4
Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados os resultados da análise linear considerando diversos valores práticos do parâmetro da base elástica. É também analisada a influência da profundidade da fundação e de níveis de carregamento na obtenção das freqüências e dos modos de vibração. Outro aspecto a ser considerado refere-se à alteração das condições de contorno cuja importância está relacionada com a rigidez da fundação.

4.1.
Obtenção dos Parâmetros da Base Elástica e de Carga

Foi desenvolvido um programa em Maple 7, onde são inseridas as equações diferenciais de quarta ordem para as deflexões da coluna, as condições de contorno e de continuidade do problema. A seguir, monta-se o sistema de equações homogêneas com as constantes presentes nas soluções das equações diferenciais como variáveis, resultando este procedimento, portanto, num problema de autovalor e autovetor. Os autovalores do problema são as freqüências naturais e os autovetores são os modos de vibração da coluna.

Ao inserir as equações diferenciais de quarta ordem no programa, são necessários os valores de K e λ, que são respectivamente os parâmetros de rigidez da base elástica linear e de carga, como descrito em detalhe no Capítulo 3.

O parâmetro K da fundação pode ser obtido a partir do parâmetro de rigidez da fundação k_0 que é definido como (Poulos (1980))

$$k_0 = k_h d \tag{4.1}$$

onde k_h é o modulo de reação da base elástica e d é a largura da estaca.

Os valores do parâmetro de rigidez, k_h, utilizados na equação (4.1), advêm dos testes de carregamento de placas sob base elástica de Terzaghi (1955) ajustados para a situação de pilares enterrados descrita em Poulos (1980).

De acordo com as considerações de Terzaghi (1955) para as argilas, o valor de k_h, é essencialmente o mesmo para as situações de barras horizontais e verticais, independentemente da profundidade da estaca. A seguinte relação para k_h é proposta:

$$k_h = \left(\frac{1}{1.5d}\right)\left(\overline{k}_{s1}\right) \tag{4.2}$$

onde

$\overline{k}_{s1}$ = módulo para uma placa horizontal quadrada de 1*ft* de lado (1 *ft* = 0,3048*m*).

d = largura da coluna em *ft*.

Típicos valores de $\overline{k}_{s1}$ para argilas sobreadensadas, são mostrados na Tabela 4.1.

Consistência da Argila	Rija	Muito Rija	Dura
$\overline{k}_{s1}$	75	100	300

Tabela 4.1 – Valores de k_{s1} em t/ft^3 para uma placa quadrada e solo argiloso sobreadensado, obtidos em Poulos (1980).

Para pilares enterrados em solos coesivos fofos, como a areia, admite-se que k_h varia linearmente com a profundidade, logo,

$$k_h = n_h \times \frac{z}{d} \tag{4.3}$$

onde n_h é um parâmetro de rigidez para solos coesivos, z é a profundidade e d a largura da coluna. Valores típicos para n_h encontram-se na Tabela 4.2, abaixo:

Densidade Relativa	Pouca	Média	Densa
n_h (areia seca)	7	21	56
n_h (areia submersa)	4	14	34

Tabela 4.2 – Típicos valores de n_h ,em t/ft^3 , para diversos níveis de adensamento de areia, obtidos em Poulos (1980).

Para se avaliar a faixa de variação do parâmetro de rigidez da fundação, de tal modo que se possa ter uma orientação para o estudo paramétrico apresentado a seguir, considera-se um perfil I laminado em aço com abas paralelas retilíneas, com uma seção de altura $d = 0,407m$. O módulo de elasticidade (*E*) e o momento de inércia (*I*) considerados para este perfil possuem os seguintes valores:

$$E = 210.000 N/m^2$$
$$I = 1,205 \times 10^{-5} m^4$$

Com o dado relativo à medida *d* e os valores obtidos por Terzaghi convertidos para o sistema internacional de unidades, obtêm-se os valores apresentados na Tabela 4.3 para os solos argilosos e arenosos:

Tipo de Solo	k_0 (kN/m^2)	K	$K_{adotado}$
Argila Fofa	517,2	2.102,4	2.000
Areia pouco Adensada	1.257,7	5.112,6	5.000
Argila Rija	4.791,7	19.478,5	20.000
Argila Dura	19.168,2	77.919,5	75.000

Tabela 4.3 – Valores de k_0 e de K para diversos tipos de solos.

Para se definir o parâmetro de carga λ é necessário o conhecimento do valor do parâmetro de carga crítica, λ_{crit}, para uma dada configuração. O valor do parâmetro de carga λ_{crit} é obtido a partir de um programa auxiliar também em Maple 7, semelhante ao aqui desenvolvido para o cálculo das freqüências naturais. Maiores detalhes podem ser encontrados em Andrade (1993).

A Tabela 4.4 apresenta alguns valores para o parâmetro λ_{crit} considerando uma coluna enterrada até a metade de sua altura, com K = 2.000 e quatro possíveis condições de contorno.

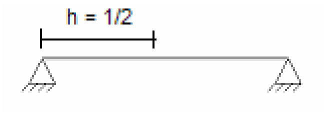
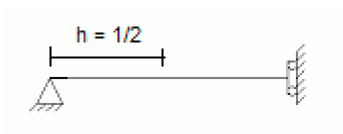
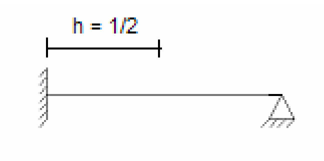
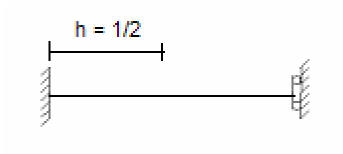
Condições de Contorno	K	λ_{crit}
Caso (5) 	2.000	2,51
Caso (6) 	2.000	1,76
Caso (7) 	2.000	2,51
Caso (8) 	2.000	1,76

Tabela 4.4 – Valores de λ_{crit} para diferentes condições de contorno

Ao se comparar a carga crítica do caso (5) com a do caso (7) bem como a carga crítica do caso (6) com a do caso (8), verifica-se que os valores obtidos se diferenciam apenas na sétima casa decimal. A ocorrência deste fato pode ser explicada pela presença da base elástica que diminui a influência das condições de apoio na extremidade do trecho enterrado. Este mesmo fato é observado no caso dinâmico, o que leva a ocorrência de freqüências de valores bem próximos para condições de contorno diferentes.

Considerando-se uma mesma condição de contorno, pode-se traçar um gráfico com os valores obtidos para o parâmetro de carga λ_{crit} em função da rigidez da fundação K. Os gráficos da Figura 4.1 mostram a variação da carga crítica em função do parâmetro da base elástica para os casos (5), (6), (7) e (8) da Tabela 4.4.

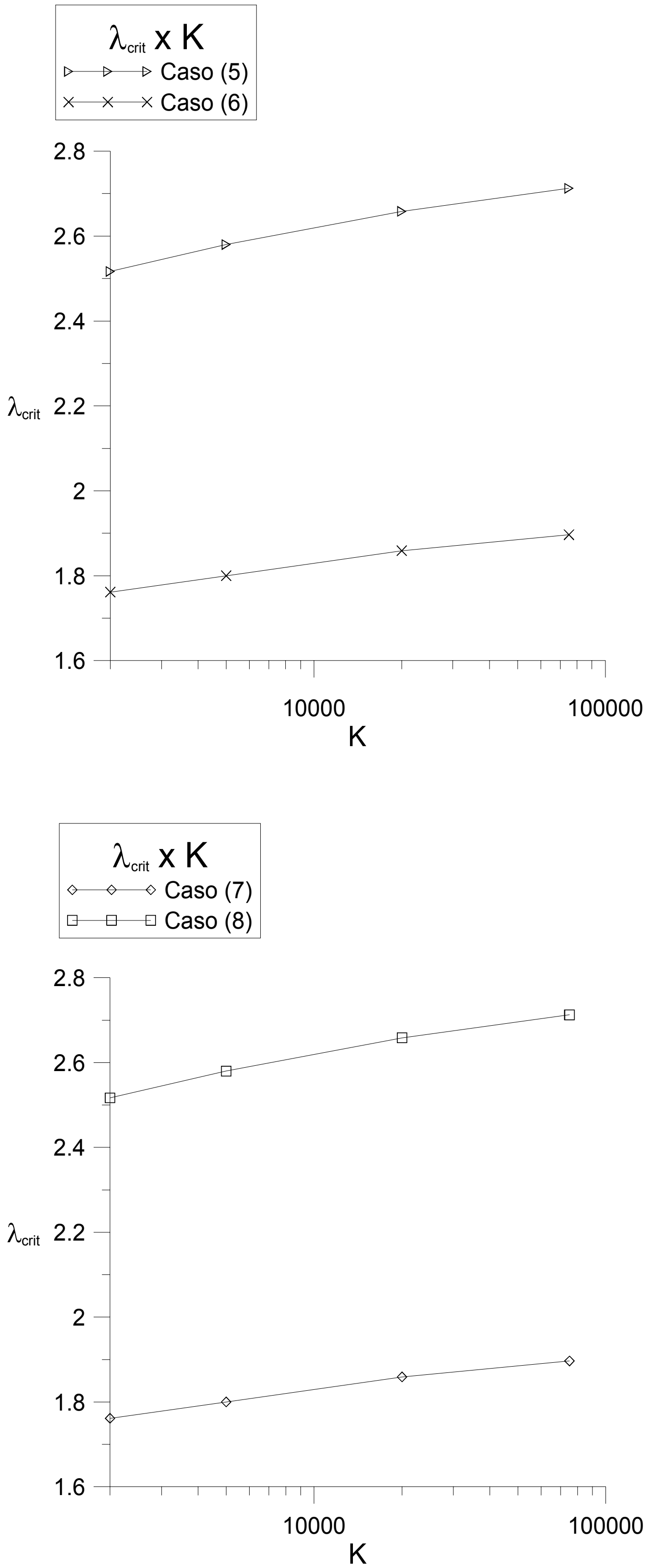


Figura 4.1 – Influência de K nos valores de λ_{crit} para diferentes condições de contorno.

Como pode ser visto, na presença da base elástica, os valores para o caso (5) são muito próximos daqueles encontrados para o caso (7), da mesma forma ocorrendo para os casos (6) e (8) para toda a faixa de K analisada. Pode-se, portanto, dizer que a base elástica atenua as diferenças entre as condições de apoio da coluna na extremidade inferior, tornando em alguns casos semelhantes as cargas críticas encontradas.

Para estacas totalmente enterradas, $h = 1$, Davisson & Robinson (1965) estabeleceram um critério que relaciona, a partir das características do solo e da estaca, o comprimento total (L) e a profundidade em que a estaca pode ser considerada como engastada, em um ponto intermediário entre as duas extremidades, independentemente das condições de apoio. Considerando solos argilosos, este critério define o seguinte parâmetro R:

$$R = \sqrt[4]{\frac{EI}{k_0}} \tag{4.4}$$

onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia e k_0 é definido pela expressão (4.1).

Assim sendo, obtém-se a profundidade do ponto de engastamento intermediário e a profundidade mínima total da coluna para que se tenha este ponto, respectivamente, L_s e $L_{\min}$:

$$L_s = 1{,}4R \tag{4.5}$$

$$L_{\min} = 4R \tag{4.6}$$

Logo, o comprimento total da estaca, L, deve obedecer a seguinte condição:

$$L > L_{\min} \tag{4.7}$$

A Figura 4.2, abaixo, mostra os comprimentos L_s e L:

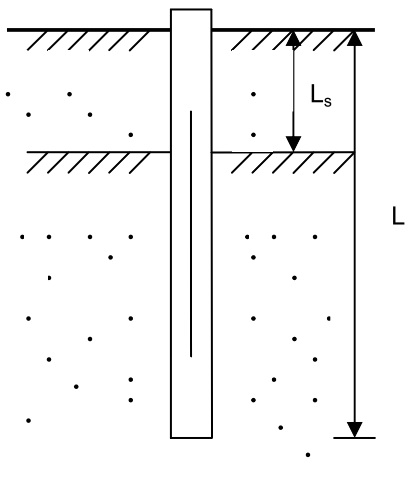


Figura 4.2 - Comprimentos L_s e L da estaca totalmente enterrada.

4.2.
Obtenção do Parâmetro da Freqüência Natural pelo Método de Rayleigh-Ritz.

A obtenção do parâmetro de freqüência, relacionado com cada modo de vibração, pelo método aproximado de Rayleigh-Ritz teve por objetivo, durante o desenvolvimento da tese, aferir os resultados obtidos através da solução analítica e auxiliar na escolha da melhor família de soluções das equações diferenciais de quarta ordem, como descrito no Capítulo 3. Isto se tornou necessário em virtude da grande sensibilidade numérica das soluções.

Seguindo a metodologia explicitada no item 3.2, obteve-se as quatro primeiras freqüências de vibração livre da coluna biapoiada descarregada para diversos valores da rigidez da fundação. Como funções de interpolação, foram adotados os modos de vibração de uma viga biapoiada sem fundação, sendo considerada na expansão modal os oito primeiros modos. Os resultados encontram-se na Figura 4.3, onde se tem o parâmetro da freqüência Ω em função do parâmetro de rigidez *K*. Mostra-se no gráfico a linha pontilhada relativa a relação $\Omega = K^{1/4}$ que corresponde ao limite entre as duas soluções analíticas distintas obtidas para este caso.

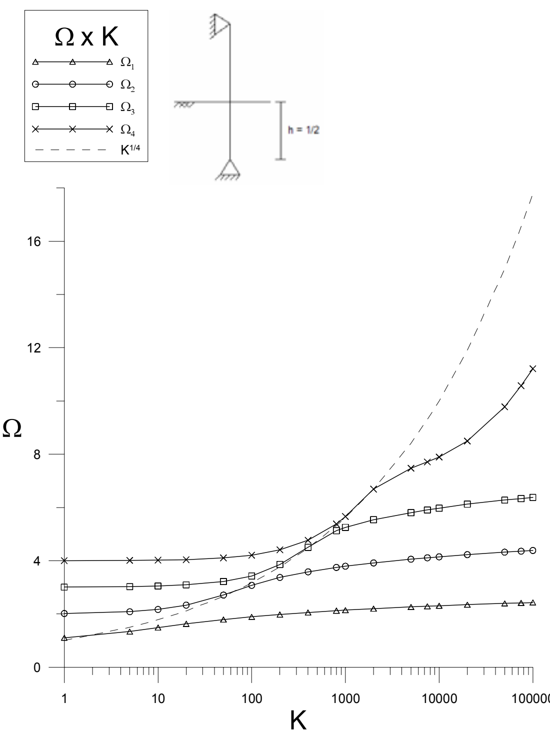


Figura 4.3 - Parâmetro de freqüência versus rigidez K da fundação pelo método de Rayleigh-Ritz.

4.3. Influência dos Parâmetros da Base Elástica nos Valores do Parâmetro da Freqüência Natural.

A Figura 4.4 apresenta a variação do parâmetro da freqüência, Ω, obtido a partir da solução analítica, em função do parâmetro de rigidez da fundação, *K*, demonstrando o comportamento das quatro primeiras freqüências de vibração representadas pelas quatro curvas presentes no gráfico. Comparando-se estes resultados com aqueles apresentados na Figura 4.3, verifica-se que os valores obtidos pelo método de Ritz concordam com aqueles calculados analiticamente, exceto no caso da quarta freqüência para valores de K >10.000. Neste caso, seriam necessários mais que oito modos na expansão adotada para se obter a convergência destas freqüências.

Analisando-se os resultados, verifica-se que, ao se aumentar o valor de *K*, para uma mesma condição de contorno, têm-se valores crescentes para as freqüências naturais. Nota-se, também, que à medida que *K* cresce, a freqüência de vibração tende a atingir um valor limite, podendo o solo ser considerado como rígido.

A partir das Figuras 4.3 e 4.4 verifica-se que o maior intervalo de variação da freqüência encontra-se entre os valores para o parâmetro da base de zero a dois mil, fato este explicado pela maior liberdade da coluna em vibrar quando submetida a um solo menos rígido.

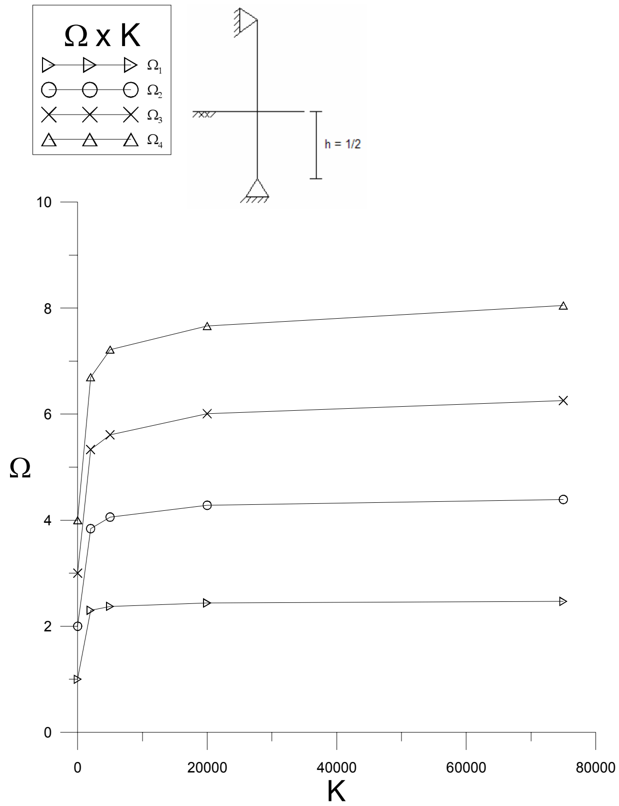


Figura 4.4 - Variação do parâmetro da freqüência em função do parâmetro de rigidez da fundação.

A influência do parâmetro de rigidez da fundação, na vibração da coluna, também pode ser observado analisando-se os modos de vibração. As Figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 mostram os quatro primeiros modos de vibração considerando quatro valores de *K*: 500, 2.000, 20.000 e 75.000. Em cada caso, o modo foi normalizado de tal forma que a amplitude máxima é sempre igual a um. Verifica-se nitidamente que a elevação dos valores de *K* implica em amplitudes menores na parte da coluna no interior da fundação e que a alteração no número de ondas que descrevem o movimento da coluna se dá preferencialmente na parte desenterrada.

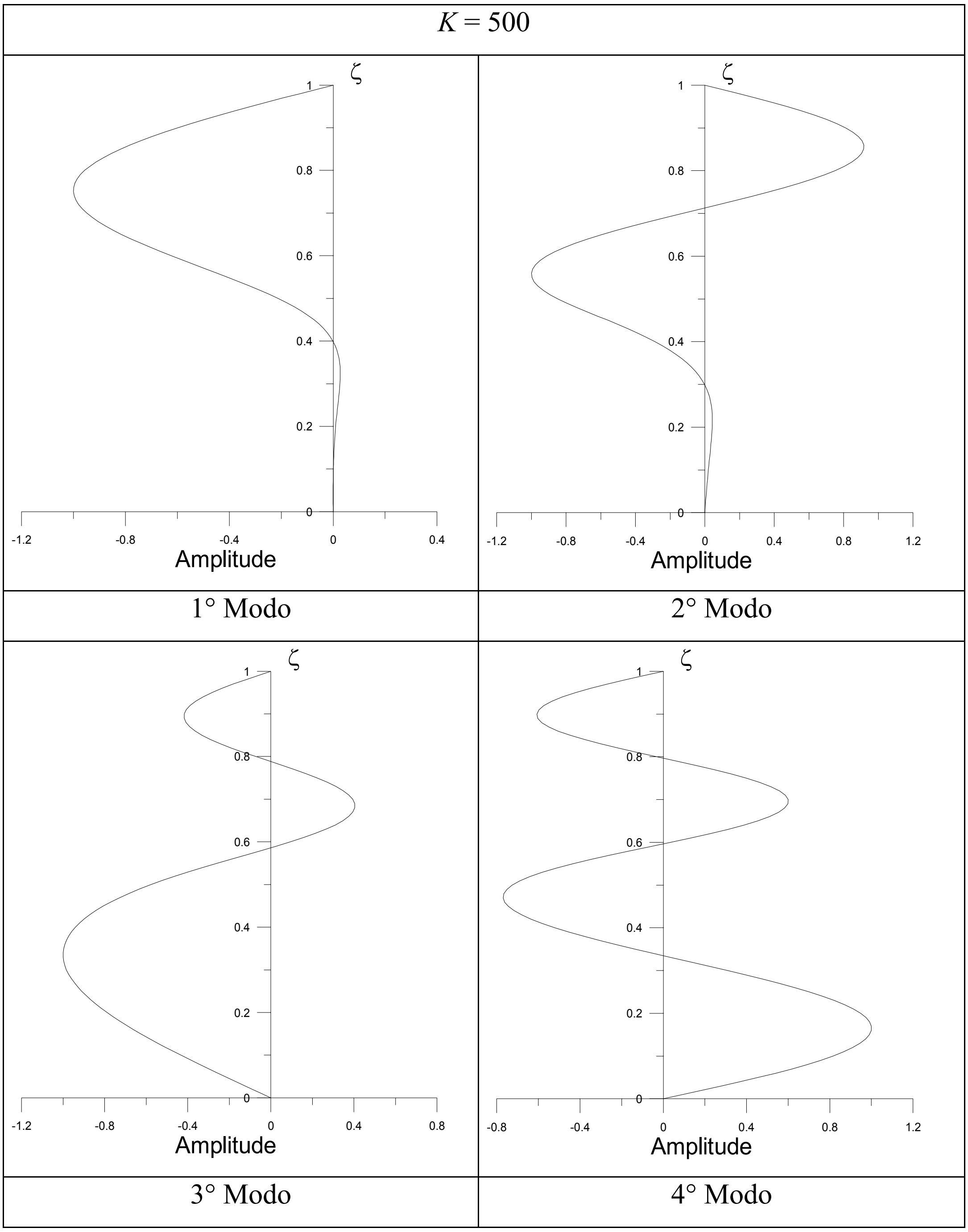


Figura 4.5 – Modos de vibração para K = 500.

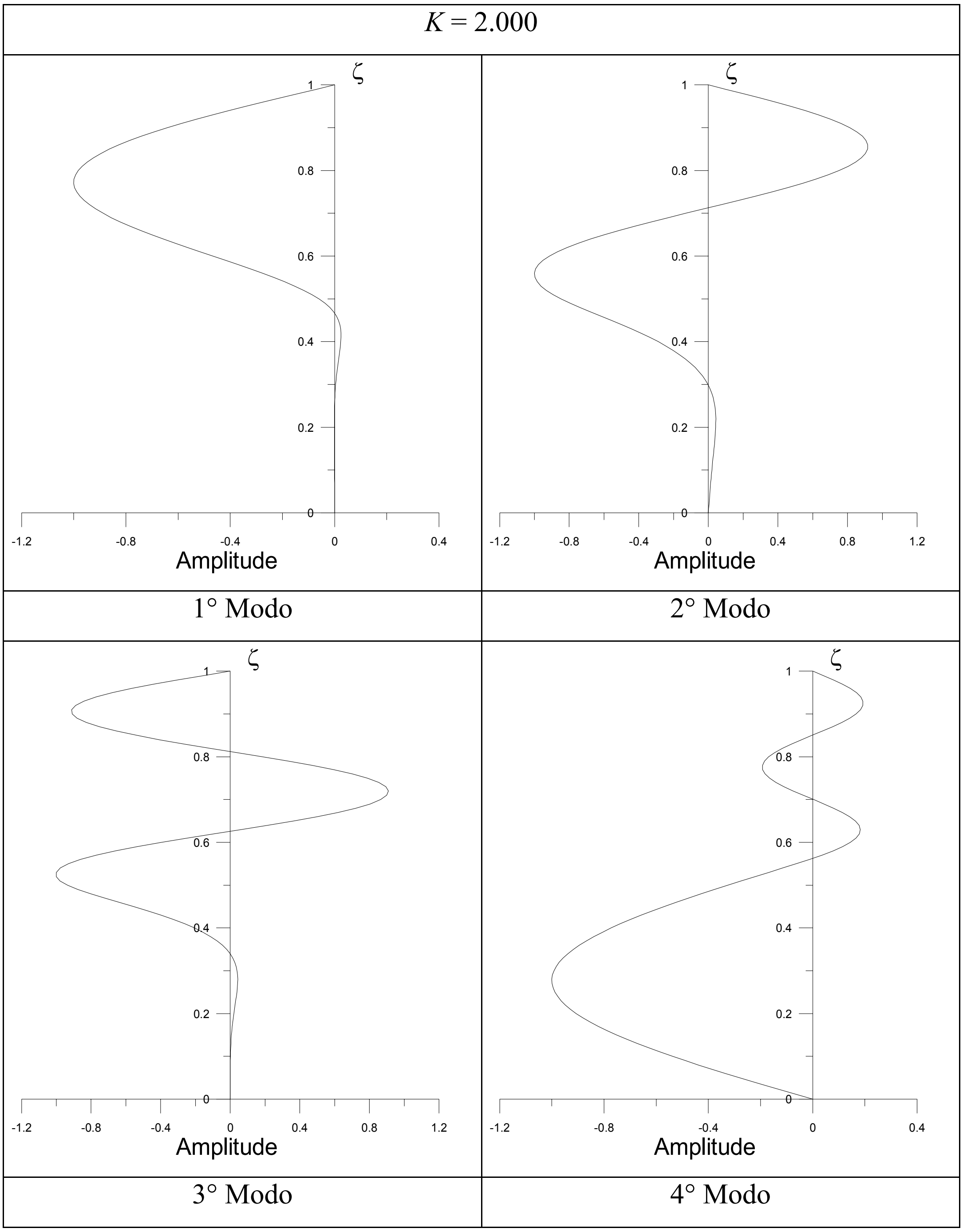


Figura 4.6 – Modos de vibração para K = 2.000.

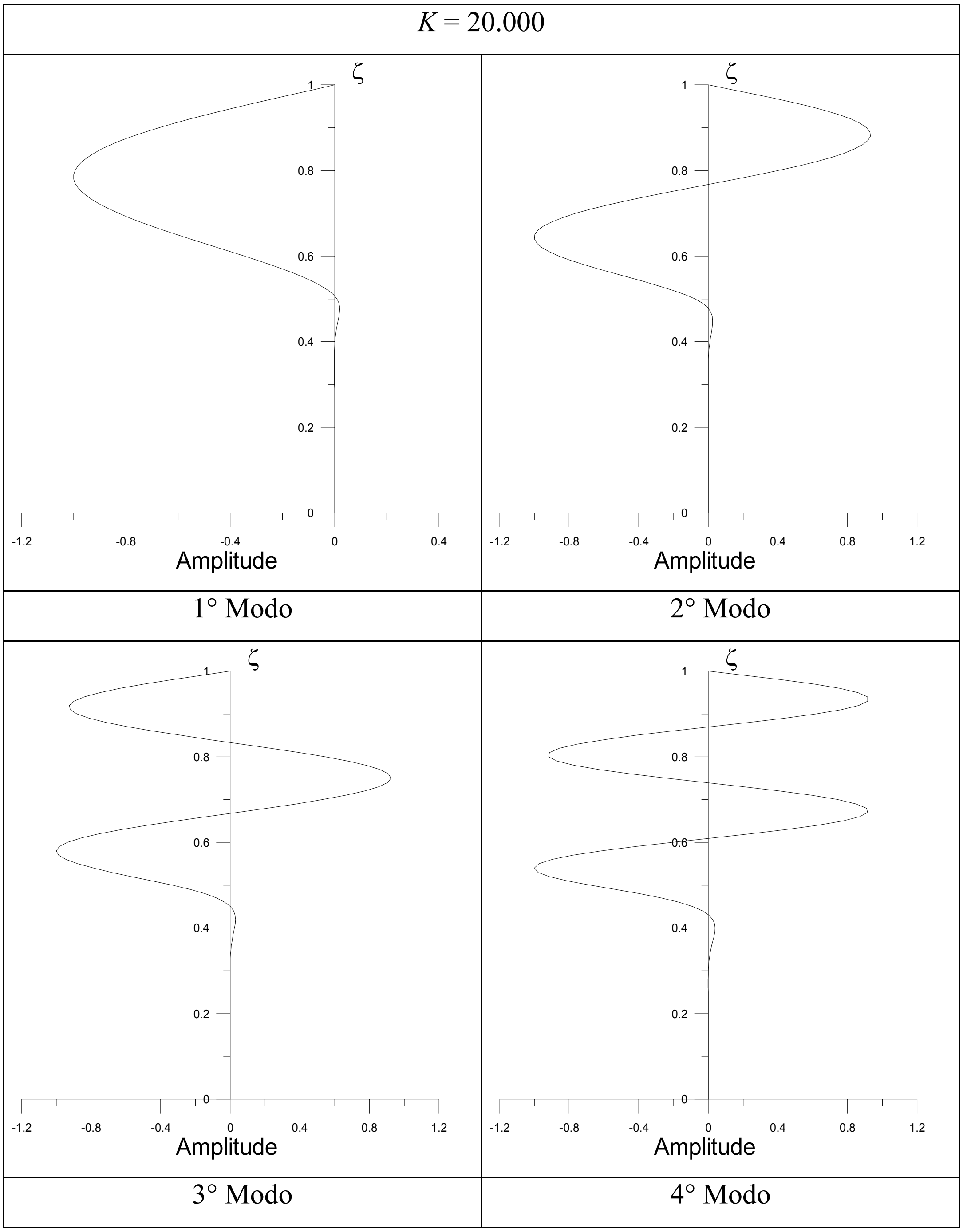


Figura 4.7 – Modos de vibração para K = 20.000.

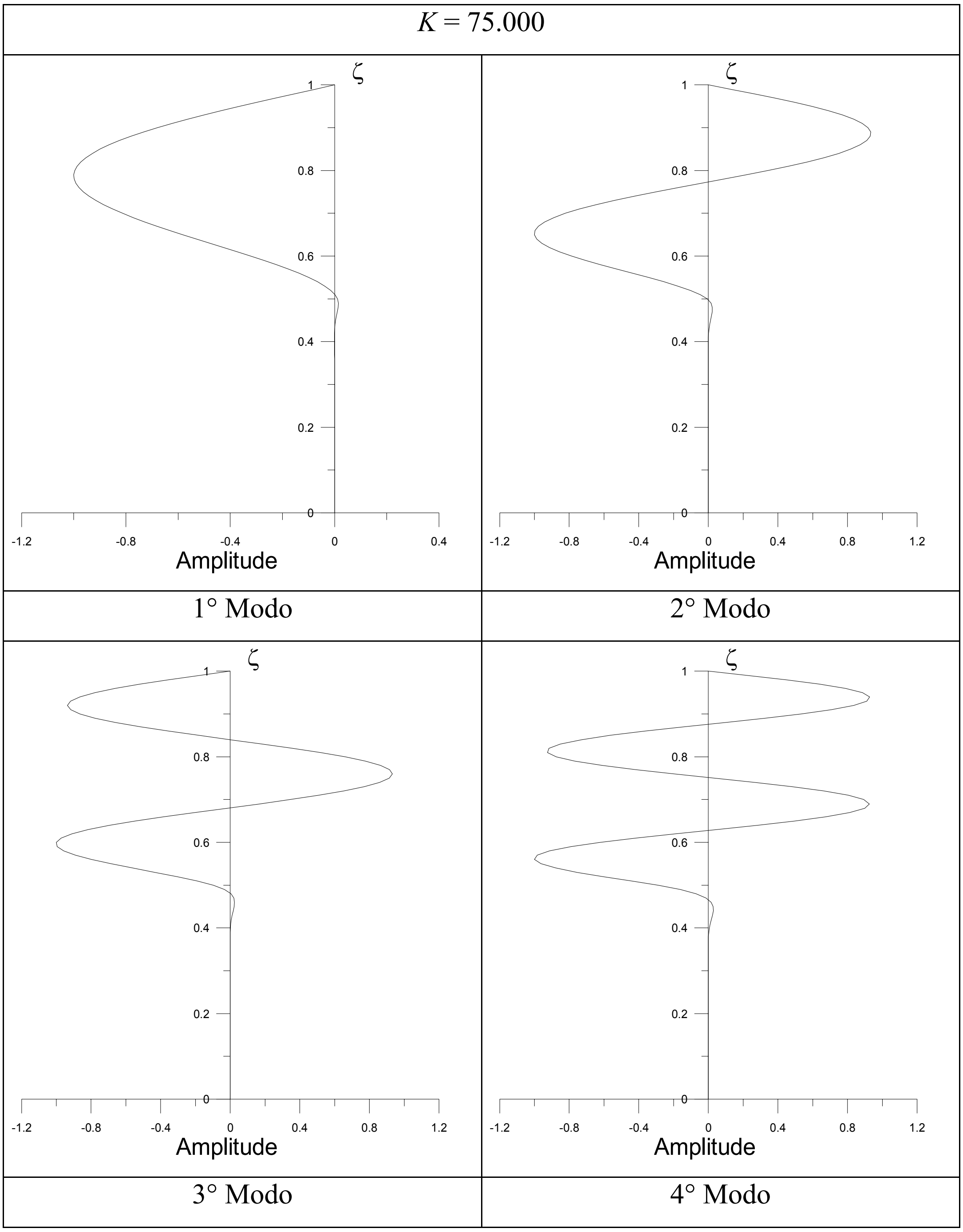


Figura 4.8 – Modos de vibração para K = 75.000.

Comparando-se a Figura 4.5, que representa os modos de vibração para uma fundação flexível (K = 500), com a Figura 4.8 que representa os modos de vibração para uma fundação rígida (K = 75.000), nota-se que o comprimento da coluna sujeito a grandes deslocamentos transversais na primeira é maior do que na segunda fundação, ou seja, devido a grande rigidez envolvida no segundo caso, a região enterrada da coluna praticamente não sofre deslocamentos, concentrando estes na região desenterrada. É interessante observar que, por exemplo, para K =

75.000 (Figura 4.8), o campo de deslocamentos do trecho desenterrado corresponde praticamente aos modos de vibração de uma viga engastada na base e apoiada no topo.

Outro aspecto a ser observado é que a partir do terceiro modo de vibração, quando a rigidez é pequena, os deslocamentos do trecho enterrado são maiores do que no trecho desenterrado.

4.4. Influência da Profundidade da Fundação

Neste item estuda-se o efeito da variação da profundidade da fundação nas freqüências e modos de vibração.

As Figuras 4.9 e 4.10 apresentam a variação do parâmetro da freqüência, Ω, versus a profundidade da fundação, $h = H/L$, considerando respectivamente K = 2.000, 20.000 e 75.000.

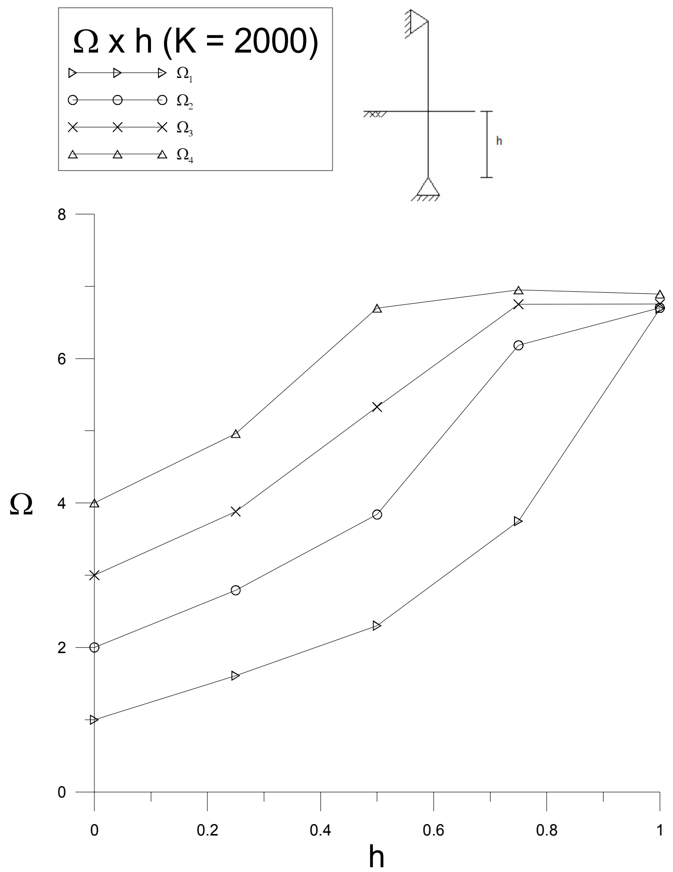


Figura 4.9 - Influência da profundidade h da fundação nos valores do parâmetro das freqüências naturais para K = 2.000.

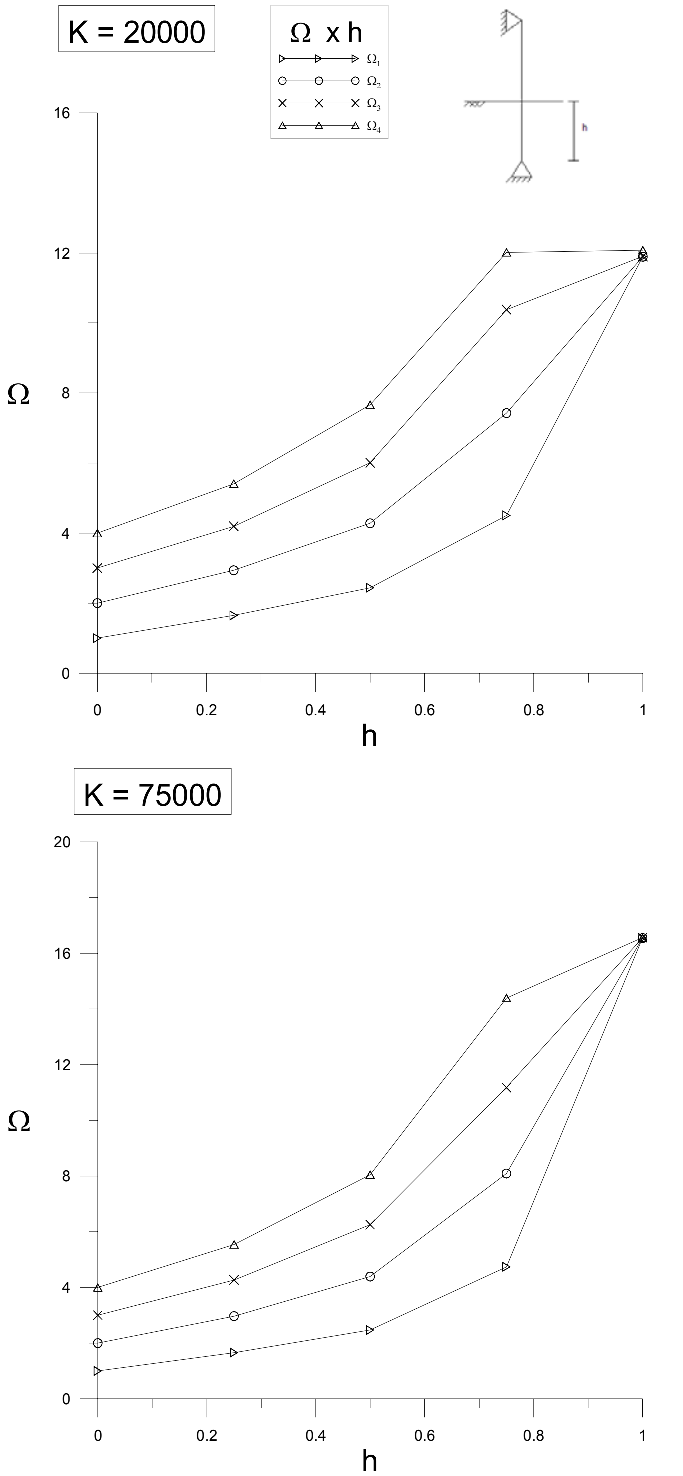


Figura 4.10 - Influência da profundidade h da fundação nos valores do parâmetro das freqüências naturais para K = 20.000 e K = 75.000.

Analisando as Figuras 4.9 e 4.10, tem-se que o aumento da profundidade da fundação leva também a um acréscimo nos valores das freqüências, este fato é devido a menor altura da região desenterrada onde por sua vez se localizam as maiores amplitudes de vibração.

As figuras em questão também mostram que a freqüência que mais sofre influência da profundidade da fundação é a de menor valor, o que é explicitado pelo maior intervalo de variação de seus valores.

Comparando-se a disposição das curvas para as quatro freqüências, tem-se que o aumento do valor de K leva ao afastamento entre estas conforme se aumenta também a profundidade h até se atingir aproximadamente $\frac{3}{4}L$. A partir deste ponto os valores voltam a se aproximar e quando a profundidade h atinge valores próximos à unidade os parâmetros de freqüência apresentam valores bem próximos. Nesta região qualquer alteração no valor da freqüência se reflete rapidamente na alteração do modo de vibração.

Uma outra maneira de se comprovar os resultados obtidos para a coluna totalmente enterrada é a substituição no funcional de energia, equação (2.32), da seguinte solução analítica para a coluna totalmente enterrada:

$$w(x,t) = Ae^{i\omega t} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{4.8}$$

onde w representa os deslocamentos transversais da coluna, A é amplitude, ω a freqüência, n indica a ordem da freqüência de vibração e L representa o comprimento da coluna. Fazendo-se a eliminação dos termos exponenciais tem-se a seguinte expressão para a freqüência, considerando a transformação em variáveis adimensionais:

$$\Omega = \left(n^4 + \lambda^2 n^2 + K\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4.9}$$

onde mais uma vez Ω, λ e K são respectivamente o parâmetro de freqüência, de carga e de rigidez da base elástica.

Simulando, por exemplo, a situação em que a coluna encontra-se descarregada e K é igual a 2.000, conforme mostrado na Figura 4.10, pode-se, a partir da equação (4.9), obter o gráfico da Figura 4.11, que mostra os valores da freqüência para o n-ésimo modo de vibração.

Pode ser visto a partir da Figura 4.11, que as três primeiras freqüências de vibração encontram-se muito próximas, característica esta percebida quando $\Omega > K^{1/4}$.

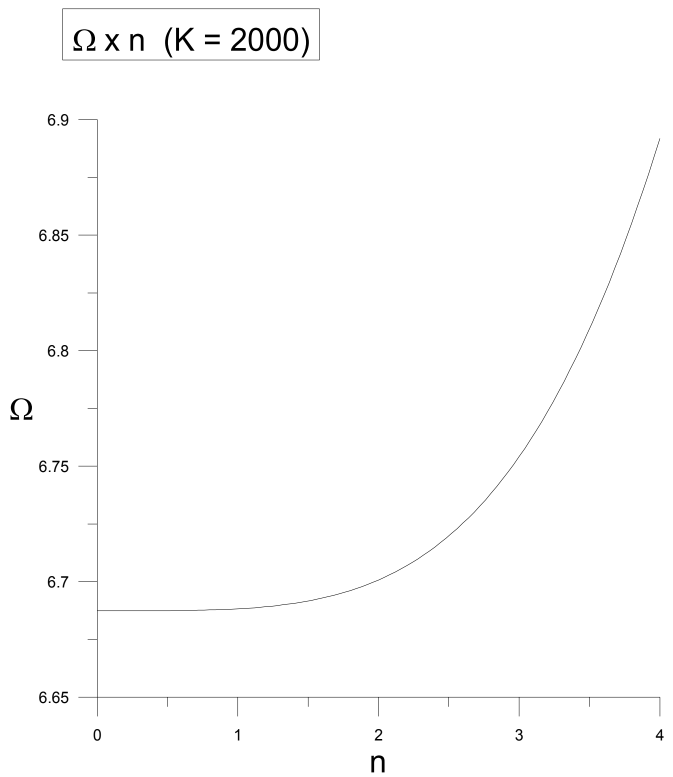


Figura 4.11 – Relação Ω x n para o caso em que K = 2.000 e a coluna encontra-se totalmente enterrada.

A Figura 4.12, a seguir, mostra a variação do parâmetro da freqüência, Ω, pela profundidade *h*, através da superposição das curvas contidas nas Figuras 4.9 e 4.10, ao se considerar apenas as duas primeiras freqüências de vibração para cada valor de *K*.

Esses resultados mostram que a maior influência da profundidade da fundação nos valores das freqüências naturais ocorre para as situações em que o valor de *K* é alto. Entretanto, esta influência diminui consideravelmente para pequenas profundidades da fundação.

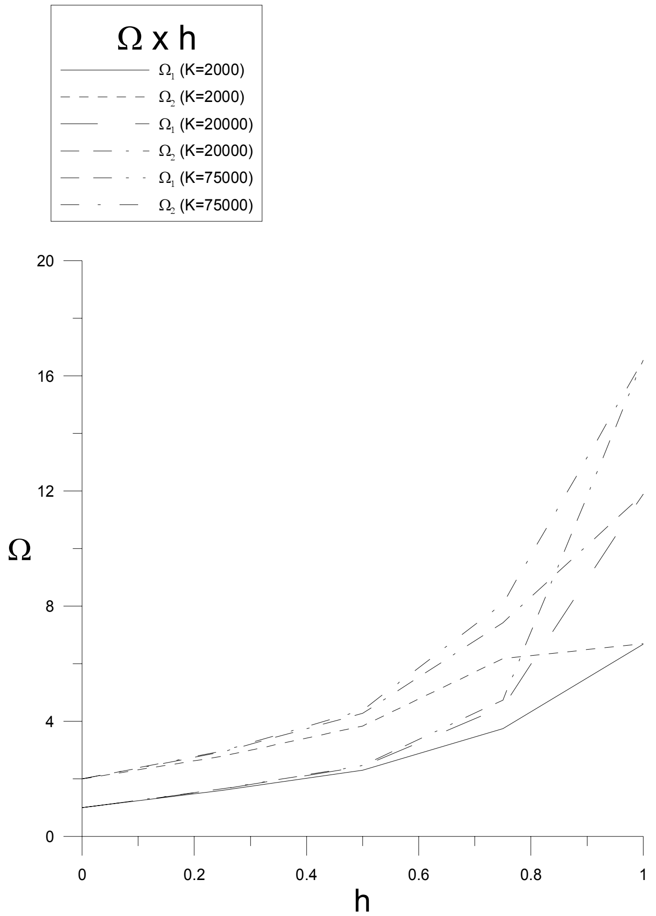


Figura 4.12 – Superposição das curvas das duas primeiras freqüências de vibração para diferentes valores de K.

Outra maneira de se mostrar a importância da profundidade da fundação no sistema proposto consiste na avaliação dos modos de vibração obtidos quando aumenta-se a profundidade da fundação.

A Figura 4.13 apresenta os quatro primeiros modos de vibração, considerando K = 2.000, para cinco opções de profundidades diferentes: 0, 1/4, 1/2, 3/4 e 1.

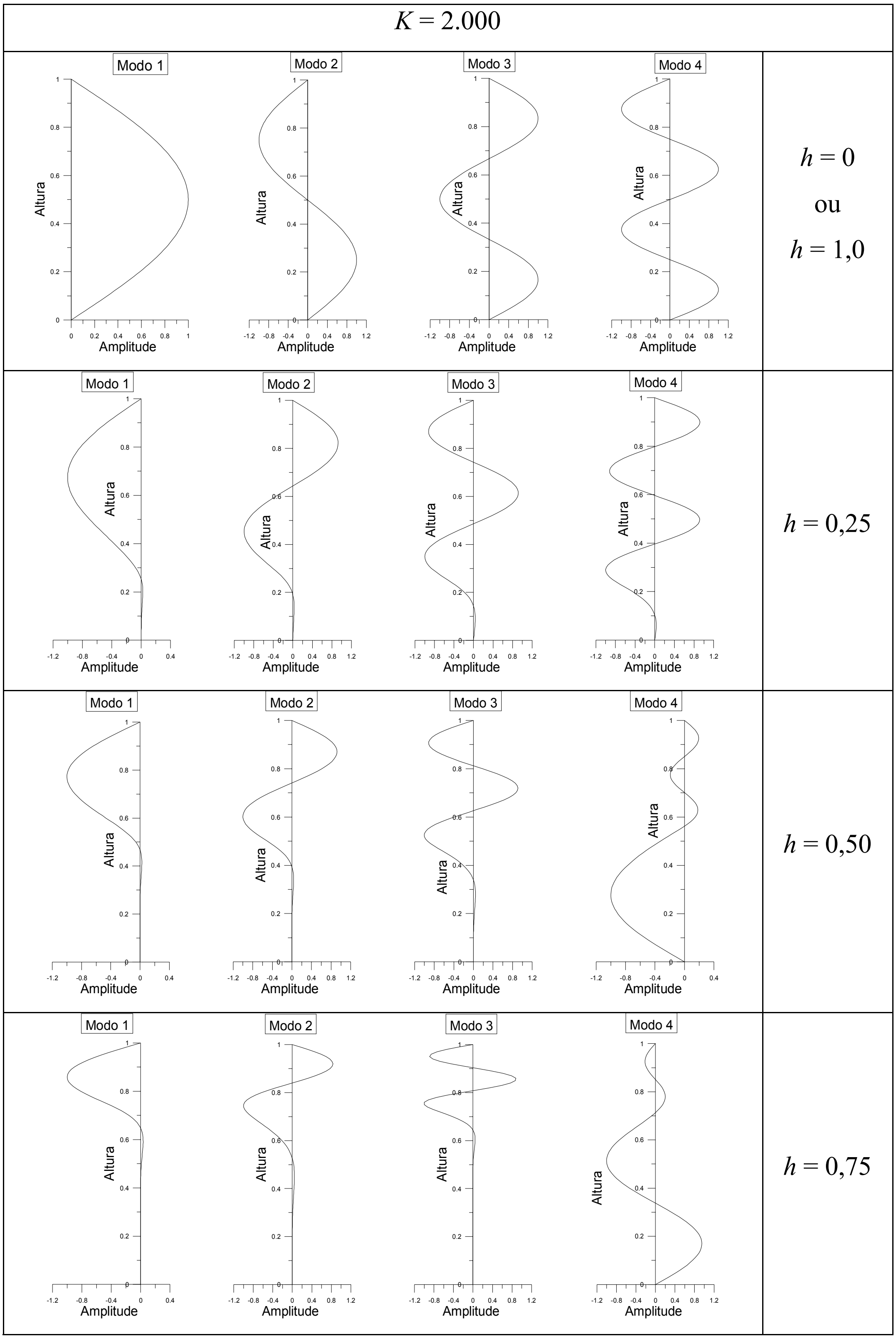


Figura 4.13 – Modos de vibração para diferentes profundidades da fundação.

Os modos de vibração presentes na Figura 4.13 mostram que, à medida que h cresce, os modos de vibração vão mudando de forma, havendo uma variação contínua entre a forma do modo sem fundação e a forma do modo em que a coluna está totalmente enterrada.

4.5. Influência do Carregamento - Parâmetro de Carga λ

A influência da carga estática *P*, representada pelo parâmetro λ, tem como base o cálculo da carga crítica, mencionada no item 4.1. A partir desta, basta substituir os respectivos valores nas equações diferenciais de quarta ordem (3.11) e (3.16). Desta forma, foram escolhidos cinco percentuais da carga crítica a serem aplicados na coluna: 0, $0{,}25\lambda_{crit}$, $0{,}5\lambda_{crit}$, $0{,}75\lambda_{crit}$ e $1{,}0\lambda_{crit}$.

A Figura 4.14 mostra a variação do quadrado da menor freqüência de vibração (primeiro modo) em função do valor do parâmetro de carga.

Verifica-se que ao crescer o nível de carregamento a menor freqüência decresce e torna-se nula quando o parâmetro de carga atinge o valor crítico para qualquer valor de *K.* Isto em função do fato da rigidez efetiva da coluna, associada ao primeiro modo, se tornar zero ao se atingir o ponto de bifurcação.

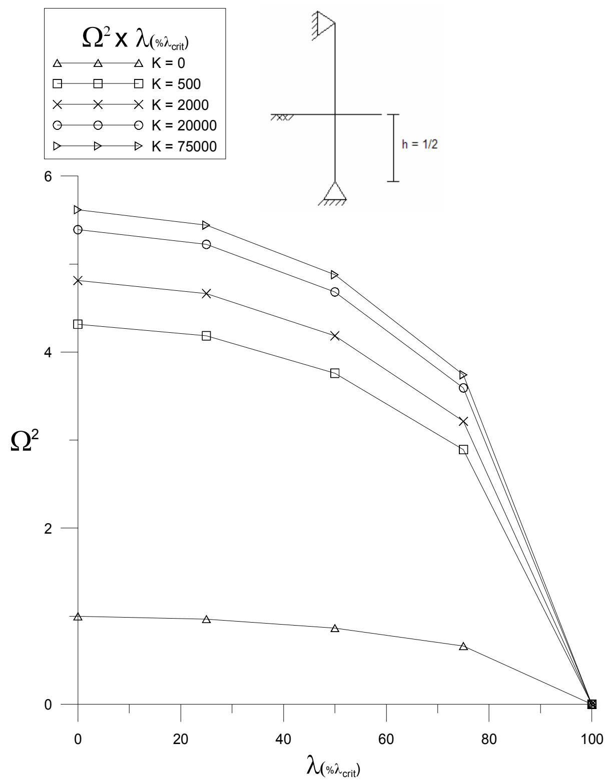


Figura 4.14 - Variação do quadrado da menor freqüência de vibração versus a porcentagem do parâmetro de carga para 5 valores diferentes de *K*.

Como pode ser visto, a aplicação de valores altos de carga diminui a diferença entre os valores da freqüência de colunas sujeitas a diferentes valores de *K*.

Outra análise que pode ser feita refere-se à influência nos valores da menor freqüência ao se variar ao mesmo tempo a profundidade da fundação e o percentual da carga crítica aplicada à coluna. A Figura 4.15 ilustra esta influência, mostrando a variação do quadrado do parâmetro de freqüência pelo percentual de carga aplicado considerando profundidades diferentes para a fundação.

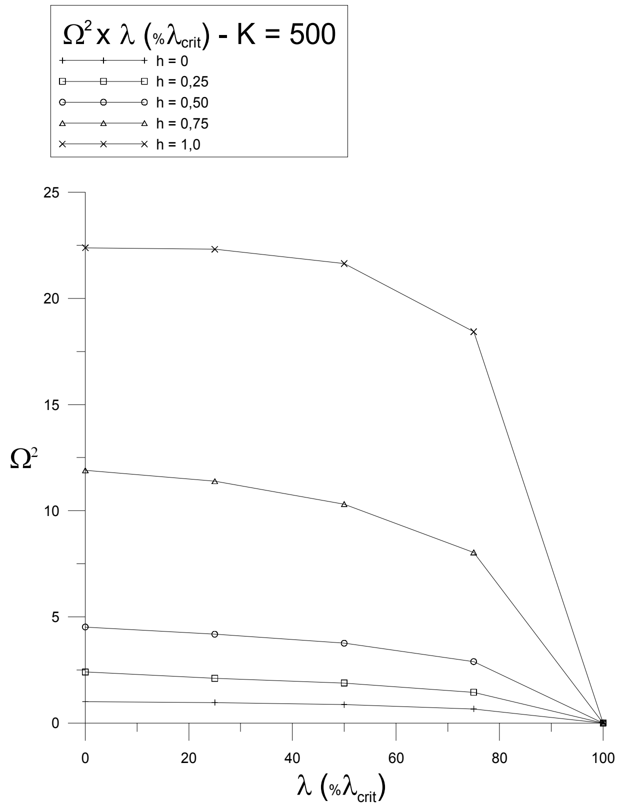


Figura 4.15 - Variação do quadrado da freqüência versus a porcentagem do parâmetro de carga para 5 valores diferentes da profundidade da fundação.

A partir da Figura 4.15, vê-se que o quadrado da freqüência, independendo do valor para a profundidade da fundação, decresce com a elevação da carga aplicada, tendo-se valores mais elevados quando a fundação atinge integralmente o comprimento da coluna. O espaçamento entre as curvas também é influenciado com o aumento do valor da profundidade da fundação, sendo maior à medida que esta última adquire valores mais elevados.

Concluindo a análise da influência da aplicação do carregamento no topo da coluna, mantem-se o valor da profundidade inalterado e encontram-se as quatro primeiras freqüências de vibração da coluna. A Figura 4.16 exemplifica a situação descrita mostrando a variação do quadrado do parâmetro da freqüência pelo percentual de aplicação da carga crítica para dois valores de *K* distintos.

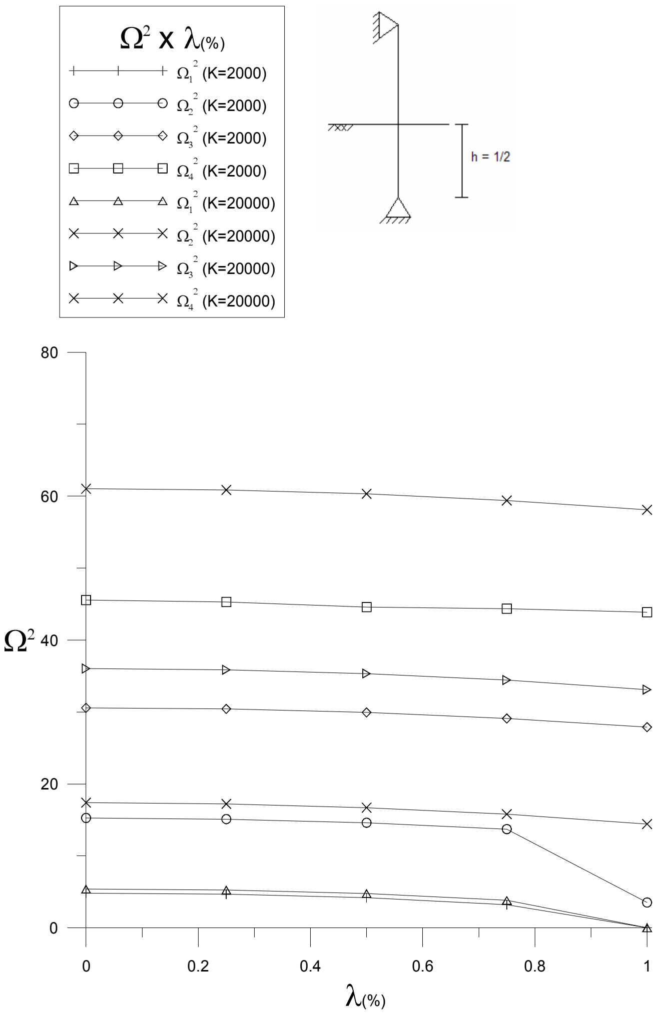
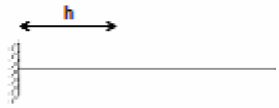


Figura 4.16 - Variação do quadrado da freqüência versus a porcentagem do parâmetro de carga para 2 valores diferentes de K.

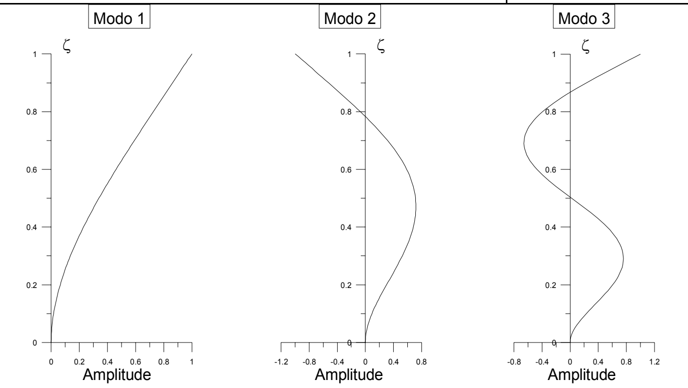
Analisando a Figura 4.16, nota-se que o acréscimo no valor de *K* leva a valores de freqüência mais elevados, sendo que o comportamento da primeira freqüência de vibração é diferenciado quando comparado com os demais. Para esta, ao se aplicar 100% da carga crítica, a freqüência atinge o valor nulo, enquanto que as freqüências de valores mais elevados tendem a um valor limite diferente de zero. Logo, observa-se, mais uma vez, que a primeira freqüência de vibração é aquela que sofre maior influência dos parâmetros tanto de carregamento quanto de rigidez da fundação.

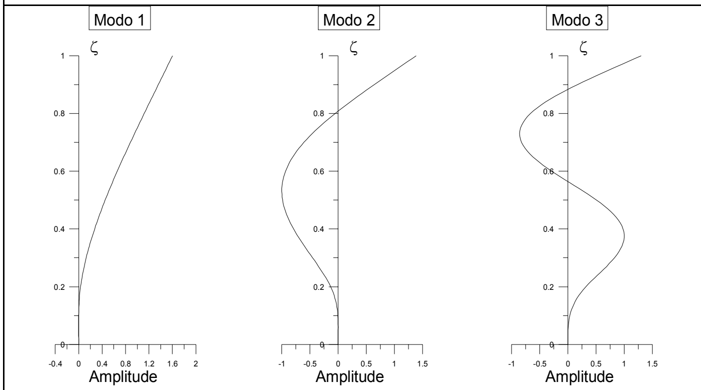
4.6. Influência das Condições de Contorno

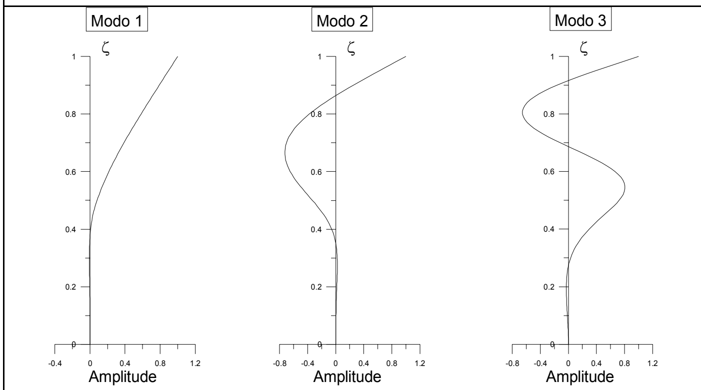
Buscando entender a influência das condições de contorno nas freqüências naturais e modos de vibração, três situações envolvendo diferentes condições de contorno foram escolhidas dentre as apresentadas na Figura 3.2. As condições de contorno escolhidas foram as de número 3, 5 e 6. Encontraram-se os autovalores representados pelos parâmetros de freqüência, e os autovetores, representados, por sua vez, pelos modos de vibração. Desta forma, foram obtidos os resultados apresentados nas Figuras 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22 que explicitam os três primeiros modos de vibração e os parâmetros de freqüência para cinco profundidades da fundação.

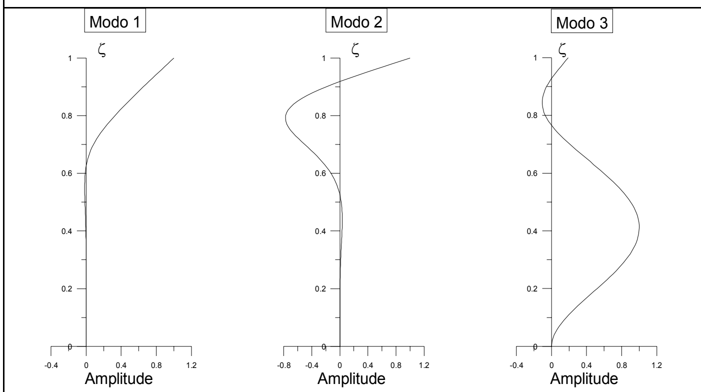


$K = 500$









$\Omega_1 = 0,60$	$h = 0$
$\Omega_2 = 1,49$	
$\Omega_3 = 2,50$	
$\Omega_1 = 4,73$	$h = 1,0$
$\Omega_2 = 4,74$	
$\Omega_3 = 4,82$	
$\Omega_1 = 0,65$	$h = 0,25$
$\Omega_2 = 1,68$	
$\Omega_3 = 2,84$	
$\Omega_1 = 0,90$	$h = 0,50$
$\Omega_2 = 2,37$	
$\Omega_3 = 3,95$	
$\Omega_1 = 1,49$	$h = 0,75$
$\Omega_2 = 3,89$	
$\Omega_3 = 4,75$	

Figura 4.17 – Modos de Vibração para a situação 3 e K = 500, considerando cinco profundidades para a fundação.

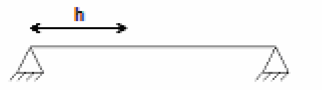
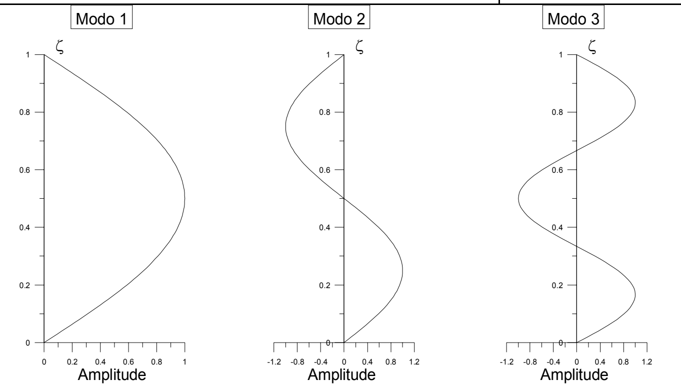
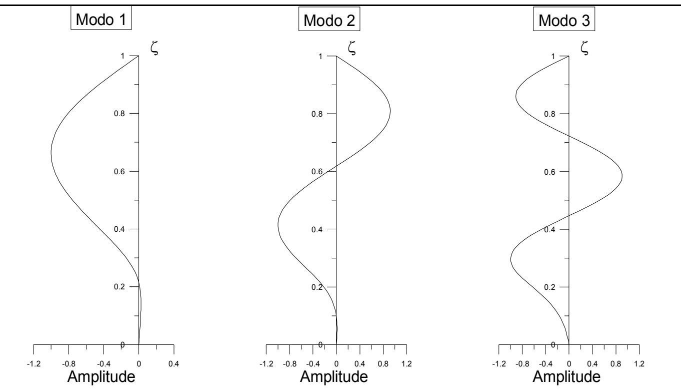
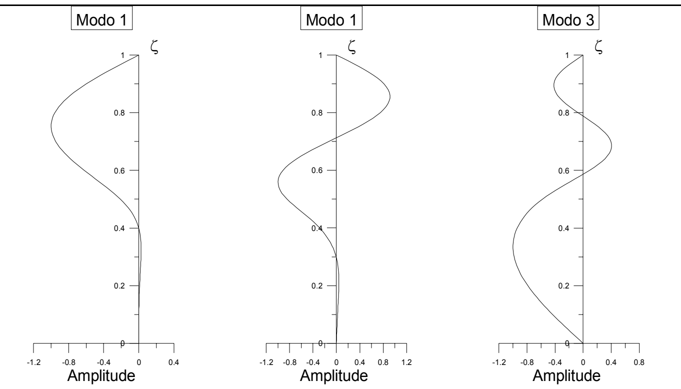
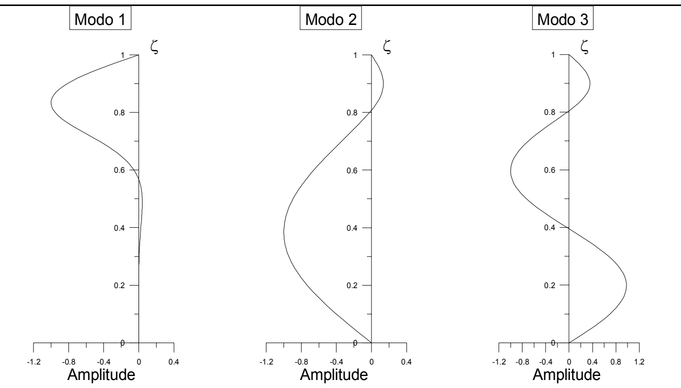
<table>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">$K = 500$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">
</td><td></td><td>$\Omega_1 = 1{,}00$</td><td rowspan="3">$h = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_2 = 2{,}00$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_3 = 3{,}00$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_1 = 4{,}73$</td><td rowspan="3">$h = 1{,}0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_2 = 4{,}77$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_3 = 4{,}91$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td></td><td>$\Omega_1 = 1{,}55$</td><td rowspan="3">$h = 0{,}25$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_2 = 2{,}60$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_3 = 3{,}60$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td></td><td>$\Omega_1 = 2{,}13$</td><td rowspan="3">$h = 0{,}50$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_2 = 3{,}46$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_3 = 4{,}73$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td></td><td>$\Omega_1 = 3{,}19$</td><td rowspan="3">$h = 0{,}75$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_2 = 4{,}74$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Omega_3 = 4{,}82$</td></tr>
</table>

Figura 4.18 – Modos de Vibração para a situação 5 e K = 500, considerando cinco profundidades para a fundação.

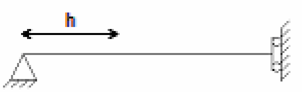
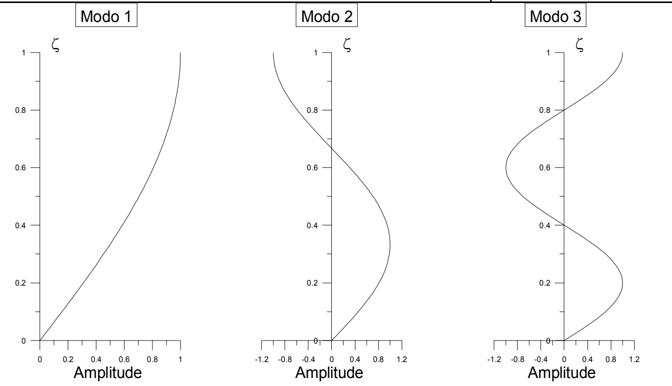
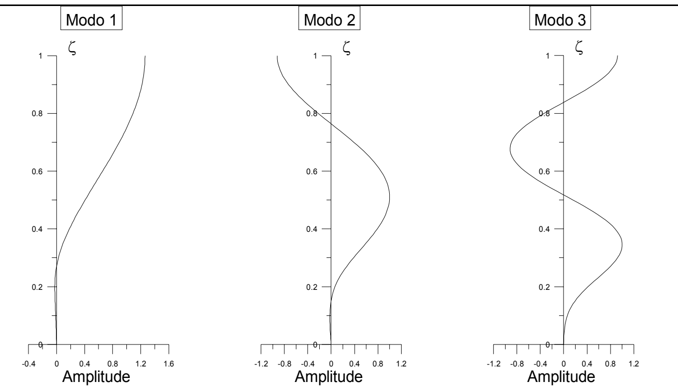
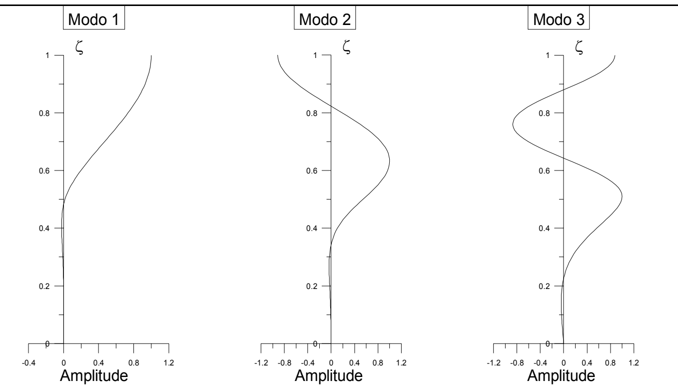
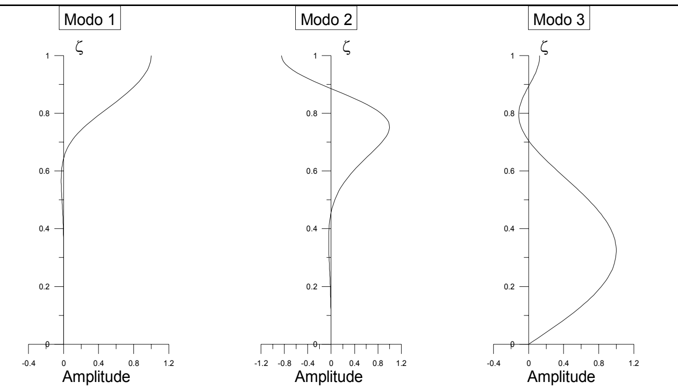
<table>
<tr><td>
</td><td colspan="2">$K = 500$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">
</td><td>$\Omega_1 = 0{,}50$</td><td rowspan="3">$h = 0$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 1{,}50$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 2{,}50$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_1 = 11{,}89$</td><td rowspan="3">$h = 1{,}0$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 11{,}89$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 11{,}90$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>$\Omega_1 = 0{,}96$</td><td rowspan="3">$h = 0{,}25$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 2{,}10$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 3{,}10$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>$\Omega_1 = 1{,}37$</td><td rowspan="3">$h = 0{,}50$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 2{,}80$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 4{,}17$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>$\Omega_1 = 2{,}21$</td><td rowspan="3">$h = 0{,}75$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 4{,}27$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 4{,}74$</td></tr>
</table>

Figura 4.19 – Modos de Vibração para a situação 6 e K = 500, considerando cinco profundidades para a fundação.

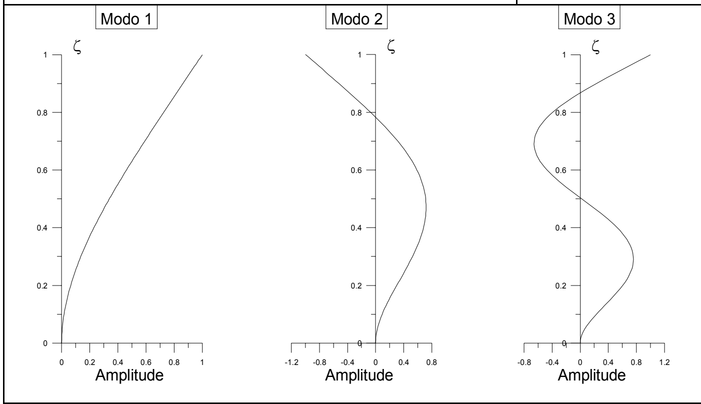
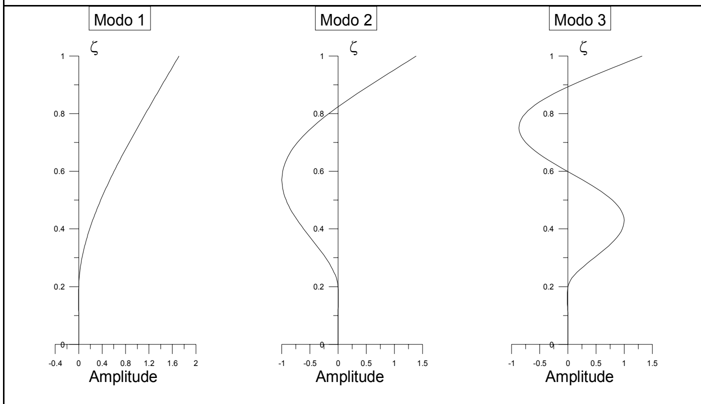
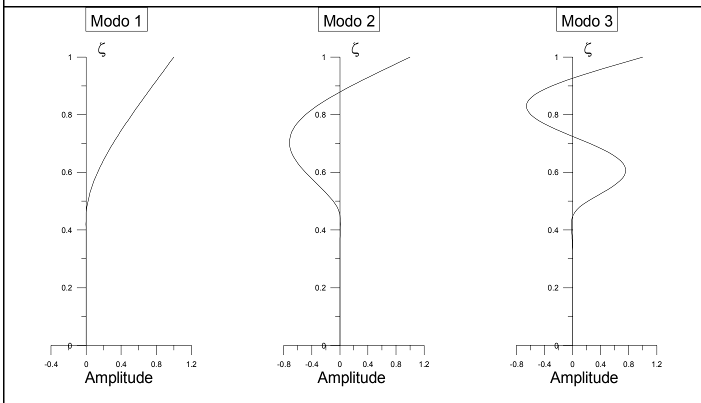
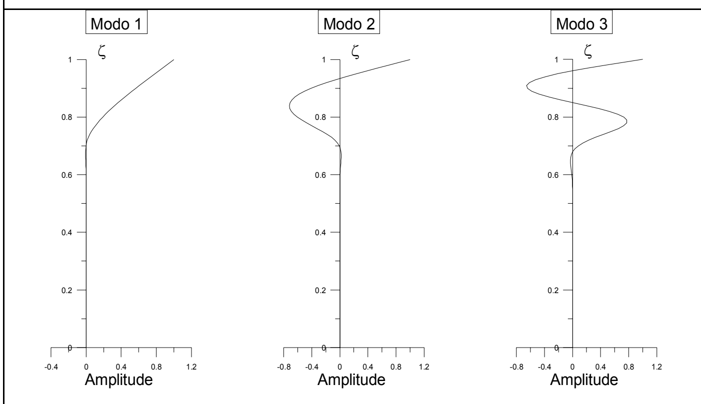
	$K = 20.000$	
	$\Omega_1 = 0{,}60$	$h = 0$
	$\Omega_2 = 1{,}49$	
	$\Omega_3 = 2{,}50$	
	$\Omega_1 = 11{,}89$	$h = 1{,}0$
	$\Omega_2 = 11{,}89$	
	$\Omega_3 = 11{,}90$	
	$\Omega_1 = 0{,}73$	$h = 0{,}25$
	$\Omega_2 = 1{,}84$	
	$\Omega_3 = 3{,}09$	
	$\Omega_1 = 1{,}05$	$h = 0{,}50$
	$\Omega_2 = 2{,}67$	
	$\Omega_3 = 4{,}51$	
	$\Omega_1 = 1{,}89$	$h = 0{,}75$
	$\Omega_2 = 4{,}93$	
	$\Omega_3 = 8{,}30$	

Figura 4.20 – Modos de Vibração para a situação 3 e K = 20.000, considerando cinco profundidades para a fundação.

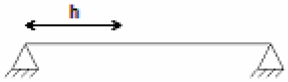
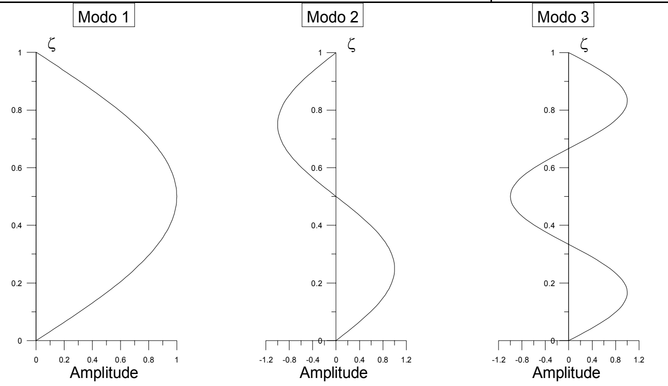
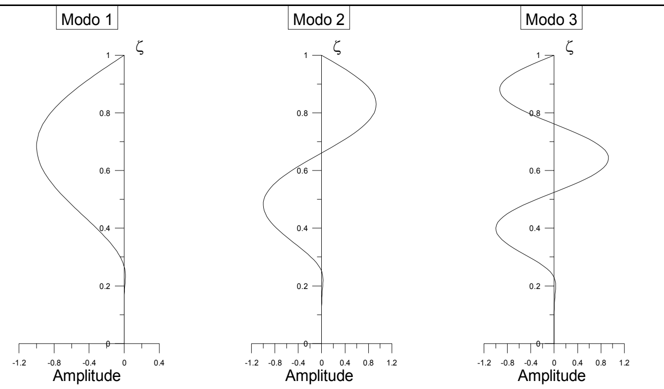
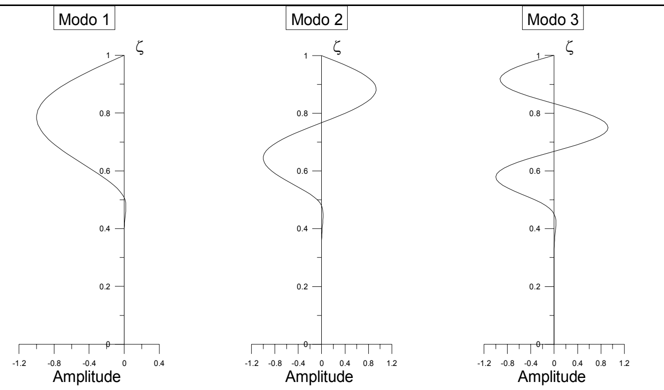
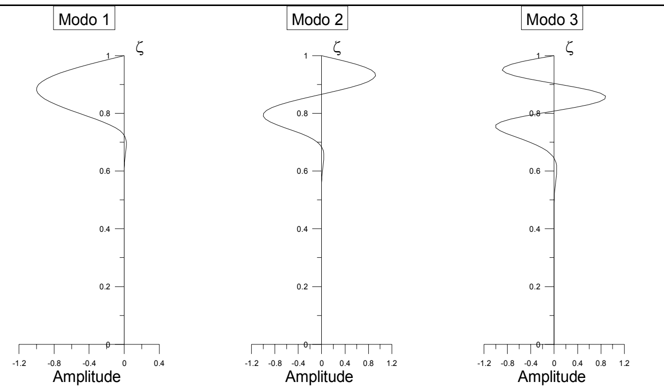
	$K = 20.000$	
	$\Omega_1 = 1,00$	$h = 0$
	$\Omega_2 = 2,00$	
	$\Omega_3 = 3,00$	
	$\Omega_1 = 11,89$	$h = 1,0$
	$\Omega_2 = 11,89$	
	$\Omega_3 = 11,90$	
	$\Omega_1 = 1,65$	$h = 0,25$
	$\Omega_2 = 2,94$	
	$\Omega_3 = 4,19$	
	$\Omega_1 =2,44$	$h = 0,50$
	$\Omega_2 = 4,28$	
	$\Omega_3 = 6,00$	
	$\Omega_1 = 4,51$	$h = 0,75$
	$\Omega_2 = 7,43$	
	$\Omega_3 = 10,38$	

Figura 4.21 – Modos de Vibração para a situação 5 e K = 20.000, considerando cinco profundidades para a fundação.

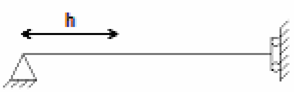
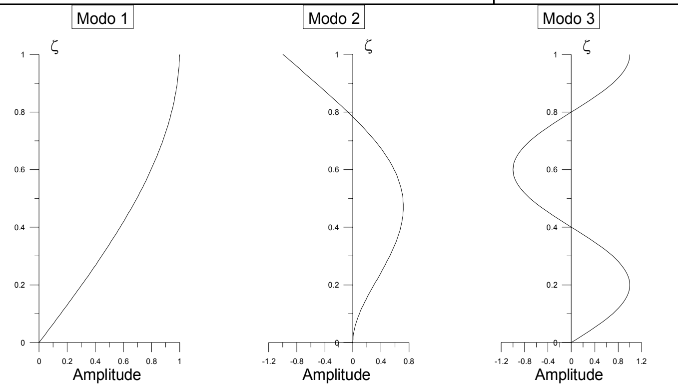
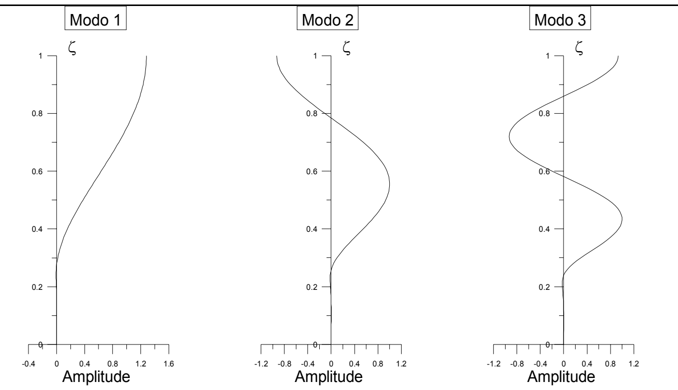
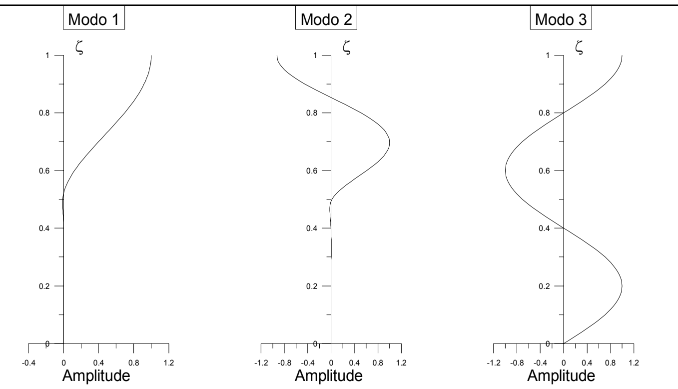
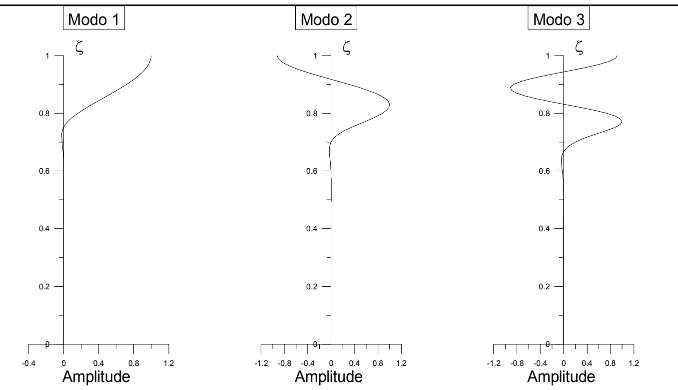
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">$K = 20.000$</td></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td>$\Omega_1 = 0,50$</td><td rowspan="3">$h = 0$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 1,50$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 2,50$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_1 = 11,89$</td><td rowspan="3">$h = 1,0$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 11,89$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 11,90$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$\Omega_1 = 1,00$</td><td rowspan="3">$h = 0,25$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 2,30$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 3,57$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$\Omega_1 = 1,48$</td><td rowspan="3">$h = 0,50$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 3,37$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 5,16$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$\Omega_1 = 2,84$</td><td rowspan="3">$h = 0,75$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 6,01$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 8,87$</td></tr>
</table>

Figura 4.22 – Modos de Vibração para a situação 6 e K = 20.000, considerando cinco profundidades para a fundação.

Conforme pode ser visto a partir das Figuras 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22, quanto maior for o valor do parâmetro K da base elástica menores serão as amplitudes dos deslocamentos da estaca no trecho enterrado, independente do tipo de condição de contorno.

Comparando as situações 3 e 5, que possuem condições de apoio diferenciadas na extremidade inferior, percebe-se, quando o valor de K é alto, no caso K = 20.000, que a configuração dos deslocamentos da coluna no interior da fundação é semelhante para ambos os casos, funcionando o trecho enterrado como um engaste.

Logo, para valores de K elevados tem-se, para condições de apoio distintas na extremidade inferior, o mesmo comportamento em termos de carga crítica (explicitado na Tabela 4.4), freqüências e modos de vibração. Como pode ser visto nas Figuras 4.17 a 4.22, somente os apoios superiores influenciam nas características dinâmicas da coluna. Cabe ressaltar que este fato é verdadeiro para valores intermediários de H/L. Quando esta relação está próxima de zero ou um, as condições de contorno na extremidade inferior voltam a ter influência nos resultados do problema.

Em muitos problemas envolvendo estacas a condição de apoio na extremidade inferior é livre, como ilustrado na Figura 4.23, que mostra a coluna semi-enterrada com essa característica submetida à carga P. Assim torna-se interessante, quando se considera a extremidade inferior livre e varia-se o valor de K, identificar a profundidade a partir da qual a condição da extremidade em questão perde sua importância, podendo ser desconsiderada.

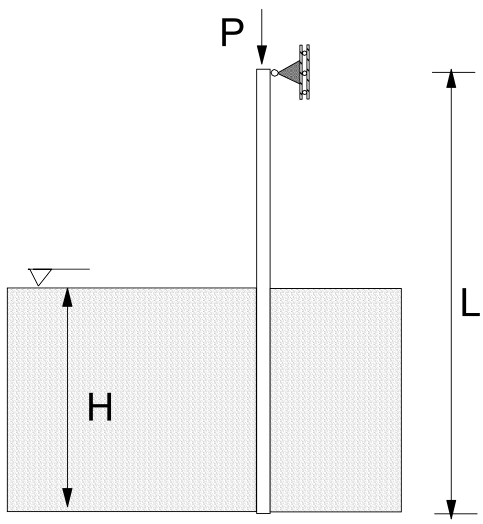


Figura 4.23 – Coluna semi-enterrada de extremidade inferior livre submetida à carga P.

A partir da situação descrita, fez-se a comparação entre os modos de vibração obtidos com um valor de K pequeno (K = 500) e de um valor grande (K = 20.000) aplicando-se 50% da carga crítica e considerando-se h=0,25 e h=0,5. Os resultados estão presentes na Figura 4.24 e 4.25.

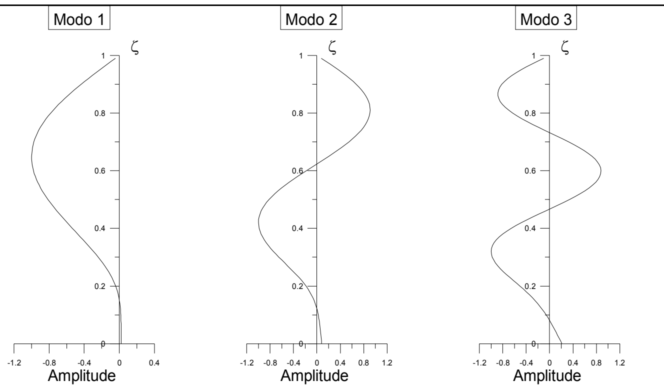
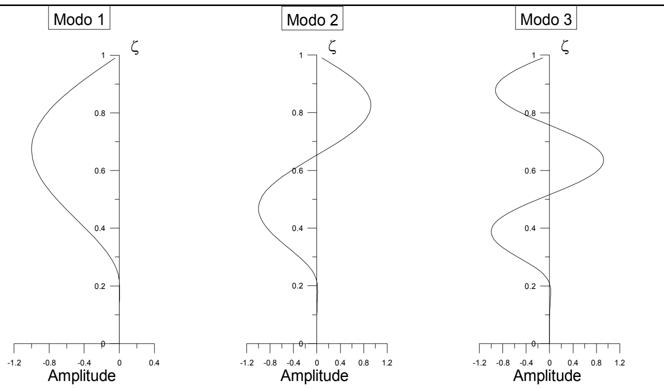
<table>
<tr><td colspan="3">$K = 500$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>$\Omega_1 = 1,37$</td><td rowspan="3">$h = 0,25$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 2,57$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 3,69$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$K = 20.000$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>$\Omega_1 = 1,48$</td><td rowspan="3">$h = 0,25$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 2,79$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 4,07$</td></tr>
</table>

Figura 4.24 – Comparação entre os modos de Vibração para K = 500, K = 20.000 e h = 0,25.

Conforme pode ser visto na Figura 4.24, já para a profundidade h = 0, 25, nota-se que, ao se ter um valor de K considerável, a condição de apoio inferior perde em importância para os três primeiros modos de vibração. Logo, imaginando-se uma coluna longa parcialmente enterrada, para valores práticos de K pode-se considerar a coluna engastada no solo. Para pequenos valores de K (ver resultados para K = 500), ainda podem ser observados na extremidade inferior dos modos de vibração os deslocamentos típicos de uma extremidade livre. Se a altura da estaca enterrada sofrer um acréscimo, compensando a falta de rigidez do solo que contém as deflexões da coluna, mesmo para pequenos valores de K pode-se considerar a extremidade inferior como fixa, como mostram os resultados apresentados na Figura 4.25, onde se faz a comparação entre dois valores de K diferentes e $h = 0{,}5$.

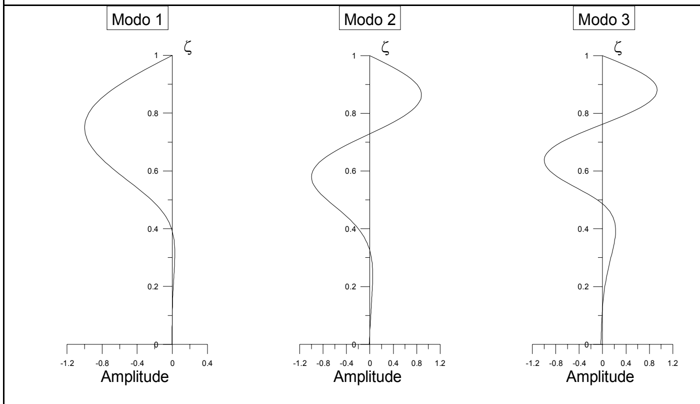
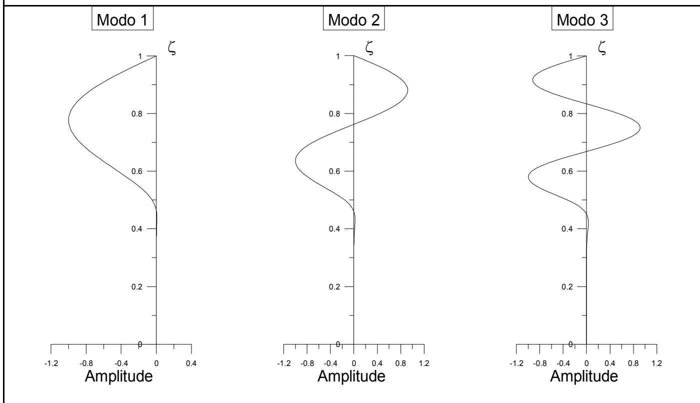
<table>
<tr><td colspan="3">$K = 500$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>$\Omega_1 = 1{,}94$</td><td rowspan="3">$h = 0{,}5$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 3{,}56$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 4{,}10$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$K = 20.000$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>$\Omega_1 = 2{,}16$</td><td rowspan="3">$h = 0{,}5$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_2 = 4{,}08$</td></tr>
<tr><td>$\Omega_3 = 5{,}94$</td></tr>
</table>

Figura 4.25 – Comparação entre os modos de Vibração para K = 500, K = 20.000 e h = 0,5.

Outro fato a ser observado refere-se à igualdade dos modos de vibração normalizados para a coluna sem fundação e a coluna totalmente enterrada, independendo da condição de apoio ou da rigidez do solo. Esta igualdade pode ser explicada pelo fato de que num meio homogêneo, seja a coluna totalmente exposta ao ar ou totalmente enterrada, a rigidez da coluna é uniforme. A Figura 4.26 mostra a evolução dos deslocamentos, ao longo da coluna, do primeiro modo de vibração para profundidades crescentes entre 0,75 e 1. Nota-se que a assimetria do campo de deslocamentos se faz sentir até valores de h bastante elevados (veja, por exemplo, o modo obtido para $h = 0{,}9$). Quando h atinge o valor 0,95, o modo já apresenta uma forma praticamente simétrica, semelhante ao da coluna totalmente enterrada.

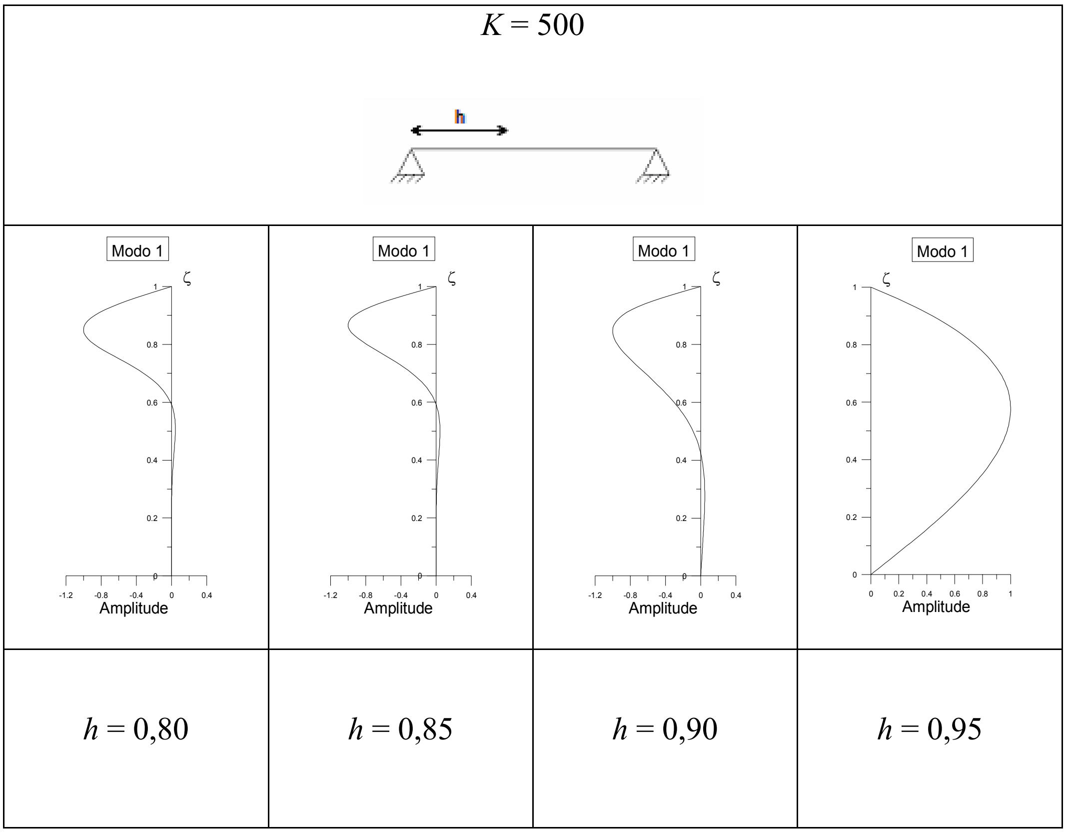


Figura 4.26 – Evolução dos deslocamentos, ao longo da coluna, dos primeiros modos de vibração para profundidades crescentes.