

## 7

# Problema de Redistribuição de *EcoCarros*

### 7.1

#### Introdução

Este capítulo apresenta o Problema de Redistribuição de *EcoCarros*, ou "carros ecologicamente corretos", o qual será aqui referenciado por *ECP*. O interesse no *ECP* é motivado por alguns dos principais problemas enfrentados pelas grandes cidades, os quais estão relacionados à mesma causa comum: o elevado número de carros em circulação. Essa aglomeração de carros, em especial nas áreas centrais das cidades, além de tornar o trânsito caótico, eleva a níveis insuportáveis os índices de poluição atmosférica e sonora. Dentre os problemas derivados pode-se citar, por exemplo, a queda de qualidade de vida dos moradores, principalmente no que diz respeito à saúde dos indivíduos, ou ainda a deterioração de edificações de valor histórico, cultural e turístico.

Assim, uma grande preocupação em curso atualmente é o desenvolvimento de alternativas de transporte urbano visando, se não a eliminação completa dos problemas citados, ao menos a sua diminuição a padrões aceitáveis. Dentre as áreas relevantes na pesquisa de novos sistemas de trânsito destacam-se, entre outras, o desenvolvimento de metrô e bondes com direção automática, sistemas especializados de controle de trânsito em rodovias, carros elétricos, sistemas cabo-propelidos, sistemas de deslocamento pessoal rápido (*PRT - personal rapid transit*) e os sistemas duais de combustíveis. Uma relação extensa de referências a tópicos avançados de tecnologias de transporte pode ser encontrado em [124].

Andréasson [6] fornece um levantamento dos sistemas de tráfego baseados em carros de pequeno porte, cujo objetivo é possibilitar o deslocamento direto entre uma origem e um destino sem a necessidade de esperar por tempo excessivo a chegada do meio de transporte, sem precisar realizar paradas desnecessárias ou a transferência para outro meio de transporte durante a viagem. O princípio operacional desses sistemas aproxima-os mais

de um táxi do que de um ônibus, uma vez que os seus usuários não precisam adaptar-se a rotas e tabelas fixas de horários.

Embora um grande esforço no desenvolvimento e pesquisa desses sistemas esteja em curso, praticamente nenhum sistema significativo está realmente em uso atualmente. Os sistemas de deslocamento pessoal rápido (*PRT*), por exemplo, pretendem disponibilizar um meio de transporte para um indivíduo, ou um pequeno grupo destes, com carros inteiramente automatizados que façam uso de uma rede de estações conectadas por trilhos ou algo similar. Entretanto, os sistemas *PRT* ainda não estão efetivamente disponíveis para uso público, e ainda não foi feita nenhuma demonstração prática de seus custos e do potencial de prestação de serviços ([101], [102]).

As exceções parecem ser os sistemas baseados em carros elétricos, cuja essência é a concessão de direitos especiais a carros deste tipo, no que diz respeito ao acesso e ao estacionamento dentro de determinadas áreas de uma cidade. Em geral esses sistemas pretendem ser uma alternativa atrativa ao uso de carros privados, bem como a ser um complemento aos táxis e aos sistemas de transporte público de massa. O foco dos mesmos é o atendimento aos usuários nos períodos do dia em que a demanda é muito baixa para, por exemplo, manter uma linha regular de ônibus ou até mesmo em locais onde o transporte público de massa, por alguma razão, não oferece um serviço de boa qualidade. Experiências como *Liselec* [122] na cidade de La Rochelle e *Praxitèle* [123] em Saint-Quentin-en-Yvelines (um subúrbio de Paris), ambos na França; *Elettra Park* [121] em Turim, Itália, e *CityCar* [120] em Martigny, Suíça, mostram a viabilidade desta alternativa.

Listados os motivos para a adoção de uma tal alternativa de transporte urbano, será aqui considerada uma que é bastante próxima desses sistemas baseados em carros elétricos. A maior diferença, mas de importância relativamente pequena, é a não restrição de uso de carros que utilizem outras tecnologias de propulsão. É importante ressaltar que, além dos carros eletro-propelidos, existem outras opções também consideradas "limpas" por emitirem na atmosfera baixos teores de resíduos poluentes. Assim, o termo *EcoCarros* é usado no decorrer do capítulo para referenciar carros que, por possuírem tais características, são normalmente conhecidos como "carros ecologicamente corretos".

O sistema proposto consiste basicamente em interditar ao trânsito de carros privados um conjunto de quadras ou uma área delimitada de uma cidade. O acesso a tais áreas somente seria permitido a carros de prestação de algum tipo de serviço, tais como ambulâncias, viaturas policiais ou veículos de coleta de lixo. A opção ao cidadão comum, além do uso

dos meios tradicionais de transporte urbano (ônibus, metrô, táxi, etc.), seria o aluguel de *EcoCarros*, por curtos períodos de tempo. Estes teriam livre circulação dentro deste perímetro limitado e poderiam ser alugados em estacionamentos estrategicamente distribuídos dentro desse perímetro de acesso limitado ou em sua vizinhança e posteriormente devolvidos em qualquer um dos estacionamentos autorizados.

Um grande problema nessa proposta, e nos sistemas baseados em carros elétricos, é a possibilidade de que a movimentação dos carros pelos usuários do sistema resulte na concentração dos carros em um único estacionamento, ou em um pequeno grupo deles, em determinados períodos de um dia. Problemas similares a este foram estudados por Dror, Fortin e Roucairol [41], no contexto do projeto *Praxitèle*, e Andréasson [5], no contexto de sistemas *PRT*.

Naturalmente que, além deste problema, essa proposta também apresenta uma série de outras questões ainda em aberto. Contudo, o enfoque aqui será no desenvolvimento de uma forma de se tratar esse possível desequilíbrio na distribuição dos *EcoCarros*. Assim, neste capítulo será considerado o estudo do problema de como fazer redistribuições dos *EcoCarros* entre os estacionamentos visando o bom funcionamento deste sistema de transporte. O objetivo deste capítulo é propor um modelo compatível com a realidade, assim como um algoritmo para a sua resolução.

## 7.2

### Descrição do Problema

O problema de redistribuição de *EcoCarros* consiste, de forma resumida, em determinar a operação de transporte dos *EcoCarros* entre os estacionamentos que melhor atenda as demandas por *EcoCarros* ao longo do dia. Dois objetivos podem ser imediatamente propostos:

- i. determinar a operação que satisfaça sempre toda a demanda e minimize o total de *EcoCarros* no sistema; ou
- ii. dado um número fixo de *EcoCarros* (e sua distribuição nos estacionamentos), encontrar a operação de transporte que minimize o número de demandas não atendidas.

Uma alternativa para essa operação de transporte consiste em periodicamente redistribuir os *EcoCarros* entre os estacionamentos usando-se

algum tipo de veículo<sup>1</sup>, percorrendo para tanto uma determinada seqüência de estacionamentos ou **rotas**, como será referenciada no restante do texto.

Com respeito à operação desse esquema, pode-se imaginar que um motorista conduz um veículo com capacidade para o transporte de algumas unidades de *EcoCarros*. De fato, existem hoje pesquisas sobre a forma mais adequada para que este transporte seja feito. Uma das propostas, atualmente em desenvolvimento no contexto dos sistemas baseados em carros elétricos listados na seção 7.1, é equipar os carros com mecanismos que os permitam seguir, sem motorista, um certo veículo à sua frente. Testes já foram realizados com sucesso com até dois carros seguindo um terceiro carro líder, o que, no problema aqui descrito, corresponde a um veículo com capacidade para transportar até 3 *EcoCarros* [123].

Considerando-se a opção que utiliza veículos para o transporte dos *EcoCarros*, a mesma ainda envolve o subproblema de se encontrar as rotas a serem percorridas pelos veículos. Entretanto, encontrar uma tal rota é apenas parte do problema a ser resolvido. Uma vez que uma delas esteja disponível, ainda é necessário determinar quantos *EcoCarros* um veículo entrega ou retira de cada estacionamento visitado.

Na realidade, uma regra comum nas empresas que realizam operações de coleta ou de entrega de algum tipo de mercadoria é que os motoristas devem (quase sempre) repetir uma mesma seqüência de visitas, ou seja, repetir uma rota fixa. No escopo deste trabalho optou-se por considerar que essas rotas são definidas previamente, ficando em aberto as decisões sobre quando e quais ações devem ser realizadas.

Seguindo essa abordagem, a **operação de transporte de *EcoCarros*** consiste em determinar quando e quantos *EcoCarros* são retirados ou entregues nos estacionamentos pelos veículos que percorrem as rotas pré-definidas.

A justificativa para tal abordagem é que os motoristas, na grande maioria das empresas de transportes, além de cumprirem a mesma seqüência de visitas, possuem horários de trabalho bem definidos, com tempo máximo de viagem sem parada, horários para refeições e demais restrições advindas da legislação trabalhista. Qualquer atividade que não atenda a estas condições, em geral, incorre em custos adicionais elevados.

Além disso, esta abordagem tem a vantagem de ser bastante flexível, uma vez que permite que um conjunto de regras ou restrições que devem

---

<sup>1</sup>O senso comum é que tal operação seja realizada por caminhões. Contudo, por questão de compatibilidade com a terminologia adotada nos capítulos 5 e 6, será utilizado o termo "veículo" no lugar de "caminhão", uma vez que o objetivo final do problema aqui descrito também está relacionado à definição de rotas.

ser satisfeitas, possa ser associado às rotas pré-definidas. Por exemplo, uma rota deve sempre iniciar e encerrar no mesmo ponto e sua duração deve ser limitada. Uma outra restrição real é a limitação do número de veículos/motoristas disponíveis para a tarefa de coleta e entrega.

A discussão acima permite definir o problema de forma mais precisa, como segue:

### ***ECP* – Problema de Redistribuição de *EcoCarros*:**

- Dada a malha viária e suas características (distâncias, durações de percurso, etc.), o conjunto de estacionamentos, um conjunto de rotas, o número de veículos disponíveis e suas respectivas capacidades, um horizonte de tempo e a demanda por *EcoCarros* nos estacionamentos para o horizonte considerado, determinar o número mínimo de *EcoCarros*, sua distribuição inicial nos estacionamentos e a operação de transporte correspondente que satisfaz todas as demandas.

Observe que a definição acima considera o primeiro dos dois objetivos listados no início desta seção. Este capítulo se restringe ao estudo deste objetivo por ser de caráter mais tático e, portanto, mais plausível de ser aplicado na prática. Observe também que o problema *ECP* proposto tem como uma de suas hipóteses o fato de ser possível iniciar o sistema diariamente, ou seja, é sempre possível fazer uma distribuição inicial de *EcoCarros* entre os estacionamentos antes da liberá-los aos usuários de *EcoCarros*. Para tanto é suficiente que exista um tempo suficientemente grande entre o encerramento das atividades em um dia e o recomeço no dia seguinte (noite, madrugada). A próxima seção aborda a modelagem do problema aqui definido.

## **7.3 Modelagem**

De modo a permitir o controle da disponibilidade de *EcoCarros* nos estacionamentos, assim como suas respectivas demandas, ao longo do horizonte de tempo considerado, optou-se por discretizar o tempo. Assim, passa-se a ter intervalos de tempo, que se sucedem, cobrindo o horizonte em questão. Com o tempo discretizado, a partir de uma distribuição de *EcoCarros* no instante inicial, pode-se definir a operação de transporte dos *EcoCarros* pelas ações dos veículos em cada intervalo de tempo. Esta

deve utilizar as rotas pré-definidas para movimentar os *EcoCarros* entre os estacionamentos. Assim, as rotas restringem os intervalos em que essas ações podem ser efetuadas aos intervalos de tempo em que os veículos passam pelos estacionamentos.

Suponha que as viagens dos usuários em *EcoCarros* fossem conhecidas para o horizonte de tempo considerado, sendo elas definidas pelos estacionamentos e os respectivos instantes de partida e de chegada. Desta forma seria possível calcular as demandas por *EcoCarros* somando-se as chegadas e subtraindo-se as partidas de *EcoCarros*, em cada estacionamento e intervalo de tempo. Entretanto, esta não é uma hipótese realista.

O objetivo maior deste capítulo é prover meios para o planejamento do sistema de transporte que utiliza *EcoCarros*. Neste contexto, assume-se ser possível estimar as demandas por *EcoCarros* nos estacionamentos, ao longo do horizonte de tempo, a partir de um histórico da utilização dos mesmos pelos usuários do sistema. Em outros termos, a partir desses históricos, as técnicas estatísticas conhecidas são capazes de projetar as demandas com uma confiabilidade aceitável, para os estacionamentos e intervalos de tempo considerados.

O problema pode então ser modelado como segue:

***ECP* – Problema de Redistribuição de *EcoCarros*:**

- Sejam  $K$  o número de estacionamentos;  $T$  o número de intervalos em que discretiza-se o horizonte de tempo;  $G = (N, A)$  o grafo orientado que define a malha viária (estacionamentos são representados pelos nós e os percursos que os unem pelos arcos);  $c_t(a)$ ,  $\forall a \in A$ , as durações dos percursos;  $n_t^k$  a estimativa de devoluções de *EcoCarros* (retiradas, se  $n_t^k$  é menor que zero) no estacionamento  $k$  e intervalo  $t$ , para  $k = 1, \dots, K$  e  $t = 1, \dots, T$ ;  $\mathcal{S}$  um conjunto de rotas em que cada rota  $S \in \mathcal{S}$ , com  $p$  estacionamentos, é definida por  $S = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ , onde  $p$  é próprio de cada rota e  $s_i \in N$ ,  $i = 1, \dots, p$ ; e  $R$  o número de veículos (todos com capacidade  $C$ ).
- Deseja-se determinar o número mínimo de *EcoCarros*, sua distribuição inicial nos estacionamentos e a operação de transporte correspondente que satisfaz todas as demandas.

Uma outra forma de se entender a necessidade de *EcoCarros* nos estacionamentos, ao longo dos intervalos de tempo, é requerer que estejam disponíveis nos estacionamentos pelo menos o número de *EcoCarros* que

estima-se que serão retirados. Este número é dado pelo simétrico do valor de  $n_t^k$  sempre que este for negativo. Caso  $n_t^k$  seja não-negativo o número requerido é zero. Assim, torna-se equivalente definir, para cada estacionamento e intervalo de tempo, um valor  $m_t^k$  representando este mínimo de *EcoCarros*. Em outras palavras, no início do intervalo  $t$  devem haver  $m_t^k$  *EcoCarros* no estacionamento  $k$  e estes *EcoCarros* partirão durante o intervalo de tempo  $t$ .

Com isto o conceito de ocupação dos estacionamentos fica definido, tornando possível também modelar a capacidade de um estacionamento em número de *EcoCarros*. Esta restrição faz sentido, uma vez que o espaço físico disponível em grandes centros não é ilimitado. Será utilizado o símbolo  $M_t^k$  para representar esta capacidade de um estacionamento  $k$  ao longo dos intervalos de tempo.

Os elementos descritos nesta seção, que definem uma instância do *ECP* e referenciados no decorrer do capítulo, são listados a seguir:

- $K$  – número de estacionamentos.
- $T$  – número de intervalos de tempo.
- $d_w$  – duração de um intervalo de tempo.
- $R$  – número de veículos.
- $C$  – capacidade dos veículos.
- $G = (N, A)$  – grafo orientado que define a malha viária.
- $c_t(a)$  – duração do percurso  $a \in A$ .
- $\mathcal{S}$  – conjunto de rotas.
- $S$  – rota definida por  $S = (s_1, s_2, \dots, s_p) \in \mathcal{S}$ .
- $(m_t^k, M_t^k)$  – números mínimo e máximo de *EcoCarros* no estacionamento  $k$  no intervalo de tempo  $t$ .

## 7.4

### Análise da Complexidade

Claramente o *ECP* é um problema que exige um grande esforço para a sua resolução. De fato, como será visto mais adiante, encontrar operações de transporte viáveis já é uma tarefa difícil, que dirá encontrar uma operação ótima. Uma análise preliminar levanta questões onde pode-se perceber a dificuldade que está presente mesmo para a proposta de heurísticas. Nesta seção é apresentada uma demonstração da complexidade da versão onde deseja-se saber se existe ou não uma operação de transporte viável, ou seja, retiradas e entregas de *EcoCarros* nos estacionamentos ao longo das rotas

de modo que os limites mínimos de *EcoCarros* nos estacionamentos, em todas os intervalos de tempo, sejam atendidos.

Seja *ECP* a versão do *ECP*, conforme definido a seguir, onde todas as rotas são restritas a visitar apenas 2 estacionamentos e existem apenas limites mínimos de *EcoCarros* nos mesmos:

**ECP**

**Instância:** Constantes  $K, T, m_t^k$ , para  $k = 1, \dots, K$  e  $t = 1, \dots, T$ ; conjunto de rotas  $\mathcal{S}$  tal que  $S^i = (s_1^i, s_2^i)$ ,  $i = 1, \dots, |\mathcal{S}|$ ; inteiros  $R$  (número máximo de rotas simultâneas) e  $C$  (capacidade dos veículos); um grafo  $G = (N, A)$  com tempos  $c_t(a)$ , para todo  $a \in A$ , e número de *EcoCarros* no instante inicial  $v_0^k$ , para  $k = 1, \dots, K$ .

**Pergunta:** Existem valores  $q_1^i(t)$  e  $q_2^i(t)$ , para  $t = 1, \dots, T$  e  $i = 1, \dots, |\mathcal{S}|$ , para a retirada e entrega de *EcoCarros* nos estacionamentos das rotas, tais que: os veículos nunca ultrapassem a capacidade  $C$ ; os valores positivos (entregas) e negativos (retiradas) de  $q_1^i(t)$  e  $q_2^i(t)$  ocorrem sempre dentro de intervalos de tempo que respeitem os limites definidos por  $c_t(a)$ , onde  $a$  é o arco ligando o estacionamento de partida ao de chegada; e que todos os limites mínimos de número de *EcoCarros* nos estacionamentos são satisfeitos ?

Esta versão do *ECP* é um caso particular do problema geral descrito anteriormente, o qual pertencerá, portanto, à classe de problemas  $\mathcal{NP}$ -completos se este caso particular também pertencer à classe dos  $\mathcal{NP}$ -completos. Este resultado é demonstrado no teorema enunciado a seguir:

**Teorema 7.1** *ECP pertence à classe de problemas  $\mathcal{NP}$ -completos.*

*Prova.* Para verificar que *ECP* pertence à  $\mathcal{NP}$ , é suficiente observar que dados os valores para  $q_1^i(t)$  e  $q_2^i(t)$ , para  $t = 1, \dots, T$  e  $i = 1, \dots, |\mathcal{S}|$ , que determinam uma operação de transporte viável para a instância dada, pode-se verificar em tempo polinomial (linear) que todas as condições são satisfeitas. Para mostrar que *ECP* pertence à  $\mathcal{NP}$ -completo será apresentada a seguir uma transformação ao *ECP* da versão de decisão do Problema de Steiner em Grafos (problema *ND12* em [51]), definido a seguir:

**Problema de Steiner em Grafos - PSG**

**Instância:** Um grafo não orientado  $G' = (V', E')$ , distâncias  $d_e \in \mathbb{Z}^+$  associadas a cada  $e \in E'$ , um conjunto de vértices  $VT' \subseteq V'$  chamados de terminais e uma constante  $L \in \mathbb{Z}^+$ .

**Pergunta:** Existe uma árvore  $T' = (U', F')$  em  $G'$ , contendo todos os vértices terminais  $VT'$ , tal que a soma das distâncias  $d_e$  das arestas em  $F'$  é menor ou igual à  $L$  ?

A transformação consiste em utilizar o mesmo grafo (simplesmente construindo um grafo orientado e equivalente ao não-orientado do ECP). Assim  $K = |V'|$ ,  $N = V'$  e  $A = \{(u, w), (w, u) \mid (u, w) \in E'\}$ . O custo  $c_t(a)$  dos arcos  $a \in A$  é dado pela distância da aresta correspondente em  $E'$ . Deste modo, os estacionamentos estão associados aos vértices de  $G'$ .

Escolhe-se arbitrariamente um vértice terminal inicial  $vt$ , ao qual é alocado  $|VT'| - 1$  *EcoCarros*, ou seja,  $v_0^{vt} = |VT'| - 1$ . Todos os demais estacionamentos iniciam sem *EcoCarros*, ou seja,  $v_0^k = 0$ , para  $k = 1, \dots, K$  e  $k \neq vt$ . Define-se também a capacidade de todos os veículos como  $C = |VT'| - 1$ .

Para cada aresta  $e = (u, w) \in E'$  define-se uma rota  $S^e = (s_1^e = u, s_2^e = w)$ , e os limites mínimos de *EcoCarros* nos estacionamentos são todos nulos, exceto por  $m_L^k$ , para  $k \in VT' - \{vt\}$ , que terão valor 1. Em resumo, um *EcoCarro* é requerido em cada um dos vértices terminais no instante  $L$ , o qual passa a ser o instante final do ECP, ou seja,  $T = L$ . Finalmente exige-se que apenas uma rota pode ocorrer em um determinado instante, ou seja,  $R = 1$ .

Resta verificar que a resposta da instância construída do SPG no ECP é afirmativa se e somente se a resposta da instância do SPG é afirmativa. Considere que existe um conjunto  $F'$  no SPG que conecta todos os seus vértices terminais e tem a soma das suas arestas menor ou igual à  $L$ . Neste caso, a instância construída do ECP poderá ter os valores de  $q_1^e(t)$  e  $q_2^e(t)$ , para  $t = 1, \dots, T$  e  $e \in E'$ , de modo que os  $|VT'| - 1$  *EcoCarros* são transportados em uma aresta de cada vez, levando um *EcoCarro* para um vértice terminal. Como a soma das arestas é menor ou igual a  $L$ , todos os *EcoCarros* chegam aos vértices terminais até o instante  $L$ .

Suponha agora que existe uma seqüência de retiradas e entregas de *EcoCarros*  $q_1^e(t)$  e  $q_2^e(t)$ , para  $t = 1, \dots, T$  e  $e \in E'$ , que atende as demandas de *EcoCarros* ao longo de todo o período. Neste caso, as rotas que transportam *EcoCarros* definem um conjunto de arestas cuja soma é no máximo  $L$ , pois caso contrário os *EcoCarros* não chegariam aos estacionamentos até o instante  $L$ . Esse conjunto de arestas conecta todos os vértices terminais, pois os *EcoCarros* são levados de um vértice terminal, o associado ao estacionamento com  $|VT'| - 1$  *EcoCarros*, a todos os demais, o que completa a prova.  $\square$

**Corolário 7.2** *ECP pertence à classe de problemas  $\mathcal{NP}$ -completos.*

*Prova.* Conseqüência direta do fato do problema ECP ser um caso particular do ECP.  $\square$

A demonstração de que o problema ECP pertence à classe dos problemas  $\mathcal{NP}$ -completos justifica a abordagem do problema por programação linear inteira e sua resolução por algoritmos *branch-and-price*, conforme apresentado no restante deste capítulo.

## 7.5

### Formulação do ECP como um IP

Seguindo a definição da seção 7.2, o ECP pode ser formulado como um problema de programação linear inteira, com variáveis que especifiquem o número de *EcoCarros* nos estacionamentos ao longo do horizonte de tempo considerado, variáveis que controlem a operação de transporte de *EcoCarros* por veículos que percorrem as rotas e uma função objetivo que minimize o número total de *EcoCarros*. A formulação resultante, com um número exponencial de variáveis, segue:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Min } z = \sum_{k=1}^K v_0^k \\
 \text{sujeito a} \\
 v_{t-1}^k - v_t^k + \sum_{j \in J} a_{tj}^k \cdot x_j = 0 \quad k = 1, \dots, K \quad t = 1, \dots, T \quad (1) \\
 \sum_{j \in J} b_{tj} \cdot x_j \leq R \quad t = 1, \dots, T \quad (2) \\
 \sum_{j \in J} \langle a_1 \rangle_{tj}^k \cdot x_j \leq 1 \quad k = 1, \dots, K \quad t = 1, \dots, T \quad (3.1) \\
 \sum_{j \in J} \langle a_2 \rangle_{tj}^k \cdot x_j \leq 1 \quad k = 1, \dots, K \quad t = 1, \dots, T \quad (3.2) \\
 x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (4) \\
 m_t^k \leq v_t^k \leq M_t^k \quad k = 1, \dots, K \quad t = 1, \dots, T, \quad (5)
 \end{array} \right\} \text{IP-ECP}$$

O estoque de *EcoCarros* no início do intervalo de tempo 1, em cada estacionamento  $k$ , é definido pelas variáveis  $v_0^k$  e o objetivo é minimizar a soma das mesmas. O conjunto de restrições (1) especifica a conservação do fluxo de *EcoCarros* resultante da redistribuição dos mesmos entre os estacionamentos, o conjunto (2) especifica o número máximo de rotas que podem ocorrer simultaneamente em cada intervalo de tempo e os conjuntos (3.1) e (3.2) restringem, respectivamente, em cada estacionamento

e intervalo de tempo, as operações de entrega ou retirada de *EcoCarros* a serem realizadas por apenas um veículo de cada vez. O conjunto  $J$ , nas restrições (1), (2), (3.1), (3.2) e (4), contém os índices que identificam todas as possíveis operações válidas de transporte de *EcoCarros*, definidas no conjunto  $\mathcal{S}$  de rotas considerado.

As variáveis  $v_t^k$ , para  $k = 1, \dots, K$  e  $t = 1, \dots, T$ , definem o número de *EcoCarros* no estacionamento  $k$  no final do intervalo de tempo  $t$ . A variável binária  $x_j$  indica se a operação de transporte  $j$ , definida para uma rota específica, é utilizada ou não.

O coeficiente  $a_{tj}^k$  é a variação na carga de *EcoCarros* do veículo que, ao executar a operação de transporte  $j$ , passa no estacionamento  $k$  no intervalo de tempo  $t$ . Em outras palavras,  $a_{tj}^k$  é o número de *EcoCarros* entregues no estacionamento  $k$  pela operação de transporte  $j$  (se o valor desse coeficiente é negativo) ou o número *EcoCarros* retirados do mesmo local (se o valor desse coeficiente é positivo). O coeficiente  $b_{tj}$  é 1 se a operação de transporte  $j$  ocorre durante o intervalo de tempo  $t$  ou 0 caso contrário;  $\langle a_1 \rangle_{tj}^k$  é 1 se  $a_{tj}^k < 0$  ou 0 caso contrário e  $\langle a_2 \rangle_{tj}^k$  é 1 se  $a_{tj}^k > 0$  ou 0 caso contrário.

A cardinalidade do conjunto  $J$  de todas as possíveis operações de transportes é exponencial no número de estacionamentos e na capacidade do veículo, o que requer o uso de alguma técnica de enumeração implícita das variáveis  $x_j$ . A integralidade dessas variáveis também requer a utilização de um esquema de *branch-and-price* se o objetivo for encontrar a solução ótima para o problema. Caso contrário, a resolução da relaxação linear desse modelo fornece uma estimativa inferior no valor da melhor solução e um bom ponto de partida para rotinas baseadas em arredondamento dos valores das variáveis e heurísticas de busca.

Nas próximas seções é descrita uma abordagem por geração de colunas para a resolução desta formulação. Nesta o problema mestre considera as previsões de demanda e as demais restrições associadas aos estacionamentos. O subproblema de geração de colunas, que é apresentado na seção 7.6, fornece operações de transporte válidas para as rotas a serem usadas pelos veículos. Na seção 7.7 são apresentados dois algoritmos, que utilizam a técnica de programação dinâmica, para encontrar valores ótimos para os coeficientes  $a$  e  $b$  para uma dada rota. Esses valores definem quando, onde e quantos *EcoCarros* devem ser carregados ou descarregados de um veículo, ou seja, definem uma operação de transporte válida para uma rota.

## 7.6 Subproblema de Geração de Colunas

Dada uma solução ótima para a relaxação linear do *IP-ECP* que considere apenas um subconjunto  $J_0 \subset J$  de colunas, então o subproblema em questão consiste em encontrar colunas (variáveis)  $j \in J \setminus J_0$  que tenham custo reduzido  $\bar{c}_j$  negativo ou provar que tais colunas não existem.

Para uma rota  $S = \{s_1, \dots, s_p\}$ , uma coluna é definida por  $a = [a_t^{s_k}]_{t=1, \dots, T}^{k=1, \dots, p}$  e  $b = [b_t]_{t=1, \dots, T}$ , sendo que são nulos todos os coeficientes relativos aos estacionamentos e intervalos de tempos não cobertos pela rota  $S$ . Cada coeficiente  $a_t^{s_k}$  representa uma ação de retirada ou de entrega de *EcoCarros*, no estacionamento  $k$  e intervalo de tempo  $t$ , a ser executada por um veículo que percorre a rota  $S$ .

O segmento de uma coluna representado por  $a$  define uma operação de transporte de *EcoCarros* entre os estacionamentos. Esta operação será válida se cada ação (coeficiente)  $a_t^{s_k}$  respeita a capacidade máxima do veículo que a executa em cada intervalo de tempo. Assim, devem ser satisfeitas as restrições  $-C \leq a_t^k \leq C$ , para  $t = 1, \dots, T$  e  $k = 1, \dots, p$ , e  $\sum_{k=1}^K \sum_{t'=0}^t a_{t'}^k \leq C$ , para  $t = 1, \dots, T$ . Observe que também não faz sentido definir duas ações em seqüência no mesmo estacionamento, ou seja, o veículo não deve retirar (ou entregar) *EcoCarros* de um estacionamento e logo em seguida entregar (ou retirar) novamente no mesmo estacionamento. Além disso, o conjunto de ações entre quaisquer dois intervalos de tempo também deve respeitar a capacidade do veículo, ou seja, a soma dos respectivos coeficientes deve pertencer ao intervalo  $[-C, \dots, C]$ .

Sejam  $w_t^k$ ,  $u_t$ ,  $\langle w_1 \rangle_t^k$  e  $\langle w_2 \rangle_t^k$  os multiplicadores duais associados às restrições (1), (2), (3.1) e (3.2) do *IP-ECP*, respectivamente. Assim, o subproblema de geração de colunas deve verificar, para uma dada rota  $S$ , se  $\bar{c}_j < 0$ . Este valor é definido como:

$$\begin{aligned} \bar{c}_j = & - \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T (w_t^{s_k} \cdot a_t^{s_k} \\ & + \langle w_1 \rangle_t^{s_k} \cdot \langle a_1 \rangle_t^{s_k} \\ & + \langle w_2 \rangle_t^{s_k} \cdot \langle a_2 \rangle_t^{s_k}) \\ & - \sum_{t=1}^T u_t \cdot b_t . \end{aligned} \tag{7-1}$$

Se não existem restrições associadas às rotas, este problema deverá somente verificar se existe alguma coluna (programação válida de operações de transporte para uma rota) com custo reduzido negativo. O oposto indica

que uma solução ótima para a relaxação linear foi encontrada. Além disso, é interessante notar que se somente circuitos são aceitos, então qualquer caminho euleriano define uma rota válida.

Na seção 7.7 são descritos dois algoritmos para encontrar os valores ótimos para  $a$ , e conseqüentemente  $b$ , para uma dada rota. Assim, se são dadas várias rotas, um desses algoritmos deverá ser executado para cada uma delas se o objetivo for encontrar a rota com a melhor programação de operação de transporte. A complexidade final desse procedimento pode ser muito alta. Entretanto, uma vez que uma coluna (operação de transporte para uma rota) de custo reduzido negativo foi encontrada, o algoritmo de geração de colunas pode prosseguir.

## 7.7

### Geração de Colunas por Programação Dinâmica

Nesta seção são mostrados dois algoritmos baseados em programação dinâmica para a geração de colunas para o *IP-ECP*. O primeiro considera que a rota  $S = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ , a ser utilizada por um veículo, será percorrida apenas uma vez ao dia. Além disso, o seu início e duração são livres, ou seja, ela pode ser iniciada em qualquer intervalo de tempo (um que permita visitar todos os estacionamentos em tempo hábil) e as paradas não tem duração fixas. O segundo algoritmo considera que a rota  $S$  será percorrida diversas vezes por dia, com os demais parâmetros (início e duração das paradas) pré-fixados.

Inicialmente, considere que um veículo inicia e encerra uma rota  $S = (s_1, s_2, \dots, s_p)$  vazio. Defina  $Q = \{0, 1, \dots, C\}$  como o conjunto de todos os possíveis números de *EcoCarros* em um veículo e  $P(s_k, t, q)$  como o custo do estado da programação dinâmica quando a carga do veículo é  $q$  *EcoCarros* no final do intervalo de tempo  $t$ , imediatamente após visitar o estacionamento  $s_k$  da rota  $S$ . O estado inicial, o qual pode ser associado a um estacionamento artificial  $s_0$ , é  $P(s_0, 0, 0)$ . A relação de recorrência da programação dinâmica para os algoritmos de geração de colunas para o

*IP-ECP* é a seguinte:

$$\text{PrgDin} \left\{ \begin{array}{l} P(s_k, t, q) = \min_{q' \in Q} \min_{t' \in \mathcal{T}(s_k, t)} \{ P(s_{k-1}, t', q') \\ + \sum_{l=t'+1}^t u_l \\ - w_t^{s_k} \cdot (q - q') \\ - \langle w_1 \rangle_t^{s_k} \cdot \varphi_1 \\ - \langle w_2 \rangle_t^{s_k} \cdot \varphi_2 \} , \end{array} \right.$$

onde  $\varphi_1$  é 1 se  $(q - q') < 0$  ou 0 caso contrário,  $\varphi_2$  é 1 se  $(q - q') > 0$  ou 0 caso contrário,  $\mathcal{T}(s_k, t)$  é o conjunto de intervalos de tempo a partir dos quais é possível sair do estacionamento  $s_{k-1}$  e estar no estacionamento  $s_k$  no intervalo de tempo  $t$  e  $w_t^k$ ,  $u_t$ ,  $\langle w_1 \rangle_t^k$  e  $\langle w_2 \rangle_t^k$  são os multiplicadores duais associados às restrições (1), (2), (3.1) e (3.2) de *IP-ECP*, respectivamente.

### Rota fixa

Considere o caso em que a rota  $S$  será percorrida apenas uma vez. Sejam  $c_t(s_{k-1}, s_k)$  o tempo necessário para ir do estacionamento  $s_{k-1}$  ao  $s_k$  e  $d_w$  a duração de um intervalo de tempo. O primeiro intervalo de tempo ( $i_{s_k}$ ) no qual o estacionamento  $s_k$  pode ser alcançado a partir de  $s_{k-1}$  é definido como:

$$i_{s_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ i_{s_{k-1}} + \left\lceil \frac{c_t(s_{k-1}, s_k)}{d_w} \right\rceil & \text{se } 2 \leq k \leq p . \end{cases} \quad (7-2)$$

Dado que o horizonte de tempo foi discretizado em  $T$  intervalos, o veículo pode chegar ao estacionamento  $s_k$ , vindo de  $s_{k-1}$ , em qualquer intervalo  $t = i_{s_k}, \dots, T - i_{s_p} + i_{s_k}$ . O limite superior deste intervalo permite que os demais estacionamentos da rota sejam visitados em tempo hábil. Portanto, se  $t$  é o intervalo de chegada ao estacionamento  $k$ , define-se o conjunto  $\mathcal{T}(s_k, t) = \{i_{s_k}, \dots, t\}$  como o conjunto de intervalos de tempo a partir dos quais é possível sair do estacionamento  $s_{k-1}$  e estar no estacionamento  $s_k$  no intervalo de tempo  $t$ . Observe que o veículo pode chegar ao estacionamento  $s_k$  em um intervalo de tempo anterior ao  $t$  e ali permanecer até o intervalo  $t$ .

O algoritmo de geração de colunas para o *IP-ECP*, considerando-se que uma rota  $S$  é percorrida apenas uma vez, é detalhado a seguir:

### **Algoritmo 1 – Rota Fixa**

#### **1 Início.**

*Inicie  $P(s_k, t, q)$ , para todo  $k, t$  e  $q$ , com um valor positivo alto e  $P(s_0, 0, 0)$  com zero. Faça  $k$  igual a 1.*

#### **2 Iteração.**

*Usando a relação de recorrência, calcule  $P(s_k, t, q)$  para todo  $t \in \mathcal{T}(s_k, t) = \{i_{s_k}, \dots, T - i_{s_p} + i_{s_k}\}$  e todo  $q \in Q$ . Incremente  $k$ . Se  $k \leq p$ , repita este passo.*

#### **3 Solução Ótima.**

*O valor da solução ótima é dado por:*

$$P^* = \min_{t=i_{s_p}, \dots, T} \{P(s_p, t, 0)\}$$

Os valores  $b_t$  e  $a_t^{s_k}$  (conseqüentemente  $\langle a_1 \rangle_t^{s_k}$  e  $\langle a_2 \rangle_t^{s_k}$ ), associados à solução ótima, podem ser encontrados percorrendo-se retroativamente os estados (ou decisões) a partir de qualquer estado com valor igual a  $P^*$ . Este estado representa o final da rota, quando todos os *EcoCarros* eventualmente ainda no veículo devem ser descarregados. Conforme definido anteriormente, a chegada ao último estacionamento  $p$  pode ocorrer em qualquer intervalo de tempo entre  $i_{s_p}$  e  $T$ .

### **Rota fixa com repetição**

Considere agora que as redistribuições dos *EcoCarros* são realizadas por veículos que percorrem um conjunto de rotas curtas, as quais cobrem todos os estacionamentos e são repetidas diversas vezes ao longo do horizonte de tempo considerado. Além disso, será suposto que uma rota é realizada dentro de um quadro de horários rígidos, com os instantes de início e de chegada a cada estacionamento e a duração das paradas (para carregamento e descarregamento ou descanso entre repetições) pré-definidos.

Assim, uma rota é definida como:

$$\sigma = (t_1, t_c, t_d, r, S = (s_1, s_2, \dots, s_p)). \quad (7-3)$$

O valor  $t_1$  especifica o intervalo de tempo no início do qual a rota  $S$  deve ser iniciada;  $t_c$  é o número de intervalos que o veículo deve obrigatoriamente permanecer em cada estacionamento (tempo gasto no carregamento ou descarregamento do mesmo);  $t_d$  é a duração da parada (em intervalos de

tempo) que o veículo deve fazer entre duas das  $r$  repetições da rota; e  $s_1$  até  $s_p$  são os  $p$  estacionamentos a serem visitados, sendo que  $s_1 = s_p$ .

A figura 7.1 exemplifica um ciclo completo de uma rota com 4 estacionamentos. Estes são rotulados como  $e_1, e_2, e_3$  e  $e_4$ , e a rota é definida como  $S = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = (e_1, e_4, e_2, e_3, e_1)$ . O número de intervalos de tempo necessários para o veículo se deslocar do estacionamento  $s_i$  ao  $s_j$  é definido como  $\delta_{i,j}$ , ou seja,  $\delta_{i,j} = \lceil c_t(s_i, s_j)/d_w \rceil$ . A duração de um intervalo de tempo e o total de intervalos necessários para completar a rota são definidos como  $d_w$  e  $W_S$ , respectivamente.

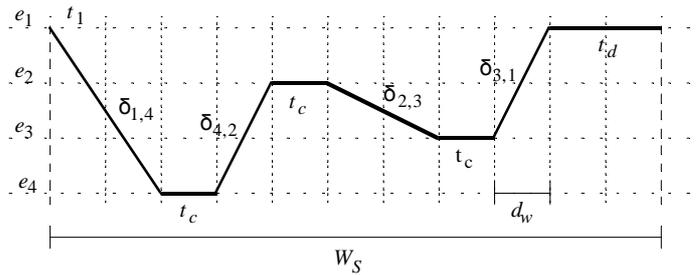


Figura 7.1: ECP – Exemplo de uma rota.

Considere a primeira das  $r$  repetições de uma rota. O primeiro intervalo de tempo ( $i_{s_k}$ ) no qual o estacionamento  $s_k$  pode ser alcançado a partir de  $s_{k-1}$  agora é fixo e pode ser definido como:

$$i_{s_k} = \begin{cases} t_1 & \text{se } k = 1; \\ t_1 + \left\lceil \frac{c_t(s_1, s_2)}{d_w} \right\rceil & \text{se } k = 2; \\ i_{s_{k-1}} + \left\lceil \frac{c_t(s_{k-1}, s_k)}{d_w} \right\rceil + t_c & \text{se } 3 \leq k \leq p. \end{cases} \quad (7-4)$$

A montagem de uma tal rota deve respeitar o limite máximo de tempo disponível para a execução das  $r$  repetições. Assim, o total de intervalos de tempo necessários para completar uma rota  $S$  é dado por  $W_S = i_{s_p} + t_d - t_1$ , o que já contempla os intervalos de tempos que compõem a parada obrigatória antes de outra repetição da rota. Este valor deve permitir a execução das  $r$  repetições da rota a partir de um intervalo  $t_1$ , ou seja,  $t_1 + r.W_S \leq T$ , onde  $T$  é o total de intervalos de tempo do horizonte considerado. Essa expressão pode ser escrita de forma mais detalhada como segue:

$$t_1 + r \cdot \left[ \sum_{k=1}^p \left\lceil \frac{c_t(s_{k-1}, s_k)}{d_w} \right\rceil + t_c \cdot (p - 2) + t_d \right] \leq T. \quad (7-5)$$

O custo de um estado da relação de recorrência é representado por  $P(s_k, t, q)$ . Este custo, da forma como foi definido, refere-se à carga de

$q$  *EcoCarros* no veículo, no final do intervalo de tempo  $t$ , imediatamente após visitar o estacionamento  $s_k$  vindo do estacionamento  $s_{k-1}$ . Observe que agora, a partir da segunda repetição de uma rota, o estacionamento anterior ao estacionamento  $s_1$  é o estacionamento  $s_p$ . Este detalhe não invalida a relação de recorrência, apenas deve-se considerar essa particularidade durante a geração da coluna.

A especialização do algoritmo de geração de colunas, para considerar as  $r$  repetições de uma rota  $S$ , define como  $k'$  o estacionamento anterior à chegada ao estacionamento  $k$  (em analogia ao intervalo de tempo  $t'$  e carga  $q'$  precedentes). Dessa forma, quando do cálculo do custo  $P(s_k, t, q)$ , a recorrência deve considerar o valor  $P(s_{k'}, t', q')$  e não  $P(s_{k-1}, t', q')$ . No algoritmo, detalhado a seguir,  $n$  é um contador para o número de repetições da rota  $S$ :

### **Algoritmo 2 – Rota Fixa com Repetição**

#### **1 Início.**

*Inicie  $P(s_k, t, q)$ , para todo  $k, t$  e  $q$ , com um valor positivo alto e  $P(s_0, 0, 0)$  com zero. Faça  $t$  igual a 0,  $k$  igual a 1 e  $n$  igual a 0.*

#### **2 Iteração.**

*Faça  $\mathcal{T}(s_k, t) = \{t\}$  e depois  $t$  igual a  $n.W_S + i_{s_k}$ . Se  $n > 0$  e  $k = 1$  faça  $k'$  igual a  $p$ , caso contrário faça  $k'$  igual a  $k - 1$ . Usando a relação de recorrência, calcule  $P(s_k, t, q)$  para todo  $q \in Q$ . Incremente  $k$ . Se  $k \leq p$ , repita este passo, caso contrário incremente  $n$ .*

#### **3 Repetições das visitas.**

*Faça  $k$  igual a 1. Se  $n < r$ , repita o passo 2.*

#### **4 Solução Ótima.**

*O valor da solução ótima é dado por:*

$$P^* = P(s_p, t = r.W_S + t_1 - t_d, 0).$$

## **7.8**

### **Branch-and-Price**

Conforme observado na seção 7.5, a cardinalidade do conjunto  $J$  é exponencial no número de estacionamentos e na capacidade do veículo.

A resolução exata do *IP-ECP* com um algoritmo *branch-and-price* requer um esquema de particionamento do espaço de soluções. Este esquema deve permitir a exclusão da solução fracionária do *LP* relativo ao nó corrente da árvore de enumeração e não complicar em demasia o subproblema de geração de colunas. Esta segunda exigência praticamente exclui os esquemas padrões de particionamento baseados na fixação do valor de uma variável em um valor inteiro qualquer.

Em particular no *IP-ECP*, se o par  $(V, X) = (\{v_t^k \mid k = 1, \dots, K \text{ e } t = 0, \dots, T\}, \{x_j \mid j \in J_0\})$  é uma solução ótima para uma relaxação linear que considera apenas um subconjunto  $J_0 \subseteq J$  de colunas, fixar uma variável  $x_j \in X$  a 1 não complica o subproblema de geração de colunas, apenas reduz o tamanho do mesmo. Entretanto, a fixação de uma variável a 0 corresponde a impedir que o subproblema gere uma determinada coluna. O que significa que em determinados estágios da enumeração das soluções, um grande número de colunas poderiam estar impedidas de serem fornecidas pelo subproblema. Este impedimento, em geral, complica muito a resolução do subproblema pelos algoritmos de programação dinâmica apresentados na seção 7.7.

Uma opção é utilizar um esquema baseado na fixação de variáveis  $v \in V$  e na fixação das variáveis de folga  $\langle s_1 \rangle_t^k$  ( $\langle s_2 \rangle_t^k$ ) das restrições 3.1 (3.2) em 0 ou 1, o que não altera a estrutura do subproblema de geração de colunas. Fixar uma variável  $v_t^k$ , em qualquer valor  $v$  no intervalo  $[m_t^k, \dots, M_t^k]$ , especifica que, ao final do intervalo de tempo  $t$ , o estacionamento  $k$  deve conter  $v$  *EcoCarros*. Por outro lado, fixar uma variável de folga  $\langle s_1 \rangle_t^k$  em seu valor máximo (ou mínimo) determina que apenas um veículo pode parar (ou nenhum pode parar) no estacionamento  $k$ , no intervalo de tempo  $t$ , para descarregamento. O raciocínio em relação ao carregamento é idêntico para as variáveis  $\langle s_2 \rangle_t^k$ .

Assim, identificada uma variável de folga  $\langle s_1 \rangle_t^k$  (ou  $\langle s_2 \rangle_t^k$ ) que esteja fracionária, o esquema proposto é fixar o par  $(\langle s_1 \rangle_t^k, \langle s_2 \rangle_t^k)$  em  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  ou  $(1, 1)$ . A fixação em  $(0, 0)$  não precisa ser considerada, pois tornaria o *IP-ECP* inviável, uma vez que os coeficientes das restrições 3.1 e 3.2 são definidos, respectivamente, como:

$$\langle a_1 \rangle_{tj}^k = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{tj}^k < 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \langle a_2 \rangle_{tj}^k = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{tj}^k > 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na fixação do par  $(\langle s_1 \rangle_t^k, \langle s_2 \rangle_t^k)$  em  $(1, 0)$ , os algoritmos de geração de colunas descritos na seção 7.7 devem eliminar o estado  $P(k, t, q)$  quando

$(q - q') \geq 1$ . Isto equivale a impedir o veículo de parar no estacionamento  $k$ , no intervalo de tempo  $t$ , para descarregar qualquer um dos  $q'$  *EcoCarros* que esteja carregando. Se o par  $(\langle s_1 \rangle_t^k, \langle s_2 \rangle_t^k)$  é fixado em  $(0, 1)$ , o estado  $P(k, t, q)$  é eliminado quando  $(q - q') \leq -1$ . Agora o veículo é impedido de parar no estacionamento  $k$ , no intervalo de tempo  $t$ , para carregar qualquer quantidade de *EcoCarros* (o máximo é  $(q' - q)$ ) que complete a sua carga máxima de  $C$  *EcoCarros*. Finalmente, a fixação em  $(1, 1)$  impede qualquer ação de entrega ou retirada de *EcoCarros* por parte do veículo no estacionamento  $k$  no intervalo de tempo  $t$ . O efeito prático é a eliminação do estacionamento  $k$  da rota.

Este esquema não garante a otimalidade da melhor solução encontrada, uma vez que mesmo numa solução em que tais variáveis tenham valores inteiros, alguma variável  $x_j \in X$  ainda pode ser fracionária. Na realidade, não há sequer garantia de que uma solução inteira venha a ser encontrada. Assim, em princípio este esquema precisa ser combinado com outras opções. Contudo, este esquema reduz substancialmente o espaço de busca, o que deve ser suficiente para garantir que boas soluções sejam encontradas (na realidade essa conjectura foi validada pelos resultados dos testes computacionais realizados e descritos na seção 7.10).

O esforço computacional na geração de colunas ao longo de todo o *branch-and-price* pode ser aproveitado. O objetivo é procurar encontrar soluções viáveis nos nós da busca em que variáveis  $x_j \in X$  possuem valor fracionário e as demais possuem valor inteiro. Para isso, ao término da execução do algoritmo pode-se construir um problema de programação linear inteiro com todas as colunas geradas ao longo da execução do *branch-and-price* e resolver este problema.

Essa abordagem alternativa reforça as chances de se encontrar uma boa solução para uma determinada instância. Essa expectativa é confirmada com os resultados obtidos com utilização desse esquema alternativo após a execução de um algoritmo *branch-and-price* que utiliza o esquema de *branching* descrito nesta seção. Esses resultados, que são mostrados na seção 7.10, foram obtidos para um conjunto de instâncias geradas conforme as estratégias descritas na seção 7.9.

## 7.9 Instâncias

Dentre os vários problemas enfrentados durante o desenvolvimento deste capítulo, um dos mais sérios foi a indisponibilidade de instâncias do

mundo real para o teste da abordagem aqui proposta. Aliás, dado que o *ECP* é um problema novo e ainda não estão disponíveis instâncias advindas do mundo real, a solução do mesmo poderia até ser considerada um objetivo inexecutável. Contudo, o desenvolvimento de procedimentos para geração de instâncias que, de modo mais fiel possível, simulam situações do mundo real, permite mostrar que tal suposição não é totalmente verdadeira. Esta conclusão é comentada com mais detalhes na seção 7.10 que trata dos resultados computacionais dos testes realizados.

Nesta seção são descritos procedimentos para gerar instâncias do *ECP* que permitam o teste e avaliação da abordagem por geração de colunas para a resolução da formulação *IP-ECP* proposta. A forma como esses procedimentos constroem uma instância garante a existência de pelo menos uma solução factível para a mesma, o que permite verificar a eficácia do esquema de *branching* proposto na seção 7.8. Além disso, a estrutura das instâncias geradas permite calcular uma estimativa superior para o valor da solução ótima para uma instância em particular, ou seja, uma estimativa "pessimista" para o número mínimo de *EcoCarros* que garanta o equilíbrio do sistema ao longo do período de um dia (veja a descrição desta estimativa na seção 7.9.3). Esta estimativa, devido à dificuldade de construção heurística de soluções para instâncias do *ECP*, é importante para permitir mensurar a qualidade das soluções encontradas pelo algoritmo *Branch-and-Price* proposto na seção 7.8.

Dadas as constantes  $K$  (número de estacionamentos),  $T$  (número de intervalos de tempo),  $C$  (capacidade dos veículos) e  $R$  (número de rotas simultâneas), esses procedimentos encontram pares  $(m_t^k, M_t^k)$ , associados a cada estacionamento  $k$ , para cada intervalo de tempo  $t$ . Os valores  $m_t^k$  fornecem o número mínimo de *EcoCarros* que atenda a estimativa de retiradas dos mesmos no estacionamento  $k$  ao longo do horizonte de tempo considerado e os valores  $M_t^k$  representam a capacidade máxima de armazenamento de cada estacionamento e em cada intervalo de tempo.

Esses procedimentos são compostos de duas fases. A primeira fase simula a movimentação de um certo número de *EcoCarros* durante o período de um dia e a segunda calcula, para cada estacionamento  $k$ , os pares  $(m_t^k, M_t^k)$  que viabilizam essa movimentação simulada na primeira fase. No procedimento apresentado na seção 7.9.1, essa simulação considera a movimentação de *EcoCarros* entre estacionamentos de origem e destino escolhidos de forma aleatória. Enquanto que no procedimento descrito na seção 7.9.2 é considerada a movimentação de *EcoCarros* entre pontos de origem e destino previamente determinados.

### 7.9.1 Geração de Instâncias

Considere um conjunto de  $K$  estacionamentos e um horizonte de  $T$  intervalos de tempo. Considere também que no início do intervalo de tempo  $t_1$  todos os estacionamentos estão vazios. Seja  $\mathcal{V}$  um conjunto de *EcoCarros* e  $F_{\mathcal{V}}$  uma família de subconjuntos disjuntos de  $\mathcal{V}$  ( $F_{\mathcal{V}} = \{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_f\}$ ,  $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}$ ,  $1 \leq i \leq f$  e  $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \emptyset$ ,  $1 \leq i < j \leq f$ ).

A primeira etapa do procedimento de geração de instâncias consiste em, para cada subconjunto  $\mathcal{V}_i \in F_{\mathcal{V}}$ , escolher aleatoriamente estacionamentos  $k'$  e  $k''$  e intervalos de tempo  $t'$  e  $t''$  que permitam simular a movimentação dos *EcoCarros* de  $k'$  para  $k''$ . Desta forma, o número de *EcoCarros* no estacionamento  $k'$ , no intervalo  $t'$ , é decrementado de  $|\mathcal{V}_i|$  unidades e o número de *EcoCarros* em  $k''$ , no intervalo  $t''$ , é incrementado de  $|\mathcal{V}_i|$ , onde  $|\mathcal{V}_i|$  é a cardinalidade do conjunto  $\mathcal{V}_i$ . A escolha do intervalo de tempo  $t'$  deve ser feita de modo a permitir que a chegada dos *EcoCarros* ao estacionamento  $k''$ , após se deslocarem de  $k'$ , possa acontecer em tempo hábil, ou seja,  $t' + \lceil c_t(k', k'')/d_w \rceil \leq t'' \leq T$ .

Após esta fase, cada estacionamento  $k$  tem, no intervalo de tempo  $t$ , um déficit ou superávit de  $w_t^k$  *EcoCarros* relativo ao seu estoque inicial nulo. Considere  $\omega^k$  o maior déficit acumulado para o estacionamento  $k$  em qualquer intervalo de tempo, ou seja,

$$\omega^k = \min\left\{\sum_{t=t_1}^{t_2} w_t^k, 1 \leq t_1 < t_2 \leq T\right\}. \quad (7-6)$$

Na segunda etapa do procedimento, o número inicial de *EcoCarros* no estacionamento  $k$  é fixado em um percentual do simétrico desse déficit acumulado máximo, ou seja,  $v_0^k = -\omega^k \cdot (1 + \rho)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , onde  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ) é um fator de incremento (na geração das classes de instâncias descritas na seção 7.10 foi utilizado o fator  $\rho = 0,25$ ). Uma seqüência viável de estimativas de retiradas de *EcoCarros* é então construída a partir deste valor. A estimativa de retiradas de *EcoCarros* em cada estacionamento  $k$ , no intervalo de tempo  $t = 1$ , é calculada como  $m_1^k = w_1^k + v_0^k$  e para  $t = 2, \dots, T$ , este valor é dado por  $m_t^k = w_t^k + m_{t-1}^k$ .

Considere agora  $\Omega^k = \max\{m_t^k, t = 1, \dots, T\}$  como a maior estimativa de retirada de *EcoCarros*, em qualquer intervalo de tempo, para o estacionamento  $k$ . Os limites superiores para o número de *EcoCarros* são fixados em  $M_t^k = \Omega^k(1 + \rho)$ ,  $t = 1, \dots, T$ .

## 7.9.2 Sequências Fixas na Geração de Instâncias

Uma segunda opção para a geração de instâncias do *ECP* é utilizar rotas pré-definidas para a simulação do fluxo de *EcoCarros*. Assim, seja  $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$  uma tal conjunto de rotas. Considere que cada rota  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , é construída de acordo com as definições 7-3 e 7-5. Seja  $i_{s_k}$  o intervalo de tempo no qual o estacionamento  $s_k$  deve ser alcançado a partir de  $s_{k-1}$  (veja definição 7-4). Considere novamente que no início do intervalo de tempo  $t_1$  todos os estacionamentos estão vazios.

O processo de construção das instâncias consiste, numa primeira fase, em simular um fluxo de *EcoCarros*, segundo uma rota  $\sigma_j$ . Desta forma, no intervalo de tempo  $t_1$ ,  $q_1 \in \{0, 1, \dots, C\}$  *EcoCarros* saem de  $s_1$ . Os estacionamentos  $s_k$ ,  $k = 2, \dots, p-1$  são alcançados no intervalo de tempo  $i_k$  e  $q_k \in \{-q_{k-1}, \dots, C - q_{k-1}\}$  *EcoCarros* podem sair ou chegar a  $s_k$ . Finalmente, o estacionamento  $s_p$  será alcançado no intervalo de tempo  $i_p$  e todos os  $q_{p-1}$  *EcoCarros* eventualmente ainda em movimentação devem parar em  $s_p$ . O resultado é equivalente à movimentação dos *EcoCarros* com veículos que seguiriam essa seqüência de visitas (rota) pré-determinada, razão pela qual o número de *EcoCarros* a serem movimentados é escolhido no intervalo  $[0, 1, \dots, C]$ .

Este processo pode ser executado para cada subconjunto de até  $R$  rotas. Após essa primeira fase cada estacionamento  $k$  apresenta também, no intervalo de tempo  $t$ , um déficit ou superávit de  $w_t^k$  *EcoCarros*, relativo ao seu estoque inicial nulo. Assim, o procedimento prossegue com a mesma segunda fase do procedimento descrito na seção 7.9.1.

No caso em que uma rota  $S = (s_1, s_2, \dots, s_p)$  deve ser percorrida apenas uma vez ao longo de um dia, com o início e duração não pré-fixados, a primeira fase do processo de construção das instâncias é similar ao descrito. A diferença básica está nos intervalos de tempo em que o fluxo de *EcoCarros* deverá passar nos estacionamentos de  $S$ .

Considere agora que  $i_{s_k}$  é dado pela definição 7-2. Assim, para cada rota  $S = (s_1, s_2, \dots, s_p)$ , o fluxo poderá começar no estacionamento  $s_1$  em um intervalo de tempo  $t_1 \in \{1, \dots, T - i_{s_p} + i_{s_1}\}$ . Para  $k = 2, \dots, p-1$ , poderá chegar ao  $s_k$  em um intervalo  $t_k \in \{t_{k-1} + 1, \dots, T - i_{s_p} + (t_{k-1} + 1)\}$  e  $s_p$  poderá ser alcançado em um intervalo  $t_p \in \{t_{p-1} + 1, \dots, T\}$ . Observe que o número de rotas que podem ocorrer simultaneamente em cada intervalo de tempo é limitado pela constante  $R$ . Assim, cada intervalo  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , deve ser escolhido dentro dos conjuntos especificados e de forma a respeitar o número máximo de  $R$  rotas simultâneas em cada intervalo de tempo.

### 7.9.3 Estimativa para o valor da solução ótima

Considere o caso em que, para cada estacionamento  $k$ , o número máximo de *EcoCarros* é igual em qualquer intervalo de tempo, ou seja,  $M_t^k = \overline{M}^k$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Seja  $\overline{m}^k = \max\{m_t^k, t = 1, \dots, T\}$  a maior previsão de demanda por *EcoCarros* no estacionamento  $k$ , em qualquer intervalo de tempo. Seja  $V$  o valor dado pela soma de tais previsões de demandas, ou seja:

$$V = \sum_{k=1}^K \overline{m}^k. \quad (7-7)$$

Com a restrição imposta aos limites superiores  $M_t^k$  de serem todos iguais,  $V$  é uma estimativa superior válida para o número mínimo de *EcoCarros*. Esta estimativa pode ser calculada apenas resolvendo-se a relaxação linear do problema *IP-ECP*, antes da geração de colunas correspondentes a redistribuições de *EcoCarros* entre os estacionamentos. Observe que esta estimativa pode ser calculada mesmo para instâncias geradas por qualquer outro procedimento que não os descritos nas seções 7.9.1 e 7.9.2.

### 7.10 Resultados Computacionais

Nesta seção são apresentados os resultados computacionais obtidos para doze classes de instâncias do *ECP*, geradas conforme os procedimentos descritos na seções 7.9.1 (classes E-1 a E-6) e 7.9.2 (classes E-7 a E-12). As características dessas classes de instâncias são mostradas na tabela 7.1. Cada uma dessas doze classes é composta de 5 instâncias, associadas

Classe	$K$	$T$	$d_w$	$R$	$C$	$ \mathcal{S} $
E-1	9	144	10	2	3	4
E-2	9	288	5	2	3	4
E-3	16	144	10	2	3	5
E-4	16	288	5	2	3	5
E-5	25	144	10	2	3	5
E-6	25	288	5	2	3	5
E-7	9	144	10	2	3	4
E-8	9	288	5	2	3	4
E-9	16	144	10	2	3	5
E-10	16	288	5	2	3	5
E-11	25	144	10	2	3	5
E-12	25	288	5	2	3	5

Tabela 7.1: *ECP* - Características das instâncias.

a valores particulares das constantes  $K$  (número de estacionamentos),  $T$  (número de intervalos de tempo),  $C$  (capacidade dos veículos) e  $R$  (número de rotas simultâneas). A coluna  $|S|$  mostra o número de rotas pré-definidas associadas a cada instância.

As figuras 7.2, 7.3 e 7.4, mostram os grafos que modelam as malhas viárias utilizadas na geração das instâncias dos blocos de classes  $\{E-1, E-2, E-7, E-8\}$ ,  $\{E-3, E-4, E-9, E-10\}$  e  $\{E-5, E-6, E-11, E-12\}$ , respectivamente. As setas tracejadas em cada figura indicam as rotas utilizadas na geração das instâncias das classes E-7 a E-12. Estas rotas são mostradas na tabela 7.2, que também mostra os demais parâmetros das mesmas ( $t_1$ ,  $t_c$ ,  $t_d$  e  $r$ , conforme definição 7-3).

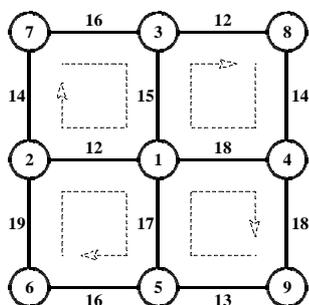


Figura 7.2: *ECP* – Malha viária das classes E-1 e E-2 de instâncias.

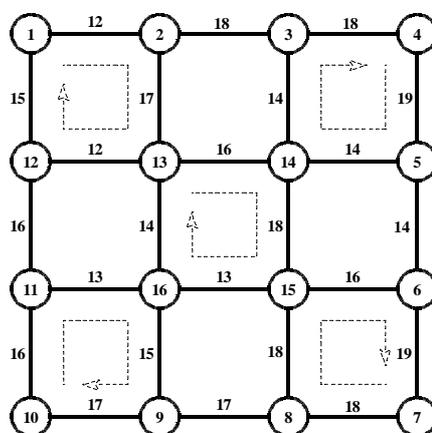


Figura 7.3: *ECP* – Malha viária das classes E-3 e E-4 de instâncias.

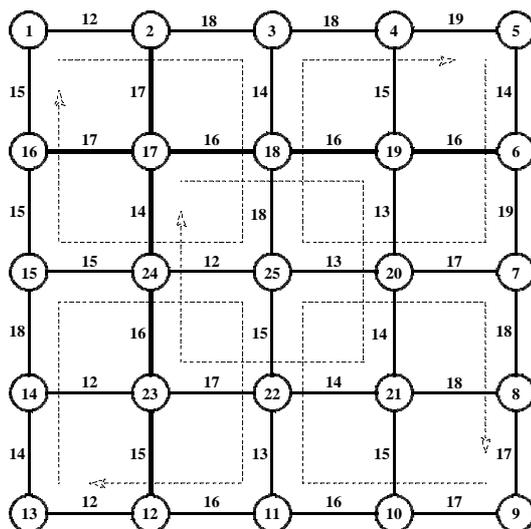


Figura 7.4: *ECP* – Malha viária das classes E-5 e E-6 de instâncias.

As tabelas 7.5 e 7.6 apresentam os resultados com o algoritmo *branch-and-price* descrito na seção 7.8 para as instâncias das classes E-1 a E-6 e E-7

Classe	$t_1$	$t_c$	$t_d$	$r$	$S$
E-1	1	1	3	8	6 → 2 → 1 → 5 → 6
	11	1	3	8	7 → 3 → 1 → 2 → 7
	21	1	3	8	8 → 4 → 1 → 3 → 8
	31	1	3	8	9 → 5 → 1 → 4 → 9
E-2	1	2	6	8	6 → 2 → 1 → 5 → 6
	21	2	6	8	7 → 3 → 1 → 2 → 7
	41	2	6	8	8 → 4 → 1 → 3 → 8
	61	2	6	8	9 → 5 → 1 → 4 → 9
E-3	1	1	3	8	1 → 2 → 13 → 12 → 1
	15	1	3	8	4 → 5 → 14 → 3 → 4
	1	1	3	8	7 → 8 → 15 → 6 → 7
	15	1	3	8	10 → 11 → 16 → 9 → 10
	31	1	3	8	14 → 15 → 16 → 13 → 14
E-4	1	2	6	8	1 → 2 → 13 → 12 → 1
	31	2	6	8	4 → 5 → 14 → 3 → 4
	1	2	6	8	7 → 8 → 15 → 6 → 7
	31	2	6	8	10 → 11 → 16 → 9 → 10
	61	2	6	8	14 → 15 → 16 → 13 → 14
E-5	1	1	3	5	1 → 2 → 3 → 8 → 25 → 24 → 15 → 16 → 1
	15	1	3	5	5 → 6 → 7 → 20 → 25 → 18 → 3 → 4 → 5
	1	1	3	5	9 → 10 → 11 → 22 → 25 → 20 → 7 → 8 → 9
	15	1	3	5	13 → 14 → 15 → 24 → 25 → 22 → 11 → 12 → 13
	31	1	3	4	17 → 18 → 19 → 20 → 21 → 22 → 23 → 24 → 17
E-6	1	2	6	5	1 → 2 → 3 → 18 → 25 → 24 → 15 → 16 → 1
	31	2	6	5	5 → 6 → 7 → 20 → 25 → 18 → 3 → 4 → 5
	1	2	6	5	9 → 10 → 11 → 22 → 25 → 20 → 7 → 8 → 9
	31	2	6	5	13 → 14 → 15 → 24 → 25 → 22 → 11 → 12 → 13
	61	2	6	4	17 → 18 → 19 → 20 → 21 → 22 → 23 → 24 → 17

Tabela 7.2: ECP - Características das rotas.

a E-12, respectivamente. Os testes foram realizados em um computador com processador *Pentium IV*, 2.4 GHz, com 1GB de RAM. Na obtenção destes resultados o tempo de processamento foi limitado a um valor que variou de 1800 a 10800 segundos, dependendo do tamanho da instância (número de estacionamentos e tamanho do intervalo de tempo). Este limite de tempo é mostrado na coluna rotulada de  $T_{max}$  nas duas tabelas anteriormente citadas.

A primeira coluna das tabelas é o nome da instância e a segunda a classe à qual a mesma pertence (veja tabela 7.1). A coluna rotulada como  $V$  é uma estimativa superior calculada como descrito na seção 7.9.3;  $Z_{lp}$  é o valor da solução da relaxação linear da formulação *IP-ECP* no nó raiz e  $Z$  é o valor da melhor solução inteira encontrada dentro do limite de tempo estabelecido para a execução do algoritmo *branch-and-price*. A próxima coluna,  $Gap(\%)$ , mostra a diferença percentual entre os valores  $Z$  e  $Z_{lp}$ . A coluna "Nós  $Z$ " é a quantidade de nós da árvore de enumeração que foram gerados até a solução

de valor  $Z$  ser encontrada. A coluna "Total Nós" mostra a quantidade total de nós que foram gerados dentro do limite de tempo especificado. As colunas  $C$  e  $L$  mostram o número de linhas e colunas da relaxação do *IP-ECP* ao final do processamento;  $T_{cpu}$  é o limite de tempo de processamento imposto para cada instância e  $T_{gc}(\%)$  é o percentual do tempo de processamento gasto na geração de colunas para o *IP-ECP*. Uma condição alternativa de parada do algoritmo *branch-and-price* foi o  $Gap(\%)$ , diferença percentual entre os valores  $Z$  e  $Z_{lp}$ , inferior a 1%.

Ainda em relação às tabelas 7.5 e 7.6, a coluna " $(V, S)$  int." contém a quantidade de nós, da árvore de enumeração construída, nos quais não foi possível usar o *branching* proposto na seção 7.8. O percentual dos mesmos em relação ao total de nós é mostrado na coluna a seguir, " $(V, S)$  (%)". Nesses nós a solução encontrada ainda não é factível, embora todas as variáveis  $v$  e todas as variáveis de folga  $\langle s_1 \rangle_t^k$  e  $\langle s_2 \rangle_t^k$ , das restrições 3.1 e 3.2 (veja formulação *IP-ECP* na seção 7.5), apresentem valores inteiros (O procedimento adotado nesses nós foi não fazer o *branching* e voltar a percorrer a árvore de enumeração a partir do nível anterior). Finalmente, as médias dos percentuais listados nas colunas  $Gap(\%)$ , Nós (%) e  $T_{GC}(\%)$  são mostrados na penúltima linha das duas tabelas e os respectivos desvios padrões são mostrados nas duas últimas linha da tabela.

Uma análise dos resultados apresentados permite verificar a dificuldade de se obter boas soluções para as instâncias testadas. Considere inicialmente o subconjunto de vinte e cinco instâncias das classes E-1 a E-6, para as quais se conseguiu encontrar soluções inteiras com o algoritmo *branch-and-price* proposto, dentro do limite de tempo imposto para a sua execução. Neste subconjunto o  $Gap$  médio, ou seja, a diferença percentual média entre o valor da solução da relaxação linear no nó raiz e o valor da melhor solução inteira encontrada, foi superior a 13%, sendo que em dezoito dessas instâncias esse  $Gap$  foi superior a 10% (em cinco delas foi superior a 20%). Mesmo para as instâncias das classes E-7 a E-12 pode-se observar que as mesmas apresentam um elevado grau de dificuldade de resolução. Neste caso o  $Gap$  médio foi de 4,26%, sendo que sete dessas instâncias apresentaram um  $Gap$  entre 4,26% e 7,53% e outras cinco instâncias apresentaram  $Gaps$  iguais ou superiores a 8,49%.

Pode-se notar uma certa similaridade entre as médias e os desvios padrões (últimas duas linhas das tabelas 7.5 e 7.6) de alguns resultados obtidos para os dois blocos de instâncias (E-1, ..., E-6 e E-7, ..., E-12). Esses resultados dizem respeito ao percentual de nós da árvore de enumeração em que o esquema de *branching* proposto não pôde ser utilizado e ao

percentual do tempo total de execução gasto na geração de colunas. A tabela 7.3 mostra esses resultados médios calculados para cada classe de instância, onde também pode ser observada uma certa similaridade entre os valores calculados para cada classe. Os únicos valores que são um pouco discrepantes são os percentuais do tempo gasto na geração de colunas nas classes E-6 e E-9. Embora o volume de testes realizados não seja suficiente para resultados totalmente conclusivos, essa similaridade sugere que tanto o esquema de *branching* proposto quanto o de geração de colunas são relativamente estáveis.

Um ponto a se destacar, observando-se os valores das colunas "Nós Z" e "Total Nós" nas tabelas 7.5 e 7.6, é que, na maioria das instâncias, a solução de valor  $Z$  foi obtida logo no início do processamento, ou seja, essa solução foi obtida após a geração de um pequeno número de nós (relativo ao total de nós gerados) da árvore de enumeração. Contudo, para um subconjunto de instâncias das classes E-1 a E-6, o algoritmo *branch-and-price* proposto não foi capaz de encontrar uma solução factível inteira dentro do limite de tempo estabelecido (entradas em branco nas colunas  $Z$ ,  $Gap(\%)$  e "Nós Z" da tabela 7.5).

Para este subconjunto de instâncias, foi utilizado o esquema alternativo ao *branch-and-price* descrito na seção 7.8, ou seja, construção de um problema de programação linear inteiro com todas as colunas geradas ao longo da execução do algoritmo *branch-and-price* e resolução deste problema. Os resultados obtidos com esta abordagem e a utilização do *Cplex* [65] (pacote de rotinas para resolução de problemas de programação linear) encontram-se na tabela 7.4. Esses resultados foram obtidos com os parâmetros padrões de configuração do *Cplex*.

As três primeiras colunas desta tabela também estão presentes na tabela 7.5, a coluna  $Z_{cpx}$  é o valor da solução encontrada pelo *Cplex*,  $Gap(\%)$  é a diferença percentual entre os valores  $Z_{cpx}$  e  $Z_{lp}$  e  $T_{cpx}$  é o tempo total gasto pelo *Cplex* para provar que a solução de valor  $Z_{cpx}$  é a solução ótima para o problema de programação linear inteiro construído. A média e o desvio padrão dos percentuais listados na colunas  $Gap(\%)$  são mostrados nas duas últimas linhas da tabela.

Pode-se observar que a média e o desvio padrão dos valores na coluna  $Gap(\%)$  são bastante próximos àqueles mostrados na tabela 7.5. Embora os testes tenham sido realizados para um conjunto de instâncias relativamente pequeno, tais resultados são um bom indicativo da qualidade das soluções listadas na tabela 7.5 (soluções encontradas pelo algoritmo *branch-and-price*). Além disso, permitem supor que, para o subconjunto de

instâncias listadas na tabela 7.4, o algoritmo *branch-and-price* poderia até ter conseguido encontrar soluções de igual qualidade no caso do limite de tempo de execução ter sido relaxado.

Classe	<i>Gap</i> (%)	Nós (%)	$T_{gc}$ (%)
E-1	21,20	26,52	23,45
E-2	14,90	27,28	37,36
E-3	16,45	25,95	32,28
E-4	16,98	15,19	20,39
E-5	13,94	17,83	32,64
E-6	13,31	26,93	51,42
E-7	5,26	17,56	42,26
E-8	6,47	28,71	48,39
E-9	3,85	15,07	68,57
E-10	2,79	15,08	23,81
E-11	2,92	26,63	29,31
E-12	6,12	39,36	24,58

Tabela 7.3: *ECP* - Resultados médios para as classes E-1 a E-12 de instâncias.

Inst.	$Z_{lp}$	$V$	$Z_{cpx}$	<i>Gap</i> (%)	$T_{cpx}$
eep-05	46,000	68	60	23,33	58376,087
eep-14	126,000	148	134	5,97	7937,060
eep-15	90,667	105	100	9,33	69295,036
eep-16	77,067	104	103	25,18	448812,052
eep-22	188,000	230	210	10,48	7717,071
Média				14,86	
Desvio Padrão				7,84	

Tabela 7.4: *ECP* - Resultados para instâncias da classe E-1 a E-6 com o *Cplex*.

Tabela 7.5: *ECP* - Resultados para as instâncias das classes E-1 a E-6.

Instância	Classe	$V$	$Z_{lp}$	$Z$	$Gap$ (%)	Nós $Z$	Total Nós	$(V, S)$ int.	$(V, S)$ (%)	C	L	$T_{cpu}$ (max)	$T_{gc}$ (%)
ecp-01	E-1	82	53,33	75	28,89	259	952	352	36,97	43850	4032	1800	29,00
ecp-02	E-1	116	88,22	92	4,11	262	888	114	12,84	58880	4032	1800	14,00
ecp-03	E-1	93	75,00	82	8,54	1114	5541	2425	43,76	97760	4032	1800	22,14
ecp-04	E-1	102	72,00	94	23,40	44	1807	705	39,01	60305	4032	1800	16,34
ecp-05	E-1	68	46,00				919	0	0,00	54307	4032	1800	35,79
ecp-06	E-2	114	99,00	100	1,00	3836	3859	1810	46,90	82637	8064	3600	18,70
ecp-07	E-2	61	40,91	56	26,95	104	213	35	16,43	34410	8064	3600	74,31
ecp-08	E-2	104	84,00	86	2,33	442	671	23	3,43	61007	8064	3600	13,45
ecp-09	E-2	71	51,33	63	18,52	452	571	157	27,50	45629	8064	3600	58,87
ecp-10	E-2	82	61,00	68	10,29	1798	1840	775	42,12	64603	8064	3600	21,48
ecp-11	E-3	105	74,34	90	17,40	382	2217	107	4,83	104145	7056	3600	15,45
ecp-12	E-3	185	137,00	159	13,84	272	728	154	21,15	65720	7056	3600	16,40
ecp-13	E-3	186	147,92	166	10,89	82	816	280	34,31	55789	7056	3600	41,61
ecp-14	E-3	148	126,00				2842	1280	45,04	90005	7056	3600	13,40
ecp-15	E-3	105	90,67				270	66	24,44	34438	7056	3600	74,56
ecp-16	E-4	104	77,07				175	0	0,00	65392	14112	7200	41,19
ecp-17	E-4	184	139,53	164	14,92	4723	4761	2036	42,76	115216	14112	7200	13,62
ecp-18	E-4	145	112,30	125	10,16	132	1084	0	0,00	91381	14112	7200	14,98
ecp-19	E-4	145	109,38	132	17,14	976	2698	896	33,21	101948	14112	7200	15,83
ecp-20	E-4	107	87,00	103	15,53	896	1449	0	0,00	103208	14112	7200	16,32
ecp-21	E-5	291	248,50	263	5,51	147	325	45	13,85	77117	10944	7200	20,00

continua na próxima página

Tabela 7.5: *ECP* - Resultados para as instâncias das classes E-1 a E-6. (continuação)

Instância	Classe	$V$	$Z_{lp}$	$Z$	$Gap$ (%)	Nós $Z$	Total Nós	$(V, S)$ int.	$(V, S)$ (%)	C	L	$T_{cpu}$ (max)	$T_{gc}$ (%)
eep-22	E-5	230	188,00				610	0	0,00	72335	10944	7200	13,61
eep-23	E-5	229	190,25	215	11,51	141	1317	418	31,74	97341	10944	7200	22,49
eep-24	E-5	165	133,17	163	18,30	63	144	4	2,78	45075	10944	7200	92,10
eep-25	E-5	290	241,00	276	12,68	2438	3138	1279	40,76	108944	10944	7200	14,99
eep-26	E-6	289	243,00	255	4,71	83	205	17	8,29	81137	21888	10800	70,17
eep-27	E-6	229	187,50	208	9,86	601	1070	344	32,15	105836	21888	10800	30,78
eep-28	E-6	165	133,67	161	16,98	114	731	221	30,23	92007	21888	10800	85,51
eep-29	E-6	164	134,00	156	14,10	171	303	54	17,82	98256	21888	10800	56,96
eep-30	E-6	291	246,00	280	12,14	7768	7807	3603	46,15	170438	21888	10800	13,68
			Média		13,19				23,28				32,92
			Desvio Padrão		7,05				16,87				24,60

Tabela 7.6: *ECP* - Resultados para as instâncias das classes E-7 a E-12.

Instância	Classe	$V$	$Z_{lp}$	$Z$	$Gap$ (%)	Nós $Z$	Total Nós	$(V, S)$ int.	$(V, S)$ (%)	C	L	$T_{cpu}$ (max)	$T_{gc}$ (%)
ecp-31	E-7	206	165,50	170	2,65	112	856	0	0,00	65021	4032	1800	21,11
ecp-32	E-7	192	152,83	167	8,49	119	1644	694	42,21	62373	4032	1800	26,38
ecp-33	E-7	189	147,14	151	2,56	213	225	0	0,00	20332	4032	1800	28,23
ecp-34	E-7	189	151,00	153	1,31	368	407	2	0,49	32194	4032	1800	73,44
ecp-35	E-7	230	193,89	214	9,40	11341	11374	5130	45,10	199002	4032	1800	62,16
ecp-36	E-8	157	137,17	138	0,60	71	71	1	1,41	24567	8064	3600	36,90
ecp-37	E-8	204	181,00	188	3,72	244	5579	2020	36,21	179654	8064	3600	65,59
ecp-38	E-8	178	132,00	138	4,35	7597	7929	2771	34,95	210884	8064	3600	71,37
ecp-39	E-8	148	124,33	136	8,58	129	3080	1268	41,17	134501	8064	3600	58,06
ecp-40	E-8	153	128,11	146	12,25	328	362	108	29,83	63369	8064	3600	10,01
ecp-41	E-9	317	276,50	299	7,53	1509	2324	852	36,66	114139	7056	3600	72,06
ecp-42	E-9	353	308,44	324	4,80	85	512	160	31,25	77922	7056	3600	79,29
ecp-43	E-9	366	321,25	322	0,23	363	363	27	7,44	38081	7056	3600	73,41
ecp-44	E-9	377	328,53	342	3,94	23	3878	0	0,00	259725	7056	3600	65,61
ecp-45	E-9	339	291,00	296	1,69	241	242	0	0,00	36975	7056	3600	52,50
ecp-46	E-10	293	254,90	264	3,45	50	3532	1447	40,97	157487	14112	7200	11,98
ecp-47	E-10	315	268,00	287	6,62	192	460	90	19,57	95170	14112	7200	18,81
ecp-48	E-10	321	288,89	290	0,38	305	305	41	13,44	59544	14112	7200	12,73
ecp-49	E-10	397	347,25	354	1,91	190	223	2	0,90	56285	14112	7200	15,96
ecp-50	E-10	312	275,33	278	0,96	179	184	1	0,54	50839	14112	7200	59,57
ecp-51	E-11	379	325,69	348	6,41	101	1970	760	38,58	122247	10944	7200	22,67

continua na próxima página

Tabela 7.6: *ECP* - Resultados para as instâncias das classes E-7 a E-12. (continuação)

Instância	Classe	$V$	$Z_{lp}$	$Z$	$Gap$ (%)	Nós $Z$	Total Nós	$(V, S)$ int.	$(V, S)$ (%)	C	L	$T_{cpu}$ (max)	$T_{gc}$ (%)
eep-52	E-11	411	356,83	364	1,97	684	8414	3623	43,06	244805	10944	7200	14,11
eep-53	E-11	354	311,00	314	0,96	289	1045	0	0,00	154908	10944	7200	74,51
eep-54	E-11	414	371,60	379	1,95	223	542	108	19,93	113750	10944	7200	14,72
eep-55	E-11	403	361,00	371	2,70	2046	2076	656	31,60	152649	10944	7200	20,52
eep-56	E-12	328	290,50	321	9,50	1352	2109	983	46,61	141898	21888	10800	12,22
eep-57	E-12	339	300,00	320	6,25	1045	2998	1396	46,56	157019	21888	10800	18,24
eep-58	E-12	394	351,40	367	4,25	3574	3610	1241	34,38	176740	21888	10800	17,44
eep-59	E-12	328	289,75	297	2,44	154	1817	770	42,38	131227	21888	10800	40,78
eep-60	E-12	367	321,20	342	6,08	41	845	227	26,86	127143	21888	10800	34,23
		Média			4,26				23,74				39,49
		Desvio Padrão			3,18				18,03				24,61