

Parte I

Metodologias

2

Programação Linear Inteira

Um problema de otimização combinatória é definido por um par $(E, \mathcal{F})$ e por um vetor de custos $c \in \mathbb{R}^E$, onde E é o conjunto base e $\mathcal{F} \subseteq 2^E$, uma família de subconjuntos de E , é um conjunto de soluções factíveis. Cada subconjunto $S \in \mathcal{F}$ é associado a um custo $c(S) = \sum_{e \in S} c_e$. O objetivo é encontrar a solução $S \in \mathcal{F}$ de menor ou maior custo.

A resolução deste tipo de problema, entendida como a obtenção de uma solução garantidamente ótima (em contraste com apenas obter uma solução de qualidade aceitável usando técnicas heurísticas), pode ser bastante difícil. Embora geralmente seja conceitualmente fácil enumerar os elementos de $\mathcal{F}$, esse conjunto costuma ser extremamente grande. Isso impede que a simples enumeração seja uma abordagem viável de solução. As abordagens que vêm apresentando maior sucesso são as que utilizam técnicas de programação inteira. Para tal, cada elemento do conjunto $\mathcal{F}$ é associado a um vetor de incidência. Uma solução factível é então descrita como um vetor de incidência que satisfaz um conjunto de restrições.

Assim, um problema geral de Programação Inteira pode ser definido como:

$$\min f(x), \quad x \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{Z}_+^n, \quad (2-1)$$

onde f é chamada de função objetivo e $\mathcal{F}$ é o conjunto de soluções associadas ao problema. Sendo linear a função objetivo $f(x)$ do problema e $\mathcal{F}$ definido por um sistema de restrições lineares sobre variáveis inteiras, tem-se um problema de programação linear inteira (*IP - Linear Integer Programming Problem*):

$$\min \{f(x) = c.x \mid A.x \geq b, \quad x \in \mathbb{Z}_+^n\}, \quad (2-2)$$

onde c , b e A são matrizes de dimensões $1 \times n$, $m \times 1$ e $m \times n$, respectivamente. O conjunto de soluções factíveis do é definido por:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{Z}_+^n \mid A.x \geq b\}. \quad (2-3)$$

O problema de programação linear inteira mista (*MIP - Mixed Linear*

Integer Programming Problem) é definido como:

$$\min\{f(x) = c.x + h.y \mid A.x + G.y \geq b, x \in \mathbb{Z}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^p\} \quad (2-4)$$

com o conjunto de soluções factíveis definido por:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{Z}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^p \mid A.x + G.y \geq b\} \quad (2-5)$$

O problema de programação linear (*LP - Linear Programming Problem*) é definido como:

$$\min\{f(x) = c.x \mid A.x \geq b, x \in \mathbb{R}_+^n\} \quad (2-6)$$

e o seu conjunto de soluções é dado por:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid A.x \geq b\} \quad (2-7)$$

A programação linear inteira é um modelo muito abrangente e, embora existam técnicas gerais que lidem com essa estrutura, muito trabalho tem sido desenvolvido no intuito de obter-se algoritmos especiais para resolver subclasses particulares desse modelo geral. Muitos desses algoritmos baseiam-se em uma metodologia enumerativa (geralmente uma variação do algoritmo *branch-and-bound* descrito na seção 4.1) e utilizam uma relaxação do problema 2-2 (ou 2-4) para obter em tempo razoável uma estimativa otimista (um limite inferior) para o valor da melhor solução que pode ser encontrada em cada ramo da enumeração. Esta estimativa é usualmente obtida a partir da relaxação linear ou de uma relaxação lagrangeana do *IP* (ou do *MIP*) em questão.

A relação entre o tempo para o cálculo dessas estimativas e a sua qualidade, que pode ser medida pela proximidade ao valor da solução ótima, determinam a eficiência do método enumerativo. Deste modo, a pesquisa na resolução de problemas combinatórios concentra-se na busca por formulações que forneçam as melhores estimativas possíveis. Duas linhas de pesquisas têm sido exploradas com este objetivo.

Uma dessas linhas de pesquisas procura, a partir da formulação de um problema como um *IP* (*MIP*), caracterizar classes de desigualdades adicionais para que o conjunto de soluções de sua relaxação linear se aproxime mais do envoltório convexo $conv(\mathcal{F})$ das soluções deste *IP*.

De um modo geral, estas classes possuem um número exponencial de desigualdades, o que não quer dizer que sua utilização seja proibitiva.

De fato, é neste contexto que o termo "método de planos de corte" se insere. Nele as desigualdades são incluídas na formulação do programa linear na medida em que se tornam necessárias (violadas). Para determinar quando isso acontece, resolve-se um problema dito "de separação". Isto é, um problema onde, dada a solução de um programa linear que contém apenas parte das desigualdades, determina-se se existe alguma desigualdade da classe que está violada. O método prossegue após a inclusão desta desigualdade no programa linear corrente.

Existem casos de classes de desigualdades em que o problema de separação possui algoritmo de complexidade polinomial para sua resolução, em outros casos fazer esta separação é um problema $\mathcal{NP}$ -difícil. Neste segundo caso, usualmente faz-se uma separação heurística, pois o objetivo de sua utilização é apenas melhorar a estimativa correspondente. A separação exata é obrigatória somente quando a classe de desigualdades (de tamanho exponencial) é necessária para definir o conjunto de soluções $\mathcal{F}$, isto é, as soluções inteiras obtidas no algoritmo enumerativo precisam satisfazê-las para que sejam viáveis.

Uma segunda forma de se obter estimativas melhores advém de métodos de relaxação Lagrangeana ou da, de certa forma equivalente, decomposição de *Dantzig-Wolfe* (veja seção 3.1). Neste caso, as formulações como *IP* (*MIP*) correspondentes possuem usualmente um número exponencial de variáveis (as quais podem estar associadas aos vértices de um poliedro, por exemplo).

A resolução de tais formulações é realizada com um método usualmente chamado de "geração de colunas" (seção 3.1.1). Este método consiste tão somente no conhecido método *Simplex* revisado, com a diferença de que, a cada iteração, as colunas candidatas a entrar na base são obtidas através da resolução de um subproblema auxiliar, ao invés da usual inspeção. Ao contrário do problema de separação, o problema de geração de colunas precisa ser resolvido até a otimalidade, uma vez que as estimativas assim obtidas somente são válidas quando a solução ótima do programa linear é encontrada. Na literatura, esses problemas possuem freqüentemente algoritmos de complexidade pseudo-polinomial para sua resolução, e este será o caso ao longo desta tese.

O capítulo 3 descreve a decomposição de problemas de programação linear inteira (*IPs*) para gerar formulações que permitam considerar apenas implicitamente o conjunto total de variáveis do problema. No capítulo 4, que trata da resolução de *IPs* por algoritmos enumerativos, são descritos o algoritmo *branch-and-bound* e algumas de suas variações, que utilizam

uma, ou ambas, dessas formas de se melhorar a estimativa do valor da melhor solução em cada ramo da enumeração.

O objetivo desta primeira parte do texto é apenas introduzir os conceitos básicos de programação inteira e de algumas das principais metodologias utilizadas na resolução de problemas de programação inteira. Supõe-se do leitor desta tese conhecimento básico dos fundamentos da programação linear e do algoritmo *Simplex* para resolução de *LPs*. Maiores detalhes a respeito desses tópicos podem ser obtidos, por exemplo, em [31, 83, 98, 85, 23, 32, 118] ou nas demais referências citadas em cada um dos capítulos.