corrente do modelo.

A solução estacionária  $P^*(x)$  deve satisfazer a  $\frac{\partial}{\partial t} P^*(x) = 0$ . Logo, de (B.13), a densidade de corrente estacionária satisfaz a:

$$\frac{\partial}{\partial x} j^*(x) = 0 \quad (\text{B.15})$$

Utilizando ainda as condições de contorno de corrente estacionária nula,  $j^*(+\infty) = j^*(-\infty) = 0$  em (B.15), obtém-se que a corrente estacionária satisfaz a:

$$j^*(x) = 0 \quad (\text{B.16})$$

Usando (B.16) em (B.14):

$$-\mathbf{g}(x-\mathbf{q})P^*(x) = \frac{d}{dx}[\mathbf{x}^2 P^*(x)]$$

$$-\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2}(x-\mathbf{q})P^*(x) = \frac{d}{dx}P^*(x)$$

Logo,

$$\frac{dP^*(x)}{P^*(x)} = \left( -\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2}(x-\mathbf{q}) \right) dx$$

$$d(\ln P^*(x)) = \left( -\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2}(x-\mathbf{q}) \right) dx$$

$$\ln\left(\frac{P^*(x)}{P_0^*}\right) = -\frac{\mathbf{g}}{2\mathbf{x}^2}(x-\mathbf{q})^2 + \frac{\mathbf{g}\mathbf{q}^2}{2\mathbf{x}^2}$$

$$P^*(x) = A \exp\left[-\frac{\mathbf{g}}{2\mathbf{x}^2}(x-\mathbf{q})^2\right] \quad (\text{B.17})$$

Identifica-se a solução estacionária do processo estocástico de O-U Aritmético  $P^*(x)$  como sendo a Distribuição Gaussiana de média  $\theta$  e variância

$$\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{x}^2/\mathbf{g}, \text{ cuja constante de normalização é dada por } A = \frac{\sqrt{\mathbf{g}}}{\sqrt{2p\mathbf{x}}}.$$

## Apêndice C

Vamos analisar aqui dois modelos estocásticos cujas distribuições estacionárias são descritas por Distribuições Gama.

### Processo de Ornstein-Uhlenbeck (O-U) Geométrico

É descrito pela equação diferencial estocástica:

$$dx = -\mathbf{g}(x - \mathbf{q})xdt + \mathbf{x}dz, \quad dz \in N(0, 2dt) \quad (\text{C.1})$$

A partir de (A.1) e (A.8), a equação de Fokker-Planck que descreve a evolução temporal de  $P(x, t)$  é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{g}(x - \mathbf{q})xP(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathbf{x}^2 x^2 P(x, t)] \quad (\text{C.2})$$

Podemos reescrever (C.2) em analogia com a equação de continuidade como:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x, t), \quad (\text{C.3})$$

com a densidade de corrente  $j(x, t)$  do modelo dada por:

$$j(x, t) = -\mathbf{g}(x - \mathbf{q})xP(x, t) - \frac{d}{dx} [\mathbf{x}^2 x^2 P(x, t)] \quad (\text{C.4})$$

A solução estacionária  $P^*(x)$  satisfaz a  $\frac{\partial}{\partial t} P^*(x) = 0$ . Logo, de (C.3), a densidade de corrente estacionária satisfaz a:

$$\frac{\partial}{\partial x} j^*(x) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Utilizando as condições de contorno de corrente estacionária nula  $j^*(\infty) = j^*(-\infty) = 0$  em (C.5), obtém-se que:

$$j^*(x) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Usando (C.4) e (C.6):

$$\begin{aligned} -\mathbf{g}(x-\mathbf{q})xP^*(x) &= \frac{d}{dx} \left[ x^2 x^2 P^*(x) \right] \\ -\frac{\mathbf{g}}{x^2}(x-\mathbf{q})xP^*(x) &= 2xP^*(x) + x^2 \frac{d}{dx} P^*(x) \\ \left[ -\frac{\mathbf{g}}{x^2}x + \frac{\mathbf{gq}}{x^2} - 2 \right] P^*(x) &= x \frac{d}{dx} P^*(x) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Redenominando:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{g}}{x^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \mathbf{aq} - 2 \quad (\text{C.8})$$

$$\left( -\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{x} \right) P^*(x) = \frac{d}{dx} P^*(x)$$

$$\frac{dP^*(x)}{P^*(x)} = \left( -\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{x} \right) dx$$

$$d(\ln P^*(x)) = \left( -\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{x} \right) dx$$

$$\ln \left( \frac{P^*(x)}{P_0^*} \right) = -\mathbf{a}x + \mathbf{b} \ln x$$

$$P^*(x) = A \exp(-\mathbf{a}x) x^{\mathbf{b}} \quad (\text{C.9})$$

Identificamos esta distribuição como sendo a Distribuição Gama. A constante  $A$  de normalização é obtida a partir de:

$$A^{-1} = \int_0^{\infty} \exp(-\mathbf{a}x) x^{\mathbf{b}} dx$$

Fazendo a mudança de variável  $t = \alpha x$ ,  $dt = \alpha dx$ ,

$$A^{-1} = \frac{1}{a^{1+b}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^b dt$$

Usando definição da função gama:  $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{m-1} dt$ ,

$$A^{-1} = \frac{\Gamma(1+b)}{a^{(1+b)}} \quad (\text{C.10})$$

Logo, usando (C.8) e (C.10) a distribuição de probabilidade estacionária (C.9) do processo O-U Geométrico é dada por:

$$P^*(x) = \frac{a^{aq-1}}{\Gamma(aq-1)} e^{-ax} x^{aq-2} \quad (\text{C.11})$$

### Processo de Feller

É descrito pela equação diferencial estocástica:

$$dx = -g(x-q)dt + \mathbf{x}x^{1/2}dz, \quad dz \in N(0,2dt) \quad (\text{C.12})$$

A partir de (A.1) e (A.10), a equação Fokker-Planck é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [g(x-q)P(x,t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\mathbf{x}^2 x P(x,t)] \quad (\text{C.13})$$

A solução estacionária,  $P^*(x)$  é obtida por  $\frac{\partial}{\partial t} P^*(x) = 0$ . Usando (C.3) e a condição de contorno de corrente estacionária nula (C.6) em (C.13) obtém-se:

$$-\mathbf{g}(x-\mathbf{q})P^*(x) = \frac{d}{dx} \left[ \mathbf{x}^2 x P^*(x) \right]$$

$$-\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2} (x-\mathbf{q})P^*(x) = P^*(x) + x \frac{d}{dx} P^*(x)$$

$$\left( -\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2} x + \frac{\mathbf{g}\mathbf{q}}{\mathbf{x}^2} - 1 \right) P^*(x) = x \frac{d}{dx} P^*(x)$$

$$\frac{dP^*(x)}{P^*(x)} = \left( -\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2} + \frac{1}{x} \left( \frac{\mathbf{g}\mathbf{q}}{\mathbf{x}^2} - 1 \right) \right) dx$$

Redenominando:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}' = \mathbf{a}\mathbf{q} - 1 \quad (\text{C.14})$$

$$d(\ln P^*(x)) = \left( -\mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}'}{x} \right) dx$$

$$\ln \left( \frac{P^*(x)}{P_0^*} \right) = -\mathbf{a}x + \mathbf{b}' \ln x$$

Logo,

$$P^*(x) = A \exp(-\mathbf{a}x) x^{\mathbf{b}'} \quad (\text{C.15})$$

A expressão (C.15) é idêntica a (C.9) com expoente  $\beta$  dado em (C.8) modificado para o valor  $\beta'$  dado em (C.14). Assim, a distribuição de probabilidade estacionária do processo de Feller em analogia com (C.11) é dada por:

$$P^*(x) = \frac{\mathbf{a}^{\mathbf{a}\mathbf{q}}}{\Gamma(\mathbf{a}\mathbf{q})} e^{-\mathbf{a}x} x^{\mathbf{a}\mathbf{q}-1} \quad (\text{C.16})$$

## Modelo de Heston

O modelo de Heston do mercado financeiro identifica a variável estocástica em (C.12), como sendo a volatilidade quadrática dos retornos de preço  $J = v^2$ . Logo, a distribuição estacionária é dada por (C.16):

$$P^*(J) = \frac{a^{2q}}{\Gamma(2q)} e^{-aJ} J^{2q-1} \quad (C.17)$$

Fazendo-se a mudança de variável  $J = v^2$  e usando a transformação de distribuição de probabilidade obtida a partir de

$$P^*(n)dn = P^*(J)dJ,$$

Obtém-se

$$P^*(n) = P^*(J(n)) \frac{dJ}{dn} = P^*(J(n)) 2n \quad (C.18)$$

Logo, a distribuição de probabilidade estacionária da volatilidade do modelo de Heston é:

$$P^*(n) = \frac{2a^{2q}}{\Gamma(2q)} e^{-an^2} n^{2q-1} \quad (C.15)$$

## Apêndice D

Vamos considerar aqui equações diferenciais estocásticas do tipo:

$$dx = -\mathbf{g}(x - \mathbf{q})dt + \mathbf{x}x dz, \quad dz \in N(0, 2dt) \quad (\text{D.1})$$

A equação de Langevin correspondente é

$$\frac{dx}{dt} = -\mathbf{g}(x - \mathbf{q}) + \mathbf{x}x F(t), \quad (\text{D.2})$$

onde  $F(t)$  representa um ruído branco, com  $\langle F(t) \rangle = 0$  e  $\langle F(t)F(t') \rangle = 2\mathbf{d}(t - t')$ .

A partir de (A.1) e (A.10), a equação Fokker-Planck que descreve a evolução temporal da distribuição  $P(x, t)$  é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{d}{dx} [\mathbf{g}(x - \mathbf{q})P(x, t)] + \mathbf{x}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 P(x, t)] \quad (\text{D.3})$$

Reescrevendo o 2º termo do lado direito da equação (D.3) como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 P(x, t)] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} [x \cdot xP(x, t)] \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ xP(x, t) + x \frac{\partial}{\partial x} [xP(x, t)] \right] \quad (\text{D.4})$$

Usando-se (D.4) em (D.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mathbf{g}(x - \mathbf{q}) + \mathbf{x}^2 x) P(x, t) \right] + \mathbf{x}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial}{\partial x} [xP(x, t)] \right]$$

Assim, a equação de Fokker-Planck se escreve como:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mathbf{g} + \mathbf{x}^2)x - \mathbf{g}\mathbf{q} \right] P(x, t) + \mathbf{x}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial}{\partial x} [xP(x, t)] \right] \quad (\text{D.5})$$

Podemos reescrever (D.5), em analogia com a equação de continuidade como:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x, t), \quad (\text{D.6})$$

sendo  $j(x, t)$  a densidade de corrente do modelo dada por:

$$j(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( (\mathbf{g} + \mathbf{x}^2)x - \mathbf{gq} \right) P(x, t) \right] - \mathbf{x}^2 x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) \quad (\text{D.7})$$

A solução estacionária,  $P^*(x)$  obtida por  $\frac{\partial}{\partial t} P^*(x) = 0$  em (D.6) satisfaz a:

$$\frac{\partial}{\partial x} j^*(x) = 0, \quad (\text{D.8})$$

com  $j^*(x)$ , a densidade de corrente estacionária. Usando (D.8) e as condições de contorno de corrente estacionária nula  $j^*(\infty) = j^*(-\infty) = 0$ , obtém-se que:

$$j^*(x) = 0 \quad (\text{D.9})$$

Usando (D.9) em (D.7):

$$-\mathbf{x}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \left( 1 + \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2} \right) x - \frac{\mathbf{gq}}{\mathbf{x}^2} \right) P^*(x) \right] = \mathbf{x}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ x \frac{\partial}{\partial x} [x P^*(x)] \right] \quad (\text{D.10})$$

Substituindo  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2}$ ,

$$\begin{aligned} -((1 + \mathbf{a})x - \mathbf{aq})P^*(x) &= x \frac{d}{dx} [x P^*(x)] \\ \left( \frac{\mathbf{aq}}{x} - (1 + \mathbf{a}) \right) P^*(x) &= P^*(x) + x \frac{d}{dx} P^*(x) \\ \left( \frac{\mathbf{aq}}{x} - (\mathbf{a} + 2) \right) P^*(x) &= x \frac{d}{dx} P^*(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP^*(x)}{dx} &= \left( \frac{\mathbf{a}q}{x^2} - \frac{(\mathbf{a}+2)}{x} P^*(x) \right) \\ \frac{dP^*(x)}{P^*(x)} &= \left( \frac{\mathbf{a}q}{x^2} - \frac{(\mathbf{a}+2)}{x} \right) dx \\ d(\ln P^*(x)) &= \frac{\mathbf{a}q}{x^2} - \frac{(\mathbf{a}+2)}{x} \\ \ln \left( \frac{P^*(x)}{P_0^*} \right) &= -\frac{\mathbf{a}q}{x} - (\mathbf{a}+2) \ln x \end{aligned}$$

Logo:

$$P^*(x) = A e^{-\mathbf{a}q/x} x^{-(\mathbf{a}+2)} \quad (\text{D.11})$$

A constante A de normalização é obtida a partir de:

$$A^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\mathbf{a}q/x} x^{-(\mathbf{a}+2)} dx$$

Fazendo mudança de variável  $t = \mathbf{a}q/x$ ,

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{a}q t^{-1} & dx &= -\mathbf{a}q t^{-2} dt \\ A^{-1} &= \int_0^{\infty} e^{-t} (\mathbf{a}q)^{-(\mathbf{a}+2)} t^{(\mathbf{a}+2)} \mathbf{a}q t^{-2} dt \\ A^{-1} &= (\mathbf{a}q)^{-(\mathbf{a}+1)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\mathbf{a}} dt \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Usando definição de Função Gama:  $\Gamma(\mathbf{m}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\mathbf{m}-1} dt$ , a constante de normalização (D.12) é dada por:

$$A^{-1} = (\mathbf{a}q)^{-(1+\mathbf{a})} \Gamma(\mathbf{a}+1) \quad (\text{D.13})$$

Usando (D.11) e (D.13), a distribuição estacionária para a equação diferencial estocástica (D.1) é dada por:

$$P^*(x) = \frac{(\mathbf{a}q)^{1+\mathbf{a}} e^{-\mathbf{a}q/x}}{\Gamma(1+\mathbf{a}) x^{2+\mathbf{a}}} \quad (\text{D.14})$$

## Modelo Hull & White

No modelo de Hull & White do mercado financeiro, a equação diferencial de Itô-Langevin, é dada por:

$$dJ = -g(J - q) + xJdz \quad (D.15)$$

com  $J = v^2$ , a volatilidade quadrática dos retornos de preços. Portanto, ela é da forma da eq.(D.1) cuja solução para distribuição estacionária é dada por (D.14).

Logo,

$$P(J) = \frac{(qa)}{\Gamma(1+a)} \frac{e^{-qa/J}}{J^{a+2}} \quad (D.16)$$

Fazendo-se a mudança de variável  $J = v^2$  e usando a transformação de distribuição de probabilidades (C.18) obtém-se a distribuição de probabilidade da volatilidade do modelo Hull & White:

$$P^*(n) = \frac{2(aq)}{\Gamma(1+a)} \frac{e^{-qa/n^2}}{n^{2a+3}} \quad (D.17)$$

## Modelo de Micciché *et. al.*

No modelo de Micciché *et.al.*, a equação diferencial estocástica para a volatilidade é dada por

$$dn = -g(n - q)dt + xndz \quad (D.18)$$

e portanto ela é da forma da eq. (D.1), cuja solução estacionária é dada por (D.14):

$$P^*(v) = \frac{(aq)}{\Gamma(1+a)} \frac{e^{-aq/n}}{n^{a+2}} \quad (D.19)$$

## Apêndice E

Vamos considerar aqui equações diferenciais estocásticas que tem como solução estacionária a distribuição log-normal.

### Modelo Log-normal de Schwartz

No modelo de Schwartz, a equação de Itô-Langevin é dada por:

$$dn = -g(\ln n - q)n dt + x n dz, \quad dz \in N(0, 2dt) \quad (E.1)$$

A partir de (A.1) e (A.10) a equação Fokker-Planck que descreve a evolução temporal da distribuição de volatilidade  $P(n, t)$  é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t) = \frac{\partial}{\partial n} [g(\ln n - q)n P(n, t)] + x^2 \frac{\partial^2}{\partial n^2} [n^2 P(n, t)] \quad (E.2)$$

Usando a eq. (D.4), reescrevemos (E.2) como:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t) = \frac{\partial}{\partial n} [(g(\ln n - q)n + x^2 n) P(n, t)] + x^2 \frac{\partial}{\partial n} \left[ n \frac{\partial}{\partial n} [n P(n, t)] \right] \quad (E.3)$$

Usando (E.3) em analogia com a equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t) = -\frac{\partial}{\partial n} j(n, t), \quad (E.4)$$

definimos a densidade de corrente do modelo dada por:

$$j(n, t) = -[g(\ln n - q)n + x^2 n] P(n, t) - x^2 n \frac{\partial}{\partial n} [n P(n, t)] \quad (E.5)$$

A solução estacionária,  $P^*(n)$ , obtida por  $\frac{\partial}{\partial t} P^*(n) = 0$  em (E.4) satisfaz a:

$$\frac{\partial}{\partial n} j^*(n) = 0 \quad (\text{E.6})$$

com  $j^*(n)$ , a densidade de corrente estacionária. Usando (E.6) e as condições de contorno de corrente estacionária nula  $j(\infty) = j(-\infty) = 0$ , obtém-se que:

$$j^*(x) = 0 \quad (\text{E.7})$$

Usando (E.7) em (E.5):

$$\begin{aligned} -\left[ \mathbf{g}(\ln n - \mathbf{q})n + \mathbf{x}^2 n \right] P^*(n) &= \mathbf{x}^2 n \frac{d}{dn} [nP^*(n)] \\ \left[ -\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2}(\ln n - \mathbf{q})n - 1 \right] P^*(n) &= P^*(n) + n \frac{d}{dn} P^*(n) \\ \left[ \left( \frac{\mathbf{g}\mathbf{q}}{\mathbf{x}^2} - 2 \right) - \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{x}^2} \ln n \right] P^*(n) &= n \frac{d}{dn} P^*(n) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Usando  $\mathbf{a} = \mathbf{g}/\mathbf{x}^2$ , reescrevemos (E.8):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathbf{a}\mathbf{q} - 2}{n} - \mathbf{a} \frac{\ln n}{n} \right) P^*(n) &= \frac{dP^*(n)}{dn} \\ d(\ln P^*(x)) &= \left( \frac{\mathbf{a}\mathbf{q} - 2}{n} - \mathbf{a} \frac{\ln n}{n} \right) dn \\ \ln \left( \frac{P^*(n)}{P_0^*} \right) &= (\mathbf{a}\mathbf{q} - 2) \ln n - \frac{\mathbf{a}(\ln n)^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Reescrevendo (E.9):

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{P^*(n)}{P_0^*} \right) &= (\mathbf{a}\mathbf{q} - 1) \ln n - \frac{\mathbf{a}}{2} (\ln n)^2 - \ln n \\ \ln \left( \frac{P^*(n)}{P_0} \right) &= \mathbf{a}(\mathbf{q} - \mathbf{a}^{-1}) \ln n - \frac{\mathbf{a}}{2} (\ln n)^2 - \ln n \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Completando o quadrado e denominando  $q' \equiv q - a^{-1}$

$$-\frac{a}{2}(\ln n)^2 + aq' \ln n = -\frac{a}{2}(\ln n - q')^2 + \frac{aq'^2}{2}$$

Logo, (E.10) é reescrita como:

$$\ln\left(\frac{P^*(n)}{P_0^*}\right) = -\frac{a}{2}(\ln n - q')^2 + \frac{aq'^2}{2} - \ln n$$

$$\frac{P^*(n)}{P_0^*} = e^{aq'^2/2} \cdot n^{-1} \exp\left(-\frac{a}{2}(\ln n - q')^2\right)$$

$$P^*(n) = \frac{A}{n} \exp\left(-g \frac{(\ln n - q')^2}{2x^2}\right) \quad (\text{E.11})$$

Identificamos (E.11) como a distribuição log-normal de volatilidade cuja média e variância em escala logaritmica são dadas por  $q' = q - a^{-1}$  e  $a^{-1} = x^2/g$ , respectivamente. A constante A de normalização é dada por

$$A = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2px}}$$

Podemos re-obter a solução (E.11) através da equação diferencial estocástica para  $\ln v$ . Usando o lema de Itô [22] para transformação de variável estocástica  $x = f(v)$  em (E.1):

$$dn = A(n)dt + B(n)dz$$

com  $A(n) = -g(\ln n - q)n$  e  $B(n) = xn$ , obtém-se:

$$dx = \left[ A(n) \frac{dx}{dn} + B^2(n) \frac{d^2x}{dn^2} \right] dt + B(n) \frac{dx}{dn} dz \quad (\text{E.12})$$

Para  $x \equiv \ln n$ ,  $\frac{dx}{dn} = \frac{1}{n}$  e  $\frac{d^2x}{dn^2} = -\frac{1}{n^2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} d(\ln n) &= [-g(\ln n - q) - x^2]dt + xdz \\ d(\ln n) &= \left[ -g \left( \ln n - \left( q - \frac{x^2}{g} \right) \right) \right] dt + xdz \end{aligned} \quad (E.13)$$

Portanto, comparando-se (E.13) com (B.1) identificamos que, no modelo de Schwartz,  $\ln n$  segue um processo de reversão à média do tipo O-U aritmético com média de longo prazo  $q' = q - x^2/g$  e variância de longo prazo  $a^{-1} = x^2/g$ . A distribuição estacionária, de acordo com a solução (B.17), é uma gaussiana:

$$P^*(x) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2px}} \exp \left[ -\frac{g}{2x^2} (x - q')^2 \right] \quad (E.14)$$

Sob transformação de variável, as distribuições de probabilidade satisfazem

a:

$$P^*(x)dx = P^*(n)dn \quad (E.15)$$

Para  $x \equiv \ln n$ ,  $\frac{dx}{dn} = \frac{1}{n}$ , de onde obtém-se:

$$P^*(n) = P^*(x) \frac{dx}{dn} = P^*(\ln n) \frac{1}{n} \quad (E.16)$$

Logo, de (E.14) e (E.16):

$$P^*(n) = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2pxn}} \exp \left[ -\frac{g}{2x^2} (\ln n - q')^2 \right] \quad (E.17)$$

Este resultado é idêntico a (E.11).

### Modelo Log-normal de Micciché *et. al.*

Outro modelo estocástico de reversão à média que tem como solução estacionária a distribuição log-normal é [27]:

$$dn = -g(\ln n - q)dt + \mathbf{x}n^{1/2}dz \quad (\text{E.18})$$

A partir de (A.1) e (A.10), a equação Fokker-Planck que descreve a evolução temporal da distribuição de volatilidade  $P(\mathbf{n}, t)$  é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{n}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} [g(\ln n - q)P(\mathbf{n}, t)] + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}^2} [\mathbf{x}^2 n P(\mathbf{n}, t)] \quad (\text{E.19})$$

A solução estacionária,  $P^*(\mathbf{n})$ , obtida por  $\frac{\partial}{\partial t} P^*(\mathbf{n}) = 0$ , usando (E.4) e (E.7) satisfaz a:

$$\begin{aligned} -g(\ln n - q)P^*(\mathbf{n}) &= \frac{d}{dn} [\mathbf{x}^2 n P^*(\mathbf{n})] \\ -g(\ln n - q)P^*(\mathbf{n}) &= \mathbf{x}^2 \left[ P^*(\mathbf{n}) + n \frac{d}{dn} P^*(\mathbf{n}) \right] \\ -\frac{g}{\mathbf{x}^2} (\ln n - q)P^*(\mathbf{n}) &= P^*(\mathbf{n}) + n \frac{d}{dn} P^*(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Denominando  $\mathbf{a} = g/\mathbf{x}^2$ , reescrevemos (E.20):

$$\begin{aligned} [-\mathbf{a} \ln n + (\mathbf{a}q - 1)]P^*(\mathbf{n}) &= n \frac{d}{dn} P^*(\mathbf{n}) \\ \frac{dP^*(\mathbf{n})}{P^*(\mathbf{n})} &= \left( -\mathbf{a} \frac{\ln n}{n} + \frac{(\mathbf{a}q - 1)}{n} \right) dn \\ d(\ln P^*(\mathbf{n})) &= \left( -\mathbf{a} \frac{\ln n}{n} + \frac{(\mathbf{a}q - 1)}{n} \right) dn \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{P^*(n)}{P_0}\right) = -\frac{\mathbf{a}}{2}(\ln n)^2 + \mathbf{a}q \ln n - \ln n \quad (\text{E.21})$$

Completando o quadrado:

$$-\frac{\mathbf{a}}{2}(\ln n)^2 + \mathbf{a}q \ln n = -\frac{\mathbf{a}}{2}(\ln n - q)^2 + \frac{\mathbf{a}q^2}{2}$$

Reescrevemos (E.21) como:

$$\ln\left(\frac{P^*(n)}{P_0}\right) = -\frac{\mathbf{a}}{2}(\ln n - q)^2 + \frac{\mathbf{a}q^2}{2} - \ln n$$

$$P^*(n) = \frac{A}{n} \exp\left[\frac{\mathbf{a}}{2}(\ln n - q)^2\right]$$

$$P^*(n) = \frac{A}{n} \exp\left[-\frac{\mathbf{g}(\ln n - q)^2}{2\mathbf{x}^2}\right] \quad (\text{E.22})$$

Identificamos (E.22) como sendo a distribuição log-normal de média e variância em escala logaritmica dados por  $\theta$  e  $\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{x}^2/\mathbf{g}$  respectivamente. A

constante de normalização é  $A = \frac{\sqrt{\mathbf{g}}}{\sqrt{2\pi\mathbf{x}}}$ .

## Apêndice F

### Identificação dos parâmetros dos modelos através dos momentos empíricos

#### Modelo de Miccichè *et.al.*

Considere a distribuição estacionária do modelo, dada por (3.21):

$$P^*(n) = A \frac{e^{-qa/n}}{n^{a+2}} \quad (\text{F.1})$$

onde a constante de normalização é dada por:

$$A = \frac{(qa)^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \quad (\text{F.2})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= A \int_0^\infty \frac{e^{-qa/n}}{n^{a+2}} n dn \\ \langle n \rangle &= A \int_0^\infty e^{-qa/n} n^{-(a+1)} dn \end{aligned}$$

Fazendo a mudança da variável  $t = qa/n$ ,

$$\begin{aligned} n &= qa t^{-1} & dn &= -qa t^{-2} dt \\ \langle n \rangle &= A \int_0^\infty e^{-t} (qa)^{-(a+1)} t^{a+1} (qa) t^{-2} dt \\ \langle n \rangle &= A (qa)^{-a} \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Usando definição de Função Gama,  $\int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \equiv \Gamma(a)$ , e a constante de normalização (F.2),

$$\langle n \rangle = A \frac{\Gamma(a)}{(aq)^a} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1)} \cdot qa$$

Usando que  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ , o valor médio da volatilidade no modelo de Miccichè *et. al.* é dado por:

$$\langle n \rangle = q \quad (\text{F.4})$$

Analogamente,

$$\langle n^2 \rangle = A \int_0^\infty e^{-qa/n} n^{-a} dn$$

Fazendo a mesma mudança de variável anterior,  $n = qa t^{-1}$ :

$$\langle n^2 \rangle = A(qa)^{-a+1} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{a-2} dt}_{\Gamma(a-1)}$$

$$\langle n^2 \rangle = A \frac{\Gamma(a-1)}{(aq)^{a-1}}$$

Usando a constante de normalização (F.2) e a propriedade da função gama  $\Gamma(a+1) = a(a-1)\Gamma(a-1)$ , o segundo momento da distribuição da volatilidade no modelo de Miccichè *et.al.* é dado por:

$$\langle n^2 \rangle = \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a+1)} (qa)^2 = \frac{a}{a-1} q^2 \tag{F.5}$$

Logo, a variância da distribuição de volatilidade é dada por:

$$w^2 \equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = q^2 (a-1)^{-1} \tag{F.6}$$

Desta forma, podemos identificar facilmente os parâmetros do modelo de Miccichè *et.al.* através do valor médio e da variância da distribuição empírica, dados por (F.4) e (F.6) respectivamente.

### Modelo Hull & White

Considere a distribuição estacionária do modelo, dada por (3.18):

$$P^*(n) = A \frac{e^{-qa/n^2}}{n^{2a+3}} \tag{F.7}$$

onde a constante de normalização é dada por:

$$A = \frac{2(aq)^{1+a}}{\Gamma(a+1)} \tag{F.8}$$

Logo,

$$\langle n \rangle = A \int_0^\infty e^{-qa/n^2} n^{-(2a+3)} \cdot n dn$$

$$\langle n \rangle = A \int_0^\infty e^{-qa/n^2} n^{-2(a+1)} dn$$

Fazendo a mudança de variável  $t = \frac{qa}{n^2}$ ,

$$n = (qa)^{1/2} t^{-1/2} \quad dn = -1/2(qa)^{1/2} t^{-3/2} dt$$

$$\langle n \rangle = \frac{A}{2} (qa)^{1/2} \int_0^\infty e^{-t} \left( \frac{t}{qa} \right)^{1+a} t^{-3/2} dt$$

$$\langle n \rangle = \frac{A}{2} \frac{(aq)^{1/2}}{(aq)^{1+a}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{a-1/2} dt}_{\Gamma(a+1/2)}$$

Substituindo a constante de normalização (F.8):

$$\langle n \rangle = (aq)^{1/2} \frac{\Gamma(a+1/2)}{\Gamma(a+1)} \tag{F.9}$$

Analogamente,

$$\langle n^2 \rangle = A \int_0^\infty e^{-qa/n^2} n^{-(2a+1)} dn$$

Fazendo a mesma mudança de variável anterior,  $n = (aq)^{1/2} t^{-1/2}$ :

$$\langle n^2 \rangle = \frac{A}{2} \frac{(aq)^1}{(aq)^{1+a}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt}_{\Gamma(a)}$$

Substituindo a constante de normalização (F.8) e usando que  $\Gamma(1+a) = a\Gamma(a)$ , obtemos que o segundo momento da distribuição para o modelo de Hull & White é dado por:

$$\langle n^2 \rangle = (qa) \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+1)}$$

$$\langle n^2 \rangle = q \quad (\text{F.10})$$

Desta forma, podemos identificar facilmente os parâmetros do modelo de Hull & White apenas através do segundo momento da distribuição empírica, dada por (F.10).

### Modelo O-U geométrico

Considere a distribuição estacionária do modelo, dada por (3.11):

$$P^*(n) = An^b e^{-an} \quad (\text{F.11})$$

com  $b \equiv qa - 2$  e constante de normalização dada por:

$$A = \frac{a^{b+1}}{\Gamma(b+1)} \quad (\text{F.12})$$

Logo,

$$\langle n \rangle = A \int_0^\infty e^{-an} n^{b+1} dn$$

Fazendo a mudança de variável  $t = an$ ,

$$n = a^{-1}t \quad dn = a^{-1}dt$$

$$\langle n \rangle = A \cdot a^{-(b+2)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{b+1} dt}_{\Gamma(b+2)}$$

Substituindo a constante de normalização (F.12) e usando que  $\Gamma(b+2) = (b+1)\Gamma(b+1)$ :

$$\langle n \rangle = \frac{a^{-1}}{\Gamma(b+1)} \Gamma(b+2) = \frac{b+1}{a} = \frac{aq-1}{a} = q - a^{-1}$$

$$\langle n \rangle \equiv q - \frac{x^2}{g} \quad (\text{F.13})$$

Analogamente,

$$\langle n^2 \rangle = A \int_0^\infty e^{-a/n} n^{b+2} dn$$

Fazendo a mesma mudança de variável anterior,  $n = a^{-1}t$ :

$$\langle n^2 \rangle = A a^{-(b+3)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{b+2} dt}_{\Gamma(b+3)}$$

Substituindo a constante de normalização (F.12) e usando que  $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ :

$$\langle n^2 \rangle = a^{-2} \frac{\Gamma(b+3)}{\Gamma(b+1)} = a^{-2} (b+2)(b+1)$$

Usando que  $b = aq - 2$ :

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= a^{-2} (aq)(aq-1) \\ \langle n^2 \rangle &= q(q-a^{-1}) \\ \langle n^2 \rangle &= q(q-x^2/g) \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Portanto, usando (F.13) e (F.14), a variância da distribuição estacionária do modelo O-U geométrico é dada por:

$$\begin{aligned} w^2 &\equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = (q-a^{-1})a^{-1} \\ w^2 &= (q-x^2/g)x^2/g \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Desta forma, podemos identificar os parâmetros do modelo de O-U Geométrico através dos primeiros momentos da distribuição empírica (F.13) e (F.14) ou ainda através da variância, dada por (F.15).

## Modelo de Heston

Considere a distribuição estacionária do modelo, dada por (3.15):

$$P(\mathbf{n}) = A \mathbf{n}^{2a\mathbf{q}-1} e^{-a\mathbf{n}^2} \quad (\text{F.16})$$

com a constante de normalização dada por:

$$A = \frac{2a^{a\mathbf{q}}}{\Gamma(a\mathbf{q})} \quad (\text{F.17})$$

Logo,

$$\langle \mathbf{n} \rangle = A \int_0^\infty e^{-a\mathbf{n}^2} \mathbf{n}^{2a\mathbf{q}} d\mathbf{n}$$

Fazendo a mudança de variável  $a\mathbf{n}^2 = t$ ,

$$\mathbf{n} = \left( \frac{t}{a} \right)^{1/2} \quad d\mathbf{n} = \frac{1}{2} \frac{dt}{(at)^{1/2}}$$

$$\langle \mathbf{n} \rangle = A \int_0^\infty e^{-t} \left( \frac{t}{a} \right)^{a\mathbf{q}} \cdot \frac{1}{2} \frac{dt}{(at)^{1/2}}$$

$$\langle \mathbf{n} \rangle = \frac{A}{2} \frac{1}{a^{a\mathbf{q}+1/2}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{a\mathbf{q}-1/2} dt}_{\Gamma(a\mathbf{q}+1/2)}$$

Usando a constante de normalização (F.17),

$$\langle \mathbf{n} \rangle = \frac{\Gamma(a\mathbf{q} + 1/2)}{a^{1/2} \Gamma(a\mathbf{q})} \quad (\text{F.18})$$

Analogamente,

$$\langle \mathbf{n}^2 \rangle = A \int_0^\infty e^{-a\mathbf{n}^2} \mathbf{n}^{2a\mathbf{q}+1} d\mathbf{n}$$

Fazendo a mesma mudança de variável anterior,  $\mathbf{n} = (t/a)^{1/2}$ :

$$\langle \mathbf{n}^2 \rangle = \frac{A}{2} \frac{1}{a^{a\mathbf{q}+1}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{a\mathbf{q}} dt}_{\Gamma(a\mathbf{q}+1)}$$

Usando a constante de normalização (F.17) e propriedade da função gama, obtém-se para o segundo momento da distribuição estacionária do modelo de Heston:

$$\langle \mathbf{n}^2 \rangle = \frac{\Gamma(\mathbf{a}\mathbf{q} + 1)}{\mathbf{a} \Gamma(\mathbf{a}\mathbf{q})}$$

$$\langle \mathbf{n}^2 \rangle = \mathbf{q} \quad (\text{F.19})$$

Desta forma, podemos identificar facilmente os parâmetros do modelo de Heston, apenas através do segundo momento da distribuição empírica dado por (F.19).

### Modelo Log-normal:

Considere a distribuição log-normal:

$$P(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}}} \frac{\sqrt{\mathbf{g}}}{\mathbf{x}\mathbf{n}} \exp\left[-\frac{\mathbf{g}}{2\mathbf{x}^2} (\ln\mathbf{n} - \mathbf{q})^2\right] \quad (\text{F.20})$$

Como mostrado no apêndice E, esta distribuição é equivalente à distribuição gaussiana na variável  $x = \ln\mathbf{n}$ , cuja média é  $\theta$  e variância é  $\mathbf{x}^2 / \mathbf{g}$ .

Logo, obtemos diretamente de (F.20) que

$$\langle \ln\mathbf{n} \rangle = \mathbf{q} \quad (\text{F.21})$$

$$\text{Var}[\ln\mathbf{n}] = \mathbf{x}^2 / \mathbf{g} = \mathbf{a}^{-1} \quad (\text{F.22})$$

Desta forma, para a distribuição log-normal, a identificação de parâmetros pode de ser facilmente feita através de (F.21) e (F.22).

## Apêndice G

### Teste Qui-Quadrado

Considere a variável aleatória definida por

$$c^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2 \quad (\text{G.1})$$

onde  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  são variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas com média  $m = 0$  e variância  $s^2 = 1$ . A variável aleatória  $c^2$  possui a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_{c^2}(u) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{(k/2)-1} e^{-u/2} \quad u > 0 \quad (\text{G.2})$$
$$= 0 \quad \text{caso contrário}$$

$c^2$  segue uma distribuição Qui-Quadrada com  $k$  graus de liberdade, sendo chamada de  $c_k^2$ .

A distribuição Qui-Quadrada é utilizada em testes de hipótese da seguinte maneira:

Considere  $N$  observações dispostas em um histograma de frequência contendo  $n$  intervalos. Sendo:

$O_i$  - frequência observada no  $i$ ésimo intervalo

$E_i$  - frequência esperada no  $i$ ésimo intervalo de acordo com a densidade de probabilidade hipotética

O teste estatístico consiste em calcular:

$$c_0^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (G.3)$$

Supondo que as flutuações dos resultados empíricos em relação ao modelo hipotético são normais, considera-se que a soma em (F.3) deve obedecer aproximadamente à distribuição Qui-Quadrada. O grau desta distribuição é  $k = n - p - 1$ , onde  $p$  representa o número de parâmetros da distribuição hipotética.

No entanto, só é feita uma medida desta soma e portanto só temos uma amostra deste resultado, cujo valor é  $c_0^2$ . Como julgar se este dado está sujeito à distribuição Qui-Quadrada?

Considere o gráfico da distribuição qui-quadrada com  $k$  graus de liberdade

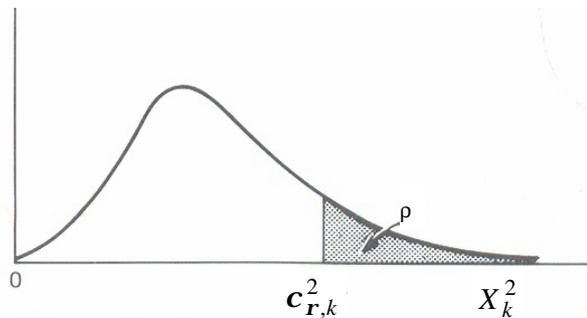


Fig. 1. Gráfico da Distribuição Qui-Quadrada.

Analisando o valor da integral desta distribuição a partir da cauda, isto é, para valores altos, tem-se a probabilidade acumulada  $r$  de encontrarmos um valor de  $c^2$  maior ou igual a um limite, denominado  $c_{r,k}^2$ . Assim, a probabilidade de que nossa amostra forneça um valor  $c_0^2 > c_{r,k}^2$  é  $r$ . Para  $r$  pequeno, por exemplo  $r = 0.05$ , existe apenas 5% de probabilidade de que valores maiores do que  $c_{0.05,k}^2$  ocorram.

Como isto é muito pouco provável, se  $c_0^2 > c_{r,k}^2$  podemos rejeitar o modelo hipotético com 5% de risco de errarmos! Em outras palavras, a hipótese é rejeitada com nível de 95% de confiança ( $1 - r$ ).

Diz-se assim que a hipótese de que nossos dados sejam descritos pela distribuição hipotética é rejeitada com nível de significância  $r$  se:

$$c_0^2 > c_{r,k}^2 \quad (G.4)$$