

2 Formulação do Problema

Neste capítulo apresenta-se a formulação para a obtenção do funcional de energia de deformação usando tanto uma formulação linear quanto não-linear objetivando a obtenção das equações de movimento da coluna em contato parcial com uma base elástica. Cada consideração implica em desenvolvimentos diferenciados bem como na aplicação de metodologias que levam a resultados exatos para a situação linear e a resultados aproximados para a situação não-linear.

2.1. Funcional de Energia Não-Linear

Neste capítulo, obtêm-se os funcionais que possibilitam a obtenção da equação de movimento do sistema coluna-fundação usando a teoria de Euler-Bernoulli, ou seja, considera-se que a altura da viga-coluna é muito pequena quando comparada com o comprimento e os efeitos relativos à deformação de cisalhamento podem ser desprezados.

A análise dinâmica de colunas esbeltas sobre base elástica tem sido tema de vários estudos, mas a maioria destes refere-se apenas ao comportamento linearizado da coluna e considera que a mesma está em contato com a fundação ao longo de toda a sua altura. No estudo aqui realizado, portanto, será explicitada a solução analítica exata de uma coluna semi-enterrada sob diversas condições de apoio e profundidade da fundação. Com base nesta solução, obtêm-se uma solução não-linear de baixa dimensão, mas bastante precisa. Cabe ressaltar que a não linearidade do problema deve-se à não linearidade geométrica da coluna, como será visto a seguir.

As equações de movimento podem ser obtidas através de três metodologias:

- I. Equilíbrio Direto usando o Princípio de D' Alembert;

II. Princípio dos Deslocamentos Virtuais;

III. Princípio de Hamilton.

De acordo com Clough (1993), a primeira metodologia refere-se ao fato da massa do corpo desenvolver uma força de inércia proporcional à sua aceleração, opondo-se ao movimento e a equação de movimento é encontrada a partir do equilíbrio direto das forças existentes no sistema. A segunda metodologia explicita que, um sistema que está em equilíbrio, mas sujeito à ação de uma série de forças, ao se provocar um deslocamento virtual o trabalho total desenvolvido é nulo.

No Princípio de Hamilton, escolhido para o desenvolvimento da formulação, tem-se que um sistema é conservativo, ou seja, não apresenta energia dissipada, quando a variação da energia cinética menos a potencial durante o intervalo de tempo de t_1 para t_2 é nula. Logo, pode-se montar um funcional e obter a função para os deslocamentos, que o minimiza. O Princípio de Hamilton é dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \pi) dt = 0 \quad (2.1)$$

onde T é a energia cinética, π a energia potencial total e o símbolo δ representa a variação dos termos entre parênteses.

A expressão dada pela equação (2.1) é utilizada para sistemas onde se tem a vibração livre sem amortecimento, ou qualquer forma de dissipação de energia.

A formulação que se segue engloba o caso mais complexo relativo à vibração forçada amortecida. Neste caso, também se pode utilizar o princípio de Hamilton onde a variação da energia cinética e potencial mais a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas durante um intervalo de tempo de t_1 para t_2 deve ser igual a zero, logo

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta(W_{nc}) dt = 0 \quad (2.2)$$

onde W_{nc} é o trabalho realizado por forças não conservativas

2.1.1. Energia Potencial Total

A energia potencial total (π) de uma estrutura é obtida pela soma da energia interna de deformação, U , com o potencial das cargas externas, V_p , ou seja:

$$\pi = U + V_p \quad (2.3)$$

Desprezando-se a deformação axial da coluna, procedimento usual na análise da estabilidade de colunas esbeltas segundo Timoshenko (1961), tem-se que a única parcela de energia interna considerada é a energia de flexão gerada pelo alongamento das fibras tracionadas e o encurtamento das fibras comprimidas da coluna. Tem-se então que:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (2.4)$$

onde χ representa a mudança de curvatura, a quantidade EI , onde E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young e I o momento de inércia da seção transversal, é a rigidez a flexão.

O potencial das cargas externas é dado pelo produto da carga P , pelo encurtamento na extremidade da estrutura, Δ , como pode ser visto na Figura 2.1, logo

$$V_p = P \times \Delta \quad (2.5)$$

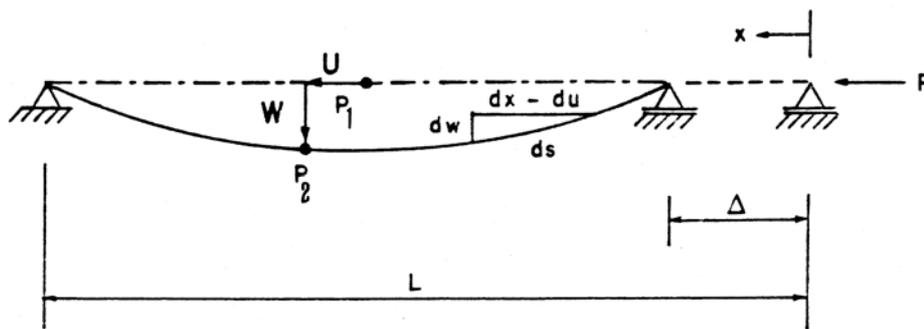


Figura 2.1: Deslocamento transversal e encurtamento da viga-coluna.

A partir da Figura 2.1, tem-se que o deslocamento de um ponto P_1 na configuração indeformada para uma nova posição P_2 em uma configuração deformada pode ser representado por um vetor de deslocamentos decomposto em duas componentes: deslocamento axial u e deslocamento lateral w . Se a linha

neutra da estrutura é inextensível, considera-se o elemento linear dx igual ao elemento curvo ds , como pode ser visto na Figura 2.2 (b).

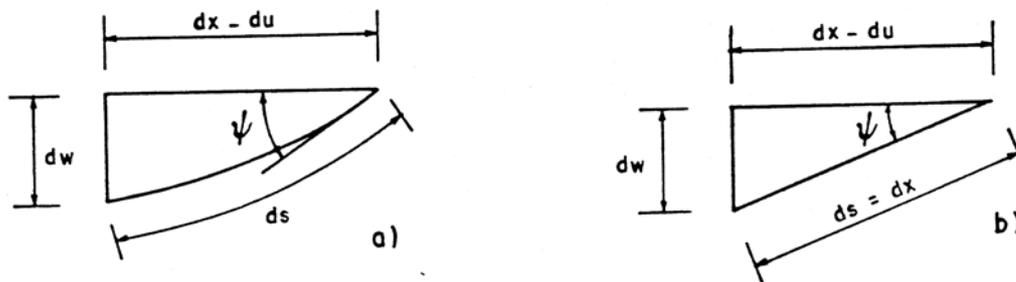


Figura 2.2 - Deslocamento da linha neutra: (a) linha neutra curva, (b) consideração da linha neutra como uma linha reta.

Logo, podem ser escritas as seguintes relações:

$$\sin \psi = \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} = w_{,x} \quad (2.6)$$

$$\psi = \sin^{-1}(w_{,x}) \quad (2.7)$$

onde ψ representa o ângulo formado entre o eixo x e o eixo da viga, após a deformação.

O raio de curvatura do eixo deformado é dado por:

$$\frac{1}{R} = \psi_{,x} = (\sin^{-1} w_{,x})_{,x} = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{1/2}} \quad (2.8)$$

Como o raio de curvatura da estrutura indeformada é:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (2.9)$$

obtém-se para a variação da curvatura χ :

$$\chi = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{1/2}} \quad (2.10)$$

Expandindo a equação (2.10) em séries de Taylor, até a segunda ordem, chega-se a:

$$\chi = w_{,xx} \left(1 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) \quad (2.11)$$

Substituindo a aproximação (2.11) para a variação da curvatura na expressão (2.4), obtém-se para a energia interna de deformação U ,

$$U \cong \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) dx \quad (2.12)$$

Como demonstra Andrade (1993), esta expressão não linear é suficiente para a determinação precisa da energia interna de deformação, incluindo até a região de grandes deslocamentos laterais.

O parâmetro de encurtamento da coluna Δ pode ser escrito em termos do vetor deslocamento. Pela Figura 2.2 e usando o Teorema de Pitágoras tem-se:

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dw)^2 \quad (2.13)$$

Dividindo a equação (2.13) por $(dx)^2$, obtém-se

$$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = \left(\frac{dx - du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (2.14)$$

Se $ds = dx$, tem-se que:

$$1 = (1 - u_{,x})^2 + w_{,x}^2 \quad (2.15)$$

o que leva a

$$\frac{du}{dx} = 1 - (1 - w_{,x}^2)^{1/2} \quad (2.16)$$

Partindo do princípio que

$$\Delta = \int_0^L du = \int_0^L \left[1 - (1 - w_{,x}^2)^{1/2} \right] dx \quad (2.17)$$

e expandindo o termo presente dentro da integral até a quarta ordem, em séries de Taylor, tem-se:

$$\Delta = \int_0^L \left(-\frac{1}{2} w_{,x}^2 - \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) dx \quad (2.18)$$

Logo, a expressão para o potencial da carga axial é:

$$V_p = \int_0^L P \left(-\frac{1}{2} w_{,x}^2 - \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) dx \quad (2.19)$$

A expressão para a energia potencial total da coluna adquire a forma

$$\pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) dx - P \left(\frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) dx \quad (2.20)$$

2.1.2. Fundação Elástica

Na maioria dos estudos ligados a vibrações de colunas sobre uma fundação elástica admite-se que esta reage à tração assim como à compressão. Modelos como os de Winkler, Pasternak, Vlasov, Filonenko-Borodich, dentre outros, têm sido usados na análise de estruturas em fundações elásticas. Na prática, segundo Andrade (1993), o modelo de Winkler é o mais usado, em função principalmente de sua simplicidade e da boa qualidade dos resultados obtidos.

Coskun (1999), define o modelo de Winkler como uma distribuição infinita, mas contínua, de molas lineares e que a fundação aplica somente uma reação normal à coluna, que é proporcional à deflexão desta, sendo, portanto, a resistência específica da fundação expressa por um único parâmetro de rigidez, k_0 .

A energia interna de deformação da fundação elástica considerando este modelo é:

$$U_{fd} = \int_0^H \frac{1}{2} k_0 w^2 dx \quad (2.21)$$

onde H é a profundidade da fundação conforme pode ser visto na Figura 2.3.

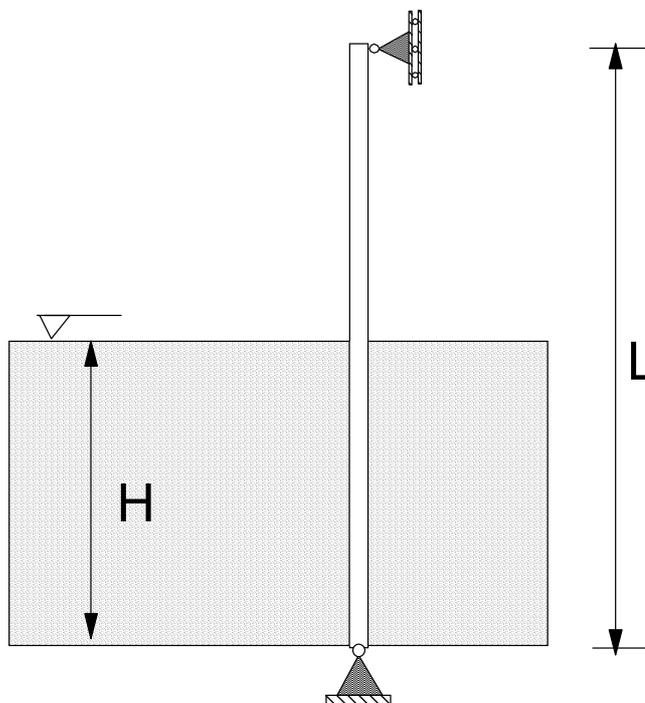


Figura 2.3 – Representação da profundidade da fundação

2.1.3. Energia Cinética

Para um elemento da coluna esbelta, geralmente se considera apenas o efeito da inércia à translação na direção transversal ao eixo da viga. Neste caso tem-se que a energia cinética (T) é dada por

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.22)$$

onde ρ é massa por unidade de volume e A é a área da seção transversal.

2.1.4. Amortecimento

O amortecimento está presente em todos os sistemas oscilatórios. Thomson (1978) observa que a parcela referente ao amortecimento tem como objetivo simular a dissipação de energia que os sistemas reais exibem, seja em forma de calor ou irradiada. Embora seja difícil a descrição real da força de amortecimento, é possível a admissão de modelos ideais de amortecimento, que muitas vezes resultam em prognósticos satisfatórios da resposta. Dentre estes modelos, a força de amortecimento viscoso, proporcional à velocidade, conduz a um tratamento matemático simples. A presença do agente amortecedor muda as características do movimento, passando-se a ter um “movimento harmônico amortecido” ou até mesmo sem caráter oscilatório.

Tem-se, portanto, que a introdução da força de amortecimento no funcional de energia é feita considerando-se o trabalho (Re) realizado por esta e pode ser escrito da seguinte forma sugerida por Rayleigh:

$$Re = \int_0^L \frac{1}{2} \beta_1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.23)$$

$$\beta_1 = \frac{2\xi M \omega_0}{EI} \quad (2.24)$$

onde β_1 é um parâmetro de amortecimento e ξ , M e ω_0 representam respectivamente o fator de amortecimento, a massa e a frequência natural.

Considerando a vibração livre, o valor do parâmetro ξ determina o caráter oscilatório do sistema. Se $\xi < 1,0$ tem-se o movimento oscilatório subamortecido, ou seja, o movimento é uma função do tempo exponencialmente decrescente, se $\xi > 1,0$ tem-se o movimento superamortecido e o sistema não oscila. Entre estas duas situações tem-se o caso crítico, que ocorre quando $\xi = 1$.

2.1.5. Força Harmônica

A introdução no sistema de uma carga $P(t)$ de amplitude A_0 , variando harmonicamente com a frequência, representa uma excitação de longa duração que vai gerar uma resposta transiente e permanente. Considerando-se que o carregamento atua permanentemente, de tal forma que o amortecimento seja sentido, tem-se que a parcela transiente da resposta desaparece ficando apenas a resposta permanente.

Considerando-se na presente análise os diversos fatores de amortecimento, mostra-se que estes são de fundamental importância para o comportamento da vibração forçada, tendo em vista que determinarão o caráter da resposta do sistema, explicitado se estes são rígidos ou flexíveis e influenciando, por sua vez, a amplitude das vibrações.

Admitindo $P(t)$ como uma carga harmônica senoidal tem-se

$$P(t) = A_0 \text{sen}(\omega t) \quad (2.25)$$

em que ω é a frequência da excitação.

No funcional introduz-se a força harmônica, ao considerar o trabalho W_p realizado por esta, cuja forma é:

$$W_p = \int_0^L P(t) w dx \quad (2.26)$$

onde w é a deflexão lateral da coluna.

2.1.6. Montagem do Funcional de Energia Não-Linear

Partindo-se das expressões obtidas anteriormente podem ser estudadas as vibrações não-lineares livres ou forçadas com e sem amortecimento.

Com base nas equações (2.20), (2.21) e (2.22) tem-se a função de Lagrange para uma coluna totalmente enterrada em uma base elástica, com vibração forçada amortecida:

$$L_g = T - \pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) \right] dx + \int_0^L \left[P \left(\frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) - \frac{1}{2} k_0 w^2 \right] dx \quad (2.27)$$

2.2. Funcional de Energia Linear

A análise linear se limitará ao caso de vibração livre sem dissipação de energia. Desta forma será possível obter as expressões $w_1(x)$ e $w_2(x)$ para as duas sub-colunas, as quais constituem o sistema em questão. Logo, a expressão de energia usada para a montagem do funcional para o sistema pode ser obtida através da equação (2.1) descrita no item 2.1.

Considerando pequenas rotações da coluna após a deformação, tem-se que o ângulo ψ , obtido através da equação (2.7), adquire um valor muito pequeno, logo:

$$(1 - w_{,x}^2)^{1/2} \cong 1 \quad (2.28)$$

o que leva a

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI w_{,xx}^2 dx \quad (2.29)$$

Considerando mais uma vez a hipótese de pequenas rotações, a expressão para o potencial das cargas adquire a seguinte forma:

$$V_p = \int_0^L -\frac{1}{2} w_{,x}^2 P dx \quad (2.30)$$

Pode-se escrever, portanto, a expressão para a energia potencial total da coluna (π):

$$\pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2} EI w_{,xx}^2 - \frac{1}{2} w_{,x}^2 P \right) dx \quad (2.31)$$

Partindo-se da equação (2.31) para a energia potencial total da coluna e das expressões para a energia potencial elástica da fundação, equação (2.21), e também para a energia cinética, equação (2.22), obtém-se a função de Lagrange:

$$L_g = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - \left[\int_0^L \frac{1}{2} EI w_{,xx}^2 - \frac{1}{2} w_{,x}^2 P dx + \int_0^H \frac{1}{2} k_0 w^2 dx \right] \quad (2.32)$$

Após a montagem da função de Lagrange pode-se, através do Princípio de Hamilton, chegar até a equação diferencial do problema. Este procedimento será discutido no próximo capítulo.