



Gabriela Wegmann Lima

**Ajuste ótimo por Levenberg-Marquardt de
métodos de previsão para iniciação de trinca**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Jaime Tupiassú Pinho de Castro

Coorientador: Prof. Marco Antonio Meggiolaro

Rio de Janeiro
Outubro de 2022



Gabriela Wegmann Lima

**Ajuste ótimo por Levenberg-Marquardt de
métodos de previsão para iniciação de trinca**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Jaime Tupiassú Pinho de Castro

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Marco Antonio Meggiolaro

Coorientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Ivan Fábio Mota de Menezes

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Renato Bichara Vieira

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 07 de Outubro de 2022

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gabriela Wegmann Lima

Graduou-se em engenharia mecânica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) em 2018. Possui pós-graduação *lato sensu* em engenharia de manutenção e segurança e engenharia da qualidade e responsabilidade social pela Faculdade UniBF.

Ficha Catalográfica

Lima, Gabriela Wegmann

Ajuste ótimo por Levenberg-Marquardt de métodos de previsão para iniciação de trinca / Gabriela Wegmann Lima; orientador: Jaime Tupiassú Pinho de Castro; coorientador: Marco Antonio Meggiolaro. – 2022.

121 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2022.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Ajuste ótimo de parâmetros experimentais. 3. Modelos de previsão da iniciação de trincas por fadiga. 4. Efeito de carga média. 5. Confiabilidade. I. Castro, Jaime Tupiassú Pinho de. II. Meggiolaro, Marco Antonio. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ao meu orientador, professor Jaime Castro, e ao meu coorientador, professor Marco Antonio Meggiolaro, por todo apoio e sabedoria transmitidos.

À PUC-Rio, principalmente ao Departamento de Engenharia Mecânica, por todo o suporte e ensinamento.

À minha família e meus amigos por me apoiarem nesse processo, em especial aos meus avós, à minha mãe e ao meu namorado.

Aos colegas de laboratório Giancarlo, Jorge, Vitor e Julian pela ajuda e transmissão de conhecimento nos procedimentos experimentais.

Resumo

Lima, Gabriela Wegmann; Castro, Jaime Tupiassú Pinho de; Meggiolaro, Marco Antonio. **Ajuste ótimo por Levenberg-Marquardt de métodos de previsão para iniciação de trinca**. Rio de Janeiro, 2022. 121p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A grande maioria das estruturas que trabalham sob cargas alternadas precisa ser dimensionada para evitar a iniciação de trincas por fadiga, o principal mecanismo de dano mecânico nesses casos. Os vários parâmetros dos modelos de previsão de dano à fadiga usados nesses projetos devem ser preferencialmente medidos a partir do ajuste otimizado de suas equações a dados experimentais medidos de forma adequada. Na realidade, a precisão das previsões baseadas nesses modelos depende diretamente da qualidade dos ajustes utilizados para obtenção desses parâmetros. Sendo assim, o objetivo principal deste trabalho é estudar a melhor maneira de se obter os parâmetros dos principais modelos de previsão da iniciação de trincas por fadiga através de ajustes de dados experimentais baseados no algoritmo de Levenberg-Marquardt. Primeiro, foram realizados diversos ensaios εN em uma liga de alumínio 6351-T6 para averiguar o desempenho do ajuste proposto para as equações de Coffin-Manson e de Ramberg-Osgood. Em seguida, foram usados dados da literatura de outros oito materiais para ajustar modelos de deformação-vida clássicos, assim como com o expoente de Walker, para assim avaliar o efeito de cargas médias não-nulas em testes εN . Por fim, foi estudado o ajuste de um modelo SN com expoente de Walker que considera limites de fadiga e efeitos de carga média. Esse estudo também inclui considerações estatísticas para quantificar o fator de confiabilidade a partir de diferentes hipóteses de funções densidade de probabilidade, baseadas em dez conjuntos de dados da literatura.

Palavras-chave

Ajuste ótimo de parâmetros experimentais; Modelos de previsão da iniciação de trincas por fadiga; Efeito de carga média; Confiabilidade.

Abstract

Lima, Gabriela Wegmann; Castro, Jaime Tupiassú Pinho de (Advisor); Meggiolaro, Marco Antonio (Co-Advisor). **Optimal fit by Levenberg-Marquardt of prediction methods for crack initiation**. Rio de Janeiro, 2022. 121p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Most structures working under alternate loadings must be dimensioned to prevent fatigue crack initiation, the main mechanism of mechanical damage in these cases. The various parameters from the fatigue damage prediction models used in these projects should preferably be measured by optimally fitting their equations to well-measured experimental data. In fact, the accuracy of the predictions based on these models depends directly on the quality of the adjustments used to obtain these parameters. As a result, the main purpose of this work is to study the best way to obtain the parameters of the leading prediction models of fatigue crack initiation through experimental data fittings based on the Levenberg-Marquardt algorithm. First, several ϵN tests were performed on a 6351-T6 aluminum alloy to verify the performance of the proposed fit for the Coffin-Manson and Ramberg-Osgood equations. Then, data from the literature of eight other materials were used to fit classic strain-life models, as well as models based on the Walker exponent, to evaluate the effect of non-zero mean loads in ϵN tests. Finally, the fitting of an SN model including the Walker exponent was studied, which considers fatigue limits and mean load effects. This study includes as well statistical considerations to quantify the reliability factor from different probability density function assumptions, based on ten data sets from the literature.

Keywords

Optimized fit of experimental parameters; Fatigue crack initiation prediction models; Mean stress effect; Reliability.

Sumário

1	Introdução	17
1.1	Motivação	17
1.2	Objetivos	18
1.3	Organização da dissertação	19
2	Fundamentos teóricos	20
2.1	Trincas de fadiga	20
2.2	Método εN	22
2.2.1	Relação entre tensão e deformação	22
2.2.2	Relação entre deformação e vida à fadiga	23
2.2.3	Efeito de carga média	25
2.2.3.1	Modelos clássicos	26
2.2.3.2	Modelos tipo Walker	26
2.3	Método SN	29
2.4	Análise estatística	30
2.4.1	Distribuições de probabilidade	30
2.4.1.1	Distribuição normal ou Gaussiana	30
2.4.1.2	Distribuição log-normal	31
2.4.1.3	Distribuição de Weibull	32
2.4.2	Fator de confiabilidade	32
2.4.3	Ajuste por mínimos quadrados	34
2.4.3.1	Levenberg-Marquardt	34
2.4.3.2	Trust-region	37
3	Implementação dos algoritmos de Levenberg-Marquardt	39
3.1	Ajustes de modelos clássicos do método εN	39
3.1.1	Coffin-Manson	39
3.1.2	Ramberg-Osgood	40
3.2	Ajustes de modelos εN contendo efeito de carga média	41
3.2.1	SWT	41
3.2.2	Dowling	43
3.2.3	J. Li	45
3.2.4	Nihei	46
3.3	Ajuste do modelo SN para vidas longas	47
4	Ensaio de tensão totalmente alternada de Al 6351-T6	50
4.1	Caracterização da liga de alumínio	50
4.1.1	Micrografia	51
4.1.2	Ensaio de tração	51
4.2	Ensaio εN	55
4.2.1	Equipamentos utilizados	55
4.2.2	Corpo de prova	57
5	Resultados e discussões	60

5.1	Ajustes de modelos clássicos do método εN	60
5.1.1	Coffin-Manson	60
5.1.2	Ramberg-Osgood	66
5.2	Ajustes de modelos εN contendo efeito de carga média	72
5.2.1	Artifícios para análise	72
5.2.2	Apresentação e análise dos resultados	73
5.3	Ajuste do modelo SN para vidas longas	86
5.3.1	Avaliação do ajuste	87
5.3.2	Avaliação probabilística	88
6	Conclusões	100
6.1	Trabalhos futuros	101
	Referências bibliográficas	102
A	Algoritmos implementados	106
A.1	Coffin-Manson	106
A.2	Ramberg-Osgood	107
A.3	SWT	108
A.4	Dowling	110
A.5	Li	113
A.6	Nihei	115
A.7	Equação SN	118

Lista de figuras

Figura 2.1	Esquema de uma trinca de fadiga [1].	21
Figura 2.2	Esquema do modelo proposto por Ramberg-Osgood monotônico [1].	23
Figura 2.3	Curva $\sigma\varepsilon$ cíclica e $\Delta\sigma\Delta\varepsilon$ do laço [1].	24
Figura 2.4	Esquema da curva de Coffin-Manson [1].	24
Figura 2.5	Esquema da função genérica de lei de potência [12].	30
Figura 2.6	Exemplos de distribuições normais [14].	31
Figura 2.7	Efeito de β na distribuição de Weibull [14].	32
Figura 2.8	Esquema do método de mínimos quadrados [17].	34
Figura 4.1	Amostra para ensaio micrográfico.	51
Figura 4.2	Ensaio micrográfico com Al 6351-T6.	52
4.2(a)	Aumento 200x amostra 1.	52
4.2(b)	Aumento 500x amostra 1.	52
4.2(c)	Aumento 200x amostra 2.	52
4.2(d)	Aumento 500x amostra 2.	52
Figura 4.3	Instron 5500R utilizada nos ensaios de tração.	52
Figura 4.4	Corpo de prova de tração usinado na direção longitudinal.	53
4.4(a)	Corpo de prova usinado.	53
4.4(b)	Desenho do corpo de prova.	53
Figura 4.5	Corpo de prova de tração usinado na direção radial.	53
4.5(a)	Corpo de prova usinado.	53
4.5(b)	Desenho do corpo de prova.	53
Figura 4.6	Tensão versus deformação de engenharia para o corpo de prova longitudinal.	54
Figura 4.7	Tensão versus deformação de engenharia para o corpo de prova radial.	54
Figura 4.8	Instron 8501 utilizada nos ensaios εN .	56
Figura 4.9	Alinhamento das garras da servo-hidráulica.	56
Figura 4.10	Calibração do <i>clip gage</i> .	57
Figura 4.11	Corpo de prova utilizado nos testes εN .	57
4.11(a)	Desenho do corpo de prova εN .	57
4.11(b)	Corpo de prova εN usinado.	57
Figura 5.1	Ajustes de Coffin-Manson separando as partes elástica e plástica.	61
Figura 5.2	Ajustes de Coffin-Manson com a estimativa inicial 1.	63
Figura 5.3	Ajustes de Coffin-Manson com a estimativa inicial 2.	63
Figura 5.4	Ajustes de Coffin-Manson com a estimativa inicial 3.	64
Figura 5.5	Variação dos parâmetros ajustados de Coffin-Manson.	66
5.5(a)	Propriedades elásticas.	66
5.5(b)	Propriedades plásticas.	66
Figura 5.6	Esquema da obtenção da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica [1].	67
Figura 5.7	Amplitudes de tensão versus picos de deformações plásticas dos laços de histerese.	68

Figura 5.8	Ajuste da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica com todos os pontos e com pontos selecionados.	69
5.8(a)	Curva $\sigma\varepsilon$ cíclica no primeiro quadrante.	69
5.8(b)	Curva $\sigma\varepsilon$ cíclica em escala aproximada.	69
Figura 5.9	Ajustes da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica aos laços de histerese.	70
Figura 5.10	Ajuste da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica para pontos criados.	72
5.10(a)	Chute 1.	72
5.10(b)	Chute 2.	72
5.10(c)	Chute 3.	72
5.10(d)	Chute 4.	72
Figura 5.11	Ajustes de Dowling a pontos com $-1,1 < R < 1$ (esquerda) e com $R < 1$ (direita) medidos em testes de fadiga da liga Al 7076-T651.	74
Figura 5.12	Ajustes de Li et. al a pontos com $-1,1 < R < 1$ (esquerda) e com $R < 1$ (direita) medidos em testes de fadiga da liga Al 7076-T651.	74
Figura 5.13	Ajustes de Nihei et. al a pontos com $-1,1 < R < 1$ (esquerda) e com $R < 1$ (direita) medidos em testes de fadiga da liga Al 7076-T651.	75
Figura 5.14	Ajuste de Coffin-Manson e MEP para AlMg 4.5 Mn.	77
Figura 5.15	Ajuste de SWT e Dowling para AlMg 4.5 Mn.	78
Figura 5.16	Ajuste de Li e Nihei para AlMg 4.5 Mn.	78
Figura 5.17	Ajuste de Coffin-Manson para SAE 1015.	79
Figura 5.18	Ajuste de Li para SAE 1015.	79
Figura 5.19	Ajuste de SWT para Al 7075-T651.	80
Figura 5.20	Ajuste de Nihei para Al 7075-T651.	80
Figura 5.21	Ajuste de Coffin-Manson para Incoloy 901.	82
Figura 5.22	Ajuste de Morrow elastoplástico para CC 450 SS Soln Ann.	82
Figura 5.23	Ajuste de SWT para CC 450 SS Soln Ann.	83
Figura 5.24	Ajuste de Dowling CC 450 SS Soln Ann.	83
Figura 5.25	Ajuste de SWT por seções Al 2024-T4.	85
Figura 5.26	Ajuste de Li por seções Al 2024-T4.	85
Figura 5.27	Ajuste de Morrow elastoplástico por seções Al 2024-T4.	86
Figura 5.28	Ajuste de Morrow elastoplástico por seções aço 17 Mn-CrMo 33.	86
Figura 5.29	Ajuste da equação SN proposta para GSMnNi 63.	88
Figura 5.30	Verificação da importância do uso de ψ_0 para 42 CrMo 4.	89
Figura 5.31	Verificação da importância do uso de ψ_0 para 49 MnVs 3.	89
Figura 5.32	Distribuição de Weibull e Normal de $\log(k_e)$ para SAE 1015.	90
5.32(a)	Função de distribuição de probabilidade.	90
5.32(b)	Função de probabilidade acumulada.	90
Figura 5.33	Distribuição de Weibull e Normal de $\log(k_e)$ para Al 7075-T651.	91
5.33(a)	Função de distribuição de probabilidade.	91
5.33(b)	Função de probabilidade acumulada.	91

Figura 5.34	Diferentes confiabilidades ajustadas por Weibull 3P para Al 7075-T651.	93
Figura 5.35	Comparação dos fatores de confiabilidade de Shigley, Normal e Weibull para o aço 50 CrMo 4, para diferentes confiabilidades desejadas.	94
Figura 5.36	Curvas de confiabilidade de Shigley, Normal e Weibull com $R_r = 99,9\%$ para o aço 50 CrMo 4.	94
Figura 5.37	Comparação dos fatores de confiabilidade de Shigley com os logarítmicos propostos assumindo Normal e Weibull, para o Al 2024-T4.	95
Figura 5.38	Curvas de confiabilidade de Shigley, e os logarítmicos propostos assumindo Normal e Weibull, com $R_r = 99,9\%$ para o Al 2024-T4.	95
Figura 5.39	Modelos propostos para o caso em que $\beta > 3,6$, para o aço SAE 1045.	97
	5.39(a) Função de densidade de probabilidade.	97
	5.39(b) Curvas de confiabilidade de $R_r = 99,9\%$.	97
Figura 5.40	Modelos propostos para o caso em que $\beta \approx 3,6$, para o ferro fundido 120-90-02.	98
	5.40(a) Função de densidade de probabilidade.	98
	5.40(b) Curvas de confiabilidade de $R_r = 99,9\%$.	98
Figura 5.41	Modelos propostos para o caso em que $\beta < 3,6$, para o aço Ck 45.	99
	5.41(a) Função de densidade de probabilidade.	99
	5.41(b) Curvas de confiabilidade de $R_r = 99,9\%$.	99

Lista de tabelas

Tabela 2.1	Fatores de confiabilidade (k_e) assumindo distribuição normal com coeficiente de variação constante 8% [16].	33
Tabela 4.1	Composição química da liga Al 6351-T6	50
Tabela 4.2	Propriedades mecânicas medidas da liga Al 6351-T6	54
Tabela 4.3	Número de corpos de prova por amplitude de deformação nos ensaios εN .	55
Tabela 5.1	Parâmetros de Coffin-Manson para ajustes separando as partes elástica e plástica.	61
Tabela 5.2	Parâmetros de Coffin-Manson para ajustes pela curva.	62
Tabela 5.3	Parâmetros de Ramberg-Osgood diferentes ajustes.	68
Tabela 5.4	Parâmetros de Ramberg-Osgood para pontos criados.	71
Tabela 5.5	Coefficientes de determinação para os ajustes dos pontos medidos em testes de fadiga sob $-1,1 < R < 1$ e $R < 1$ da liga Al 7075-T651.	75
Tabela 5.6	Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de Coffin-Manson.	76
Tabela 5.7	Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de SWT.	76
Tabela 5.8	Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de Dowling.	76
Tabela 5.9	Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de Li et. al.	77
Tabela 5.10	Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de Nihei et. al.	77
Tabela 5.11	Coefficientes de determinação em ε .	80
Tabela 5.12	Coefficientes de determinação em N.	81
Tabela 5.13	Coefficientes de determinação em parâmetro de dano.	81
Tabela 5.14	Coefficientes de determinação em N^* .	81
Tabela 5.15	Coefficientes de determinação por seção do Al 2024-T4.	84
Tabela 5.16	Coefficientes de determinação por seção do aço 17 Mn-CrMo 33.	84
Tabela 5.17	Parâmetros de diferentes materiais para equação SN.	87
Tabela 5.18	Coefficientes de confiabilidade para a equação SN.	88
Tabela 5.19	Parâmetros de Weibull ajustados para $\log(k_e)$ para diferentes materiais.	92
Tabela 5.20	Fatores de confiabilidade para modelo normal proposto.	92
Tabela 5.21	Fatores de confiabilidade para modelo Weibull 3P proposto.	93

Lista de símbolos

- b – Expoente elástico da curva de Coffin-Manson
- c – Expoente plástico da curva de Coffin-Manson
- COV – Coeficiente de variação
- E – Módulo de elasticidade [GPa]
- H – Coeficiente de encruamento monotônico [MPa]
- H_c – Coeficiente de encruamento cíclico [MPa]
- h – Expoente de encruamento monotônico
- h_c – Expoente de encruamento cíclico
- k_e – Fator de confiabilidade
- N – Número de ciclos até a falha; vida à fadiga
- N* – Vida equivalente para o caso de tensão média nula
- R – Razão da tensão ($\sigma_{min}/\sigma_{max}$)
- R_r – Confiabilidade (%)
- r^2 – Coeficiente de determinação normalizado
- S_L – Limite de fadiga do material [MPa]
- S_U – Resistência à ruptura [MPa]
- S_Y – Resistência ao escoamento [MPa]
- w – Expoente de ajuste modelo Li
- x_0 – Fator de localização da distribuição de probabilidade
- β – Fator de forma da distribuição de probabilidade de Weibull
- δ – Fator de forma da distribuição de probabilidade da log-normal
- $\Delta\varepsilon/2$ – Amplitude de deformação [mm/mm]
- ε_{el} – Componente elástica da deformação
- ε_{pl} – Componente plástica da deformação
- ε_c – Coeficiente plástico de Coffin-Manson

- η – Expoente de ajuste do modelo Nihei
- γ – Expoente de ajuste do modelo Walker/Dowling
- λ – Termo de amortecimento positivo de Levenberg-Marquardt
- ν – Fator de correção de Levenberg-Marquardt
- μ – Média aritmética
- ψ – Parâmetro de dano da curva SN
- ψ_0 – Limite de fadiga para o parâmetro de dano
- θ – Fator de escala da distribuição de probabilidade
- σ_{ar} – Amplitude de tensão equivalente completamente reversa [MPa]
- σ_m – Componente média da tensão [MPa]
- σ_{max} – Tensão máxima [MPa]
- σ_c – Coeficiente elástico de Coffin-Manson [MPa]
- $\hat{\sigma}$ – Desvio Padrão

Lista de abreviaturas

CP – Corpo de prova

DW – Dowling/Walker

EP – Elastoplástico

FDP – Função de densidade de probabilidade

FDA – Função de distribuição acumulada

LM – Levenberg-Marquardt

MEP – Morrow Elastoplástico

*"O mundo está cheio de coisas óbvias que
ninguém jamais observa."*

Arthur Conan Doyle, *Sherlock Holmes: o Cão dos Baskerville*.

1 Introdução

Como as falhas estruturais podem levar estruturas ou equipamentos à perda total ou parcial de seu funcionamento, a função primordial da engenharia estrutural é evitá-las, ou ao menos controlar as suas consequências quando elas forem inevitáveis. Em especial, as falhas por fadiga podem gerar graves acidentes, uma vez que o evento terminal desse tipo de falha progressiva pode ocorrer de forma súbita e sem avisos prévios evidentes. Fadiga é um tipo de mecanismo de falha mecânica induzida primariamente pela atuação repetida de cargas alternadas ou variáveis ao longo do tempo, ainda que gerem tensões muito menores do que a resistência ao escoamento do material. Cargas de fadiga podem causar a iniciação de trincas que podem se propagar de forma estável e paulatina, até gerar a eventual fratura final da estrutura.

1.1 Motivação

Mesmo que o problema das falhas por fadiga possa ser bem modelado, é evidente que as propriedades mecânicas usadas no projeto estrutural necessário para evitá-las devem refletir o verdadeiro comportamento do material sob cargas reais de serviço. Entretanto, muitas vezes não é dada a devida importância para a obtenção desses valores. Um exemplo disso é a norma ASTM E606, que não só permite a medição de curvas εN por meio de testes de um número pequeno demais de corpos de prova (CPs), como também não especifica como os dados medidos devem ser ajustados às equações usadas para modelá-las. Esses ajustes, quando não calculados da maneira correta, podem até mesmo levar à previsão de resultados fisicamente absurdos.

Outro ponto muito importante na previsão de falhas por fadiga é como considerar os efeitos das cargas médias, muito comuns na prática, os quais não podem ser desprezados, porque as falhas por fadiga sempre dependem de duas forças motrizes. No caso da iniciação das trincas sob cargas elásticas (macroscopicamente), essas duas forças são as gamas $\Delta\sigma$ e os picos σ_{max} das tensões de serviço. No caso da iniciação sob cargas elastoplásticas elas são as gamas $\Delta\varepsilon$ das deformações e σ_{max} . No caso da propagação das trincas, essas duas forças motrizes são as gamas ΔK e os picos K_{max} dos fatores de

intensidade de tensões. Todavia, os modelos SN tradicionais de iniciação de trincas por fadiga usam a amplitude $\sigma_a = \Delta\sigma/2$ e a média $\sigma_m = \sigma_{max} - \sigma_a$ das tensões, enquanto os modelos εN costumam usar a amplitude ε_a ou a gama $\Delta\varepsilon$ das deformações, e σ_{max} ou σ_m para quantificar o efeito das duas forças motrizes da fadiga. Qualquer que seja a notação, o que não se pode é desprezar o efeito de σ_{max} ou σ_m na quantificação do dano por fadiga. Como os vários modelos que quantificam esses efeitos podem gerar previsões de vida (o número de ciclos necessário para iniciar uma trinca por fadiga) muito distintas, isso torna ainda mais importante a tarefa de ajustar adequadamente os seus vários parâmetros aos dados experimentais.

Por fim, projetos à fadiga, em particular aqueles feitos para vidas muito longas (ou “infinitas”, os mais comuns na prática) precisam usar fatores de confiabilidade adequados, para que não seja necessário especificar valores muito altos para os seus coeficientes de segurança. Entretanto, os vários fatores de confiabilidade usados na literatura tradicional em geral *não* são ajustados adequadamente aos dados experimentais que supostamente deveriam quantificar, como será mostrado ao longo deste texto.

1.2

Objetivos

O objetivo principal desta dissertação é propor e implementar ajustes otimizados de equações e modelos de previsão da iniciação de trincas por fadiga aos dados experimentais que os suportam. Todos os ajustes aqui propostos são realizados usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt. Eles incluem equações de tensão versus deformação e deformação versus vida usadas na metodologia εN clássica. Também são estudados vários modelos para quantificar os efeitos da carga média segundo a metodologia εN , e é proposta uma nova equação SN que usa uma lei de potência para considerar os efeitos das cargas médias e do limite de fadiga S_L nas previsões de vida à fadiga longas.

Outro objetivo deste trabalho é comparar os ajustes aqui desenvolvidos com ajustes pré-programados em ferramentas computacionais genéricas, como o *MatLab* por exemplo. Além disso, é feita uma verificação sobre o desempenho dos diferentes modelos de carga média para o método εN . Por fim, são avaliados os efeitos do assim chamado fator de confiabilidade em modelos SN , quando ele é calculado a partir de diferentes premissas.

1.3

Organização da dissertação

O presente trabalho contém 6 capítulos: após este capítulo introdutório, o Capítulo 2 descreve a fundamentação teórica usada na dissertação, abordando desde os conceitos iniciais de trincamento por fadiga baseados nas metodologias εN e SN , até os conceitos de análise estatística. No Capítulo 3 estão apresentadas as implementações dos algoritmos de Levenberg-Marquardt para o ajuste de cada equação abordada. O Capítulo 4 descreve a execução dos ensaios εN da liga de alumínio Al 6351-T6. O Capítulo 5 analisa os resultados dos ajustes não só para a liga de alumínio testada, mas também para outros dados obtidos na literatura. Por fim, o Capítulo 6 lista as conclusões da dissertação e sugestões para trabalhos futuros. Nos apêndices, encontram-se os algoritmos desenvolvidos segundo LM para cada um dos ajustes propostos.

2

Fundamentos teóricos

2.1

Trincas de fadiga

Fadiga é um tipo de falha mecânica causada primariamente pela aplicação repetida de cargas alternadas. Quando as tensões geradas por essas cargas no ponto crítico da peça excedem o limite de fadiga, elas geram dano. O acúmulo deste dano ao longo do serviço da peça pode levar à iniciação de uma trinca, a qual pode se propagar paulatinamente até a eventual fratura da peça.

A iniciação da trinca depende dos detalhes da geometria e do material no ponto crítico da peça, e da história das tensões e deformações que nele atua. Por outro lado, a propagação paulatina e estável da trinca por fadiga depende da história dos fatores de intensidade de tensão que solicitam a peça em serviço. Tanto a iniciação quanto a propagação podem ocorrer sob tensões macroscopicamente elásticas, mas o dano à fadiga é sempre associado a tensões e deformações elastoplásticas, ainda que só em um nível microscópico. Além disso, mesmo quando as cargas nominais são elásticas, a fratura final da peça pode ser brusca e instantânea [1].

Portanto, o processo de dano por fadiga pode ser dividido em dois estágios que são comandados por mecanismos diferentes. Primeiro, a iniciação de trincas. Em seguida, a propagação da trinca crítica dominante até a fratura final da peça. A separação desses dois estágios está ilustrada na Figura 2.1.

A iniciação típica das trincas por fadiga envolve a movimentação cíclica de discordâncias que tendem a se agrupar gradativamente, formando bandas de deslizamento persistentes na superfície da peça. À medida que essas bandas crescem, elas podem formar extrusões e intrusões superficiais, gerando assim microtrincas no ponto crítico da peça. Eventualmente, a microtrinca dominante passa a concentrar todo o dano, e pode crescer até causar a falha final da peça por fratura brusca. Após o término da fase de iniciação (quando ela é gerada por cisalhamento como esquematizado na Figura 2.1), a trinca muda de direção para diminuir a perda de energia por atrito entre as suas faces, e passa a crescer na direção perpendicular à máxima tensão normal, com taxas de propagação da/dN primariamente controladas pela gama ΔK e pelo pico K_{max} do fator de

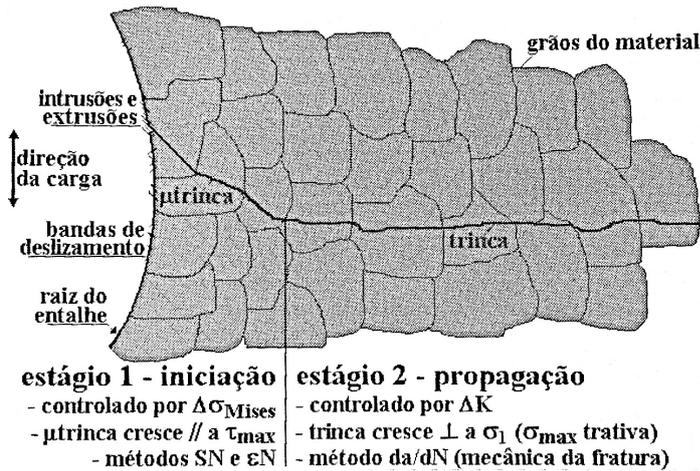


Figura 2.1: Esquema de uma trinca de fadiga [1].

intensidade de tensão. A propagação de trincas por fadiga é sempre gradual e pode durar muitos milhões de ciclos até atingir o seu tamanho crítico a_c quando o fator de intensidade de tensão máximo K_{max} atinge a tenacidade da peça K_c , levando a peça à fratura [1].

É necessário usar abordagens diferentes para modelar os vários estágios da trinca. Assim, as metodologias tradicionais de dimensionamento à fadiga são divididas em três grupos, os chamados método SN , ϵN e da/dN , sendo os dois primeiros usados para modelar a iniciação e o terceiro para a propagação.

O método SN ou de Wöhler, o mais simples, é muito usado na prática. Ele correlaciona as gamas $\Delta\sigma$ e os picos σ_{max} das tensões elásticas cíclicas que atuam no ponto crítico da peça com o número de ciclos N necessário para iniciar uma trinca de fadiga. Todavia, por considerar apenas tensões macroscópicas lineares elásticas, esse método em princípio só deve ser usado para evitar o trincamento à fadiga ou para prever vidas longas, as quais são associadas a cargas nominais menores do que a resistência ao escoamento cíclico do material.

O método ϵN ou de Coffin-Manson é mais complicado que o SN , mas pode ser usado para prever qualquer vida de iniciação. Ele correlaciona as gamas das deformações elastoplásticas cíclicas $\Delta\epsilon$ e σ_{max} que atuam no ponto crítico da peça com o número de ciclos N necessário para iniciar uma trinca por fadiga. Suas grandes vantagens são poder prever qualquer vida de iniciação, quantificar explicitamente os efeitos plásticos induzidos por sobrecargas, bem como as tensões residuais geradas por descargas após escoamentos localizados, em particular em raízes de entalhes. Entretanto, esse método necessita de equações não-lineares e sem solução analítica, não triviais de serem resolvidas, além de, assim como o método SN , não reconhecer a presença de trincas.

Finalmente, o método da/dN ou de Paris, baseado em conceitos da

mecânica da fratura linear elástica, é usado para prever a vida residual à fadiga de estruturas trincadas e a fratura da peça trincada, que ocorre quando o fator de intensidade de tensão máximo atinge a tenacidade da peça. A taxa da/dN de propagação da trinca depende da gama e do pico do fator de intensidade de tensões, que por sua vez dependem das gamas de tensões, do comprimento de trinca e da geometria da estrutura trincada [1].

2.2

Método εN

O dimensionamento à fadiga pelo método εN é baseado na solução simultânea de quatro equações semi-empíricas, a saber: (i) Uma regra $\Delta\sigma \times \Delta\varepsilon$ para modelar e quantificar os laços de histerese elastoplásticos que solicitam o ponto crítico da peça; (ii) Uma regra de concentração de tensões e deformações para converter as solicitações nominais nas gamas que atuam no ponto crítico; (iii) Uma regra $\Delta\varepsilon \times N$ ou $(\Delta\varepsilon, \sigma_{max}) \times N$ para relacionar a vida de iniciação com a gama de deformação $\Delta\varepsilon$ e a tensão máxima σ_{max} aplicada no ponto crítico; e, por fim, (iv) uma regra de acúmulo de dano à fadiga, para analisar cargas de gama variável ao longo do tempo [2].

2.2.1

Relação entre tensão e deformação

Quando o material é solicitado na presença de deformações plásticas, os eventos de carga e descarga seguem caminhos diferentes no plano $\sigma \times \varepsilon$ uma vez que essas deformações são irreversíveis. Esses caminhos geram laços de histerese EP, que são a causa primária do dano à fadiga. Logo, é indispensável que se possa descrever precisamente a sequência das gamas $\Delta\sigma$ e $\Delta\varepsilon$ geradas pela história de carga no ponto crítico da peça ao modelá-lo.

Para quantificar o encruamento gerado por plasticidade pode-se usar o modelo de Ramberg-Osgood, que supõe que qualquer deformação pode ser dividida em duas partes, uma elástica e outra plástica. A parte elástica é suposta linear com o módulo de elasticidade E , e o encruamento da parte plástica é modelado como parabólico, vide Equação (2-1), em que H é o coeficiente de encruamento e h é o expoente de encruamento de Ramberg-Osgood. O esquema que ilustra a ideia básica desse modelo está apresentada na Figura 2.2 [2].

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H}\right)^{1/h} \quad (2-1)$$

Na modelagem εN tradicional assume-se que o comportamento dos laços de histerese seja simétrico na tração e na compressão e se estabilize após alguns

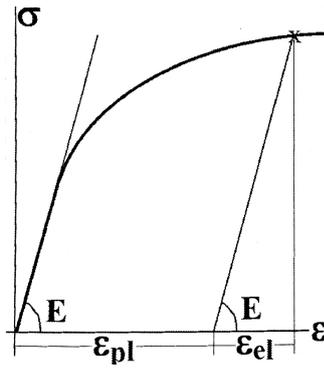


Figura 2.2: Esquema do modelo proposto por Ramberg-Osgood monotônico [1].

ciclos. Assumir essa estabilização é importante, pois durante o amolecimento ou encruamento cíclicos, cada solicitação precisa ser descrita por uma equação nova de tensão versus deformação. A forma da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica é similar à da monotônica, e também pode ser modelada separando a gama da deformação em uma parte elástica linear e uma parte plástica parabólica. A Equação (2-2) usa o modelo de Ramberg-Osgood para descrever a curva $\sigma\varepsilon$ cíclica, onde H_c é o coeficiente de encruamento cíclico, h_c é o expoente de encruamento cíclico e a função $sign$ é usada para descrever também a parte compressiva da curva:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl} = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H_c}\right)^{1/h_c} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + sign(\sigma_a) \left|\frac{\sigma_a}{H_c}\right|^{1/h_c} \quad (2-2)$$

O método εN usa principalmente curvas $\Delta\sigma\Delta\varepsilon$ do laço para relacionar as gamas de tensões e deformações das histórias de carga, já que eventos plásticos geram deformações permanentes e efeitos de memória na peça. Essas curvas também podem ser descritas pelo modelo de Ramberg-Osgood e usando as propriedades H_c e h_c da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica, conforme Equação (2-3). A Figura 2.3 mostra a diferença entre a curva $\sigma\varepsilon$ cíclica seguida pelo material virgem durante o primeiro evento de carga, e a curva do $\Delta\sigma\Delta\varepsilon$ laço, seguida nos eventos subsequentes:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_{el}}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_{pl}}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2H_c}\right)^{1/h_c} \quad \text{ou} \quad \Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + 2 \cdot \left(\frac{\Delta\sigma}{2H_c}\right)^{1/h_c} \quad (2-3)$$

2.2.2

Relação entre deformação e vida à fadiga

A relação entre a amplitude de deformação EP e a vida à fadiga foi proposta em 1957 por Coffin e Manson em trabalhos separados. Ela se baseia

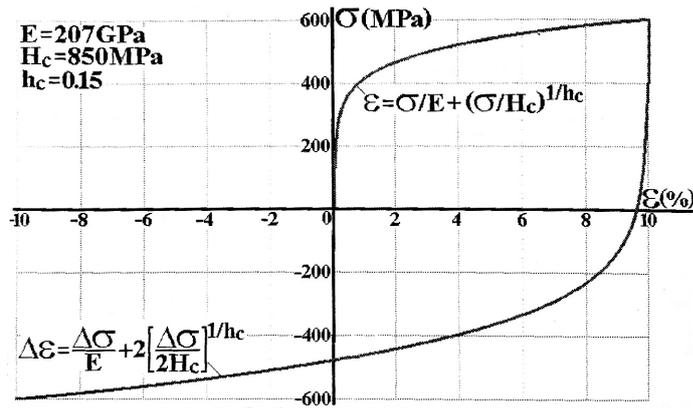


Figura 2.3: Curva $\sigma\epsilon$ cíclica e $\Delta\sigma\Delta\epsilon$ do laço [1].

na soma de parcelas de deformação elástica e plástica que são correlacionadas com o número de ciclos N ou de reversões $2N$ por duas funções parabólicas, as quais geram duas retas em um gráfico log-log $\Delta\epsilon/2 \times 2N$, i.e.:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon_{el}}{2} + \frac{\Delta\epsilon_{pl}}{2} = \frac{\sigma_c}{E} (2N)^b + \epsilon_c (2N)^c \quad (2-4)$$

onde E é o módulo de elasticidade, σ_c é o coeficiente e b o expoente da parte elástica de Coffin-Manson, ϵ_c é o coeficiente e c o expoente da parte plástica de Coffin-Manson. Esses parâmetros são propriedades do material que devem ser medidos experimentalmente. Essa relação está ilustrada na Figura 2.4.

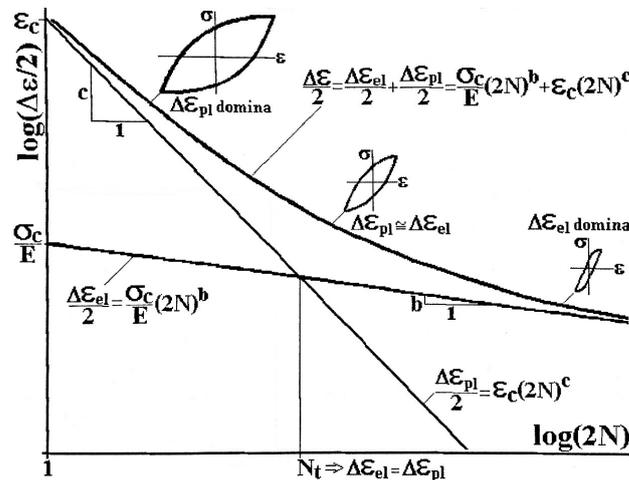


Figura 2.4: Esquema da curva de Coffin-Manson [1].

Note na Figura 2.4 que a curva de Coffin-Manson (em log-log) tende para a reta de deformação plástica em vidas muito curtas, indicando que a deformação elástica é desprezível frente à plástica. Analogamente, a curva de Coffin-Manson tende para a reta elástica em vidas muito longas. Note também que a relação entre deformação e vida à fadiga se assemelha à curva de Wöhler

quando a parte plástica é desprezada. Para converter $\Delta\varepsilon_{el}/2 = \sigma_c(2N)^b/E$ de Coffin-Manson em $N \cdot S^B = C$ de Wöhler, basta usar $B = -1/b$ e $C = (\sigma_c)^{-1/b}/2$.

Todavia, há uma região sob efeito dos dois tipos de deformação, elástica e plástica, em vidas intermediárias próximas da vida de transição N_t na Figura 2.4, quando $\Delta\varepsilon_{el} = \Delta\varepsilon_{pl}$, na interseção das retas elástica e plástica.

Por fim, note que se os ajustes das gamas elástica e plástica dos laços de Ramberg-Osgood e da curva de Coffin-Manson fossem perfeitos, apenas 4 dos 6 parâmetros h_c , H_c , σ_c , b , ε_c e c seriam independentes. Assumindo essa hipótese, então seria possível igualar as deformações elástica e plástica de ambas as equações, resultando em $\Delta\sigma/2 = \sigma_c(2N)^b$ e $(\Delta\sigma/2H_c)^{1/h_c} = \varepsilon_c(2N)^c$, logo [2]:

$$\left[\frac{\sigma_c}{H_c}\right]^{1/h_c} = \varepsilon_c(2N)^c \Rightarrow H_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c^{h_c}} \text{ e } h_c = \frac{b}{c} \quad (2-5)$$

Entretanto, como Coffin-Manson e Ramberg-Osgood são apenas relações empíricas e não leis físicas, não se pode esperar elas sejam sempre obedecidas na prática. Então, a medição experimental dessas propriedades não deve ser negligenciada em favor de algebrismos. Em vez disso, essa relação mostra-se pertinente apenas para averiguar a validade de propriedades medidas, indicando possível erro de medição se essa relação gerar valores muito diferentes dos obtidos experimentalmente, ou então que o material em estudo não é bem descrito pelos modelos adotados.

2.2.3

Efeito de carga média

A iniciação de uma trinca por fadiga depende primariamente da gama de solitação $\Delta\varepsilon$ ou $\Delta\sigma$. Todavia, a vida à fadiga também pode ser influenciada pela componente média da carga. Um simples exemplo da relevância desse problema é o fato de cargas médias trativas apresentarem caráter prejudicial à vida do componente, uma vez que elas tendem a abrir a trinca. Em contrapartida, cargas médias compressivas tendem a ser benéficas à vida à fadiga, já que agem no sentido de fechar a trinca.

Sendo assim, quando uma estrutura mecânica é solicitada com uma tensão média σ_m diferente de zero, essa variável deve ser levada em consideração. Todavia, Coffin-Manson não considera esses efeitos, e outros modelos devem ser usados para prever o dano causado por cargas com $\sigma_m \neq 0$.

2.2.3.1

Modelos clássicos

O efeito de carga média é tradicionalmente quantificado no método εN por três modelos. Esses modelos são denominados Morrow elástico (EL), Morrow elastoplástico (EP) e Smith-Watson-Topper (SWT), [2], i.e.:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_c - \sigma_m}{E} (2N)^b + \varepsilon_c (2N)^c \quad (\text{Morrow EL}) \quad (2-6)$$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_c - \sigma_m}{E} (2N)^b + \varepsilon_c \left(\frac{\sigma_c - \sigma_m}{\sigma_c} \right)^{c/b} (2N)^c \quad (\text{Morrow EP}) \quad (2-7)$$

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_c^2}{E \cdot \sigma_{max}} (2N)^{2b} + \frac{\sigma_c \cdot \varepsilon_c}{\sigma_{max}} (2N)^{b+c} \quad (\text{SWT}) \quad (2-8)$$

Esses modelos são usados na prática, mas podem gerar previsões de vida muito diferentes sob cargas reais de serviço. Morrow EL considera o efeito da carga média apenas nas deformações elásticas, sendo o mais simples. Morrow EP pode colapsar todos os pontos medidos em diferentes σ_m em uma única curva $\Delta\varepsilon/2 \times N^*$, onde $N^* = N(1 - \sigma_m/\sigma_c)^{1/b}$. Entretanto, na prática Morrow EP tende a superestimar a influência dessa tensão média em vida muito curtas ($\Delta\varepsilon_{pl} \gg \Delta\varepsilon_{el}$). Finalmente, há o modelo SWT [3] que, apesar de bastante popular, sobretudo para ligas de alumínio, gera previsões não conservativas quando $\sigma_m < 0$ e sempre prevê vidas infinitas para $\sigma_{max} \leq 0$ [2, 4].

2.2.3.2

Modelos tipo Walker

Um modelo mais recente que também quantifica o efeito da carga média foi proposto por Dowling em 2004 [5, 6], inspirado no modelo de Walker para propagação de trincas. Ele generaliza a ideia proposta pelo modelo de SWT, adicionando um parâmetro ajustável γ para melhor descrever a vida à iniciação. [2]

Esse modelo parte da definição de uma amplitude de tensão especial, quando a carga média é zero, ou a amplitude de tensão é completamente reversa. A ideia tem base na relação elástica de Coffin-Manson. Segundo Dowling [5, 6], uma vez que $\sigma_m = 0$, então σ_{ar} pode ser descrita conforme a Equação (2-9), análoga à equação de Basquin, ou seja:

$$\sigma_{ar} = \sigma_c (2N)^b \quad (2-9)$$

Essa amplitude de tensão equivalente para o caso de $\sigma_m = 0$ pode ser obtida de diferentes formas, segundo a Equação (2-10). Cada método de carga

média apresenta uma função $f(\sigma_a, \sigma_m)$ diferente, podendo ser aplicados os métodos de Morrow e SWT inclusive.

$$\sigma_{ar} = f(\sigma_a, \sigma_m) \quad (2-10)$$

Entretanto, nesse trabalho será dado maior destaque ao método baseado nas equações propostas por Walker para propagação de trincas [7] (vide equação (2-11)), onde R é a razão entre as tensões mínima e máxima aplicadas em cada ciclo, i.e.:

$$\sigma_{ar} = \sigma_{max}^{1-\gamma} \cdot \sigma_a^\gamma = \sigma_{max} \left(\frac{1-R}{2} \right)^\gamma \quad (2-11)$$

Para quantificar o efeito da carga média na relação de vida e deformação, é usada a vida equivalente N^* na amplitude com $\sigma_m = 0$, obtida a partir das Equações (2-12) e (2-14). Em seguida, é possível relacionar a deformação com a vida equivalente na relação de Coffin-Manson (2-4), vide Equação (2-15)

$$\sigma_{ar} = f(\sigma_a, \sigma_m) = \sigma_a \frac{f(\sigma_a, \sigma_m)}{\sigma_a} = \sigma_c (2N)^b \quad (2-12)$$

$$\sigma_a = \sigma_c \left[2N \left(\frac{\sigma_a}{f(\sigma_a, \sigma_m)} \right)^{1/b} \right]^b = \sigma_c (2N^*)^b \quad (2-13)$$

$$N^* = N \left(\frac{\sigma_a}{f(\sigma_a, \sigma_m)} \right)^{1/b} \quad (2-14)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma_c}{E} (2N^*)^b + \varepsilon_c (2N^*)^c \quad (2-15)$$

Todavia, essa relação deformação-vida depende do modelo de carga média usado. Para a relação de Walker, descrita na Equação (2-11), é possível calcular a vida equivalente (N_w^*) pela Equação (2-16) ao aplicar a Equação (2-11) em (2-14)

$$N_w^* = N \left(\frac{1-R}{2} \right)^{(1-\gamma)/b} \quad (2-16)$$

As Equações (2-16) e (2-15) podem então ser combinadas, de forma a obter uma única relação de vida e deformação, como apresentado na Equação (2-17). Finalmente, essa relação final modela os efeitos de carga média usando a razão R , em vez da σ_m adotada nos modelos de Morrow:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\sigma_c}{E} \left(\frac{1-R}{2} \right)^{1-\gamma} (2N)^b + \varepsilon_c \left(\frac{1-R}{2} \right)^{c(1-\gamma)/b} (2N)^c \quad (2-17)$$

Um outro modelo baseado nas ideias de Walker foi proposto por J. Li *et al* em 2019 [8]. A ideia central deste modelo é usar a equação de tensão

de Walker (2-11) na equação deformação \times vida para quantificar o efeito da carga média. Partindo novamente da equação (2-9) na qual σ_{ar} é a amplitude de tensão equivalente ao caso completamente reverso $R = -1$. Igualando então a equação (2-9) com (2-11),

$$\sigma_{ar} = \sigma_{max}^{1-w} \sigma_a^w = \sigma_c (2N)^b \rightarrow \sigma_{max}^{(1-w)/w} \sigma_a = \sigma_c^{1/w} (2N)^{b/w} \quad (2-18)$$

Para a deformação, a Equação pode ser escrita conforme (2-19). De forma análoga, a parte plástica segue a Equação (2-20).

$$\sigma_{max}^{(1-w)/w} \sigma_a = \sigma_{max}^{(1-w)/w} \frac{\Delta \varepsilon_{el}}{2} E \rightarrow \sigma_{max}^{(1-w)/w} \frac{\Delta \varepsilon_{el}}{2} = \frac{\sigma_c^{1/w}}{E} (2N)^{b/w} \quad (2-19)$$

$$\sigma_{max}^{(1-w)/w} \sigma_a = \sigma_{max}^{(1-w)/w} H_c \left(\frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} \right)^{h_c} \quad (2-20)$$

Assumindo então que as amplitudes de deformação elástica e plástica de Coffin-Manson e Ramberg-Osgood se correlacionam perfeitamente, segundo Equação (2-5), é possível obter a equação da parte plástica em função das propriedades de Coffin-Manson, ou seja:

$$\sigma_{max}^{(1-w)/w} H_c \left(\frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} \right)^{h_c} = \sigma_{max}^{(1-w)/w} \frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} \times \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c^{b/c}} \left(\frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} \right)^{b/c-1} = \sigma_c^{1/w} (2N)^{b/w} \quad (2-21)$$

$$\sigma_{max}^{(1-w)/w} \frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} = \sigma_c^{1/w} (2N)^{b/w} \times \frac{\varepsilon_c^{b/c}}{\sigma_c} \left(\frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} \right)^{1-b/c} \quad (2-22)$$

Substituindo agora $\frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} = \varepsilon_c (2N)^c$, é possível obter:

$$\sigma_{max}^{(1-w)/w} \frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} = \sigma_c^{(1-w)/w} \varepsilon_c (2N)^{\frac{1-w}{w}b+c} \quad (2-23)$$

Usando as partes elástica e plástica obtidas nas Equações (2-19) e (2-23), é possível estabelecer uma relação entre deformação e vida, considerando o efeito de carga média a partir da soma dessas duas partes, i.e.:

$$\sigma_{max}^{\frac{1-w}{w}} \frac{\Delta \varepsilon}{2} = \sigma_{max}^{\frac{1-w}{w}} \left(\frac{\Delta \varepsilon_{el}}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} \right) = \frac{\sigma_c^{1/w}}{E} (2N)^{\frac{b}{w}} + \sigma_c^{\frac{1-w}{w}} \varepsilon_c (2N)^{\frac{1-w}{w}b+c} \quad (2-24)$$

O último modelo abordado neste trabalho é o proposto por M. Nihei *et al* em 1986 [9]. Esse modelo usa um parâmetro de dano para considerar o efeito da carga média no comportamento à fadiga baseado na tensão efetiva de

Erdogan e Roberts [10], análogo à Equação de σ_{ar} de Walker (2-11), conforme a seguinte expressão:

$$\sigma_{eff} = \sigma_a^\eta \cdot \sigma_{max}^{1-\eta} = \sigma_a \left(\frac{1-R}{2} \right)^{\eta-1} \quad (2-25)$$

Aplicando a Equação (2-25) nas equações propostas por SWT, é possível obtermos o parâmetro de dano (2-26) e a Equação de resistência à fadiga (2-27). Segundo os autores, a tensão efetiva, apesar de ter sido primariamente desenvolvida para efeitos de carga média em propagação de trincas, apresenta bons resultados para testes de iniciação de trincas por fadiga controlados pela tensão, ou seja:

$$P_{eff} = \sqrt{\sigma_a^\eta \cdot \sigma_{max}^{1-\eta} \cdot \varepsilon_a \cdot E} \quad (2-26)$$

$$\sqrt{\sigma_a^2 (2N)^{2b} + \sigma_c \cdot \varepsilon_c \cdot E (2N)^{b+c}} \quad (2-27)$$

Finalmente, é possível obter a relação entre deformação e vida, considerando o efeito da carga média, ao igualar as equações (2-26) e (2-27), segundo o modelo de Nihei (2-28):

$$\sigma_a^\eta \cdot \sigma_{max}^{1-\eta} \cdot \varepsilon_a = \frac{\sigma_c^2}{E} (2N)^{2b} + \sigma_c \cdot \varepsilon_c (2N)^{b+c} \quad (2-28)$$

2.3

Método SN

Como apresentado na introdução deste trabalho, o modelo *SN* é primariamente usado para prever vidas longas, associadas a cargas de menor amplitude, por meio da equação de Basquin (2-29), proposta em 1910, que relaciona amplitude de tensão com vida em ciclos de forma linear em uma escala log-log. Essa equação corresponde à parte elástica da equação de Coffin-Manson, e pode ser facilmente convertida para a tradicional equação de Wöhler:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma_c (2N)^b \quad (2-29)$$

Entretanto, essa relação não deve ser usada para cargas com tensão média não nula, situação comum na prática. Há muitos métodos para modelar o efeito de carga média no comportamento à fadiga de metais. Os métodos mais simples, e.g. Gerber, Goodman e Soderberg, usam a resistência à ruptura S_U ou a resistência ao escoamento S_Y e o limite de fadiga do material S_L [11]. É possível relacionar esses diversos parâmetros de dano com o número de ciclos em vidas longas a partir de uma função genérica de lei de potência mostrada na Equação (2-30), na qual ψ é o parâmetro de dano, κ e α são constantes do material e ψ_0 é o limite de fadiga para o parâmetro em questão. A figura 2.5

apresenta essa função característica para qualquer parâmetro de dano escolhido [12, 13]:

$$\psi = \kappa \cdot (2N)^\alpha + \psi_0 \quad (2-30)$$

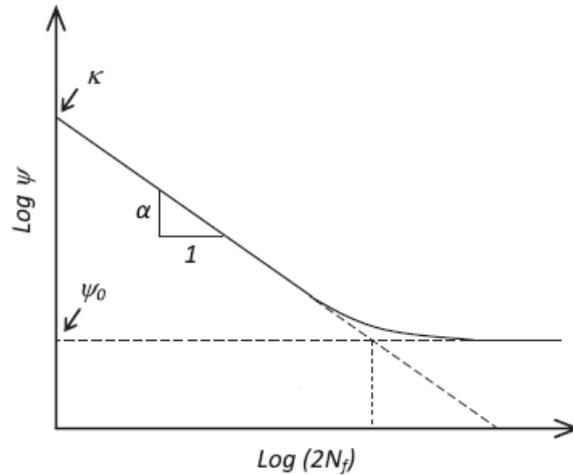


Figura 2.5: Esquema da função genérica de lei de potência [12].

Esse parâmetro de dano pode ser usado para considerar o efeito de carga média por meio de modelos de Gerber, Goodman, Soderberg e SWT, por exemplo. Entretanto, optou-se por analisar essa equação a partir da proposta de Walker, por se acreditar que tal modelagem seja mais versátil. Sendo assim, usamos a Equação (2-11) como parâmetro de dano ψ da função de lei de potência e obtemos a equação (2-31):

$$\sigma_a^\gamma \cdot \sigma_{max}^{1-\gamma} = \kappa \cdot (2N)^\alpha + \psi_0 \quad (2-31)$$

2.4

Análise estatística

2.4.1

Distribuições de probabilidade

Distribuições de probabilidade quantificam o comportamento de fenômenos aleatórios. Há diversas distribuições padronizadas, discretas ou contínuas, que são úteis na engenharia. A seguir, serão apresentadas as distribuições normal, log-normal e de Weibull.

2.4.1.1

Distribuição normal ou Gaussiana

A distribuição normal, ou Gaussiana, é a distribuição de probabilidade mais usada. Ela é caracterizada por sua simetria em torno da média e por

descrever variáveis aleatórias definidas no intervalo $-\infty < x < \infty$. Sua função de densidade de probabilidade (FDP), $p(x)$, em função da sua média, μ_x e do seu desvio padrão, $\hat{\sigma}_x$, é dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\hat{\sigma}_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\hat{\sigma}_x} \right)^2 \right] \quad (2-32)$$

A Figura 2.6 ilustra essa FDP. Como qualquer FDP, a área sob a função é unitária, representando 100% dos eventos. Entretanto, o formato da função pode variar de acordo com o desvio padrão. Distribuições mais baixas e largas possuem $\hat{\sigma}$ alto, enquanto as mais estreitas possuem $\hat{\sigma}$ baixo.

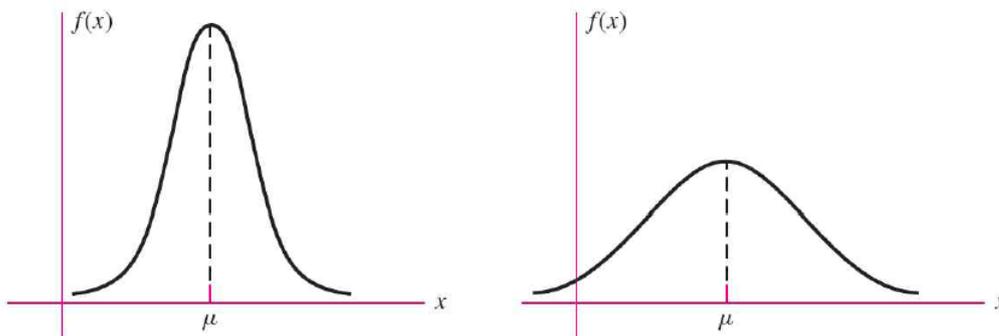


Figura 2.6: Exemplos de distribuições normais [14].

2.4.1.2

Distribuição log-normal

Essa distribuição é obtida quando o logaritmo natural de uma variável aleatória segue uma FDP normal. Em sua versão de três parâmetros, sua FDP pode ser expressa por:

$$p(x) = \frac{1}{(x - x_0) \sqrt{2\pi\delta^2}} \exp \left[-\frac{(\ln(x - x_0) - \theta)^2}{2\delta^2} \right] \quad (2-33)$$

onde θ é chamado de fator de escala, δ de fator de forma e x_0 é o fator de localização, que translada a curva no eixo horizontal. A média dessa distribuição e seu desvio padrão são dados por:

$$\mu_L = x_0 + \exp(\theta + \delta^2/2) \quad (2-34)$$

$$\hat{\sigma}_L = \exp(2\theta + \delta^2) \cdot [\exp(\delta^2) - 1] \quad (2-35)$$

2.4.1.3 Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull é muito versátil, em geral é assimétrica (com valores diferentes entre média e mediana). Ela é muito útil na engenharia, em particular na modelagem de resistências ou de vidas à fadiga, por representar bem a distribuição dessa variável. Quando utilizando 3 parâmetros (x_0 , θ e β), sua função de densidade de distribuição, $p(x)$ e função de probabilidade acumulada, $P(x)$ são dadas por:

$$p(x) = \left[\frac{\beta}{\theta} \left(\frac{x - x_0}{\theta} \right)^{\beta-1} \right] \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{\theta} \right)^{\beta} \right] \Rightarrow P(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{\theta} \right)^{\beta} \right] \quad (2-36)$$

A média dessa distribuição é dada por $\mu = \Gamma(1/\beta) \cdot (\theta/\beta) + x_0$, sendo $\Gamma(x)$ a função gamma (que é tabelada), onde $\theta > 0$ é o valor característico, $x_0 < \theta$ é o valor mínimo da FDP e β o parâmetro de forma. Na Figura 2.7 é possível ver o efeito de β na distribuição. Já sua variância é $\hat{\sigma}^2 = 2\Gamma(2/b) - \Gamma(1/\beta)^2/b \cdot (\theta^2/b)$. Quando $x_0 = 0$, a distribuição é chamada de Weibull 2 parâmetros [15].

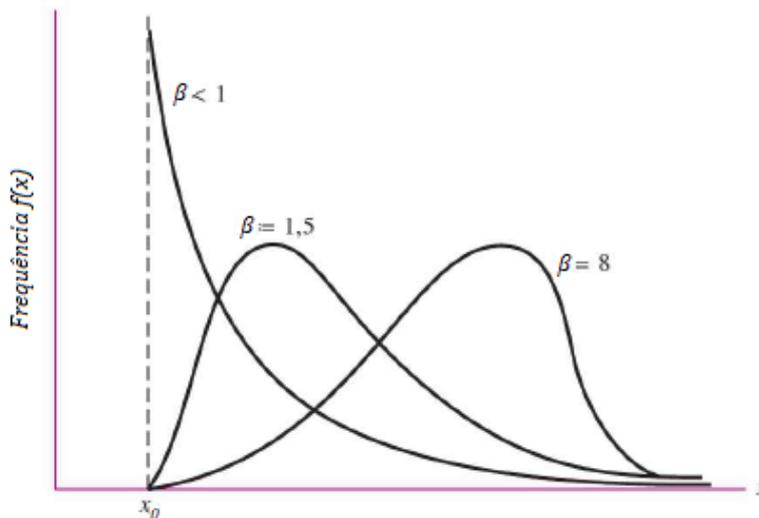


Figura 2.7: Efeito de β na distribuição de Weibull [14].

2.4.2 Fator de confiabilidade

Fazer um projeto para uma dada confiabilidade implica em aceitar uma (em geral pequena) dada probabilidade de falha durante o serviço do componente estrutural. Essa é uma forma elegante de projetar para contornar o

conservadorismo associado a coeficientes de segurança muito altos, considerando de forma explícita a estatística da dispersão das propriedades mecânicas e das cargas de serviço. Na ausência de dados estatísticos específicos, pode-se usar um fator de confiabilidade k_e representativo na estimativa das resistências à fadiga.

Pode-se gerar valores para k_e em diferentes níveis de confiabilidade, como mostrado na Tabela 2.1, a partir de premissas razoáveis, por exemplo assumindo que a resistência do material segue uma distribuição normal e que seu coeficiente de variação para qualquer vida é constante e vale 8%. Por outro lado, para um caso geral, é possível calcular o fator de confiabilidade a partir da Equação (2-37), na qual Φ é a FDP das propriedades do material, R_r é a confiabilidade e COV o coeficiente de variação [16], ou seja:

$$k_e = 1 - |\Phi^{-1}(1 - R_r)| COV \quad (2-37)$$

Tabela 2.1: Fatores de confiabilidade (k_e) assumindo distribuição normal com coeficiente de variação constante 8% [16].

Confiabilidade (R_r)	Fator de confiabilidade (k_e)
50%	1,000
90%	0,897
95%	0,868
97,5%	0,843
99%	0,814
99,9%	0,753
99,99%	0,702
99,999%	0,659

Assim, pode-se obter valores para k_e alterando as premissas apresentadas anteriormente. Isso porque o coeficiente de variação de 8% usado tanto por Shigley [14], quanto pela norma alemã FKM, pode ser muito conservador ou não para certos conjuntos de dados. Além disso, a distribuição normal, a FDP assumida para obtenção da Tabela 2.1 e usada também pela FKM e por Shigley, pode ser substituída por FDPs mais versáteis como a de Weibull. Este trabalho compara o desempenho dos fatores de confiabilidade usado por Shigley e FKM com fatores obtidos a partir de duas outras condições, uma considerando FDPs normais e outra a FDP de Weibull três parâmetros, ambas permitindo que os COV variem, i.e. sejam maiores para vidas mais longas e menores para mais curtas, como observado na prática.

2.4.3

Ajuste por mínimos quadrados

É recorrente na prática a necessidade de se determinar não só a expressão matemática da curva que ajusta um conjunto de dados experimentais, mas também os valores dos parâmetros da curva que melhor os ajusta, usando para isso o método dos mínimos quadrados.

A concepção geral desse método pode ser melhor entendida a partir da Figura 2.8. Nela estão ilustrados um conjunto de pontos e a curva que os ajusta. Nota-se que, para determinado x_n , haverá uma diferença de valor entre o y_n e o valor da curva de ajuste naquele ponto $C(x_n)$. Essa diferença (d_n) será chamada de desvio, erro ou resíduo, podendo ter valor positivo, negativo ou zero.

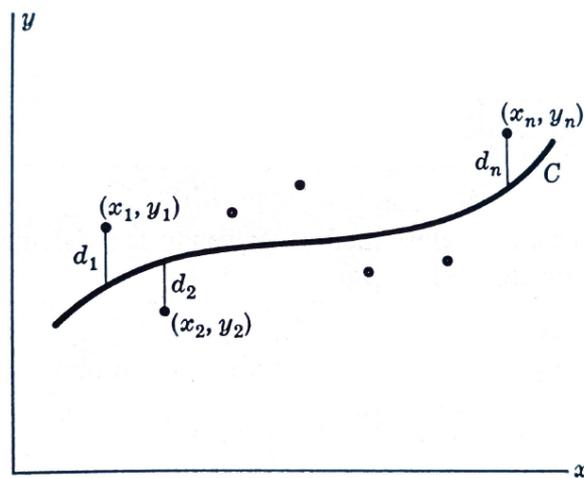


Figura 2.8: Esquema do método de mínimos quadrados [17].

Sendo assim, é possível utilizar os valores de d_n para avaliar o quão bem uma curva ajusta os pontos experimentais. Mais precisamente, quanto menor for o valor da soma dos quadrados dos erros, melhor a curva ajusta o conjunto de dados. Então, pode-se definir que, de todas as curvas que se aproximam de determinado conjunto de pontos, a curva que possui $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2$ mínimo é a melhor curva ajustadora. Uma curva com esta propriedade é chamada portanto de curva de regressão de mínimos quadrados ou simplesmente curva de mínimos quadrados [17].

2.4.3.1

Levenberg-Marquardt

Quando o problema de ajuste por mínimos quadrados não é linear em relação aos seus parâmetros, ele deve ser resolvido a partir de um algoritmo

iterativo que deve reduzir a soma dos quadrados dos erros entre a curva proposta para o modelo e os vários pontos experimentais ou dados numéricos, por meio de uma sequência de atualizações de valores dos parâmetros do modelo. O algoritmo de Levenberg-Marquardt (LM) usa mínimos quadrados para ajustar qualquer modelo, sobretudo para curvas que não podem ser facilmente linearizadas [18, 19].

O método de Levenberg-Marquardt trabalha com a combinação de dois algoritmos de minimização, *gradient descent* e Gauss-Newton. No método de *gradient descent*, a soma dos erros quadráticos é reduzida ao atualizar os parâmetros na direção de máximo declive (*steepest descent*). Já no método Gauss-Newton, a soma dos erros quadrados é reduzida assumindo que a função de mínimos quadrados é localmente quadrática em relação aos parâmetros e encontrando o mínimo dela. Assim, LM tende a se comportar mais como *gradient descent* quando valor dos parâmetros está longe do valor ótimo e mais como Gauss-Newton quando o valor dos parâmetros está próximo do valor ótimo [20].

Sendo um método de mínimos quadrados, o algoritmo de LM deve buscar um vetor $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_n]^T$ contendo os n parâmetros constantes da função a ser ajustada $f(x_i, \mathbf{p})$ de forma a minimizar a soma dos erros quadráticos. Portanto, para um conjunto de m pontos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$, visa-se a minimização da soma $S(\mathbf{p})$ dada na Equação (2-38) por meio da obtenção do vetor \mathbf{p} ótimo, ou seja:

$$S(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \mathbf{p})]^2 \quad (2-38)$$

Por ser um procedimento iterativo, o algoritmo de LM precisará de uma estimativa inicial \mathbf{p} . De modo geral, é preciso que o valor inicial de \mathbf{p} seja próximo da solução final. A cada iteração, os valores das propriedades em \mathbf{p} são atualizados, fazendo $\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \mathbf{q}$. Para que o vetor \mathbf{q} seja encontrado a cada iteração, as funções $f(x_i, \mathbf{p}_{k+1})$ são aproximadas por suas linearizações [15], ou seja:

$$f(x_i, \mathbf{p} + \mathbf{q}) \cong f(x_i, \mathbf{p}) + \mathbf{J}(x_i, \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} \quad (2-39)$$

onde \mathbf{J} é o Jacobiano de f em relação a \mathbf{p} , definido por:

$$\mathbf{J}(x_i, \mathbf{p}) = \left[\frac{\partial f(x_i, \mathbf{p})}{\partial p_1}, \frac{\partial f(x_i, \mathbf{p})}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial f(x_i, \mathbf{p})}{\partial p_n} \right] \quad (2-40)$$

Como f é um campo escalar, $\mathbf{J}(x_i, \mathbf{p})$ resulta no gradiente de f em relação a \mathbf{p} . Ademais, quando a soma dos erros, $S(\mathbf{p})$, é mínima, o gradiente de S em relação a \mathbf{q} é igual a zero. Assim, ao aplicar $S(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ partindo da equação (2-38) e fazendo $\partial S / \partial \mathbf{q} = 0$, obtém-se a Equação (2-41), da qual pode ser obtido \mathbf{q} :

$$\sum_{i=1}^m \{\mathbf{J}(x_i, \mathbf{p})^T \cdot \mathbf{J}(x_i, \mathbf{p})\} \cdot \mathbf{q} = \sum_{i=1}^m \{\mathbf{J}(x_i, \mathbf{p})^T \cdot [y_i - f(x_i, \mathbf{p})]\} \quad (2-41)$$

$$\mathbf{q} = \left[\sum_{i=1}^m \mathbf{J}(x_i, \mathbf{p})^T \cdot \mathbf{J}(x_i, \mathbf{p}) \right]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^m \mathbf{J}(x_i, \mathbf{p})^T \cdot [y_i - f(x_i, \mathbf{p})] \quad (2-42)$$

Posto isso, é possível criar uma matriz $\mathbf{J}_t(\mathbf{p})$ de dimensões $m \times n$ que possui os Jacobianos dos m pontos a serem ajustados, bem como um vetor de erro \mathbf{e}_t com m linhas. Esses novos componentes estão descritos na Equação (2-43). Dessa forma, a obtenção de \mathbf{q} poderá ser simplificada posteriormente.

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{p}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{J}(x_1, \mathbf{p}) \\ \mathbf{J}(x_2, \mathbf{p}) \\ \vdots \\ \mathbf{J}(x_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{e}_t(\mathbf{p}) \equiv \begin{bmatrix} y_1 - f(x_1, \mathbf{p}) \\ y_2 - f(x_2, \mathbf{p}) \\ \vdots \\ y_m - f(x_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

Dessa forma, é possível obter \mathbf{q} em função de $\mathbf{J}_t(\mathbf{p})$ e \mathbf{e}_t para problemas simples a partir do método de Gauss-Newton, dado por:

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_t \right)^{-1} \mathbf{J}_t^T \cdot \mathbf{e}_t \equiv \text{pinv}(\mathbf{J}_t) \cdot \mathbf{e}_t \quad (2-44)$$

onde $\text{pinv}(\mathbf{J}_t)$ é a pseudoinversa de \mathbf{J}_t .

Assim, é obtido o vetor de correção \mathbf{q} a cada iteração, que deverá ser somado a estimativa \mathbf{p} . O algoritmo segue esse procedimento até que o vetor \mathbf{q} seja menor que uma tolerância pré-estipulada.

Nota-se que, se f variar linearmente com \mathbf{p} , então \mathbf{J} independe de \mathbf{p} , levando o algoritmo a convergir em apenas uma iteração. Esse é o caso de muitas equações amplamente utilizadas na fadiga, sobretudo quando representadas em log-log e com algumas mudanças adequadas de variáveis. Mesmo quando a equação permanece não linear após essas transformações, o uso da escala log-log facilita a convergência em poucas iterações.

Entretanto, isso não se aplica para equações muito não lineares, nas quais é necessário que se use o método clássico de Levenberg-Marquardt. Nesses casos, sugere-se que a soma dos quadrados dos erros $S(\mathbf{p})$ seja monitorada a cada iteração. Esse valor sempre deverá reduzir. Caso ele aumente, é necessário introduzir um termo de amortecimento positivo λ na pseudoinversa, conforme Equação (2-45), sendo \mathbf{I} a matriz identidade $n \times n$, i.e.:

$$\mathbf{q} = \left(\mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_t + \mathbf{I}\lambda \right)^{-1} \mathbf{J}_t^T \cdot \mathbf{e}_t \quad (2-45)$$

O fator λ é ajustado a cada iteração quando necessário. Se a redução de $S(\mathbf{p})$ for muito alta, deve-se usar valores menores de λ , para evitar a

instabilidade do algoritmo. Em contrapartida, se $S(\mathbf{p})$ reduz muito lentamente, então λ é aumentado para acelerar a convergência [15].

Marquardt [19] recomenda que o amortecimento seja introduzido no algoritmo do cálculo numérico do vetor \mathbf{q} através da Equação (2-45) usando um valor inicial $\lambda = \lambda_0 > 0$ e um fator de correção ν . A tentativa inicial deve usar um fator de amortecimento λ/ν para calcular \mathbf{q} . Se $S(\mathbf{p}+\mathbf{q}) < S(\mathbf{p})$, então \mathbf{q} é somado com \mathbf{p} , é escolhido como o novo fator de amortecimento, e parte-se para uma nova iteração. Caso contrário, então é calculado um novo \mathbf{q} , usando apenas λ como fator de amortecimento e novamente são comparadas as somas dos desvios quadráticos. Se $S(\mathbf{p}+\mathbf{q}) < S(\mathbf{p})$, então \mathbf{q} é somado com \mathbf{p} , o valor de λ é mantido e parte-se para nova iteração. Entretanto, se não houver redução da soma dos desvios quadráticos em nenhum dos dois casos anteriores, então \mathbf{q} é recalculado com fator de amortecimento $\lambda \cdot \nu^k$, para valores de k cada vez maiores, até que $S(\mathbf{p}+\mathbf{q}) < S(\mathbf{p})$. Quando isso ocorre, \mathbf{q} é somado com \mathbf{p} , o valor de $\lambda = \lambda \cdot \nu^k$ é escolhido como novo fator de amortecimento, e assim, é possível avançar para uma nova iteração. Esse procedimento é proposto para que a estabilidade do algoritmo seja garantida [15].

2.4.3.2

Trust-region

Os métodos *trust-region* são uma classe importante de métodos iterativos para resolver problemas de otimização não lineares. Eles tiveram origem nos trabalhos de Levenberg e Marquardt para resolver problemas não lineares de mínimos quadrados, envolvendo sistemas de equações não-lineares, problemas de estimativas não-lineares, otimização restrita e irrestrita, otimização não diferenciável e grande otimização de escala [21].

A ideia básica dos métodos *trust-region* é aproximar a função desejada f por uma função mais simples \tilde{f} dentro de uma região chamada de confiança, ou *trust-region*, onde essa aproximação é suficientemente boa. A partir de então, busca-se o mínimo da função aproximada dentro da região de confiança V . Assim, a ideia básica desses métodos é dada por:

$$\min\{\tilde{f}(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in V\} \quad (2-46)$$

É usual que essa aproximação seja feita por uma função quadrática a partir da expansão da série de Taylor, vide Equação (2-47), na qual ∇f é o gradiente da função e \mathbf{H} é a matriz Hessiana. Tal processo pode ser interpretado como o método de Newton.

$$f(\mathbf{x}) \approx \tilde{f} = f(\mathbf{c}) + \nabla f(\mathbf{c})^T(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T \mathbf{H}(\mathbf{c})(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \quad (2-47)$$

Todavia, essa aproximação só é válida para a hipersfera $\|x - c\|_2 \leq \delta$, sendo δ é um parâmetro que define o tamanho da região de confiança. Isso porque a aproximação (2-47) será exata no ponto c , mas irá se degradar até que não seja mais confiável. À vista disso, teremos um subproblema de encontrar um mínimo da função aproximada a cada iteração. Esse ponto será então atualizado até que haja uma convergência, achando um mínimo global.

A aplicação desse método de otimização para solução do ajuste de dados experimentais de equações não lineares acontece justamente na definição de métodos de mínimos quadrados. Nesse caso, a função f a ser ajustada será a soma dos erros quadráticos em cada ponto, equivalente a $S(\mathbf{p})$ de Levenberg-Marquardt.

No próximo capítulo, as técnicas propostas de ajuste de dados baseadas em LM são apresentadas para cada modelo específico discutido.

3

Implementação dos algoritmos de Levenberg-Marquardt

A seguir, serão expostos os desenvolvimentos lógicos e matemáticos usados na elaboração do programa de ajuste de pontos segundo o método LM para cada uma das equações apresentadas. Esses programas foram implementados no *software Matlab* e podem ser consultados nos apêndices desta dissertação.

3.1

Ajustes de modelos clássicos do método εN

3.1.1

Coffin-Manson

A forma mais simples de se ajustar a equação de Coffin-Manson para um conjunto de pontos experimentais é separando as partes elásticas e plásticas da Equação (2-4), e fazendo algumas conversões para facilitar a execução do algoritmo. Como explicado na Seção 4.2, são obtidos valores de vida N , ou reversões $2N$, amplitude de tensão ($\Delta\sigma/2$) e amplitude de deformação ($\Delta\varepsilon/2$) a partir dos ensaios εN . Então, pode-se obter a amplitude de deformação elástica a partir da Equação (3-1) e a plástica a partir da Equação (3-2).

$$\frac{\Delta\varepsilon_{el}}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} \quad (3-1)$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_{pl}}{2} = \frac{\Delta\varepsilon}{2} - \frac{\Delta\varepsilon_{el}}{2} \quad (3-2)$$

São feitos então dois ajustes para obter as propriedades de Coffin- Manson usando dois algoritmos de LM. As deformações elásticas e plásticas formam duas retas em escala log-log. Assim, usando a função logaritmo natural $\ln(\cdot)$ nas equações, obtém-se dois polinômios de grau 1, como mostrado em (3-3) e (3-4). Essa conversão faz com que as $f_{el}(x_i, \mathbf{p}_{el})$ e $f_{pl}(x_i, \mathbf{p}_{pl})$ variem linearmente com o vetor de parâmetros constantes \mathbf{p} no algoritmo LM:

$$\frac{\Delta\varepsilon_{el}}{2} = \frac{\sigma_c}{E}(2N)^b \rightarrow \ln\left(\frac{\Delta\varepsilon_{el}}{2}\right) = b \cdot \ln(2N) + \ln\left(\frac{\sigma_c}{E}\right) \quad (3-3)$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_{pl}}{2} = \varepsilon_c(2N)^c \rightarrow \ln\left(\frac{\Delta\varepsilon_{pl}}{2}\right) = c \cdot \ln(2N) + \ln(\varepsilon_c) \quad (3-4)$$

Logo, LM deve ajustar $f_{el}(x_i, \mathbf{p}_{el}) = p_{el}(1) \cdot x_i + p_{el}(2)$ e $f_{pl}(x_i, \mathbf{p}_{pl}) = p_{pl}(1) \cdot x_i + p_{pl}(2)$, onde $\mathbf{p}_{el} = [b \ \ln(\sigma_c/E)]^T$ e $\mathbf{p}_{pl} = [c \ \ln(\varepsilon_c)]^T$ e os pontos experimentais são $x_i = \ln(2N_i)$, $y_{i_{el}} = \ln(\Delta\varepsilon_{el_i}/2)$ e $y_{i_{pl}} = \ln(\Delta\varepsilon_{pl_i}/2)$.

O próximo passo será montar a matriz \mathbf{J}_t e vetor \mathbf{e}_t da Equação (2-43). A matriz \mathbf{J}_t é coincidentemente a mesma para partes elástica e plástica, conforme apresentado nas Equações (3-5) e (3-6). Os vetores \mathbf{e}_t elástico e plástico são diferentes, já que medem os resíduos de seus respectivos componentes, e estão apresentados na Equação (3-7).

$$\mathbf{J}_{t_{el}} = \begin{bmatrix} \partial f_{el}(x_1, \mathbf{p}_{el})/\partial b & \partial f_{el}(x_1, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln(\sigma_c/E) \\ \partial f_{el}(x_2, \mathbf{p}_{el})/\partial b & \partial f_{el}(x_2, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln(\sigma_c/E) \\ \vdots & \vdots \\ \partial f_{el}(x_m, \mathbf{p}_{el})/\partial b & \partial f_{el}(x_m, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln(\sigma_c/E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$\mathbf{J}_{t_{pl}} = \begin{bmatrix} \partial f_{pl}(x_1, \mathbf{p}_{pl})/\partial c & \partial f_{pl}(x_1, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\varepsilon_c) \\ \partial f_{pl}(x_2, \mathbf{p}_{pl})/\partial c & \partial f_{pl}(x_2, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\varepsilon_c) \\ \vdots & \vdots \\ \partial f_{pl}(x_m, \mathbf{p}_{pl})/\partial c & \partial f_{pl}(x_m, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\varepsilon_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$\mathbf{e}_{t_{el}} = \begin{bmatrix} y_1 - b \cdot x_1 - \ln(\sigma_c/E) \\ y_2 - b \cdot x_2 - \ln(\sigma_c/E) \\ \vdots \\ y_m - b \cdot x_m - \ln(\sigma_c/E) \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_{t_{pl}} = \begin{bmatrix} y_1 - c \cdot x_1 - \ln(\varepsilon_c) \\ y_2 - c \cdot x_2 - \ln(\varepsilon_c) \\ \vdots \\ y_m - c \cdot x_m - \ln(\varepsilon_c) \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Por fim, deve-se obter a o vetor de correção \mathbf{q} a partir da Equação (2-44) e somá-lo com o vetor \mathbf{p} . Todavia, as matrizes $\mathbf{J}_{t_{el}}$ e $\mathbf{J}_{t_{pl}}$ não dependem dos parâmetros dos vetores \mathbf{p}_{el} e \mathbf{p}_{pl} . Portanto, o algoritmo converge em uma única iteração, como discutido anteriormente.

3.1.2 Ramberg-Osgood

Como para a equação de Coffin- Manson, LM para a curva de Ramberg-Osgood também é bastante simplificado após algumas transformações logarítmicas. Entretanto, para a equação de Ramberg-Osgood não é necessário separar a parte elástica da plástica, uma vez que os parâmetros a serem ajustados estão todos na parte plástica da equação, assumindo claro que o valor do módulo de elasticidade E já é conhecido..

A equação usada para ajustar os pontos experimentais é a curva $\sigma\varepsilon$ cíclica da Equação (2-2). A partir dela, são feitos alguns algebrismos para obter um

polinômio de primeiro grau a ser usado em LM, vide (3-8):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H_c}\right)^{1/h_c} \\ \sigma &= H_c \cdot \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right)^{h_c} \\ \ln(\sigma) &= h_c \cdot \ln\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E}\right) + \ln(H_c)\end{aligned}\tag{3-8}$$

Assim, LM deve ajustar a função $f(x_i, \mathbf{p}) = p(1) \cdot x_i + p(2)$, onde o vetor de parâmetros é $\mathbf{p} = [h_c \ \ln(H_c)]^T$ e os pontos a serem ajustados são descritos pelas transformações $y_i = \ln(\sigma_i)$ e $x_i = \ln(\varepsilon_i - \sigma_i/E)$.

Na sequência, deve-se montar a matriz \mathbf{J}_t e o vetor \mathbf{e}_t . A matriz \mathbf{J}_t é similar às matrizes (3-5) e (3-6) de Coffin-Manson, já que esse caso também se refere a um polinômio de primeiro grau. A matriz \mathbf{J}_t e o vetor \mathbf{e}_t usados em LM para Ramberg-Osgood são dados por:

$$\mathbf{J}_t = \begin{bmatrix} \partial f(x_1, \mathbf{p})/\partial h_c & \partial f(x_1, \mathbf{p})/\partial \ln(H_c) \\ \partial f(x_2, \mathbf{p})/\partial h_c & \partial f(x_2, \mathbf{p})/\partial \ln(H_c) \\ \vdots & \vdots \\ \partial f(x_m, \mathbf{p})/\partial h_c & \partial f(x_m, \mathbf{p})/\partial \ln(H_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix}\tag{3-9}$$

$$\mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} y_1 - h_c \cdot x_1 - \ln(H_c) \\ y_2 - h_c \cdot x_2 - \ln(H_c) \\ \vdots \\ y_m - h_c \cdot x_m - \ln(H_c) \end{bmatrix}\tag{3-10}$$

Desse modo, pode-se obter o vetor \mathbf{q} a partir da Equação (2-44). Então, o vetor \mathbf{q} é somado à estimativa inicial de \mathbf{p} . Como novamente a matriz \mathbf{J}_t não depende dos parâmetros do vetor \mathbf{p} , o algoritmo converge em apenas uma iteração e sempre para o mesmo resultado, independentemente da estimativa inicial, que portanto pode ser nula sem perda de generalidade.

3.2

Ajustes de modelos εN contendo efeito de carga média

3.2.1

SWT

Há dois enfoques para o ajuste da equação de Smith-Watson-Topper (SWT). O mais usual envolve utilizar em SWT os 4 parâmetros de Coffin-Manson ajustados para experimentos com tensão média nula, cuja caracterís-

tica é garantir que SWT priorizará esses pontos em detrimento dos demais. O enfoque alternativo envolve recalibrar os 4 parâmetros de SWT a partir de todos os dados experimentais disponíveis, incluindo os casos de tensão média nula e não-nula. Este enfoque é adotado neste trabalho pois resulta no melhor ajuste dos pontos da amostra, dando igual importância para todos eles.

Como no ajuste de Coffin-Manson (Seção 3.1.1) para o ajuste de SWT o procedimento mais simples também é separar a deformação elástica da plástica, usando dois ajustes de LM distintos, um para os parâmetros elásticos e outro para os parâmetros plásticos.

Novamente, o uso de escala logarítmica facilita muito o desenvolvimento do ajuste de LM. Com algumas manipulações algébricas, também é possível obter um polinômio de primeiro grau para o algoritmo, fazendo novamente que $f_{el}(x_i, \mathbf{p}_{el})$ e $f_{pl}(x_i, \mathbf{p}_{pl})$ variem linearmente com \mathbf{p} , vide Equações (3-11) e (3-12).

$$\frac{\Delta \varepsilon_{el}}{2} = \frac{\sigma_c^2}{E \cdot \sigma_{max}} (2N)^{2b} \rightarrow \ln \left(\frac{\Delta \varepsilon_{el}}{2} \cdot \sigma_{max} \right) = 2b \cdot \ln(2N) + \ln \left(\frac{\sigma_c^2}{E} \right) \quad (3-11)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} = \frac{\sigma_c \cdot \varepsilon_c}{\sigma_{max}} (2N)^{b+c} \rightarrow \ln \left(\frac{\Delta \varepsilon_{pl}}{2} \cdot \sigma_{max} \right) = (b+c) \cdot \ln(2N) + \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \quad (3-12)$$

Os parâmetros elásticos também aparecem na parte plástica de SWT, mas eles já terão sido obtidos ao resolver primeiro o problema elástico. A parte elástica é $f_{el}(x_i, \mathbf{p}_{el}) = p_{el}(1) \cdot x_i + p_{el}(2)$, com $x_i = \ln(2N_i)$, $y_i = \ln(\Delta \varepsilon_{el_i}/2 \cdot \sigma_{max_i})$ e os parâmetros $\mathbf{p}_{el} = [2b \ \ln(\sigma_c^2/E)]^T$. Já a parte plástica é $f_{pl}(x_i, \mathbf{p}_{pl}) = p_{pl}(1) \cdot x_i + p_{pl}(2)$, o mesmo x_i que a parte elástica, mas com $y_i = \ln(\Delta \varepsilon_{pl_i}/2 \cdot \sigma_{max_i})$ e os parâmetros $\mathbf{p}_{pl} = [(b+c) \ \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c)]^T$.

Então, LM usa duas matrizes \mathbf{J}_t similares, uma para a parte elástica e outra para a plástica, conforme mostrado em (3-13) e (3-14). Os vetores \mathbf{e}_t por sua vez estão apresentados na equação (3-15).

$$\mathbf{J}_{t_{el}} = \begin{bmatrix} \partial f_{el}(x_1, \mathbf{p}_{el})/\partial 2b & \partial f_{el}(x_1, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln(\sigma_c^2/E) \\ \partial f_{el}(x_2, \mathbf{p}_{el})/\partial 2b & \partial f_{el}(x_2, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln(\sigma_c^2/E) \\ \vdots & \vdots \\ \partial f_{el}(x_m, \mathbf{p}_{el})/\partial 2b & \partial f_{el}(x_m, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln(\sigma_c^2/E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$\mathbf{J}_{t_{pl}} = \begin{bmatrix} \partial f_{pl}(x_1, \mathbf{p}_{pl})/\partial(b+c) & \partial f_{pl}(x_1, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \\ \partial f_{pl}(x_2, \mathbf{p}_{pl})/\partial(b+c) & \partial f_{pl}(x_2, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \\ \vdots & \vdots \\ \partial f_{pl}(x_m, \mathbf{p}_{pl})/\partial(b+c) & \partial f_{pl}(x_m, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & 1 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

$$\mathbf{e}_{t_{el}} = \begin{bmatrix} y_1 - 2b \cdot x_1 - \ln(\sigma_c^2/E) \\ y_2 - 2b \cdot x_2 - \ln(\sigma_c^2/E) \\ \vdots \\ y_m - 2b \cdot x_m - \ln(\sigma_c^2/E) \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_{t_{pl}} = \begin{bmatrix} y_1 - (b+c) \cdot x_1 - \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \\ y_2 - (b+c) \cdot x_2 - \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \\ \vdots \\ y_m - (b+c) \cdot x_m - \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

Usando então as Jacobianas e os vetores \mathbf{e}_t é possível calcular os vetores \mathbf{q}_{el} e \mathbf{q}_{pl} a partir da equação (2-44). Por fim, os vetores \mathbf{q} elástico e plástico são somados às suas respectivas estimativas iniciais para obter os valores finais de \mathbf{p}_{el} e \mathbf{p}_{pl} . Novamente, o algoritmo converge em apenas uma iteração e independe da estimativa inicial (que portanto pode ser nula), já que as funções a serem ajustadas são polinômios de primeiro grau.

3.2.2 Dowling

Para esse ajuste não será usada a equação geral de Dowling baseada em Walker (2-17), mas sim o desenvolvimento sugerido no primeiro artigo dele [5]. Primeiro, são obtidas as propriedades elásticas e o parâmetro γ , para apenas depois serem obtidas as propriedades plásticas. O primeiro passo é simplificar a Equação (2-9) para facilitar o manuseio das equações no desenvolvimento do programa, ou seja:

$$\sigma_{ar} = A N^b, \text{ onde } A = \sigma_c 2^b \quad (3-16)$$

Aplicando então a Equação (2-9) em (2-11) com a modificação (3-16), obtém-se a Equação (3-17), que será ajustada por LM.

$$\sigma_{ar} = A N^b = \sigma_{max} \left(\frac{1-R}{2} \right)^\gamma$$

$$N = \left[\sigma_{max} \left(\frac{1-R}{2} \right)^\gamma \frac{1}{A} \right]^{1/b} \quad (3-17)$$

Novamente será aplicada uma transformação logarítmica como artifício para simplificar a equação a ser ajustada:

$$\underbrace{\ln(N)}_y = \underbrace{\frac{1}{b}}_{p_1} \underbrace{\ln(\sigma_{max})}_{x_1} + \underbrace{\frac{\gamma}{b}}_{p_2} \underbrace{\ln\left(\frac{1-R}{2}\right)}_{x_2} - \underbrace{\frac{1}{b} \ln(A)}_{p_3} \quad (3-18)$$

Isso gera uma equação do tipo $f(x_{1_i}, x_{2_i}, \mathbf{p}) = p(1) \cdot x_{1_i} + p(2) \cdot x_{2_i} - p(3)$, na qual o vetor de parâmetros é dado por $\mathbf{p} = [1/b \ \gamma/b \ 1/b \ \ln(A)]^T$ com dados de entrada $y_i = \ln(N)$ e $\mathbf{x}_i = [\ln(\sigma_{max_i}) \ \ln(\frac{1-R_i}{2})]^T$. Pode-se agora montar a matriz \mathbf{J}_t e o vetor \mathbf{e}_t como nas Equações (3-19) e (3-20).

$$\mathbf{J}_t = \begin{bmatrix} \partial f(x_{1_1}, x_{2_1}, \mathbf{p}) / \partial \frac{1}{b} & \partial f(x_{1_1}, x_{2_1}, \mathbf{p}) / \partial \frac{\gamma}{b} & \partial f(x_{1_1}, x_{2_1}, \mathbf{p}) / \partial \frac{1}{b} \ln A \\ \partial f(x_{1_2}, x_{2_2}, \mathbf{p}) / \partial \frac{1}{b} & \partial f(x_{1_2}, x_{2_2}, \mathbf{p}) / \partial \frac{\gamma}{b} & \partial f(x_{1_2}, x_{2_2}, \mathbf{p}) / \partial \frac{1}{b} \ln A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f(x_{1_m}, x_{2_m}, \mathbf{p}) / \partial \frac{1}{b} & \partial f(x_{1_m}, x_{2_m}, \mathbf{p}) / \partial \frac{\gamma}{b} & \partial f(x_{1_m}, x_{2_m}, \mathbf{p}) / \partial \frac{1}{b} \ln A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1_1} & x_{2_1} & -1 \\ x_{1_2} & x_{2_2} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1_m} & x_{2_m} & -1 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

$$\mathbf{e}_t = \begin{bmatrix} y_1 - \frac{1}{b} x_{1_1} - \frac{\gamma}{b} x_{2_1} + \frac{1}{b} \ln A \\ y_2 - \frac{1}{b} x_{1_2} - \frac{\gamma}{b} x_{2_2} + \frac{1}{b} \ln A \\ \vdots \\ y_m - \frac{1}{b} x_{1_m} - \frac{\gamma}{b} x_{2_m} + \frac{1}{b} \ln A \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

Na sequência é obtido o vetor \mathbf{q} a partir da equação (2-44). Por fim, o vetor \mathbf{q} é diretamente somado ao vetor da estimativa inicial, para obter os valores finais do vetor \mathbf{p} . Mais uma vez, o algoritmo converge em uma única iteração e não depende da estimativa inicial, já que a matriz \mathbf{J}_t não depende de nenhum dos parâmetros. Assim, ajusta-se os valores de γ , b_w , A e σ_{c_w} obtidos a partir da parte elástica do modelo de Dowling.

Em seguida são ajustados os parâmetros plásticos c e ε_c à parte plástica da Equação (2-15), de maneira idêntica ao ajuste de Coffin-Manson por LM. Porém, neste caso, o vetor \mathbf{x} será composto pelo logaritmo natural das reversões equivalentes $2N_i^*$.

Assim, são usados dois programas de LM que rodam em sequência para obter os cinco parâmetros da equação de Dowling baseada em Walker. O primeiro obtém as propriedades elásticas e γ do modelo. Em seguida calcula-se N^* a partir dos valores de γ , b_w e σ_{c_w} usando a Equação (2-16). Por fim, obtém-se as propriedades plásticas a partir de um outro código de LM para $\varepsilon_{a_{pl}} = \varepsilon_c (2N^*)^c$.

3.2.3

J. Li

Para o modelo de *et al* [8], deve-se novamente separar as partes elástica e plástica, realizando dois ajustes separados, repetindo a aplicação do logaritmo no formato inicial da equação, para facilitar a implementação do algoritmo. As Equações (3-21) e (3-22) apresentam as equações (2-19) e (2-20) após a aplicação do logaritmo natural.

$$\underbrace{\ln\left(\frac{\Delta\varepsilon_{el}}{2}\right)}_y = \underbrace{\frac{b}{w}}_{p_1} \cdot \underbrace{\ln(2N)}_{x_1} + \underbrace{\frac{w-1}{w}}_{p_2} \cdot \underbrace{\ln(\sigma_{max})}_{x_2} + \underbrace{\frac{1}{w}\ln(\sigma_c) - \ln(E)}_{p_3} \quad (3-21)$$

$$\underbrace{\ln\left(\frac{\Delta\varepsilon_{pl}}{2}\right)}_y = \underbrace{\left[\left(\frac{1-w}{w}\right)b + c\right]}_{p_1} \cdot \underbrace{\ln(2N)}_{x_1} + \underbrace{\ln(\varepsilon_c)}_{p_2} + \underbrace{\frac{w-1}{w} \cdot \ln(\sigma_{max})}_{x_2} + \underbrace{\frac{1-w}{w}\ln(\sigma_c)}_{\beta} \quad (3-22)$$

Assim as matrizes \mathbf{x} dtêm duas colunas com constantes α e β nas partes elástica e plástica. Os valores de b , σ_c e w obtidos no ajuste da parte elástica são usados depois no ajuste da parte plástica. A equação elástica é $f_{el}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = p_{el}(1) \cdot x_1 + p_{el}(2) \cdot x_2 + p_{el}(3) + \alpha$, com o vetor de parâmetros $\mathbf{p}_{el} = [b/w \ (w-1)/w \ \ln(\sigma_c)/w]^T$, e equação plástica é $f_{pl}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = p_{pl}(1) \cdot x_1 + p_{pl}(2) \cdot x_2 + \beta$ com vetor de parâmetros $\mathbf{p}_{pl} = \left[\frac{(1-w)b}{w} + c \quad \frac{w-1}{w}\ln(\sigma_{max})\right]^T$. Assim, pode-se montar as matrizes \mathbf{J}_t e os vetores \mathbf{e}_t das partes elástica e plástica, vide Equações (3-23) a (3-26).

$$\mathbf{J}_{t_{el}} = \begin{bmatrix} \partial f_{el}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{b}{w} & \partial f_{el}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{w-1}{w} & \partial f_{el}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{\ln(\sigma_c)}{w} \\ \partial f_{el}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{b}{w} & \partial f_{el}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{w-1}{w} & \partial f_{el}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{\ln(\sigma_c)}{w} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f_{el}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{b}{w} & \partial f_{el}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{w-1}{w} & \partial f_{el}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{el}) / \partial \frac{\ln(\sigma_c)}{w} \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & 1 \\ x_{12} & x_{22} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1m} & x_{2m} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{t_{pl}} = \begin{bmatrix} \partial f_{pl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{pl}) / \partial \left[\left(\frac{1-w}{w}\right)b + c\right] & \partial f_{pl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{pl}) / \partial \ln(\varepsilon_c) \\ \partial f_{pl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{pl}) / \partial \left[\left(\frac{1-w}{w}\right)b + c\right] & \partial f_{pl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{pl}) / \partial \ln(\varepsilon_c) \\ \vdots & \vdots \\ \partial f_{pl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{pl}) / \partial \left[\left(\frac{1-w}{w}\right)b + c\right] & \partial f_{pl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{pl}) / \partial \ln(\varepsilon_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{12} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1m} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

$$\mathbf{e}_{el} = \begin{bmatrix} y_1 - \frac{b}{w}x_{1_1} - \frac{w-1}{w} \cdot x_{2_1} - \frac{\ln(\sigma_c)}{w} + \ln(E) \\ y_2 - \frac{b}{w}x_{1_2} - \frac{w-1}{w} \cdot x_{2_2} - \frac{\ln(\sigma_c)}{w} + \ln(E) \\ \vdots \\ y_m - \frac{b}{w}x_{1_m} - \frac{w-1}{w} \cdot x_{2_m} - \frac{\ln(\sigma_c)}{w} + \ln(E) \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

$$\mathbf{e}_{pl} = \begin{bmatrix} y_1 - \left[\frac{(1-w)b}{w} + c \right] x_{1_1} - \ln(\varepsilon_c) - x_{2_1} - \frac{1-w}{w} \ln(\sigma_c) \\ y_2 - \left[\frac{(1-w)b}{w} + c \right] x_{1_2} - \ln(\varepsilon_c) - x_{2_2} - \frac{1-w}{w} \ln(\sigma_c) \\ \vdots \\ y_m - \left[\frac{(1-w)b}{w} + c \right] x_{1_m} - \ln(\varepsilon_c) - x_{2_m} - \frac{1-w}{w} \ln(\sigma_c) \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

Finalmente, LM obtém \mathbf{q} a partir da Equação (2-44) e o somá-lo ao vetor de parâmetros inicial, convergindo mais uma vez em apenas uma iteração, pelos mesmos motivos dos modelos anteriores.

3.2.4

Nihei

O algoritmo para o ajuste do modelo de Nihei *et al* [9] é bastante similar aos modelos anteriores. Novamente a equação é separada em partes elástica e parte plástica e aplicada em ambas a função logaritmo natural. Como este modelo tem um parâmetro ajustável do lado esquerdo da Equação (2-28), algumas manipulações algébricas para que este seja incorporado ao lado direito. As Equações (3-27) e (3-28) apresentam as partes elástica e plástica da equação de Nihei já no formato transformado usado por LM.

$$\underbrace{\ln\left(\sigma_{max} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{el}}{2}\right)}_y = \underbrace{2b}_{p_1} \cdot \underbrace{\ln(2N)}_{x_1} - \underbrace{\eta}_{p_2} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{max}}\right)}_{x_2} + \underbrace{\ln\left(\frac{\sigma_c^2}{E}\right)}_{p_3} \quad (3-27)$$

$$\underbrace{\ln\left(\sigma_{max} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{pl}}{2}\right)}_y = \underbrace{(b+c)}_{p_1} \cdot \underbrace{\ln(2N)}_{x_1} + \underbrace{\ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c)}_{p_2} - \underbrace{\eta \cdot \ln\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{max}}\right)}_{x_2} \quad (3-28)$$

O algoritmo da parte elástica tem uma matriz \mathbf{x} de duas colunas e três parâmetros ajustáveis. A parte plástica da matriz \mathbf{x} também tem duas entradas, mas apenas dois parâmetros ajustáveis, pois η , σ_c e b já foram ajustados na parte elástica. Assim, a equação elástica é $f_{el}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = p_{el}(1) \cdot x_1 - p_{el}(2) \cdot x_2 + p_{el}(3)$, com o vetor de parâmetros elásticos sendo $\mathbf{p}_{el} = [2b \ \eta \ \ln(\sigma_c^2/E)]^T$. A equação plástica é $f_{pl}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = p_{pl}(1) \cdot x_1 + p_{pl}(2) - x_2$, com $\mathbf{p}_{pl} = [b+c \ \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c)]^T$, e as matrizes \mathbf{J}_{el} , \mathbf{J}_{pl} e os vetores \mathbf{e}_{el} e \mathbf{e}_{pl} são

dados nas Equações (3-29) a (3-32).

$$\mathbf{J}_{t_{el}} = \begin{bmatrix} \partial f_{el}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{el})/\partial 2b & \partial f_{el}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{el})/\partial \eta & \partial f_{el}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln \frac{\sigma_c^2}{E} \\ \partial f_{el}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{el})/\partial 2b & \partial f_{el}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{el})/\partial \eta & \partial f_{el}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln \frac{\sigma_c^2}{E} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f_{el}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{el})/\partial 2b & \partial f_{el}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{el})/\partial \eta & \partial f_{el}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{el})/\partial \ln \frac{\sigma_c^2}{E} \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

$$= \begin{bmatrix} x_{1_1} & -x_{2_1} & 1 \\ x_{2_1} & -x_{2_2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1_m} & -x_{2_m} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{t_{pl}} = \begin{bmatrix} \partial f_{pl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{pl})/\partial(b+c) & \partial f_{pl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \\ \partial f_{pl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{pl})/\partial(b+c) & \partial f_{pl}(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \\ \vdots & \vdots \\ \partial f_{pl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{pl})/\partial(b+c) & \partial f_{pl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_{pl})/\partial \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1_1} & 1 \\ x_{1_2} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1_m} & 1 \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

$$\mathbf{e}_{t_{el}} = \begin{bmatrix} y_1 - 2b \cdot x_{1_1} + \eta \cdot x_{2_1} - \ln(\sigma_c^2/E) \\ y_2 - 2b \cdot x_{1_2} + \eta \cdot x_{2_2} - \ln(\sigma_c^2/E) \\ \vdots \\ y_m - 2b \cdot x_{1_m} + \eta \cdot x_{2_m} - \ln(\sigma_c^2/E) \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

$$\mathbf{e}_{t_{pl}} = \begin{bmatrix} y_1 - (b+c) \cdot x_{1_1} - \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) + x_{2_1} \\ y_2 - (b+c) \cdot x_{1_2} - \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) + x_{2_2} \\ \vdots \\ y_m - (b+c) \cdot x_{1_m} - \ln(\sigma_c \cdot \varepsilon_c) + x_{2_m} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

Usando a Equação (2-44) pode-se obter os os vetores \mathbf{q} das partes elástica e plástica. Somando então o vetor \mathbf{q} ao \mathbf{p} das partes elástica e plástica, obtém-se os valores dos parâmetros ajustados. O ajuste independe da estimativa inicial, e converge em apenas uma iteração, pois mais uma vez as matrizes \mathbf{J}_t não dependem de nenhum parâmetro de ajuste.

3.3

Ajuste do modelo SN para vidas longas

O último algoritmo de ajuste a ser implementado é para a relação entre amplitude de tensão e vida em vidas longas a partir da Equação (2-31). Essa equação é diferente das já apresentadas por não envolver separação das partes elástica e plástica, uma vez que nas vidas longas apenas a parte elástica é

relevante. Além disso, foi incluído um termo ajustável para definir o limite de fadiga, que dificulta o desenvolvimento do algoritmo, pois impede sua linearização por transformações logarítmicas.

Novamente, opta-se por aplicar o logaritmo natural na equação, para facilitar a obtenção de J_t e e_t . Assim se obtém a seguinte expressão:

$$\underbrace{\ln(\sigma_a)}_y + \underbrace{(1 - \gamma)}_{p_4} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_a}\right)}_{x_2} = \ln \left\{ \exp \left[\underbrace{\ln(\sigma_c)}_{p_1} + \underbrace{b}_{p_2} \cdot \underbrace{\ln(2N)}_{x_1} \right] + \exp \left[\underbrace{\ln(\psi_0)}_{p_3} \right] \right\} \quad (3-33)$$

A equação final a ser ajustada é apresentada em (3-34). O vetor de parâmetros é $\mathbf{p} = [\ln(\sigma_c) \quad b \quad \ln(\psi_0) \quad (1 - \gamma)]^T$ e a matriz de entrada \mathbf{x} tem duas colunas. Entretanto, a equação resultante não é linearizável como as apresentadas nas seções anteriores, ou seja:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \ln \{ \exp[p(1) + p(2) \cdot x_1] + \exp[p(3)] \} - p(4) \cdot x_2 \quad (3-34)$$

O próximo passo é calcular a matriz Jacobiana \mathbf{J}_t . A Equação (3-35) apresenta a primeira coluna de \mathbf{J}_t , referente à derivada em relação a $p(1)$. Na sequência e as equações (3-36), (3-37) e (3-38) mostram as segunda, terceira e quarta colunas da matriz \mathbf{J}_t , respectivamente, i.e.:

$$\mathbf{J}_{t[m \times 1]} = \begin{bmatrix} \frac{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_1})}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_1}) + \exp(p(3))} \\ \frac{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_2})}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_2}) + \exp(p(3))} \\ \vdots \\ \frac{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_m})}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_m}) + \exp(p(3))} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

$$\mathbf{J}_{t[m \times 2]} = \begin{bmatrix} \frac{x_{1_1} \cdot \exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_1})}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_1}) + \exp(p(3))} \\ \frac{x_{1_2} \cdot \exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_2})}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_2}) + \exp(p(3))} \\ \vdots \\ \frac{x_{1_m} \cdot \exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_m})}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_m}) + \exp(p(3))} \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

$$\mathbf{J}_{t[m \times 3]} = \begin{bmatrix} \frac{\exp(p(3))}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_1}) + \exp(p(3))} \\ \frac{\exp(p(3))}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_2}) + \exp(p(3))} \\ \vdots \\ \frac{\exp(p(3))}{\exp(p(1)+p(2) \cdot x_{1_m}) + \exp(p(3))} \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

$$\mathbf{J}_{t_{[m \times 4]}} = \begin{bmatrix} -x_{2_1} \\ -x_{2_2} \\ \vdots \\ -x_{2_m} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

O vetor \mathbf{e}_t é obtido subtraindo o vetor \mathbf{y} , com os logaritmos das amplitudes de tensão σ_a , da Equação (3-34). Finalmente, o vetor \mathbf{q} é adicionado ao vetor de parâmetros \mathbf{p} .

Entretanto, a matriz \mathbf{J}_t depende de algumas das propriedades a serem ajustadas. Portanto, não é possível atingir a convergência em apenas uma iteração, como nos casos anteriores, e agora os valores usados como estimativa inicial afetam a convergência do algoritmo. Logo, o vetor de parâmetros deve ser atualizado a cada iteração até a convergência. É assumido o valor absoluto da norma do vetor \mathbf{q} menor que a tolerância 10^{-6} como critério de convergência.

Ademais, por se tratar de um problema com não linearidade elevada, não se usa (2-44) para obter o vetor \mathbf{q} , mas sim a Equação (2-45), que usa um fator de amortecimento. O uso desse fator é implementado no programa como sugerido na Seção 2.4.3.1, que trata de Levenberg-Marquardt. Os valores iniciais escolhidos foram $\lambda = 1$ e $\nu = 2$, conforme sugerido em [19, 15]. Com isso, pode-se garantir a estabilidade do algoritmo.

No próximo capítulo, são apresentados os experimentos desenvolvidos nesse trabalho, que serão utilizados posteriormente no Capítulo 5 para validar os algoritmos de ajuste propostos, juntamente com outros conjuntos de dados da literatura.

4

Ensaio de tensão totalmente alternada de Al 6351-T6

4.1

Caracterização da liga de alumínio

As ligas de alumínio são as ligas metálicas mais usadas em aplicações estruturais depois dos aços. Suas boas propriedades mecânicas, boa resistência à corrosão e baixa densidade tornam essas ligas muito atrativas para as mais variadas aplicações.

As ligas de alumínio possuem cerca de um terço da densidade dos aços, latões e ligas de cobre, e podem apresentar excelente resistência à corrosão em diversos ambientes, como a atmosfera e em água (incluindo salgada). Além disso, ligas de alumínio geralmente possuem ótima condutividade térmica e elétrica. Por fim, quanto às propriedades mecânicas, algumas ligas de alumínio podem até exceder a resistência de aços estruturais de baixo carbono, entretanto sua tenacidade é significativamente menor quando comparada à dos aços [22, 1].

A liga de alumínio testada nesse trabalho é a 6351-T6, com a composição química, segundo o fabricante, apresentada na Tabela 4.1. É uma liga da série 6xxx com tratamento térmico T6, cujos principais elementos de liga são Mg e Si, predominantemente na forma de siliceto de magnésio (Mg_2Si). As ligas da série 6xxx são de uso geral, sendo aplicadas em estruturas arquitetônicas, perfis extrudados e equipamentos esportivos, por exemplo. Elas têm boa formabilidade, soldabilidade, usinabilidade e resistência à corrosão, com resistência mecânica média. Essas são ligas menos resistentes mas mais tenazes que as ligas aeronáuticas 2xxx e 7xxx, com boas resistências ao escoamento que podem atingir entre 250MPa e 460MPa após o tratamento térmico [1].

Quanto ao tratamento térmico T6, ele significa que a liga foi solubilizada

Tabela 4.1: Composição química da liga Al 6351-T6

Mn	Si	Cu	Fe	Mg	Ti	Al
0.450	1.000	0.010	0.210	0.500	0.020	97.790

e envelhecida artificialmente. As ligas dessa série são em geral inicialmente solubilizadas e envelhecidas naturalmente (tratamento T4) e em seguida sofrem um tratamento térmico de precipitação [22].

Para caracterizar a microestrutura deste material, foram feitos ensaios micrográficos em duas amostras do material. Além disso, foram obtidas as suas propriedades mecânicas básicas a partir de ensaios de tração, e as propriedades de Coffin-Manson e Ramberg-Osgood a partir de ensaios εN .

4.1.1

Micrografia

Duas amostras foram preparadas para os ensaios micrográficos, vide Figura 4.1, a partir de cortes transversais da barra usada para usinar os corpos de prova. Foi usado o reagente de Keller para visualizar a microestrutura a partir do microscópio óptico, seguindo os procedimentos da norma ASTM [23].

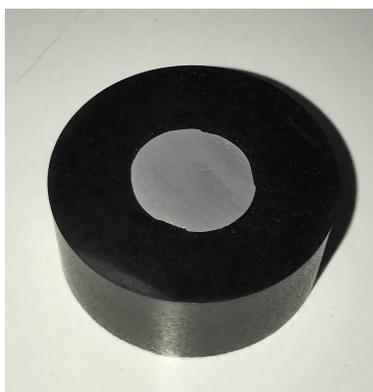


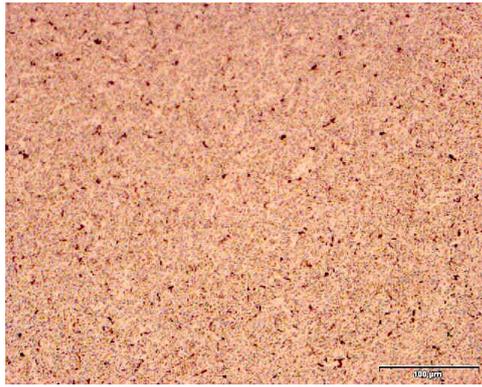
Figura 4.1: Amostra para ensaio micrográfico.

Este material possui uma matriz de solução sólida α com dispersoides distribuídos na sua textura, vide Figura 4.2. A microestrutura se mantém uniforme ao longo da barra, e as amostras 1 e 2 são muito semelhantes.

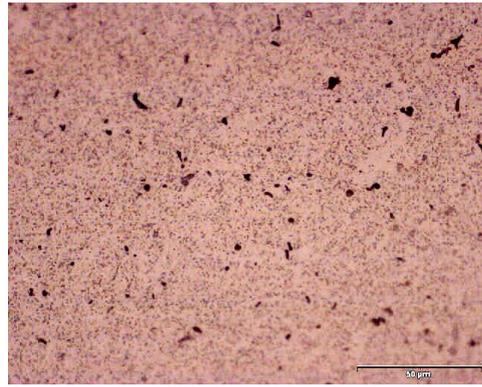
4.1.2

Ensaio de tração

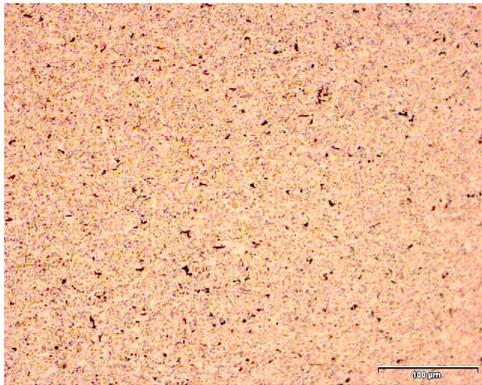
Os fabricantes da liga 6351-T6 também forneceram suas propriedades mecânicas: resistências ao escoamento $S_Y = 267\text{MPa}$ e à ruptura $S_U = 303\text{MPa}$, e dureza 96HB. Ainda assim, foram feitos ensaios de tração pela norma ASTM E8 [24] para verificá-las, numa Instron 5500R de 10 toneladas do laboratório do ITUC PUC-Rio, sob controle de deslocamento e velocidade de 1mm/min, vide Figura 4.3. A força foi monitorada pela célula de carga da máquina, e a deformação por um *clip gage*. Ao todo, foram realizados 11 testes, com duas geometrias de corpos de prova diferentes. A primeira bateria



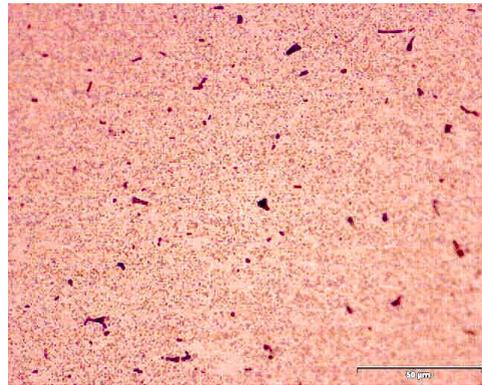
4.2(a): Aumento 200x amostra 1.



4.2(b): Aumento 500x amostra 1.



4.2(c): Aumento 200x amostra 2.



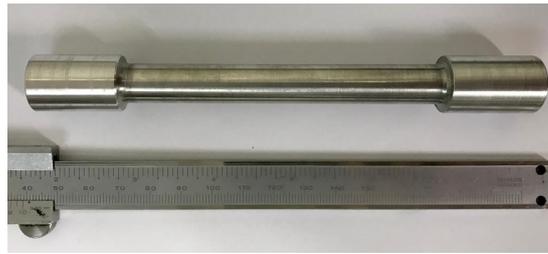
4.2(d): Aumento 500x amostra 2.

Figura 4.2: Ensaio micrográficos com Al 6351-T6.

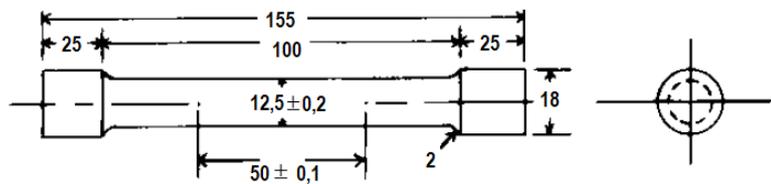
de testes contou com 6 corpos de prova usinados na direção longitudinal de uma barra de 3 polegadas do Al 6351-T6, conforme a Figura 4.4. Já a segunda bateria de testes foi feita com 5 corpos de prova, desta vez usinados na direção radial da barra, vide Figura 4.5.



Figura 4.3: Instron 5500R utilizada nos ensaios de tração.



4.4(a): Corpo de prova usinado.

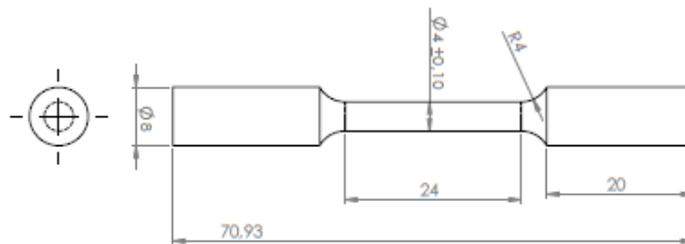


4.4(b): Desenho do corpo de prova.

Figura 4.4: Corpo de prova de tração usinado na direção longitudinal.



4.5(a): Corpo de prova usinado.



4.5(b): Desenho do corpo de prova.

Figura 4.5: Corpo de prova de tração usinado na direção radial.

A partir desses testes, foram gerados dois conjuntos de gráficos. A Figura 4.6 mostra gráficos de tensão versus deformação de engenharia dos 6 corpos de prova usinados na direção longitudinal. Já os resultados dos 5 corpos de prova usinados na direção radial estão apresentados no gráfico da Figura 4.7. Dessa forma, foi possível obter as propriedades mecânicas básicas dessa liga de alumínio na direção longitudinal e na direção radial, vide Tabela 4.2.

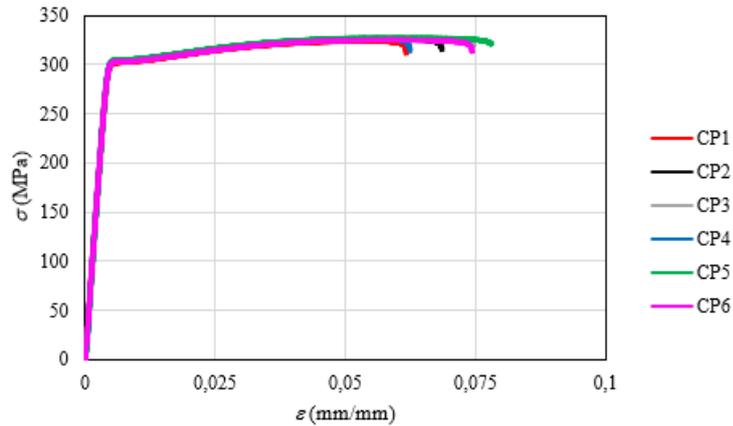


Figura 4.6: Tensão versus deformação de engenharia para o corpo de prova longitudinal.

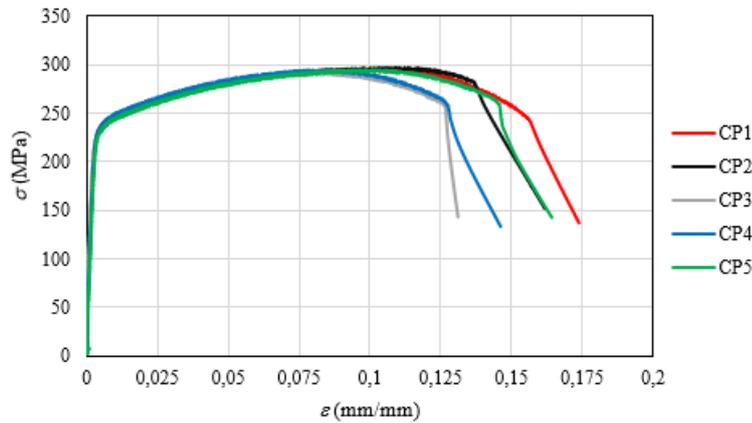


Figura 4.7: Tensão versus deformação de engenharia para o corpo de prova radial.

Tabela 4.2: Propriedades mecânicas medidas da liga Al 6351-T6

	Longitudinal	Radial
E (GPa)	72,6	72,3
S_Y (MPa)	303,8	235,8
S_U (MPa)	326,1	293,7

Esses gráficos mostram uma grande diferença de comportamento do material quando tracionado nas duas direções. Suas resistências são consideravelmente maiores na direção longitudinal, mas seu módulo de elasticidade é isotrópico. Isso indica um encruamento causado por trabalho a frio no processo de fabricação da barra, o que gera um aumento da quantidade de discordâncias e, conseqüentemente, da resistência na direção longitudinal. Como os corpos de prova dos ensaios εN foram usinados na direção longitudinal, serão essas as propriedades usadas no estudo do material. Ainda assim, vale ressaltar a

importância de uma boa avaliação das propriedades do material nas diferentes direções para uma análise mais consciente de testes futuros.

4.2

Ensaio εN

Os testes para medir as propriedades εN são padronizados pela norma ASTM E606 [25]. Esses testes são feitos sob controle de deformação, cuja amplitude é mantida constante durante todo o experimento e com média zero. Os parâmetros de força e deformação são monitorados ao longo do teste, que termina quando o CP quebra ou a força de tração aplicada cai para 50% da força de compressão, indicando claramente o nascimento de uma trinca. Por fim, o número de ciclos do ensaio é anotado para que se possa relacionar a amplitude de deformação com a vida.

Foram realizadas ao todo três baterias de testes. Na primeira, foram testados 11 CPs, atendendo ao mínimo exigido pela norma (10 CPs testados em 5 deformações diferentes). As amplitudes de deformação usadas foram 0,4%, 0,5%, 0,6% e 0,7%, 0,75% e 0,8%. Foram evitadas deformações maiores que 0,8% para que não houvesse flambagem dos CPs.

Na segunda bateria de testes, buscou-se melhorar os resultados referentes à parte elástica da curva de Coffin-Manson, usando amplitudes de deformação 0,3%, 0,32% e 0,35%. Nessa bateria de testes, foram utilizados sete CPs, e seus resultados foram adicionados aos resultados anteriores.

Por fim, na terceira bateria de testes foram testados 12 CPs, levando a um total de 30 CPs testados. Foram usadas amplitudes de deformação 0,28%, 0,3%, 0,45%, 0,55% e 0,65%. A Tabela 4.3 discrimina detalhadamente o número de testes feito em cada uma das amplitudes de deformação.

Tabela 4.3: Número de corpos de prova por amplitude de deformação nos ensaios εN .

Bateria	0,28%	0,3%	0,32%	0,35%	0,4%	0,45%	0,5%	0,55%	0,6%	0,65%	0,7%	0,75%	0,8%
1 ^a	-	-	-	-	3	-	2	-	2	-	2	1	1
2 ^a	-	2	3	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 ^a	2	1	-	-	-	3	-	2	-	4	-	-	-
Total	2	3	3	2	3	3	2	2	2	4	2	1	1

4.2.1

Equipamentos utilizados

Todos os ensaios εN foram realizados no laboratório de fadiga da PUC-Rio, numa servo-hidráulica Instron 8501 de 100 kN, vide Figura 4.8. Antes

dos ensaios, a máquina servo-hidráulica foi devidamente alinhada usando um relógio comparador, para evitar excentricidade do carregamento, vide Figura 4.9. Essa medida é necessária para evitar tensões parasitas geradas por momentos fletores durante os ensaios. Além de induzirem erros nas medições dos testes, os fletores ainda podem causar a flambagem dos CPs.



Figura 4.8: Instron 8501 utilizada nos ensaios εN .



Figura 4.9: Alinhamento das garras da servo-hidráulica.

Para medir as deformações ao longo dos testes, foi usado um *clip gage* Instron com base de 10 mm e gama de ± 1 mm. Antes dos ensaios, o *clip gage* foi calibrado usando o calibrador de extensômetros do Laboratório de Ensaios Mecânicos – ITUC, conforme mostrado na Figura 4.10. Esse calibrador possui faixa de medição de 25 mm e uma resolução de 0,0005 mm.

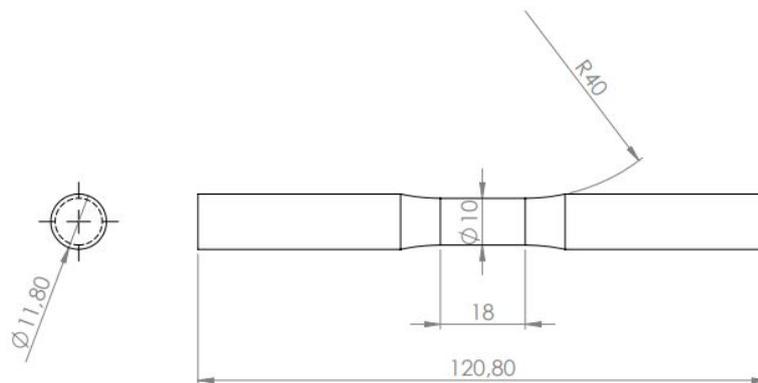


Figura 4.10: Calibração do *clip gage*.

4.2.2

Corpo de prova

Os CPs usados nos ensaios εN , mostrados na Figura 4.11, seguiram a norma E606, respeitando, contudo, as restrições da garra da máquina e do projeto à flambagem estudado a seguir. A Figura 4.11(a) mostra o desenho do CP em milímetros. A Figura 4.11(b) mostra um CP para os ensaios εN já usinado.



4.11(a): Desenho do corpo de prova εN .



4.11(b): Corpo de prova εN usinado.

Figura 4.11: Corpo de prova utilizado nos testes εN .

Para projetar os CPs contra flambagem, deve-se considerar que em colunas de materiais elastoplásticos (EP) curtas, como em ensaios εN , a

carga de flambagem crítica ocorre após o escoamento, ou seja, a flambagem é inelástica [2, 26]. A real importância dessa análise é quantificar a máxima deformação alternada que pode ser imposta em um ensaio εN para uma dada geometria do CP. Logo, as dimensões do CP devem ser escolhidas para permitir deformações plásticas sem que ele flambe.

Pode-se modelar a flambagem inelástica de CPs εN por Engesser usando o módulo tangente E_t , Equação (4-1), na clássica equação elástica de Euler [2]:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (4-1)$$

Segundo Euler, a tensão crítica de flambagem elástica de um CP cilíndrico de comprimento L e diâmetro d é dada pela Equação (4-2). Logo, pode-se estimar a tensão crítica de flambagem EP pelo modelo de Engesser pela Equação (4-3):

$$\sigma_{fl_{el}} = \frac{\pi^2 d^2 E}{\kappa L^2} \quad (4-2)$$

$$\sigma_{fl_{ep}} = \frac{\pi^2 d^2 E_t}{\kappa L^2} \quad (4-3)$$

A variável κ depende das condições de contorno dos CPs: $\kappa = 4$ para corpos de prova biengastados, $\kappa = 16$ para corpos de prova biapoiados e $\kappa = 64$ para corpos de prova em balanço.

Sendo assim, é possível calcular o módulo tangente dos materiais modeláveis por Ramberg-Osgood para obter a tensão crítica de flambagem $\sigma_{fl_{ep}}$ a partir das propriedades de encruamento, como na Equação (4-4).

$$E_t = \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{hH} \left(\frac{\sigma}{H} \right)^{\frac{1-h}{h}} \right]^{-1} \Rightarrow \sigma_{fl_{ep}} + \frac{E}{h} \left(\frac{\sigma_{fl_{ep}}}{H} \right)^{\frac{1}{h}} = \frac{\pi^2 d^2 E}{\kappa L^2} \quad (4-4)$$

A maior amplitude das deformações estáveis que pode ser aplicada nos testes εN (sob $\sigma_m = 0$) é limitada pela sua amplitude de flambagem EP $\Delta\varepsilon_{fl_{ep}}/2$, a qual pode ser calculada a partir da Equação (4-5), usando as propriedades H_c e h_c de encruamento cíclico na expressão de $\sigma_{fl_{ep}}$, já que se trata da estabilidade dos laços de histerese EP [2]:

$$\frac{\Delta\sigma_{fl_{ep}}}{2} + \frac{E}{h_c} \left[\frac{\Delta\sigma_{fl_{ep}}}{2H_c} \right]^{\frac{1}{h_c}} = \frac{\pi^2 d^2 E}{\kappa L^2} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{fl_{ep}}}{2} = \frac{\Delta\sigma_{fl_{ep}}}{2E} + \left[\frac{\Delta\sigma_{fl_{ep}}}{2H_c} \right]^{\frac{1}{h_c}} \quad (4-5)$$

Assim, é possível estabelecer as dimensões do CP εN , pautadas na norma E606, para aplicar uma amplitude de deformação relativamente alta sem que haja flambagem. A condição de contorno utilizada nas contas supôs o CP biapoiado ($\kappa = 16$), por segurança. As propriedades cíclicas H_c e h_c usadas

nessas estimativas da deformação de flambagem foram obtidas de trabalhos prévios com materiais similares ao usado neste projeto [27]. Como resultado, estima-se que um CP cilíndrico com $d = 10mm$ e $L = 18mm$ teria uma amplitude de deformação de flambagem crítica $\Delta\varepsilon_{fl_{ep}}/2 = 1.68\%$. Portanto, o projeto dos ensaios εN deve respeitar esse limite de deformação para esse CP. Todavia, vale ressaltar que esse é um valor estimado, já que as propriedades reais de Ramberg-Osgood só poderão ser medidas após os testes.

No próximo capítulo, os dados experimentais coletados serão utilizados na validação dos ajustes propostos nesse trabalho, juntamente com outros conjuntos de dados da literatura.

5

Resultados e discussões

5.1

Ajustes de modelos clássicos do método εN

5.1.1

Coffin-Manson

Dois pontos devem ser enfatizados quando se medem os parâmetros de Coffin-Manson. Primeiro, o ajuste dos pontos experimentais pode ser feito ajustando em separado as deformações elásticas ($\Delta\varepsilon_{el}/2$) e plásticas ($\Delta\varepsilon_{pl}/2$) versus vida (como adotado no Capítulo 3), ou então ajustando as deformações totais ($\Delta\varepsilon/2$) à curva de Coffin-Manson. O segundo é a quantidade de dados experimentais necessários para se obter de forma confiável os parâmetros de Coffin-Manson.

Em relação ao ajuste dos pontos experimentais, a norma ASTM E606 [25], que regula esse tipo de ensaio, **não** especifica como ele deve ser feito. Entretanto, esses dois métodos de ajuste podem gerar resultados muito diferentes, conforme estudado a seguir. Para comparar de forma detalhada esses diferentes desempenhos, foram usados três procedimentos de ajuste dos pontos experimentais a partir da separação entre deformação elástica e plástica, a saber: (i) algoritmo de LM desenvolvido no presente trabalho e apresentado na Seção 3.1.1; (ii) ajuste de polinômios de primeiro grau das retas em log-log das partes elástica e plástica a partir do comando *fit*, com *fittype('poly1')*, do ambiente *Matlab*; e (iii) ajuste de forma separada das equações parabólicas da parte elástica e plástica da partir do comando *lsqcurvefit* do *Matlab*, que ajusta por mínimos quadrados um conjunto de dados por qualquer equação pré-determinada, sendo possível optar por um algoritmo Levenberg-Marquardt ou por um método *trust-region-reflective*. Para efeito de comparação, as partes elástica e plástica de Coffin-Manson foram ajustadas separadamente a partir desse comando, com a opção de algoritmo LM, porém sem a transformação logarítmica adotada.

Dessa forma, foram obtidos o gráfico da Figura 5.1 e a Tabela 5.1 com os ajustes pelos três procedimentos a partir de uma estimativa inicial genérica $\sigma_c = 1MPa$, $b = 0$, $\varepsilon_c = 1$ e $c = 0$. Para o ajuste da parte plástica

de Coffin-Manson, foram desconsiderados todos os pontos experimentais com deformações plásticas muito pequenas ($\Delta\varepsilon_{pl}/2 < 0,0003$), porque nesses casos a deformação plástica é da ordem de grandeza do ruído intrínseco de medição.

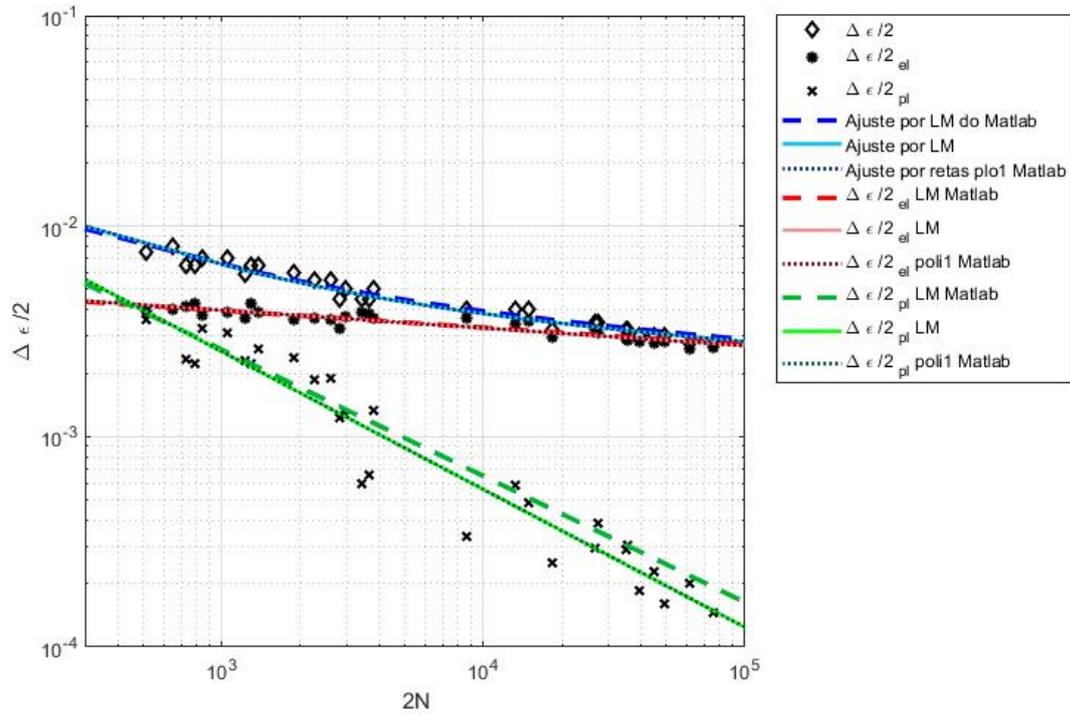


Figura 5.1: Ajustes de Coffin-Manson separando as partes elástica e plástica.

Tabela 5.1: Parâmetros de Coffin-Manson para ajustes separando as partes elástica e plástica.

	σ_c (MPa)	b	ε_c	c
LM	515,39	-0,084	0,23	-0,66
Poli 1	515,39	-0,084	0,23	-0,66
LM <i>Matlab</i>	502,67	-0,081	0,16	-0,60

O ajuste a partir do algoritmo LM aqui desenvolvido, assim como a partir do comando *fit* do *Matlab*, convergem para os mesmos resultados, ainda que os valores das estimativas iniciais sejam bastante diferentes dos resultados finais. Entretanto, o mesmo não acontece com o ajuste por *lsqcurvefit*, que pode convergir para valores distintos dependendo da estimativa inicial. Além disso, o método de LM aqui desenvolvido converge em apenas uma iteração, enquanto o LM do *Matlab*, que não usa escala logarítmica, precisa de 70 iterações para convergir para o resultado final para a estimativa inicial mencionada.

Em seguida, foram usados dois métodos para ajustar as deformações totais à curva de Coffin-Manson, sem separá-las em partes elástica e plástica, ambos utilizando o comando *lsqcurvefit* do *Matlab*, baseado em mínimos quadrados: um dos ajustes foi feito a partir do algoritmo LM do *Matlab*, enquanto o outro usou o algoritmo *trust-region*, padrão do *Matlab*. Os resultados obtidos pelos dois métodos de ajuste das deformações totais foram plotados junto com os resultados do algoritmo LM aqui desenvolvido, o qual separa a parte elástica da plástica.

Além disso, como se obteve uma variação significativa dos resultados de acordo a estimativa inicial para ambos os métodos de ajuste das deformações totais, optou-se por usar três estimativas iniciais distintas. Na Figura 5.2 há os resultados obtidos com valores iniciais $\sigma_c = 1MPa$, $b = 0$, $\varepsilon_c = 1$ e $c = 0$. Na sequência, os resultados da Figura 5.3 tiveram como estimativa inicial $\sigma_c = 500MPa$, $b = -0,08$, $\varepsilon_c = 0,2$ e $c = -0,6$, valores bastante próximos dos obtidos para os ajustes separados das partes elástica e plástica. Finalmente, a Figura 5.4 apresenta resultados com estimativa inicial $\sigma_c = 410MPa$, $b = -0,05$, $\varepsilon_c = 0,4$ e $c = -0,75$, valores arbitrários não tão próximos do ajuste ótimo porém melhores que os da Figura 5.2. A Tabela 5.2 apresenta numericamente esses resultados, para as três estimativas iniciais (“chute”) adotadas.

Tabela 5.2: Parâmetros de Coffin-Manson para ajustes pela curva.

	σ_c (MPa)	b	ε_c	c
LM <i>Matlab</i> chute 1	27,92	0,096	0,04	-0,28
<i>Trust-region</i> chute 1	77,99	0,018	0,04	-0,296
LM <i>Matlab</i> chute 2	499,99	-0,099	0,05	-0,41
<i>Trust-region</i> chute 2	470,00	-0,078	0,16	-0,59
LM <i>Matlab</i> chute 3	409,99	-0,086	0,05	-0,39
<i>Trust-region</i> chute 3	395,00	-0,054	0,25	-0,66
LM chute 1, 2 e 3	515,39	-0,084	0,23	-0,66

Novamente, o algoritmo de LM aqui desenvolvido, usando simplificações matemáticas, converge em apenas uma iteração em todos os casos. Por outro lado, os ajustes que usam o comando *lsqcurvefit* do *Matlab* para a equação total de Coffin-Manson, sem separação entre partes elástica e plástica, necessitam de muito mais iterações para convergir. Para o chute 1, o ajuste do *Matlab* com algoritmo LM precisou de 732, enquanto o algoritmo *trust-region* realizou 255 iterações. Para o chute 2, o ajuste *Matlab* com algoritmo LM convergiu em 139 iterações e o algoritmo *trust-region* em 14 iterações. Por fim, para o chute 3,

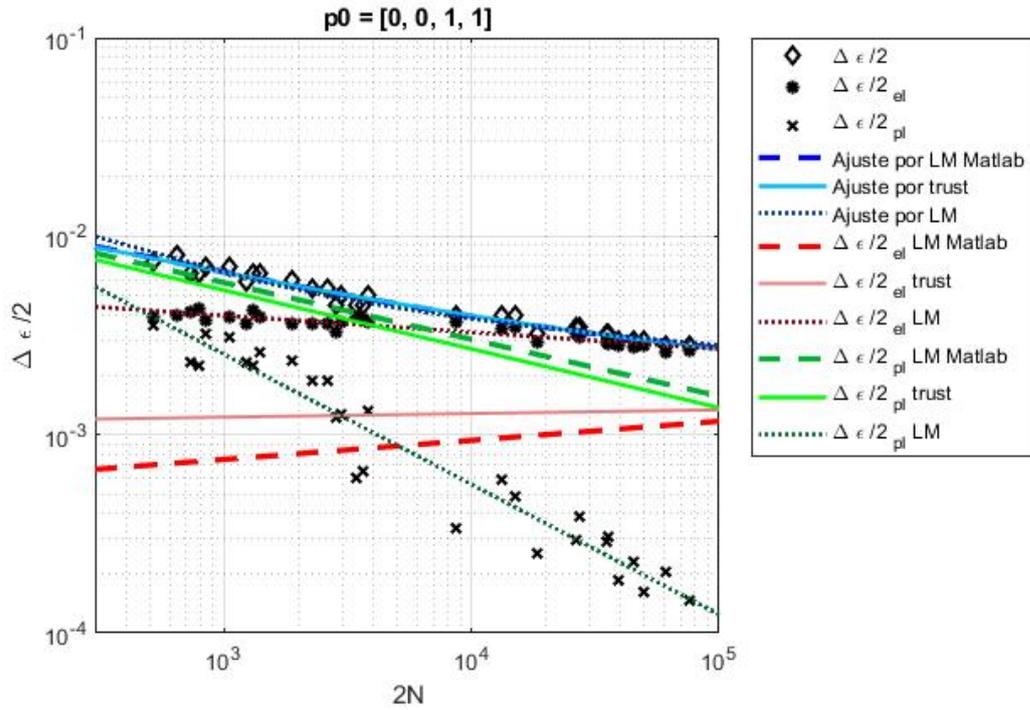


Figura 5.2: Ajustes de Coffin-Manson com a estimativa inicial 1.

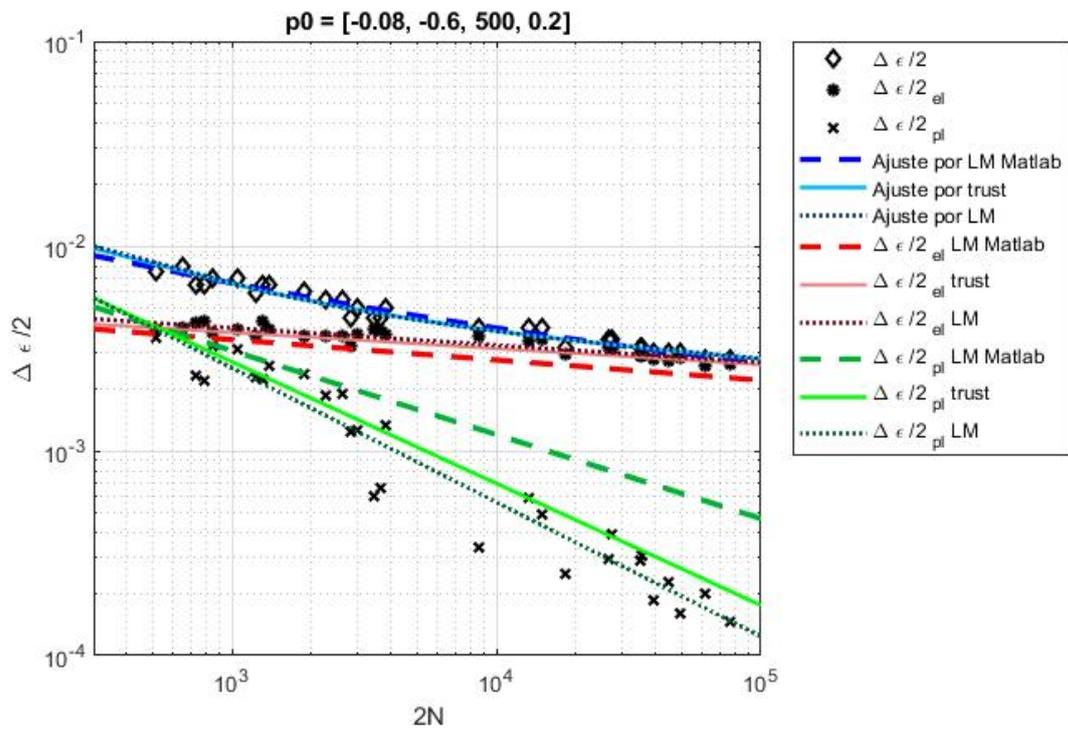


Figura 5.3: Ajustes de Coffin-Manson com a estimativa inicial 2.

o ajuste com algoritmo LM do *Matlab* convergiu em 205 iterações, enquanto o algoritmo *trust-region* convergiu em 20 iterações. Observa-se, portanto, que o

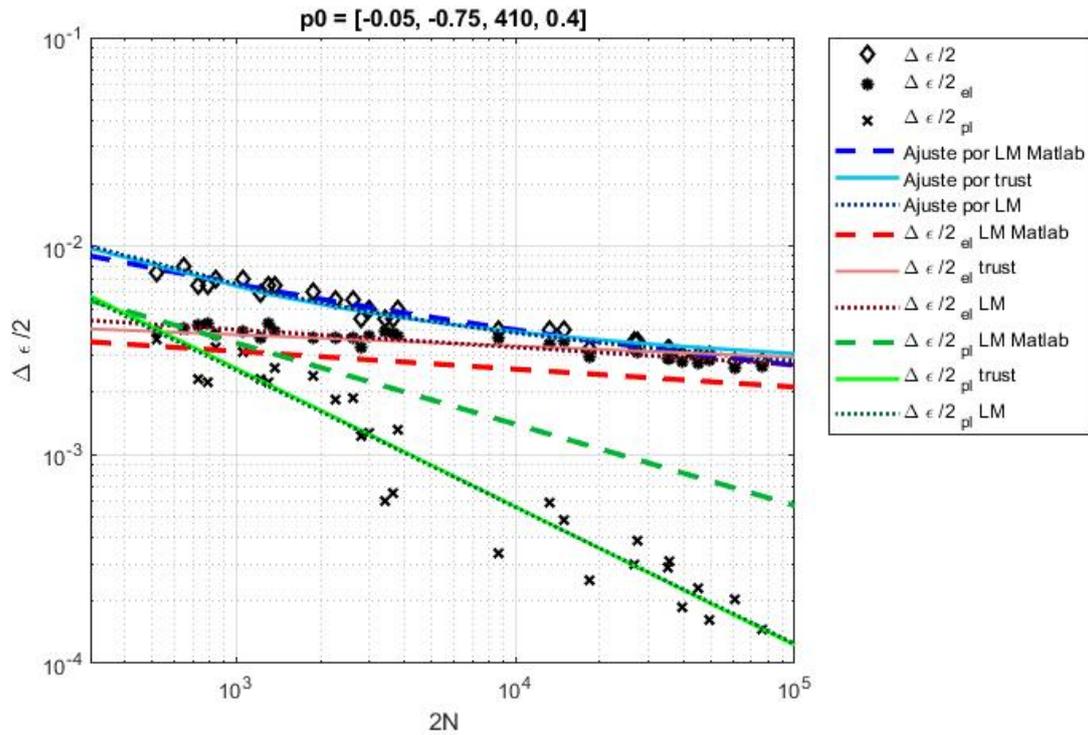


Figura 5.4: Ajustes de Coffin-Manson com a estimativa inicial 3.

ajuste do comando *lsqcurvefit* com algoritmo *trust-region* pode apresentar uma convergência similar à do algoritmo de LM do *Matlab* e em menos iterações, desde que o chute inicial seja próximo dos valores reais dos parâmetros

Ressalta-se, entretanto, que a configuração do ajuste *lsqcurvefit* com *trust-region-reflective* teve de ser alterada para que houvesse uma convergência para valores que de fato ajustassem a curva de Coffin-Manson para o chute inicial 1. A opção alterada do comando *lsqcurvefit* foi *FunctionTolerance*, que passou de 10^{-6} para 10^{-8} . Sem tal alteração, o algoritmo convergia em apenas 50 iterações, porém resultava em uma linha praticamente horizontal, muito distante dos pontos experimentais que deveriam ser ajustados.

Assim, fica claro que, apesar de possivelmente apresentarem bons ajustes para a curva de Coffin-Manson, os métodos que se baseiam nas deformações totais não tendem a reproduzir a física do problema.

Isso fica evidenciado no ajuste do comando *lsqcurvefit* a partir do chute inicial 1, o qual resulta em valores de *b* positivos, uma impossibilidade física, tanto para o algoritmo LM, quanto para o *trust-region-reflective*. Além disso, ressalta-se a enorme dependência que ambos os ajustes baseados em deformações totais possuem em relação ao chute inicial. Tal dependência pode comprometer a correta obtenção dos parâmetros de Coffin- Manson, uma vez que a priori não é possível saber o valor aproximado desses parâmetros.

Sendo assim, os métodos de ajuste que separam as deformações elástica e plástica possuem grandes vantagens sobre aqueles que consideram o ajuste para as deformações totais. Em especial, o algoritmo de LM aqui desenvolvido, que trabalha com duas equações linearizadas, além de não depender do chute inicial, converge em apenas uma iteração, mostrando-se, portanto, uma ferramenta bastante poderosa para ajustar dados experimentais de deformação versus vida.

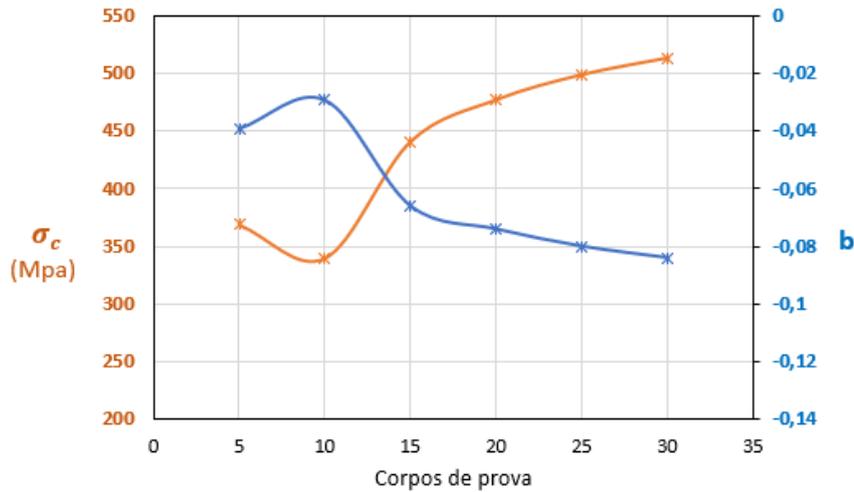
Partindo agora para a segunda análise dos dados de Coffin-Manson, questiona-se a quantidade de corpos de prova necessários para obter um ajuste confiável das propriedades, como proposto em [28]. Segundo a norma ASTM E606, dez corpos de prova seriam suficientes para levantar a curva εN , usando dois CPs em cada amplitude de deformação escolhida. Preferencialmente, essas amplitudes deveriam estar bem distribuídas, em ensaios com deformação majoritariamente elásticas, mistas e plásticas.

Entretanto, ao longo das três baterias de testes εN realizadas, observou-se que os valores obtidos para os parâmetros de Coffin-Manson poderiam variar bastante à medida que são adicionados novos CPs ao montante de dados. Sendo assim, a dúvida que surge é se existe um número de testes mínimo para que haja uma convergência nos valores dos parâmetros, visto que 10 corpos de prova não foram suficientes para se obter essa convergência.

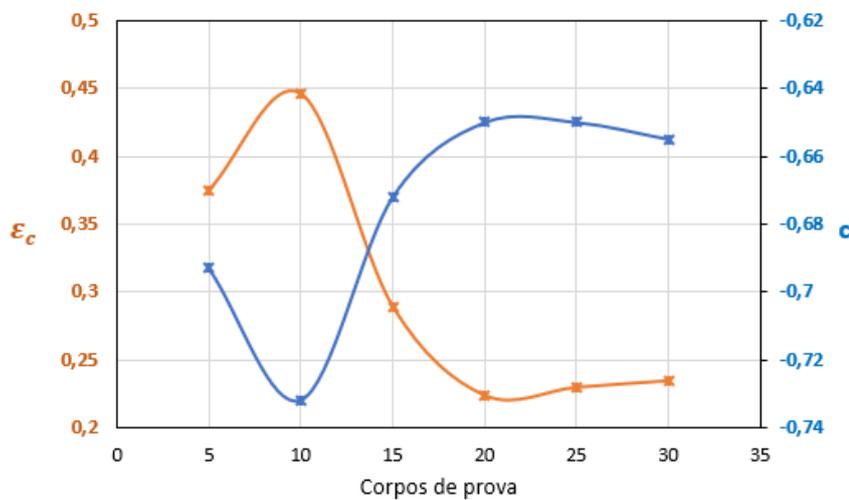
Dessa forma, para verificar a existência ou não dessa convergência, gerou-se um gráfico da variação das propriedades de Coffin-Manson à medida que CPs foram adicionados ao montante de dados. Os pontos experimentais foram adicionados de 5 em 5, buscando sempre respeitar os critérios da norma E606 de dois corpos de prova por amplitude de deformação, e dando preferência à sequência na qual os testes foram executados. Para melhor visualização, o gráfico proposto foi agrupado em dois, um com as propriedades elásticas e outro com as plásticas, conforme apresentado na Figura 5.5.

Esses gráficos mostram que, como esperado, as propriedades identificadas pelos ajustes variam muito à medida que se aumenta o número de dados experimentais, mesmo depois de testar os 10 CPs recomendados pela ASTM. Nota-se que tanto as propriedades elásticas quanto as plásticas parecem tender a convergir apenas após o teste de pelo menos 20 a 25 CPs. Quantitativamente, note-se que o expoente elástico de Coffin-Manson b varia 65% quando obtido com 10 ou com 30 CPs, enquanto o coeficiente plástico ε_c varia ainda mais, cerca de 90%.

Essas observações reforçam as suspeitas sobre a baixa confiabilidade das propriedades de fadiga medidas testando poucos CPs, em particular as de vida longa, onde existe grande dispersão dos resultados. Consequentemente,



5.5(a): Propriedades elásticas.



5.5(b): Propriedades plásticas.

Figura 5.5: Variação dos parâmetros ajustados de Coffin-Manson.

questiona-se os procedimentos da norma ASTM E606 que permitem medir essas propriedades testando apenas 10 CPs.

5.1.2 Ramberg-Osgood

Os mesmo ensaios ϵN utilizados para medir a curva de Coffin-Manson podem ser aproveitados para obter os parâmetros de Ramberg-Osgood, a partir dos dados dos laços de histerese EP estabilizados de cada um dos testes.

Para obter os valores dos coeficiente e expoente de encruamento cíclico H_c e h_c os laços de histerese estabilizados dos vários testes são plotados em um mesmo gráfico tensão versus deformação. Na sequência, os bicos dos laços de histerese são ajustados pela curva $\sigma \epsilon$ cíclica, Equação (2-2), conforme esquematizado na Figura 5.6. Dessa forma, os pontos experimentais ajustados

pela curva são os pares de tensão e deformação dos bicos dos laços de histerese.

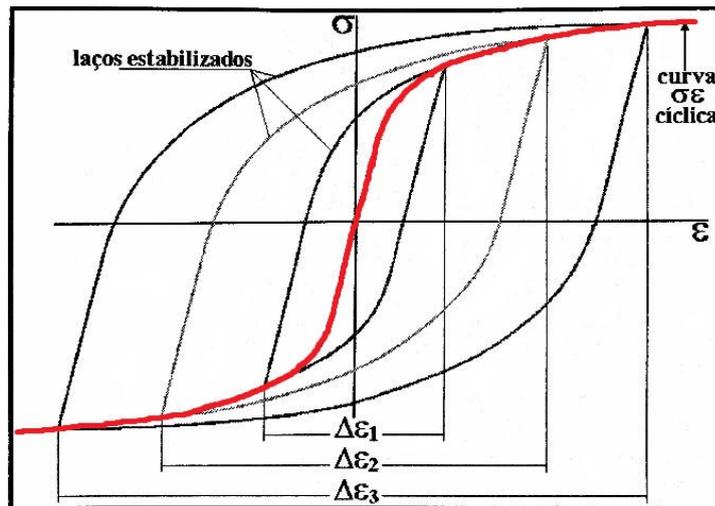


Figura 5.6: Esquema da obtenção da curva $\sigma\epsilon$ cíclica [1].

Diferentemente da curva de Coffin-Manson, a curva $\sigma\epsilon$ de Ramberg-Osgood cíclica não precisa separar as partes elástica e plástica, caso o valor de E seja conhecido. Portanto, os métodos de ajuste analisados usam as tensão e deformação totais de cada bico dos laços de histerese com o comando *lsqcurvefit* e os algoritmos *trust-region-reflective* e LM do *Matlab*, assim como o algoritmo LM desenvolvido na Seção 3.1.2 para ajustar os pontos experimentais à curva de Ramberg-Osgood.

Em uma primeira abordagem, foram desconsiderados os testes onde não houve abertura detectada do laço de histerese, já que nesse caso puramente elástico a parte plástica de Ramberg-Osgood seria desprezível.

Entretanto, desconsiderar apenas os testes em que os laços de histerese não abrem não é suficiente para fazer bons ajustes, já que as deformações plásticas indiretamente medidas em regime primariamente elástico são muito ruidosas, e prejudicam a avaliação correta do problema. Dessa forma, optou-se por fazer uma análise das amplitudes de deformação plástica a partir do ponto em que elas deixam de ter grande relação ruído-sinal, e tendem a uma linha reta em escala log-log em função da vida.

Então, a partir do gráfico da Figura 5.7, foi possível observar que deformações plásticas maiores do que $0,0017mm/mm$, ou $1700\mu m/m$, representada pela linha tracejada em vermelho no gráfico, foram as relevantes para o ajuste de Ramberg-Osgood. Por isso, foram feitos ajustes usando o total de pontos em que há abertura significativa do laço de histerese com amplitudes de $\epsilon_{pl} > 1700\mu m/m$. Os gráficos da Figura 5.8 mostram os ajustes obtidos com o algoritmo LM aqui desenvolvido, o LM do *Matlab* e o *trust-region* do *Matlab* usando os dois conjuntos de pontos. Os valores obtidos com cada um dos

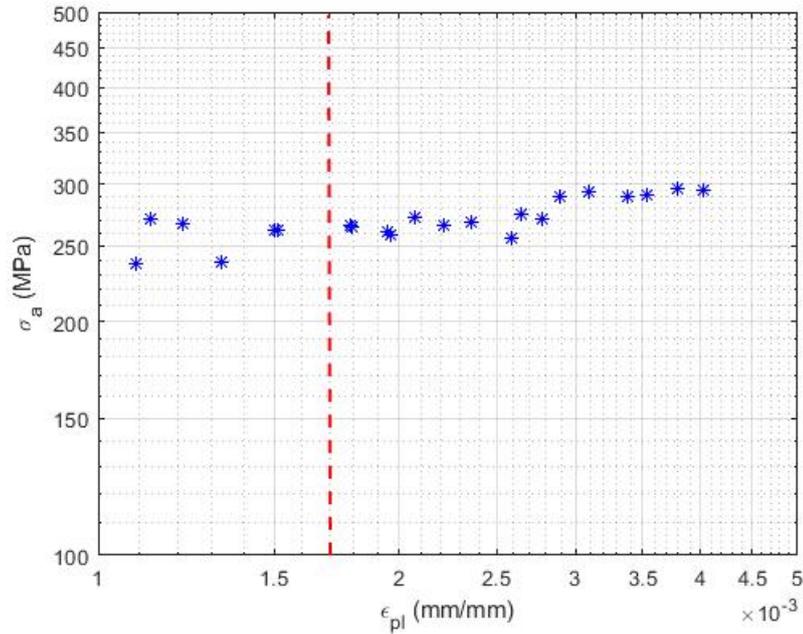


Figura 5.7: Amplitudes de tensão versus picos de deformações plásticas dos laços de histerese.

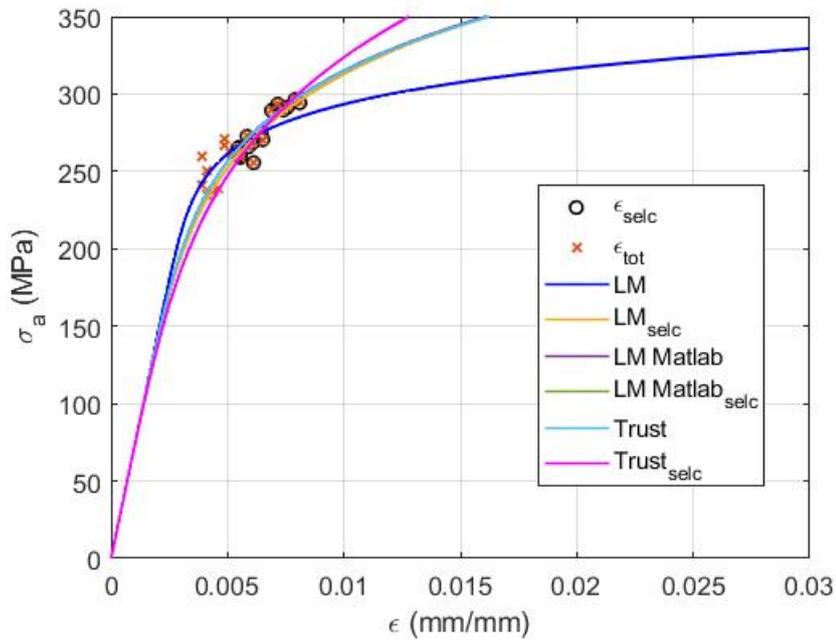
ajustes está descrito na Tabela 5.3. Em todos os modelos de ajuste, foi usado o chute inicial $h_c = 1$ e $H_c = 8MPa$.

Tabela 5.3: Parâmetros de Ramberg-Osgood diferentes ajustes.

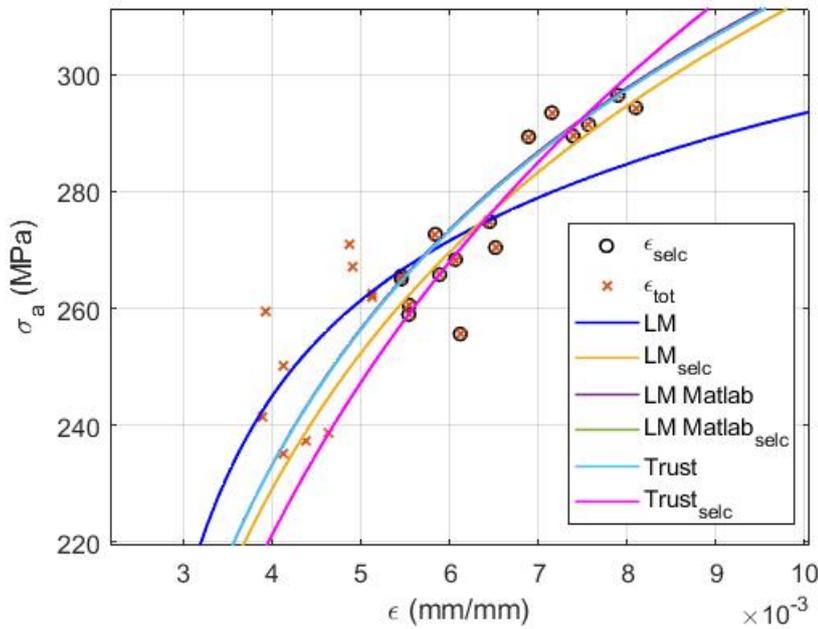
	H_c (MPa)	h_c
LM	441,04	0,080
<i>Trust-region</i>	688,80	0,15
LM <i>Matlab</i>	691,30	0,15
LM <i>selc</i>	724,95	0,16
<i>Trust-region selc</i>	989,25	0,21
LM <i>Matlab selc</i>	991,23	0,22

Além disso, para visualizar melhor o problema, foi plotado o gráfico dos laços esquematizados na Figura 5.6 para os pontos experimentais medidos, vide Figura 5.9. Nesse caso, os ajustes são os mesmos já mostrados na Figura 5.8, porém, em vez de mostrar apenas os bicos dos laços no primeiro quadrante, são plotados os laços de histerese estabilizados de cada teste, juntamente com as curvas $\sigma\varepsilon$ cíclicas dos diferentes ajustes.

Nota-se que o ajuste por LM aqui desenvolvido dá igual relevância para todos os pontos ajustados, pois está em uma escala log-log, enquanto os ajustes do *Matlab*, feitos numa escala linear, valorizam mais os pontos com deformações maiores. Assim, o ajuste de LM para os pontos selecionados (com deformações



5.8(a): Curva $\sigma\varepsilon$ cíclica no primeiro quadrante.



5.8(b): Curva $\sigma\varepsilon$ cíclica em escala aproximada.

Figura 5.8: Ajuste da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica com todos os pontos e com pontos selecionados.

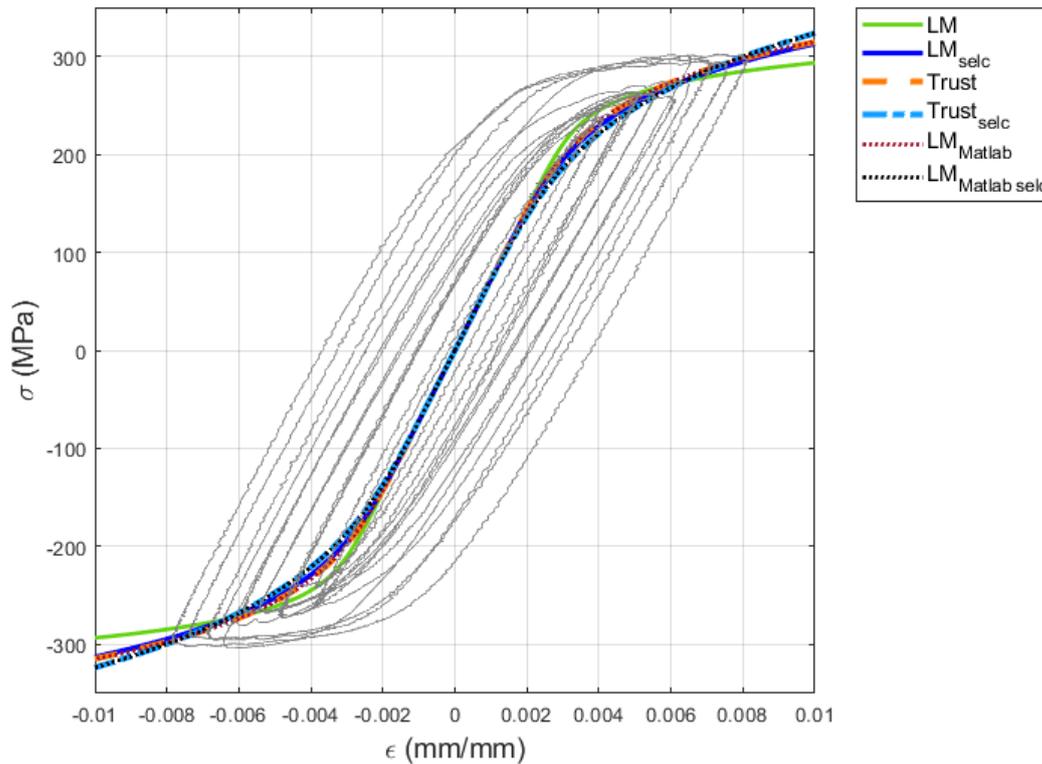


Figura 5.9: Ajustes da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica aos laços de histerese.

plásticas significativas) se aproxima bastante dos ajustes do *Matlab* para o conjunto total de pontos. Em contrapartida, esses algoritmos em escala linear tendem a valorizar deformações ainda mais altas quando usam os pontos selecionados, podendo deixar de considerar pontos com deformações plásticas relativamente menores, mas ainda relevantes no ajuste. Já o algoritmo LM sem filtragem de pontos também não apresenta um ajuste satisfatório, uma vez que sofre mais com o ruído plástico no regime elástico. Portanto, a prática de filtrar esses pontos ruidosos é fundamental para um bom ajuste de Ramberg-Osgood, sobretudo quando se utiliza o algoritmo de LM em escala log-log desenvolvido neste trabalho (o qual gera os melhores ajustes para os pontos experimentais estudados).

Ademais, ressalta-se que, apesar de necessitar de uma filtragem de dados mais cuidadosa, o algoritmo de LM desenvolvido neste trabalho converge com apenas uma iteração e independe do chute inicial, enquanto os algoritmos do *Matlab* podem gerar ajustes que dependem do chute inicial, principalmente se esse chute for próximo aos valores reais de h_c e H_c . Além disso, o algoritmo LM do *Matlab* levou 57 iterações para convergir com todos os pontos e 46 iterações para os pontos selecionados, enquanto o algoritmo *trust* levou 105 iterações

para todos os pontos e 114 iterações para os pontos selecionados.

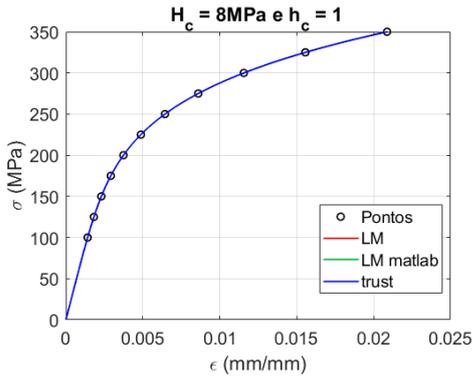
Por fim, para avaliar a sensibilidade ao chute inicial e o desempenho desses 3 métodos de ajuste, sem interferência de incertezas provenientes dos dados experimentais, foram gerados numericamente pontos que seguem de forma exata a Equação (2-2) com $H_c = 800\text{MPa}$ e $h_c = 0,2$, gerados em intervalos de 25MPa entre pontos, na faixa de 100MPa a 350MPa. Assim, foram usados 4 chutes iniciais diferentes para ajustar o conjunto de pontos. Os chutes iniciais 1 a 4 foram: (i) $H_c = 8\text{MPa}$ e $h_c = 1$, os dois valores que foram usados na análise dos dados experimentais; (ii) $H_c = 950\text{MPa}$ e $h_c = 0,25$; (iii) $H_c = 650\text{MPa}$ e $h_c = 0,05$; e (iv) $H_c = 715\text{MPa}$ e $h_c = 0,15$, que são valores possíveis e próximos dos valores estabelecidos.

A princípio, todos os métodos deveriam ajustar os pontos e convergir para os valores exatos $H_c = 800\text{MPa}$ e $h_c = 0,2$ sem grandes problemas. Todavia, nem sempre isso ocorreu, o que ressalta a importância da escolha do algoritmo de ajuste. A Figura 5.10 mostra os ajustes pelo algoritmo LM aqui desenvolvido, pelo LM do *Matlab* e pelo *trust-region* para os 4 chutes iniciais apresentados. Os valores dos parâmetros de Ramberg-Osgood obtidos estão listados na Tabela 5.4.

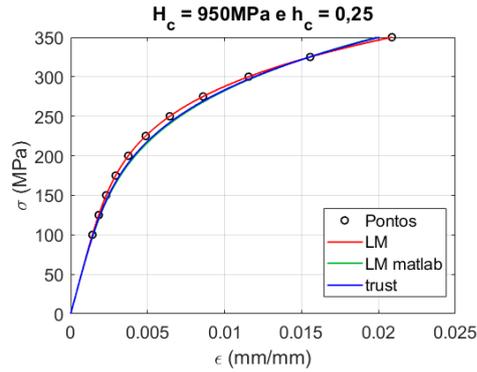
Tabela 5.4: Parâmetros de Ramberg-Osgood para pontos criados.

	H_c (MPa)	h_c
LM <i>chute 1, 2 3 e 4</i>	800,00	0,20
<i>Trust-region chute 1</i>	799,54	0,20
LM <i>Matlab chute 1</i>	800,00	0,20
<i>Trust-region chute 2</i>	920,00	0,23
LM <i>Matlab chute 2</i>	950,00	0,24
<i>Trust-region chute 3</i>	650,47	0,15
LM <i>Matlab chute 3</i>	650,00	0,15
<i>Trust-region chute 4</i>	784,99	0,20
LM <i>Matlab chute 4</i>	715,00	0,17

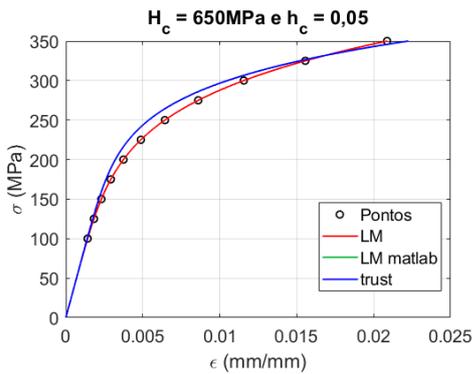
Todos os métodos possuem um bom desempenho no ajuste dos pontos quando o chute inicial é genérico. Todavia, surpreendentemente os métodos que usam os algoritmos do *Matlab* podem convergir para valores bastante diferentes dos reais quando o chute inicial é próximo dos resultados possíveis (mínimos locais), uma vez que esses métodos podem gerar mais de uma resposta, dependendo da tolerância da sua convergência. Ressalta-se que isso ocorre mesmo no ajuste de pontos exatos, gerados numericamente sem incertezas associadas, como os pontos usados nesta simulação. Assim, fica evidente



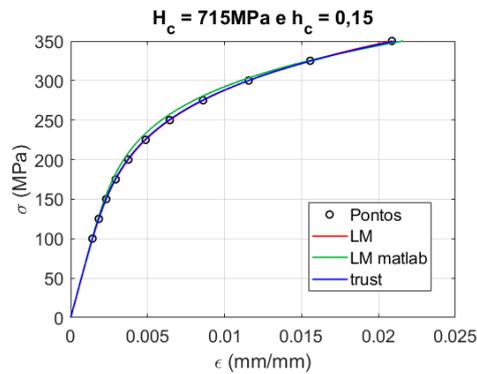
5.10(a): Chute 1.



5.10(b): Chute 2.



5.10(c): Chute 3.



5.10(d): Chute 4.

Figura 5.10: Ajuste da curva $\sigma\varepsilon$ cíclica para pontos criados.

que o algoritmo LM em escala log-log aqui desenvolvido possui vantagens significativas em relação aos ajustes que usam as várias opções do comando *lsqcurvefit* do *Matlab*.

5.2

Ajustes de modelos εN contendo efeito de carga média

5.2.1

Artifícios para análise

Na análise da qualidade dos ajustes de cada um dos modelos a seguir, é usado o coeficiente de determinação normalizado r^2 , definido em escala logarítmica pela Equação (5-1), o qual quantifica a variância dos dados em relação ao modelo avaliado. Assim, os valores de r^2 são sempre menores ou iguais a 1, sendo $r^2 = 1$ um ajuste perfeito.

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_i \{ \log(\varepsilon_i) - \log[f(N_i, R_i)] \}^2}{\sum_i \{ \log(\varepsilon_i) - M \}^2} \quad (5-1)$$

Na equação (5-1), o conjunto de dados possui m pontos, com amplitude de deformação $\varepsilon_i (i = 1, \dots, m)$, resultando em uma razão R_i , uma vida à fadiga

de N_i e é ajustado por um modelo do tipo $f(N_i, R_i)$. Por fim, a variável M representa a média dos valores de $\log(\varepsilon_i)$ [29].

Note que essa definição pode ser alterada, dependendo do modelo e da comparação que se pretende fazer. Para modelos de carga média que possuem parâmetros de dano diferentes de ε_i , como SWT, Li e Nihei, podem-se usar esses parâmetros de dano na Equação (5-1) em vez da amplitude de deformação, obtendo r^2 em relação ao valor de y_i . Nesses casos, a função de ajuste depende apenas de N_i , já que R_i é incorporado na variável y_i .

Outra adaptação possível é calcular o coeficiente de determinação em relação à vida. A Equação (5-2) usa essa adaptação, na qual M_N representa agora a média dos valores de $\log(N_i)$. Esse cálculo por sua vez pode ser feito em relação a N_i ou a N_i^* , esse último sendo usado e.g. nos modelos de Morrow Elastoplástico e de Dowling. Ao usar N^* , o coeficiente r^2 é calculado em relação a x_i , e novamente a função de ajuste não usa R_i , já que esse parâmetro faz parte de N^* .

$$r_N^2 = 1 - \frac{\sum_i \{ \log(N_i) - \log[f(\varepsilon_i, R_i)] \}^2}{\sum_i \{ \log(N_i) - M_N \}^2} \quad (5-2)$$

5.2.2

Apresentação e análise dos resultados

Para analisar modelos que quantificam o efeito da carga média no método εN , foram usados dados disponíveis na literatura de oito materiais diferentes, a saber aço 17MnCrMo33 [30], CC450SS Soln Ann [31], GSMnNi63 [30], Incoloy 901 [32], SAE 1015 [3, 33], Al 2024-T4 [34], AlMg4.5Mn [30] e Al 7075-T651 [35]. Cada material foi ajustado pelos modelos de Coffin-Manson, SWT, Dowling, Li e Nihei, usando a metodologia LM proposta. Note que os resultados apresentados a seguir para o modelo de Morrow EP não foram ajustados por LM em sua equação, são apenas os resultados usando as propriedades de Coffin-Manson, essas sim ajustadas por LM.

Para o ajuste de Coffin-Manson, foram usados apenas os pontos de testes sob carga totalmente alternada ($R \approx -1$), e para o ajuste de SWT apenas testes com tensão média positivas (no intervalo de tolerância $-1, 1 < R < 1$), por serem os intervalos nos quais esses modelos são aplicáveis. Já os modelos de Dowling, Li e Nihei podem ser aplicados para todos os pontos com $\sigma_{max} > 0$, ou seja, com $R < 1$, mesmo que $R \ll -1$.

Para analisar os intervalos de validade desses modelos, são plotadas as Figuras 5.11, 5.12 e 5.13, as quais contrapõem os ajustes dos pontos filtrados (i.e., com $-1, 1 < R < 1$) aos ajustes do total de pontos com $R < 1$. Para facilitar a visualização, os pontos ajustados estão circulado em vermelho para os gráficos

com filtro $-1,1 < R < 1$. A Tabela 5.5 relaciona os coeficientes de determinação r^2 desses ajustes, evidenciando para os casos filtrados a diferença entre o ajuste dos pontos selecionados (*selc*) e o ajuste total (*tot*).

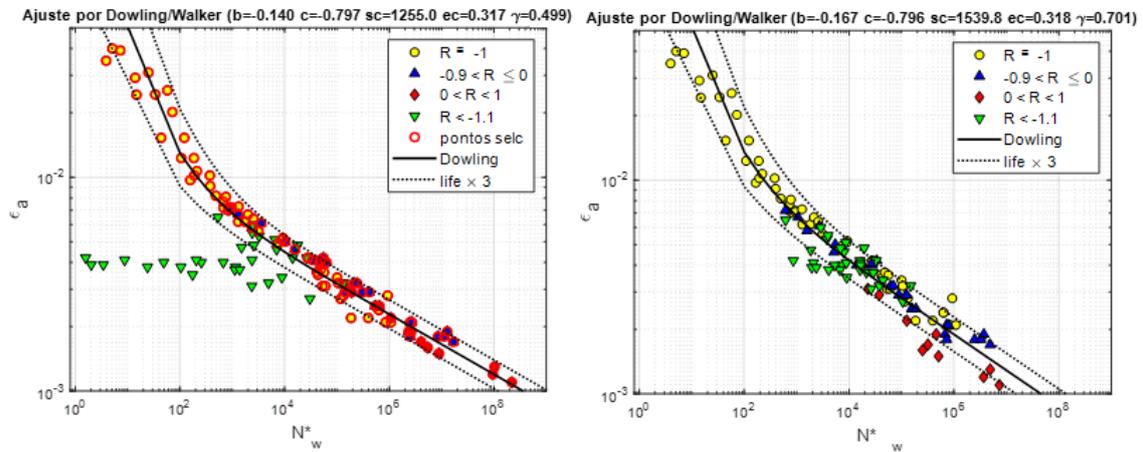


Figura 5.11: Ajustes de Dowling a pontos com $-1,1 < R < 1$ (esquerda) e com $R < 1$ (direita) medidos em testes de fadiga da liga Al 7076-T651.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1912748/CA

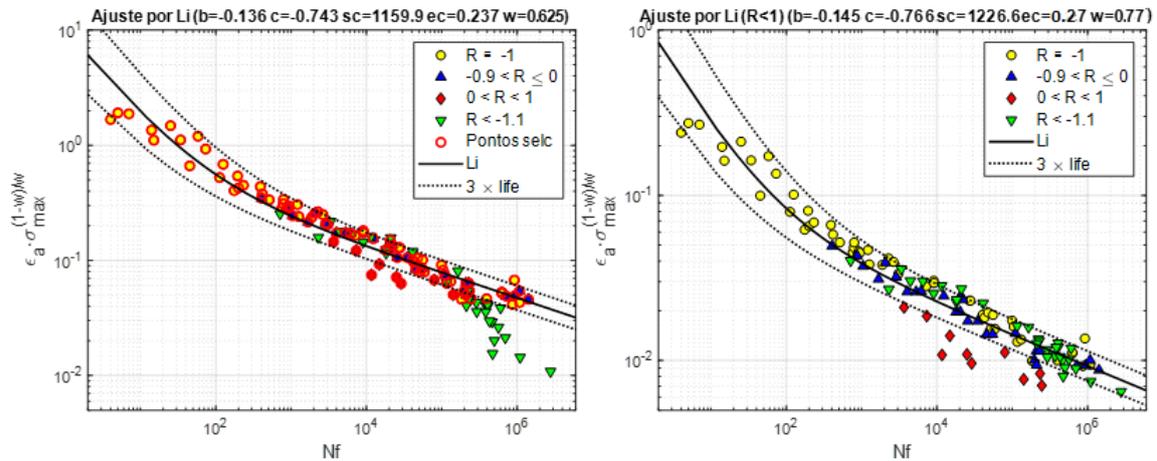


Figura 5.12: Ajustes de Li et. al a pontos com $-1,1 < R < 1$ (esquerda) e com $R < 1$ (direita) medidos em testes de fadiga da liga Al 7076-T651.

Note que, como esperado, os ajustes que usam apenas os testes feitos sob $-1,1 < R < 1$ não conseguem fazer boas previsões para pontos com carga média negativa, fazendo com que os pontos medidos sob $R < -1,1$ fiquem muito dispersos, como visto nos gráficos da esquerda das Figuras 5.11, 5.12 e 5.13. Por outro lado, o uso de todos os pontos medidos sob $R < 1$ prejudica significativamente o ajuste dos pontos medidos sob $-1,1 < R < 1$. Como listado na Tabela 5.5, essa queda de desempenho do ajuste sem filtro é mais acentuada no modelo de Nihei, no qual r_e^2 cai de 0,921 para 0,82. Esse prejuízo na

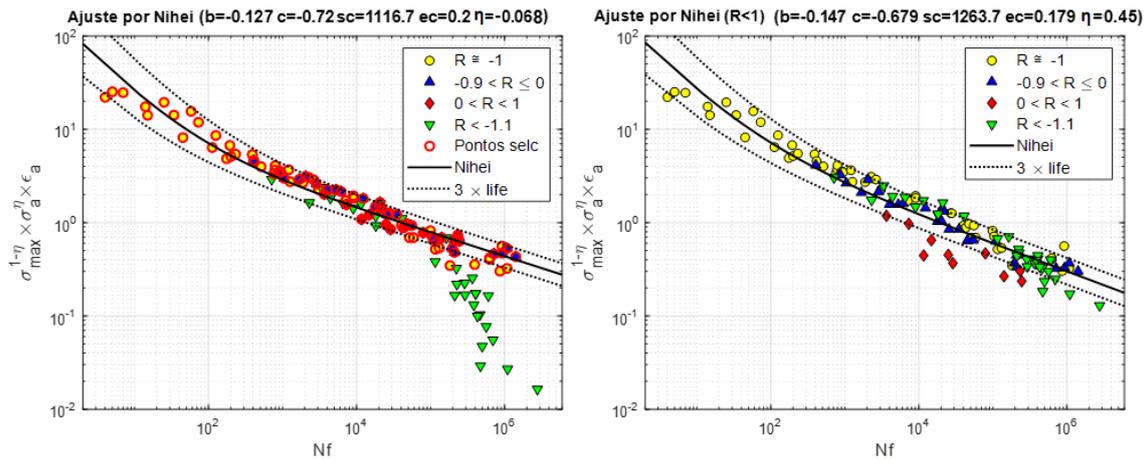


Figura 5.13: Ajustes de Nihei et. al a pontos com $-1,1 < R < 1$ (esquerda) e com $R < 1$ (direita) medidos em testes de fadiga da liga Al 7076-T651.

Tabela 5.5: Coeficientes de determinação para os ajustes dos pontos medidos em testes de fadiga sob $-1,1 < R < 1$ e $R < 1$ da liga Al 7075-T651.

	r_{ϵ}^2	r_N^2
DW (R<1)	0,938	0,932
DW _{total} (-1,1<R<1)	0,204	0,496
DW _{selc} (-1,1<R<1)	0,967	0,961
Li (R<1)	0,907	0,934
Li _{total} (-1,1<R<1)	0,786	0,793
Li _{selc} (-1,1<R<1)	0,927	0,939
Nihei (R<1)	0,82	0,913
Nihei _{total} (-1,1<R<1)	0,055	0,236
Nihei _{selc} (-1,1<R<1)	0,921	0,948

qualidade do ajuste pode ser observado também para os modelos de Dowling e Li.

Além disso, constata-se uma grande variação nos parâmetros de ajuste dos modelos para os casos com e sem filtro, sobretudo em relação aos expoentes γ , w e η . Isso indica que esses ajustes devem ser feitos separadamente, usando um expoente para os testes com $-1,1 < R < 1$ e outro para os testes com $R < -1,1$, como proposto em [29]. Portanto, neste trabalho são usados na análise dos ajustes apenas os pontos com carga média positiva (definida na faixa de tolerância $-1,1 < R < 1$). Sendo assim, são feitos a seguir ajustes para cada um dos materiais pelos modelos de Coffin-Manson, Morrow EP, SWT, Dowling, Li e Nihei respeitando as limitações desses modelos. As Tabelas 5.6 a 5.10 apresentam os valores dos parâmetros encontrados no ajuste desses modelos para os diferentes materiais, usando os algoritmos propostos incluindo a filtragem dos casos compressivos.

Tabela 5.6: Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de Coffin-Manson.

Material	σ_c	ε_c	b	c
Al 7075-T651	1091,3	0,186	-0,127	-0,698
Al 2024-T4	1007,82	0,514	-0,123	-0,75
AlMg 4.5 Mn	653,06	0,412	-0,098	-0,74
GSMnNi 6 3	659,74	0,115	-0,079	-0,526
SAE 1015	964,32	0,468	-0,132	-0,524
CC 450 SS Soln Ann	1219,16	2,579	-0,0516	-0,883
Aço 17 MnCrMo 33	1200,69	1,486	-0,068	-0,696
Incoloy 901	1825,09	0,184	-0,115	-0,726

Tabela 5.7: Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de SWT.

Material	σ_c	ε_c	b	c
Al 7075-T651	1125,75	0,201	-0,129	-0,716
Al 2024-T4	1128,62	0,272	-0,129	-0,634
AlMg 4.5 Mn	637,8	0,344	-0,094	-0,71
GSMnNi 6 3	635,1	0,094	-0,072	-0,482
SAE 1015	909,72	0,382	-0,124	-0,5
CC 450 SS Soln Ann	1235,89	0,694	-0,05	-0,716
Aço 17 MnCrMo 33	123,89	1,38	-0,059	-0,68
Incoloy 901	1779,2	0,138	-0,106	-0,685

Tabela 5.8: Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de Dowling.

Material	σ_c	ε_c	b	c	γ
Al 7075-T651	1255	0,317	-0,14	-0,797	0,499
Al 2024-T4	1289,37	0,347	-0,143	-0,654	0,547
AlMg 4.5 Mn	678,18	0,414	-0,102	-0,741	0,589
GSMnNi 6 3	686,03	0,089	-0,082	-0,474	0,638
SAE 1015	1012,06	0,369	-0,137	-0,495	0,843
CC 450 SS Soln Ann	2046,24	0,454	-0,108	-0,655	0,705
Aço 17 MnCrMo 33	1275,04	0,649	-0,075	-0,65	0,657
Incoloy 901	2020,46	0,183	-0,125	-0,725	0,657

As propriedades εN dos materiais apresentadas na Tabela 5.6 são compatíveis com a física dos testes de fadiga, com valores de b e c negativos e com ordens de grandeza de σ_c e ε_c corretas. Além disso, pode-se notar e.g. nos dados do AlMg4.5Mn mostrados nas Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 que os modelos foram muito bem ajustados aos pontos experimentais. Pode-se concluir que

Tabela 5.9: Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de Li et. al.

Material	σ_c	ε_c	b	c	w
Al 7075-T651	1159,9	0,237	-0,136	-0,743	0,625
Al 2024-T4	1172,29	0,347	-0,14	-0,669	0,698
AlMg 4.5 Mn	666,58	0,362	-0,101	-0,718	0,633
GSMnNi 6 3	651,38	0,0896	-0,0789	-0,475	0,761
SAE 1015	996,89	0,424	-0,138	-0,515	1,08
CC 450 SS Soln Ann	1413,42	1,199	-0,069	-0,785	0,777
Aço 17 MnCrMo 33	1235,45	1,234	-0,072	-0,669	0,685
Incoloy 901	1960,57	0,157	-0,123	-0,701	0,707

Tabela 5.10: Parâmetros de diferentes materiais para ajuste de Nihei et. al.

Material	σ_c	ε_c	b	c	η
Al 7075-T651	1116,76	0,2	-0,127	-0,718	-0,068
Al 2024-T4	1129,64	0,272	-0,129	-0,634	0,009
AlMg 4.5 Mn	685,83	0,319	-0,106	-0,696	0,336
GSMnNi 6 3	685,83	0,319	-0,106	-0,696	0,336
SAE 1015	953,16	0,414	-0,131	-0,488	0,453
CC 450 SS Soln Ann	1263,96	0,723	-0,054	-0,721	0,093
Aço 17 MnCrMo 33	1191,38	1,292	-0,067	-0,676	0,214
Incoloy 901	1880,36	0,131	-0,116	-0,675	0,236

os algoritmos LM aqui desenvolvidos apresentam desempenho satisfatório, ao menos para os materiais estudados.

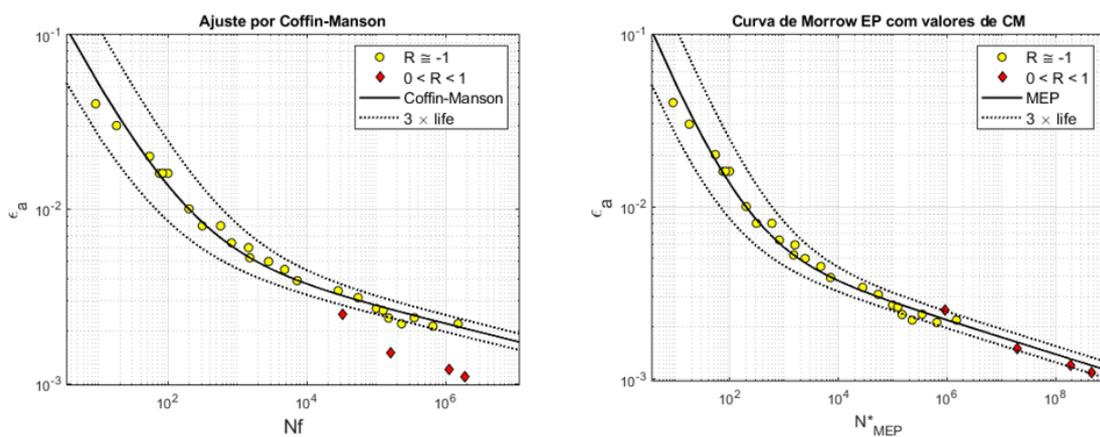


Figura 5.14: Ajuste de Coffin-Manson e MEP para AlMg 4.5 Mn.

Apesar de os algoritmos de ajuste propostos por LM conseguirem obter as calibragens ótimas, seu desempenho depende do modelo considerado. Estas

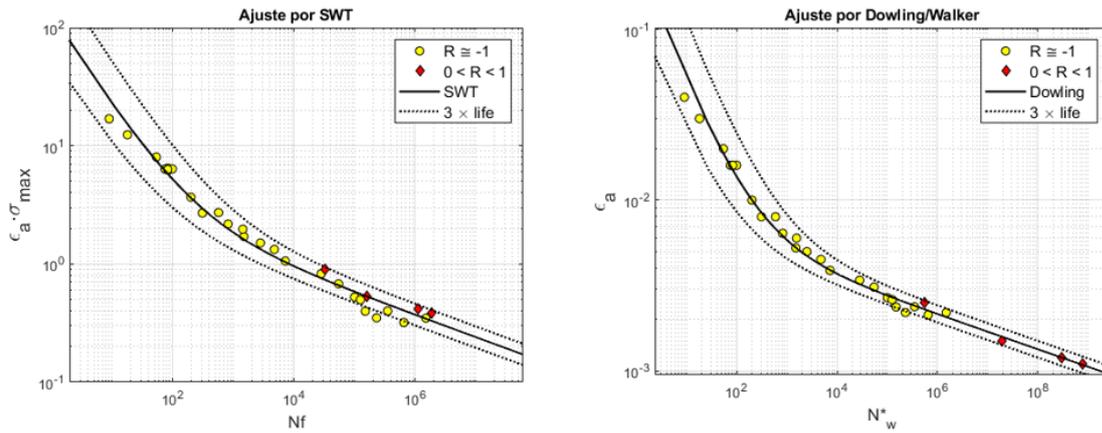


Figura 5.15: Ajuste de SWT e Dowling para AlMg 4.5 Mn.

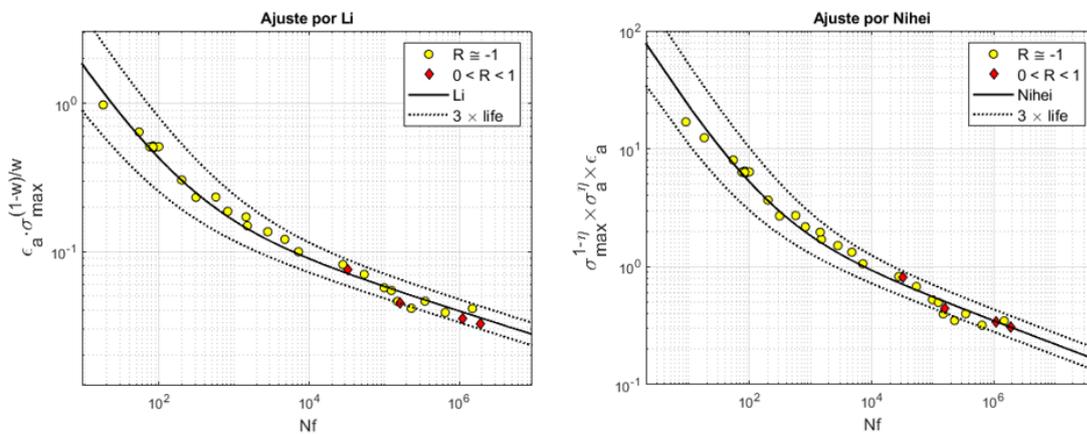


Figura 5.16: Ajuste de Li e Nihei para AlMg 4.5 Mn.

limitações são intrínsecas dos modelos em si, e não fruto de erro nas técnicas de ajuste propostas. Por exemplo, dependendo do modelo, há expoentes de Walker calibrados fora do intervalo esperado de 0 a 1. Em particular, no caso do ajuste de Li para o SAE 1015, o seu expoente de Walker w está muito próximo de 1, sugerindo que, para o conjunto de dados, o ajuste de CM se aproxima do ideal para esse material. Esse fato também pode ser observado quando comparamos os gráficos desses ajustes para o aço SAE 1015, apresentados nas Figuras 5.17 e 5.18. Já para o ajuste de Nihei do Al 7075-T651, o seu expoente de Walker η muito próximo de zero indica uma forte tendência ao ajuste de SWT, como mostrado nas Figuras 5.19 e 5.20.

Além do Al 7075-T651, os dados de Al 2024-T4 e CC 450 SS Soln Ann também apresentam $\eta \approx 0$, apontando que o ajuste ideal de Nihei, para esses casos específicos, tendem para o ajuste de SWT. Por fim, os γ próximos de 0, 5 para as ligas de alumínio Al 7075-T651, Al 2024-T4 e AlMg 4.5 Mn indicam que os ajustes de SWT são próximos dos ajustes ideais do modelo de Dowling,

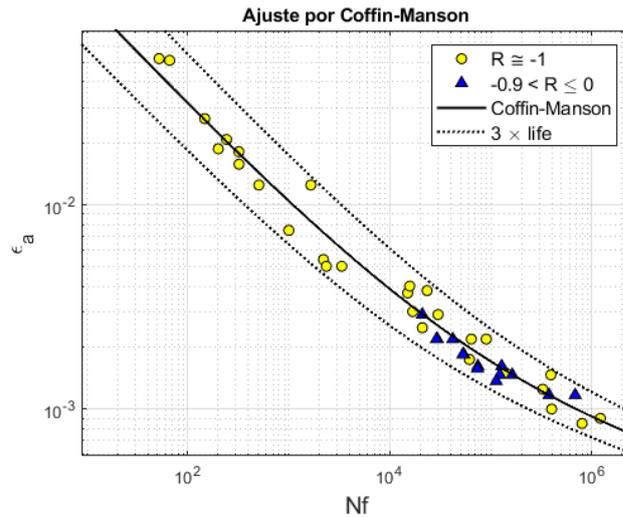


Figura 5.17: Ajuste de Coffin-Manson para SAE 1015.

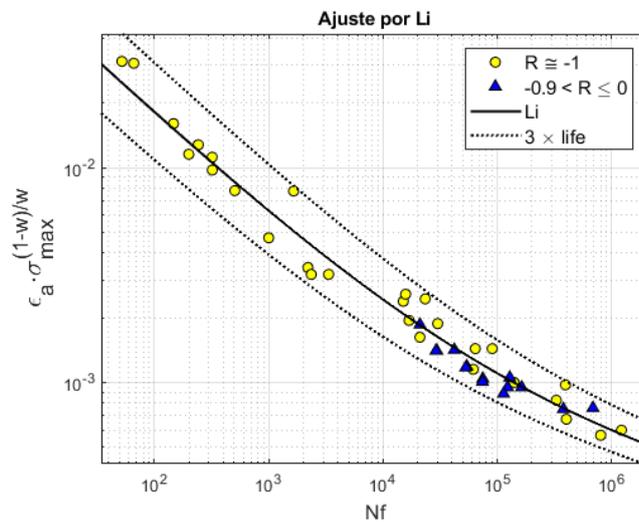


Figura 5.18: Ajuste de Li para SAE 1015.

considerando os conjuntos de dados em questão.

Para comparar agora o desempenho dos vários ajustes, foram montadas as Tabelas 5.11 a 5.14. Essas tabelas apresentam os coeficientes de determinação dos modelos para os conjuntos de pontos em relação a ϵ , a N , ao parâmetro de dano, e a N^* , respectivamente. Nessas tabelas, os subscritos de r^2 representam o modelo do ajuste.

Como esperado, o modelo de Coffin-Manson não ajusta bem os dados medidos sob carga média diferente de zero, pois esse modelo é proposto para testes com $R \approx -1$. Essa falta de precisão do modelo de Coffin-Manson pode ser visualizada por exemplo nos dados da liga Incoloy 901 na Figura 5.21. Ainda assim, é possível notar que o modelo de Coffin-Manson apresenta bom desempenho para o conjunto de dados do aço SAE 1015, indicando que esse

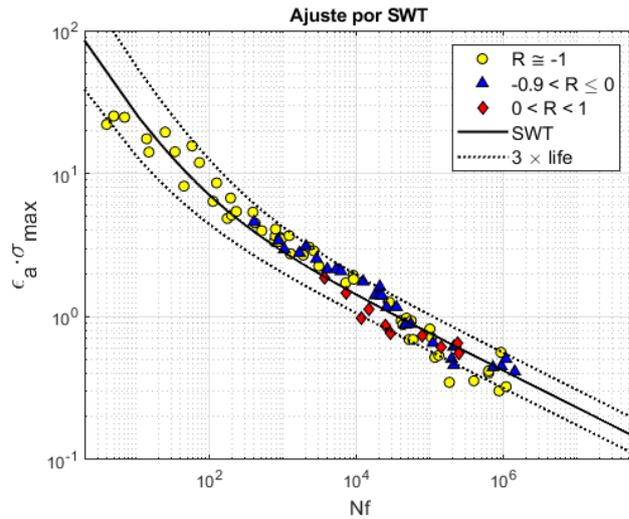


Figura 5.19: Ajuste de SWT para Al 7075-T651.

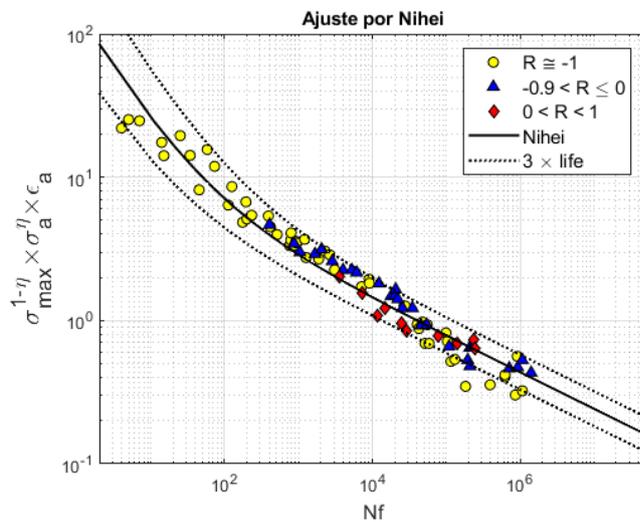


Figura 5.20: Ajuste de Nihei para Al 7075-T651.

Tabela 5.11: Coeficientes de determinação em ε .

Material	r_{CM}^2	r_{MEP}^2	r_{SWT}^2	r_{DW}^2	r_{Li}^2	r_{Nihei}^2
Al 7075-T651	0,920	0,847	0,941	0,967	0,927	0,921
Al 2024-T4	0,951	0,878	0,945	0,989	0,96	0,951
AlMg 4.5 Mn	0,972	0,948	0,986	0,989	0,982	0,976
GSMnNi 6 3	0,926	0,938	0,875	0,965	0,936	0,923
SAE 1015	0,953	0,975	0,966	0,976	0,975	0,958
CC 450 SS Soln Ann	0,786	0,65	0,815	0,93	0,856	0,814
Aço 17 MnCrMo 33	0,974	0,982	0,995	0,996	0,993	0,994
Incoloy 901	0,909	0,987	0,959	0,993	0,982	0,972

Tabela 5.12: Coeficientes de determinação em N.

Material	r_{CM}^2	r_{MEP}^2	r_{SWT}^2	r_{DW}^2	r_{Li}^2	r_{Nihei}^2
Al 7075-T651	0,444	0,857	0,95	0,961	0,939	0,948
Al 2024-T4	0,449	0,798	0,957	0,97	0,942	0,957
AlMg 4.5 Mn	0,706	0,974	0,971	0,985	0,982	0,981
GSMnNi 6 3	0,714	0,746	0,885	0,886	0,846	0,889
SAE 1015	0,971	0,945	0,966	0,971	0,97	0,973
CC 450 SS Soln Ann	-1,42	0,715	0,575	0,898	0,599	0,616
Aço 17 MnCrMo 33	0,554	0,979	0,985	0,986	0,973	0,982
Incoloy 901	0,909	0,972	0,953	0,986	0,975	0,976

Tabela 5.13: Coeficientes de determinação em parâmetro de dano.

Material	r_{SWT}^2	r_{Li}^2	r_{Nihei}^2
Al 7075-T651	0,955	0,949	0,954
Al 2024-T4	0,972	0,969	0,972
AlMg 4.5 Mn	0,982	0,986	0,986
GSMnNi 6 3	0,948	0,942	0,948
SAE 1015	0,972	0,974	0,976
CC 450 SS Soln Ann	0,832	0,856	0,838
Aço 17 MnCrMo 33	0,995	0,994	0,995
Incoloy 901	0,974	0,985	0,984

Tabela 5.14: Coeficientes de determinação em N*.

Material	r_{MEP}^2	r_{DW}^2
Al 7075-T651	0,874	0,977
Al 2024-T4	0,821	0,981
AlMg 4.5 Mn	0,98	0,991
GSMnNi 6 3	0,759	0,915
SAE 1015	0,959	0,973
CC 450 SS Soln Ann	0,684	0,933
Aço 17 MnCrMo 33	0,982	0,992
Incoloy 901	0,987	0,991

material foi pouco sensível ao efeito da carga média, provavelmente devido à relaxação da tensão média na presença de plasticidade localizada, amplificada pela baixa resistência ao escoamento desse material.

Ademais, destaca-se o bom desempenho dos modelos tipo Walker, sobretudo o modelo de Dowling, que apresenta os maiores valores de r^2 para quase

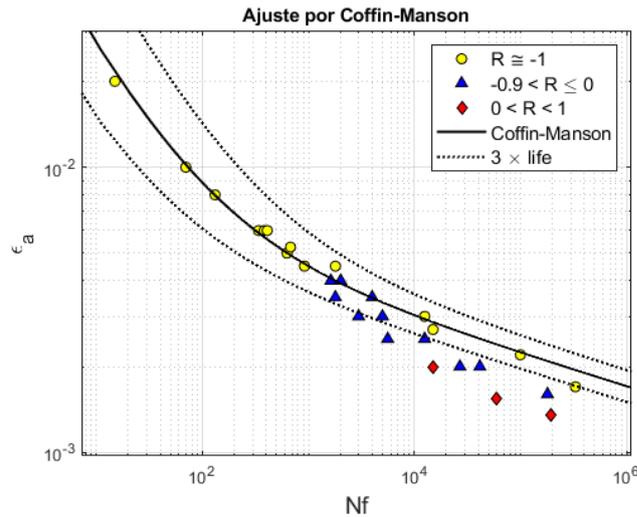


Figura 5.21: Ajuste de Coffin-Manson para Incoloy 901.

todos os conjuntos de pontos. Isso pode ser observado quando se compara os ajustes de Morrow EP e SWT nas Figuras 5.22 e 5.23, que são modelos clássicos, com o ajuste melhorado pelo modelo de Dowling para aço inox CC450SS Soln Ann na Figura 5.24.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1912748/CA

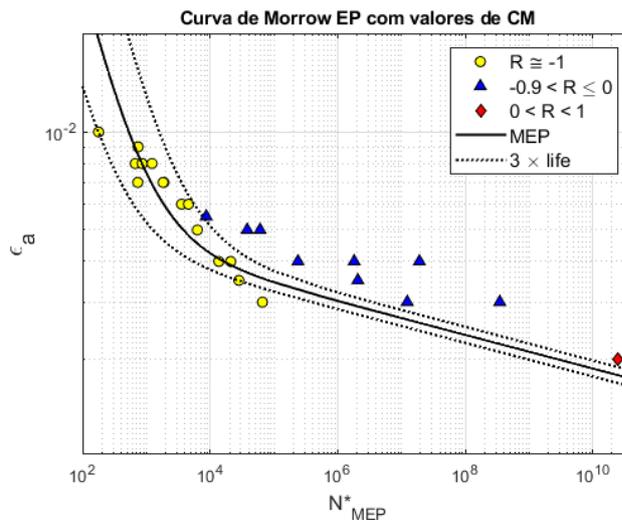


Figura 5.22: Ajuste de Morrow elastoplástico para CC 450 SS Soln Ann.

Por fim, pode-se analisar a qualidade do ajuste em diferentes seções das curvas de fadiga. Nessa análise, os dados experimentais são divididos em vidas predominantemente plásticas (vidas curtas ou baixo ciclo, seção horizontal 1 em relação a ϵ ou DP e seção vertical 3 em relação a N ou N^*), vidas próximas à vida de transição (vidas médias ou médio ciclo, seção horizontal ou vertical número 2) e vidas predominantemente elásticas (vidas longas ou alto ciclo, seção horizontal 3 em relação a ϵ ou DP e seção vertical 1 em relação a N ou N^*). Nessa comparação, são usados os dados da liga de alumínio Al 2024-T4

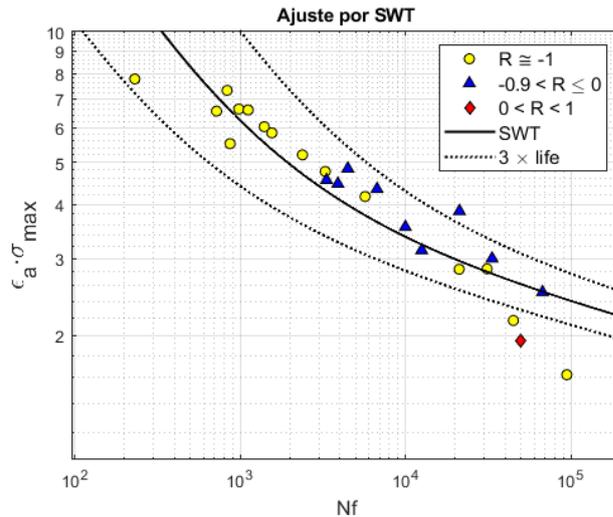


Figura 5.23: Ajuste de SWT para CC 450 SS Soln Ann.

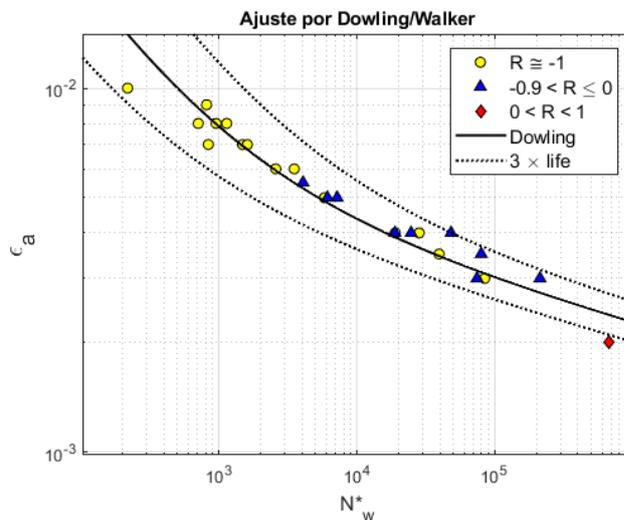


Figura 5.24: Ajuste de Dowling CC 450 SS Soln Ann.

e do aço 17MnCrMo33, que apresentam de forma bem definida essa divisão entre baixo, médio e alto ciclos. Assim, foram geradas as Tabelas 5.15 e 5.16 que listam os coeficientes de determinação por seção para a liga de alumínio e para o aço analisados, respectivamente.

Pode-se notar então que, como esperado, as seções de alto ciclo de forma geral possuem maior dispersão dos resultados, o que resulta em um valor menor do coeficiente de determinação e, conseqüentemente, um pior ajuste dos pontos experimentais. Isso pode ser verificado nas Tabelas 5.15 e 5.16 ao notar que os valores de r^2 das seções horizontais 1 em relação a ϵ ou DP (vidas curtas) são sempre mais próximos de 1 que para as seções horizontais 3 (vidas longas), ou seja melhor ajuste e menor dispersão em vidas curtas. Analogamente, os valores de r^2 das seções verticais 3 em relação a N ou N^* (vidas curtas) são

Tabela 5.15: Coeficientes de determinação por seção do Al 2024-T4.

	CM	MEP	SWT	Dowling	Li	Nihei
$r_{1\varepsilon}^2$	0,880	0,880	0,909	0,963	0,916	0,909
$r_{2\varepsilon}^2$	0,593	0,775	0,734	0,906	0,807	0,733
$r_{3\varepsilon}^2$	-1,74	-0,160	0,196	0,852	0,303	0,199
r_{1N}^2	-2,14	-0,064	0,681	0,873	0,721	0,684
r_{2N}^2	0,533	0,691	0,746	0,789	0,746	0,745
r_{3N}^2	0,929	0,929	0,961	0,977	0,957	0,960
r_{1PD}^2	-	-	0,931	-	0,926	0,931
r_{2PD}^2	-	-	0,847	-	0,845	0,847
r_{3PD}^2	-	-	0,619	-	0,264	0,617
r_{1N*}^2	-	-0,229	-	0,902	-	-
r_{2N*}^2	-	0,451	-	0,872	-	-
r_{3N*}^2	-	0,929	-	0,977	-	-

Tabela 5.16: Coeficientes de determinação por seção do aço 17 MnCrMo 33.

	CM	MEP	SWT	Dowling	Li	Nihei
$r_{1\varepsilon}^2$	0,958	0,947	0,985	0,978	0,981	0,983
$r_{2\varepsilon}^2$	0,890	0,958	0,95	0,983	0,967	0,963
$r_{3\varepsilon}^2$	-0,694	-1,45	0,885	0,743	0,682	0,734
r_{1N}^2	-13,565	0,479	0,755	0,629	0,209	0,535
r_{2N}^2	0,756	0,953	0,942	0,969	0,925	0,930
r_{3N}^2	0,971	0,972	0,990	0,983	0,987	0,989
r_{1PD}^2	-	-	0,989	-	0,984	0,988
r_{2PD}^2	-	-	0,944	-	0,964	0,961
r_{3PD}^2	-	-	0,572	-	0,388	0,521
r_{1N*}^2	-	-0,858	-	0,828	-	-
r_{2N*}^2	-	0,900	-	0,979	-	-
r_{3N*}^2	-	0,964	-	0,990	-	-

sempre mais próximos de 1 que para as seções verticais 1 (vidas longas), ou seja mais uma vez melhor ajuste e menor dispersão em vidas curtas.

Essas conclusões também ficam bem claras ao visualizar os ajustes pelos modelos de SWT e de Li para a liga de alumínio Al 2024-T4, mostrados nas Figuras 5.25 e 5.26, onde a maior dispersão para as vidas longas é notória.

Além disso, destaca-se que o ajuste por Morrow EP possui desempenho ruim, bem abaixo dos demais modelos que consideram o efeito de carga média para os pontos de alto ciclo. Tal constatação fica clara a partir da visualização dos dados do Al 2024-T4 e do aço 17MnCrMo33 nas Figuras 5.27 e 5.28. Note no entanto que, excepcionalmente, o modelo de Morrow EP não foi ajustado com um algoritmo próprio de LM, ele usou os parâmetros de Coffin-Manson. Um ajuste próprio provavelmente melhoraria o seu desempenho. Não obstante,

outros trabalhos já constataram a ineficiência desse modelo ao superestimar efeitos de carga média devido à sua correção do termo de dano plástico.

Por fim, conclui-se dos gráficos e tabelas apresentados que novamente os ajustes tipo Walker, em especial o modelo de Dowling, apresentam o melhor desempenho para as três diferentes seções analisadas.

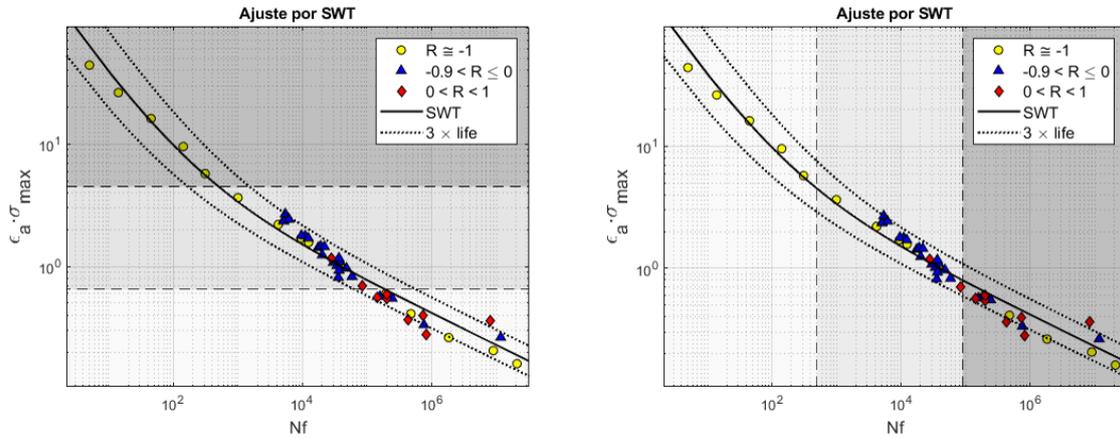


Figura 5.25: Ajuste de SWT por seções Al 2024-T4.

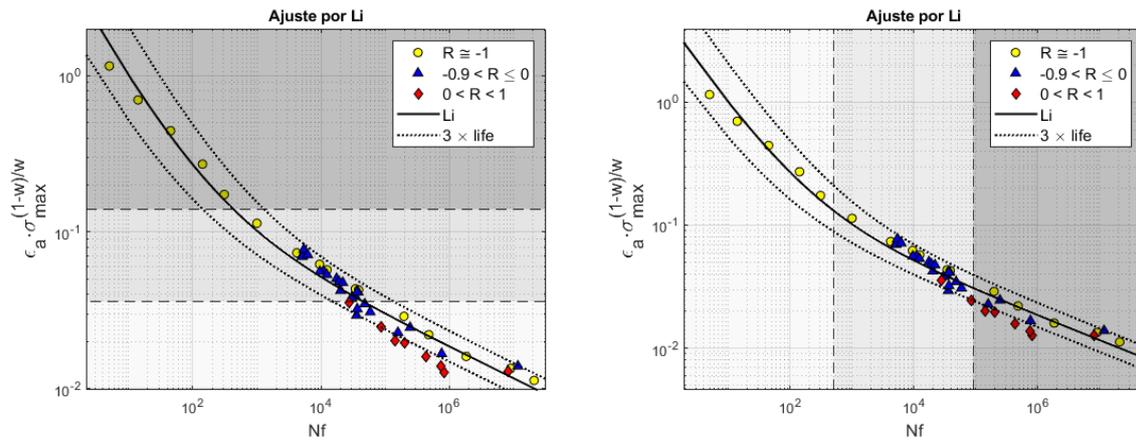


Figura 5.26: Ajuste de Li por seções Al 2024-T4.

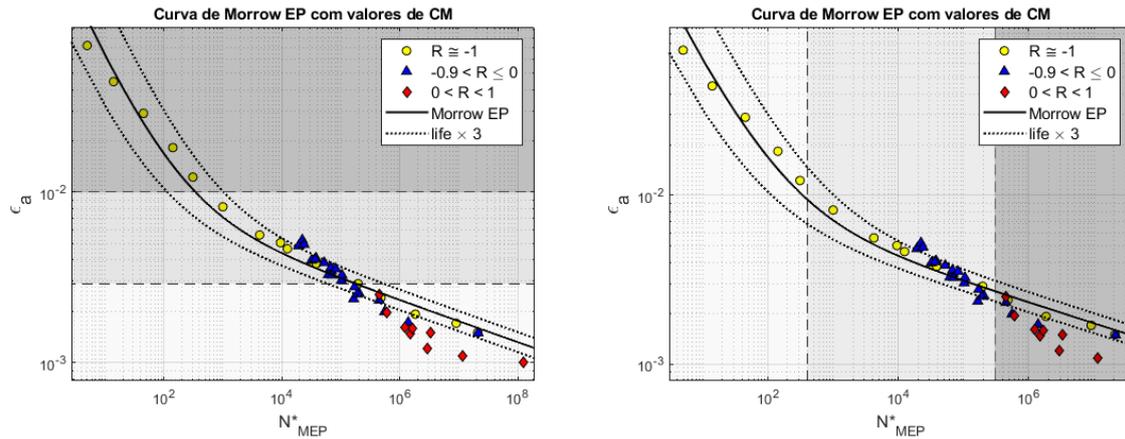


Figura 5.27: Ajuste de Morrow elstoplástico por seções Al 2024-T4.

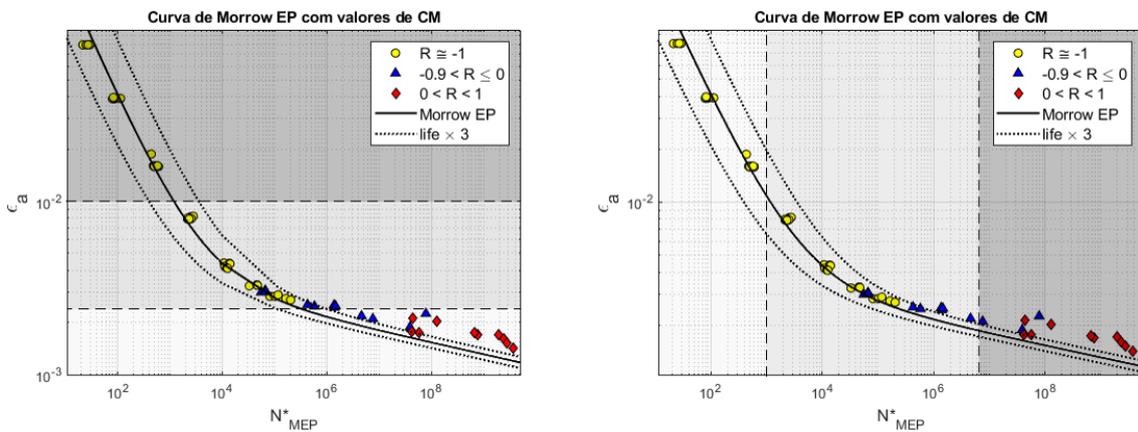


Figura 5.28: Ajuste de Morrow elstoplástico por seções aço 17 MnCrMo 33.

5.3 Ajuste do modelo SN para vidas longas

Para geração dos resultados SN, foram utilizados conjuntos de dados de 10 materiais diferentes, publicados da literatura. Os materiais utilizados são 42 CrMo4 [30], 49 MnVs 3 [30], 50 CrMo 4 [30], Al 2024-T4 [3], SAE 1045 (55HRC) [36], Ck 45 [30], GSMnNi 6 3 [30], SAE 1015 [33], Al 7075-T651 [35] e aço ductil 120-90-02 [37]. Esses conjuntos de dados foram ajustados pela Equação (2-31), a partir da qual são feitas análises quando à validade dessa equação, assim como análises probabilísticas a partir do conceito do fator de confiabilidade.

5.3.1

Avaliação do ajuste

O ajuste da Equação (2-31) aos vários conjuntos de dados é resumido na Tabela 5.17, que lista os parâmetros de ajuste obtidos para cada um dos dez materiais analisados. Dessa forma, é possível verificar se os valores obtidos correspondem às condições físicas do problema.

Tabela 5.17: Parâmetros de diferentes materiais para equação SN.

Material	σ_c	b	ψ_0	γ
Aço 42 CrMo 4	3161,5	-0,317	520,22	0,656
Aço 49 MnVs 3	4420,2	-0,350	348,36	0,827
Aço 50 CrMo 4	5278,1	-0,343	454,67	0,753
SAE 1045	10976,0	-0,333	735,91	0,469
Al 2024-T4	3514,0	-0,262	78,22	0,533
Aço Ck 45	5532,6	-0,402	342,58	0,551
GSMnNi 6 3	2549,0	-0,348	211,11	0,687
SAE 1015	1018,6	-0,183	84,88	0,757
Al 7075-T651	2401,9	-0,227	77,38	0,469
120-90-02	2792,8	-0,217	203,06	0,516

Note que todos os valores das propriedades listadas na Tabela 5.17 estão dentro dos intervalos esperados, com as ordens de grandeza de σ_c e ψ_0 corretas, b sempre negativos e γ entre 0 e 1. Para avaliar o desempenho desses ajustes aos pontos experimentais, foi gerada a Tabela 5.18, que lista os coeficientes de determinação baseados na Equação (5-1) para cada material em relação ao parâmetro de dano, à tensão σ e à vida N .

A Tabela 5.18 indica que a equação SN proposta é capaz de ajustar bem a maioria dos materiais estudados, com valores elevados de r^2 , considerando o efeito da carga média a partir de um expoente de Walker e o limite de fadiga no parâmetro de dano a partir de ψ_0 . Note que o ajuste dos dados do material GSMnNi 63 possui baixo valor de r^2 , porém isto é justificado pela grande dispersão dos dados desse material, como visto na Figura 5.29, e não da qualidade do ajuste, que conseguiu satisfatoriamente minimizar o erro médio quadrático.

Outro ponto que deve ser ressaltado é a importância do termo ψ_0 no ajuste proposto. Para tanto, foi gerado um novo ajuste, obtendo novos valores para σ_c e b a partir do mesmo γ , sem a adição do limite de fadiga no parâmetro de dano. As Figuras 5.30 e 5.31 mostram graficamente as diferenças entre esses ajustes para os aços 42 CrMo 4 e 49 MnVs 3. Assim, fica claro que

Tabela 5.18: Coeficientes de confiabilidade para a equação SN.

Material	r_{PD}^2	r_{σ}^2	r_N^2
Aço 42 CrMo 4	0,962	0,964	0,683
Aço 49 MnVs 3	0,974	0,962	0,788
Aço 50 CrMo 4	0,953	0,952	0,678
SAE 1045	0,876	0,684	0,711
Al 2024-T4	0,960	0,912	0,852
Aço Ck 45	0,907	0,757	0,468
GSMnNi 6 3	0,697	0,622	-0,366
SAE 1015	0,910	0,864	0,701
Al 7075-T651	0,924	0,831	0,769
120-90-02	0,975	0,979	0,817

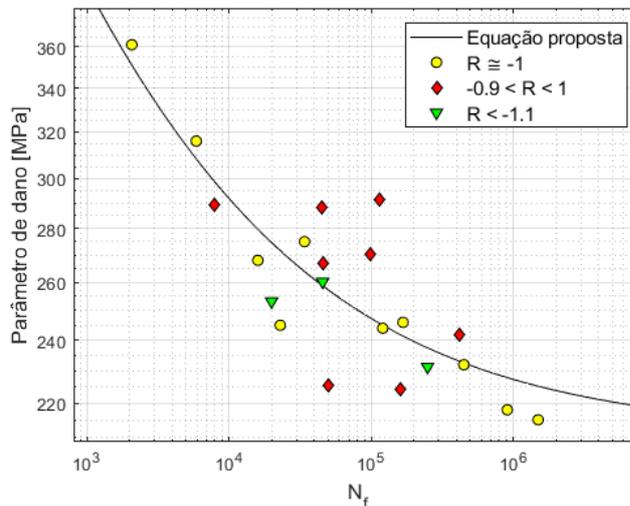


Figura 5.29: Ajuste da equação SN proposta para GSMnNi 63.

a equação proposta é capaz de ajustar melhor os dados, principalmente por melhor ajustar a transição suave de curvatura observada até o limite de fadiga, com sua assíntota horizontal.

5.3.2

Avaliação probabilística

Nesta seção, a dispersão dos dados SN é associada a um fator de confiabilidade k_e . Para tal, foram avaliados três modelos diferentes para obter k_e . O primeiro segue o procedimento usado por Shigley e pela norma FKM, considerando que a variável aleatória k_e possui uma distribuição Normal ou Gaussiana com um coeficiente de variação fixo $COV = 8\%$. Já no segundo e no terceiro modelos, a variável aleatória foi considerada como sendo a diferença

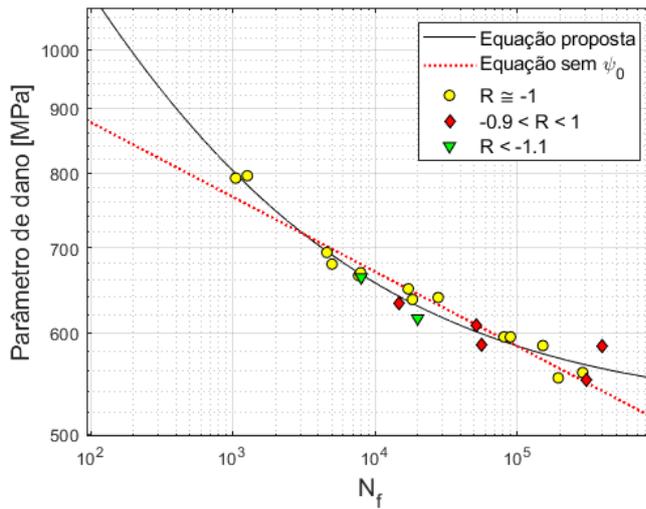


Figura 5.30: Verificação da importância do uso de ψ_0 para 42 CrMo 4.

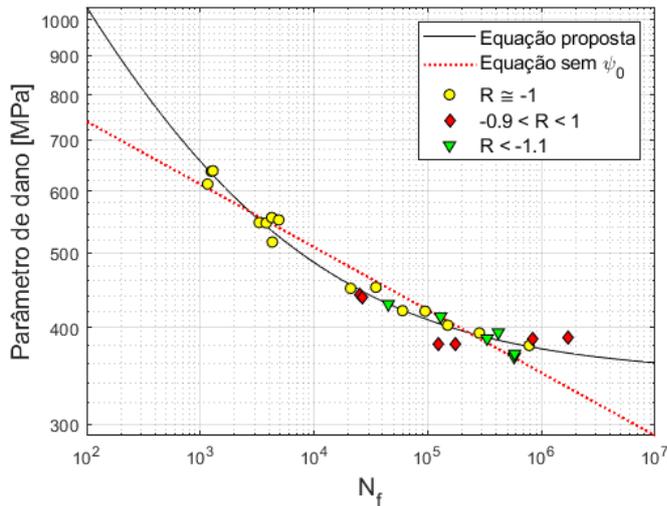
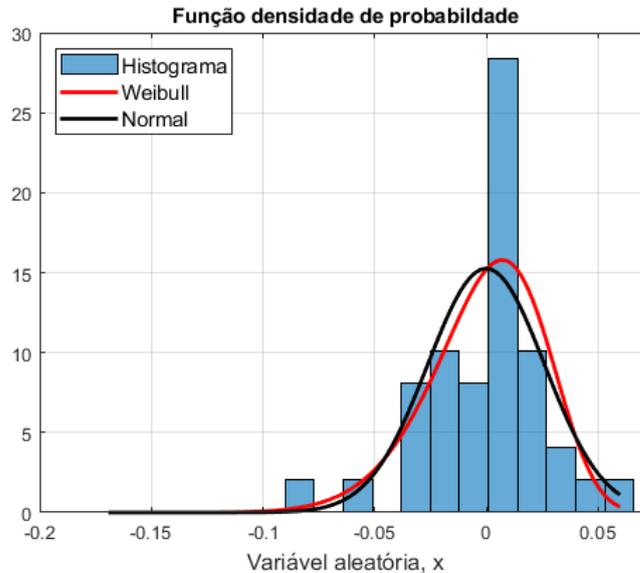


Figura 5.31: Verificação da importância do uso de ψ_0 para 49 MnVs 3.

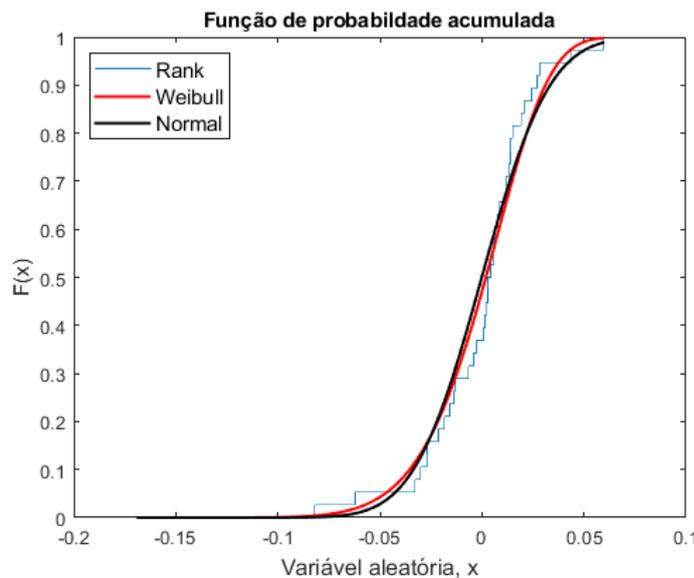
entre os logaritmos do parâmetro de dano e do lado direito da equação SN proposta. Como consequência disso obtém-se, por definição, o logaritmo do próprio fator de confiabilidade como a variável aleatória. O segundo modelo considera que $\log(k_e)$ (o logaritmo de k_e na base 10) deve ser ajustado a partir de uma distribuição Normal, enquanto que o terceiro a partir de uma distribuição de Weibull três parâmetros (ou Weibull 3P), ambos usando COV diferentes para cada conjunto de dados, que serão identificados em vez de assumidos como 8%.

Espera-se que a distribuição de Weibull 3P ajuste melhor esta variável aleatória, quando comparada com a distribuição Normal. Isso porque ela é mais versátil, possibilitando ajustes assimétricos, nos quais a média, a moda e

a mediana podem ter valores diferentes. Para verificar essa ideia, foram gerados os gráficos das Figuras 5.32 e 5.33, que comparam os ajustes da distribuição Normal com os da distribuição de Weibull 3P a partir das suas funções de distribuição de probabilidade e de probabilidade acumulada, assumindo a variável aleatória como $\log(k_e)$. Esses gráficos foram gerados para o aço SAE 1015 e a liga de alumínio Al 7075-T651. Além disso, foi gerada a Tabela 5.19, que apresenta os parâmetros obtidos para a distribuição de Weibull 3P para cada material, a fim de facilitar a análise do comportamento dessa distribuição.



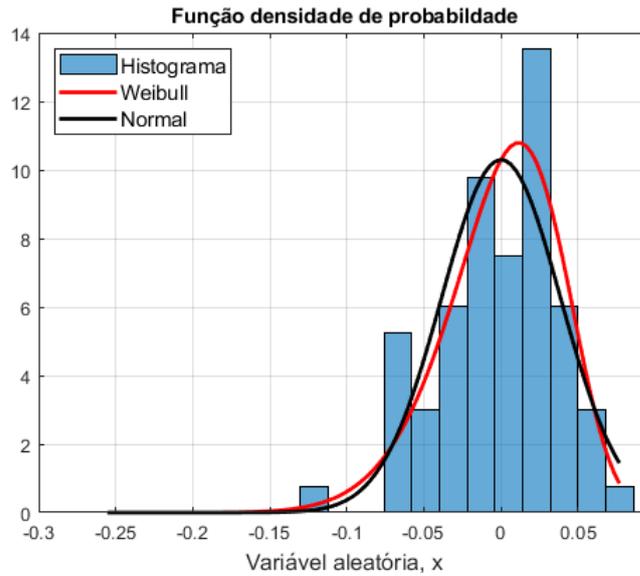
5.32(a): Função de distribuição de probabilidade.



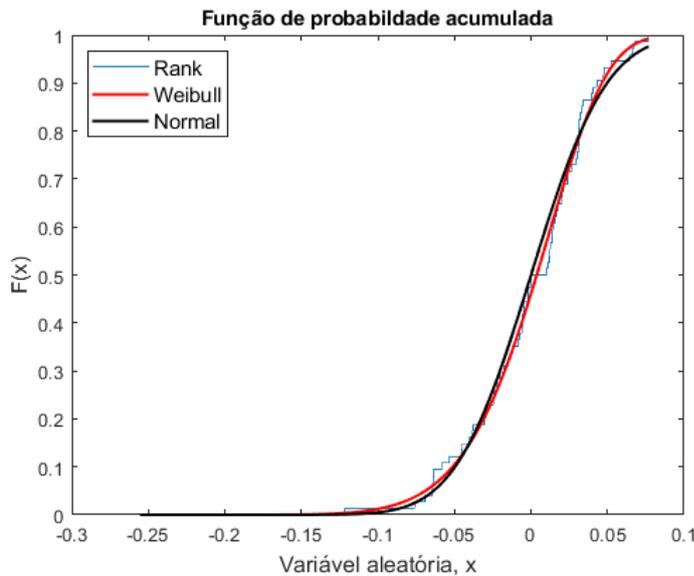
5.32(b): Função de probabilidade acumulada.

Figura 5.32: Distribuição de Weibull e Normal de $\log(k_e)$ para SAE 1015.

Uma vez que o fator de confiabilidade k_e (no primeiro modelo) ou seu



5.33(a): Função de distribuição de probabilidade.



5.33(b): Função de probabilidade acumulada.

Figura 5.33: Distribuição de Weibull e Normal de $\log(k_e)$ para Al 7075-T651.

logaritmo $\log(k_e)$ (nos dois modelos propostos) é a variável aleatória das distribuições estudadas, é possível calcularmos k_e para cada confiabilidade a partir da inversa da função de probabilidade acumulada da respectiva distribuição. Para o caso de Shigley, basta obtermos a inversa da FPA da distribuição Normal com média 1 e desvio padrão 0,08, uma vez que k_e é assumida como a variável aleatória nesse caso. Já para a Normal e Weibull 3P dos métodos propostos, que adota o logaritmo de k_e na base 10, o valor de k_e é portanto igual a 10 elevado à inversa da FPA, utilizando os respectivos parâmetros ajustados das distribuições.

Tabela 5.19: Parâmetros de Weibull ajustados para $\log(k_e)$ para diferentes materiais.

Material	β	θ	x_0
Aço 42 CrMo 4	2,49	0,022	-0,019
Aço 49 MnVs 3	4,63	0,053	-0,049
Aço 50 CrMo 4	3,24	0,040	-0,036
SAE 1045	10,52	0,288	-0,275
Al 2024-T4	5,25	0,165	-0,152
Aço Ck 45	1,49	0,029	-0,026
GSMnNi 6 3	2,40	0,078	-0,070
SAE 1015	7,64	0,179	-0,169
Al 7075-T651	7,90	0,272	-0,255
120-90-02	3,98	0,057	-0,052

Dessa forma, é possível gerar as Tabelas 5.20 e 5.21, que apresentam os valores calculados de k_e com confiabilidade de 90%, 95%, 97,5%, 99%, 99,9%, 99,99% e 99,999% para cada um dos materiais, usando os modelos Normal e Weibull 3P, respectivamente, propostos para descrever $\log(k_e)$. Os k_e de Shigley, obtidos do modelo 1, são os mesmos da Tabela 2.1. Ademais, para melhor visualizar as confiabilidades aplicadas à equação SN, foi plotado o gráfico 5.34 da liga de alumínio Al 7075-T651. Nesse gráfico, as curvas de confiabilidade foram obtidas a partir da multiplicação da equação SN pelos k_e de Weibull com confiabilidades R_r iguais a 50%, 90%, 9,75%, 99,9% e 99,999%.

Tabela 5.20: Fatores de confiabilidade para modelo normal proposto.

Material	$k_e(90\%)$	$k_e(95\%)$	$k_e(97,5\%)$	$k_e(99\%)$	$k_e(99,9\%)$	$k_e(99,99\%)$	$k_e(99,999\%)$
42 CrMo 4	0,975	0,968	0,962	0,955	0,941	0,929	0,919
49 MnVs 3	0,964	0,954	0,945	0,936	0,915	0,900	0,885
50 CrMo 4	0,964	0,954	0,945	0,935	0,915	0,899	0,885
SAE 1045	0,909	0,885	0,864	0,841	0,794	0,758	0,728
Al 2024-T4	0,909	0,884	0,864	0,840	0,794	0,757	0,727
Ck 45	0,946	0,931	0,919	0,904	0,875	0,852	0,832
GSMnNi 6 3	0,911	0,887	0,868	0,845	0,800	0,765	0,736
SAE 1015	0,926	0,906	0,888	0,869	0,830	0,799	0,773
Al 7075-T651	0,892	0,864	0,840	0,813	0,759	0,718	0,684
120-90-02	0,958	0,946	0,936	0,925	0,902	0,883	0,867

Como esperado, o método Shigley/FKM tende a ser mais conservativo em quase todos os casos, apresentando valores menores de k_e quando comparados

Tabela 5.21: Fatores de confiabilidade para modelo Weibull 3P proposto.

Material	$k_e(90\%)$	$k_e(95\%)$	$k_e(97,5\%)$	$k_e(99\%)$	$k_e(99,9\%)$	$k_e(99,99\%)$	$k_e(99,999\%)$
42 CrMo 4	0,976	0,971	0,967	0,964	0,959	0,957	0,956
49 MnVs 3	0,964	0,954	0,945	0,936	0,919	0,909	0,903
50 CrMo 4	0,964	0,956	0,949	0,942	0,932	0,926	0,924
SAE 1045	0,908	0,876	0,848	0,816	0,745	0,700	0,663
Al 2024-T4	0,902	0,874	0,850	0,825	0,779	0,752	0,734
Ck 45	0,955	0,950	0,946	0,944	0,942	0,941	0,941
GSMnNi 6 3	0,914	0,897	0,886	0,875	0,861	0,855	0,853
SAE 1015	0,922	0,896	0,875	0,849	0,801	0,767	0,742
Al 7075-T651	0,889	0,853	0,822	0,788	0,721	0,675	0,642
120-90-02	0,956	0,944	0,934	0,924	0,908	0,899	0,893

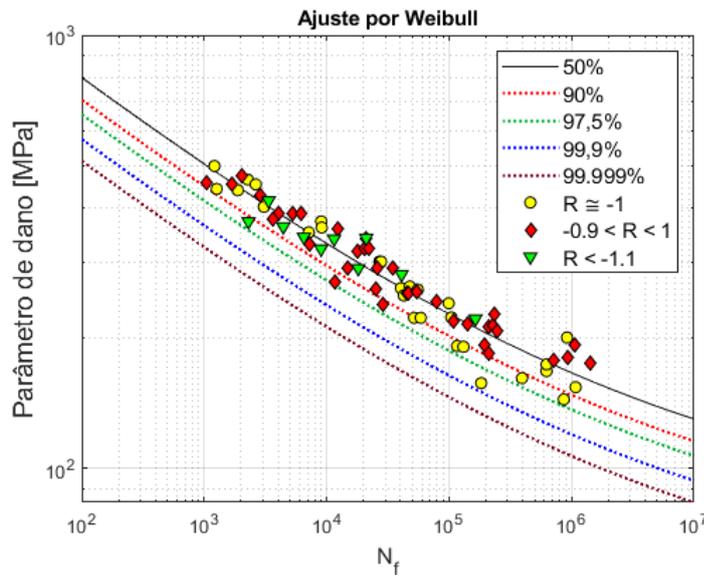


Figura 5.34: Diferentes confiabilidades ajustadas por Weibull 3P para Al 7075-T651.

aos obtidos pela Normal e por Weibull 3P com COV ajustados aos dados reais. Isso pode ser explicado pelo conservadorismo de assumir sempre $COV = 8\%$. A Figura 5.35 exemplifica um desses casos em que Shigley é muito conservativo, plotando em um mesmo gráfico os k_e para diferentes confiabilidades dos três modelos para o aço 50 CrMo 4. A Figura 5.36 compara as curvas de confiabilidade de Shigley com as dos modelos logarítmicos propostos usando a hipótese Normal e Weibull 3P para confiabilidade $R_r = 99,9\%$ usando dados do mesmo material.

Todavia, há casos em que o modelo de Shigley é bem próximo dos logarítmicos Normal e Weibull propostos. Isso acontece quando o COV da

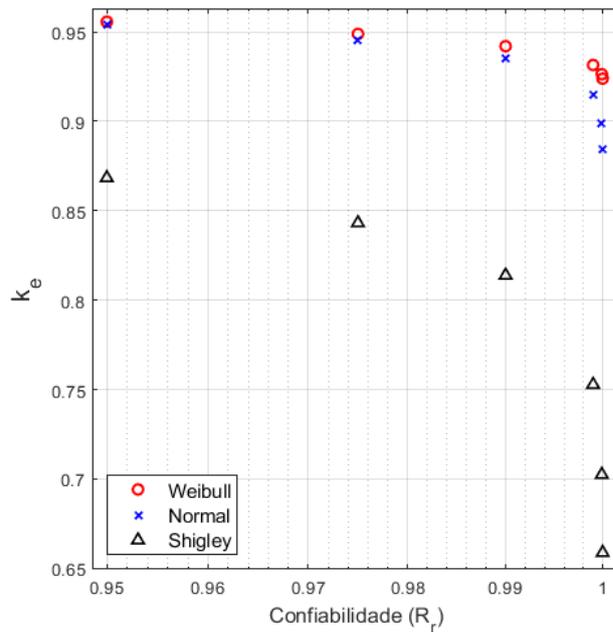


Figura 5.35: Comparação dos fatores de confiabilidade de Shigley, Normal e Weibull para o aço 50 CrMo 4, para diferentes confiabilidades desejadas.

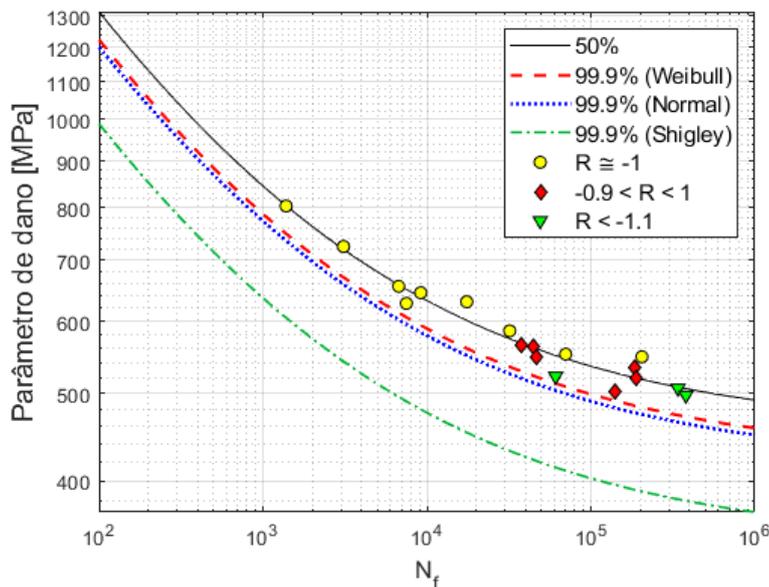


Figura 5.36: Curvas de confiabilidade de Shigley, Normal e Weibull com $R_r = 99,9\%$ para o aço 50 CrMo 4.

amostra é de fato próximo de 8%, e a distribuição da variável aleatória é simétrica, não havendo grande diferença entre a Normal e Weibull 3P. Esse caso pode ser exemplificado a partir das Figuras 5.37 e 5.38, análogas às Figuras 5.35 e 5.36, usando dados da liga de alumínio Al 2024-T4.

Outro ponto que merece atenção é o fato de que o modelo proposto por

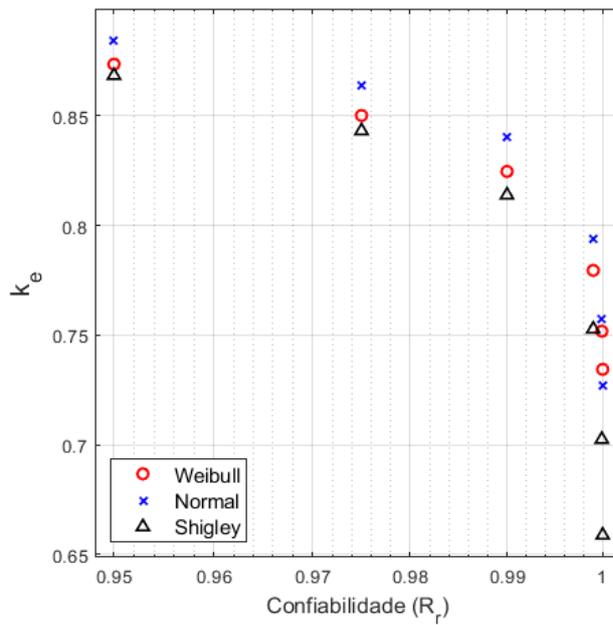


Figura 5.37: Comparação dos fatores de confiabilidade de Shigley com os logarítmicos propostos assumindo Normal e Weibull, para o Al 2024-T4.

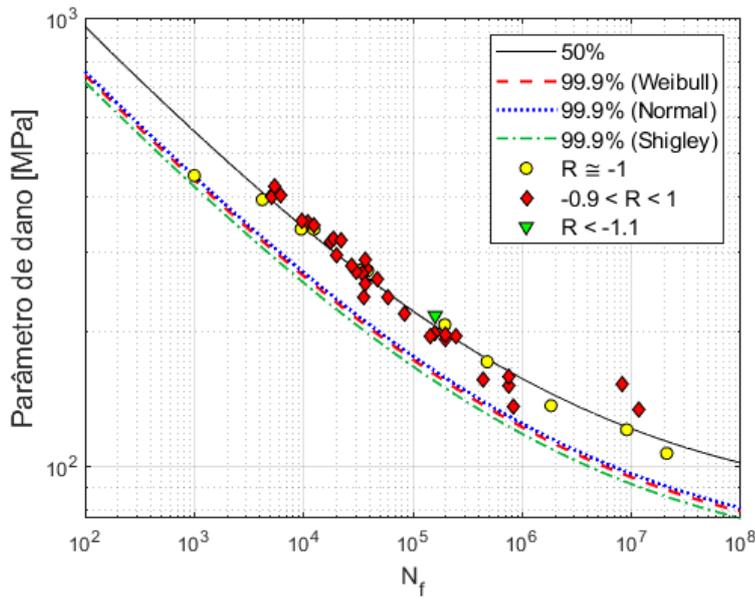


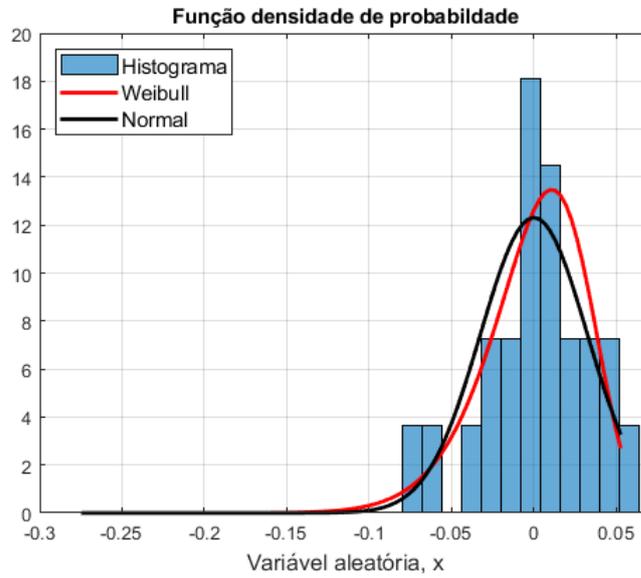
Figura 5.38: Curvas de confiabilidade de Shigley, e os logarítmicos propostos assumindo Normal e Weibull, com $R_r = 99,9\%$ para o Al 2024-T4.

Weibull 3P sempre resulta em ajustes melhores às distribuições da variável aleatória logarítmica $\log(k_e)$, uma vez que possui mais parâmetros que o modelo proposto baseado na Normal. Os casos em que Weibull 3P obtém fatores de confiabilidade menores do que a Normal nos modelos logarítmicos propostos ocorrem para distribuições de Weibull que possuem uma distorção

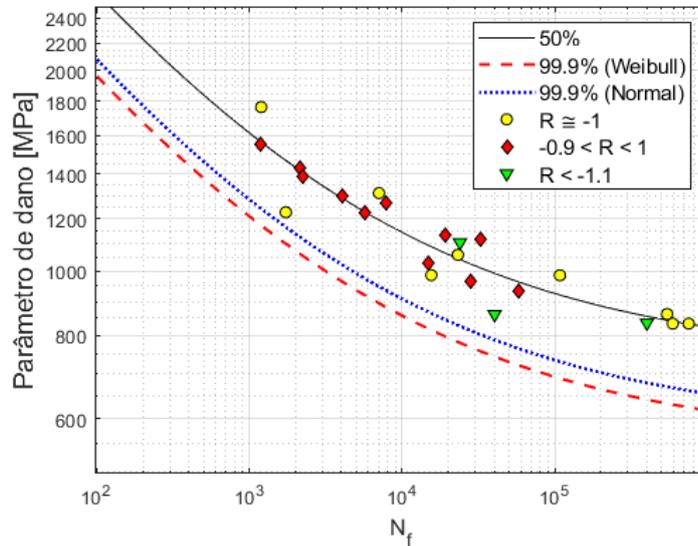
(skewness) negativa, gerada por um valor de $\beta > 3,6$, como analisado a partir da Tabela 5.19. Nestes casos, a cauda da FDP de Weibull 3P é mais longa para a esquerda, em vez de simétrica como na Normal.

Essa questão pode ser melhor compreendida comparando as Figuras 5.39, 5.40 e 5.41, que apresentam casos de distribuições de Weibull 3P com $\beta > 3,6$, com $\beta \approx 3,6$ e com $\beta < 3,6$, respectivamente. Essas figuras mostram os gráficos (a) com o histograma e as FDP de Weibull e da Normal propostas, o que possibilita visualizar a distorção das distribuições. Em adição, os gráficos (b) dessas figuras apresentam as curvas de confiabilidade de 99,9%, a partir das quais é possível comparar o desempenho das hipóteses de Weibull e Normal propostas em cada caso.

Dessa forma, fica claro que os fatores de confiabilidade obtidos pela proposta por Weibull tendem a ser menores que o modelo Normal proposto quando a distribuição possui uma distorção negativa, exemplificada pelo material SAE 1045. O contrário acontece quando a distribuição possui uma distorção positiva, como observado no aço Ck 45. Por fim, quando a distribuição possui uma distorção próxima de zero, a distribuição de Weibull se aproxima da distribuição Normal, o que resulta em valores de k_e bastante próximos para os modelos propostos, como mostrado no caso do ferro fundido 120-90-02.

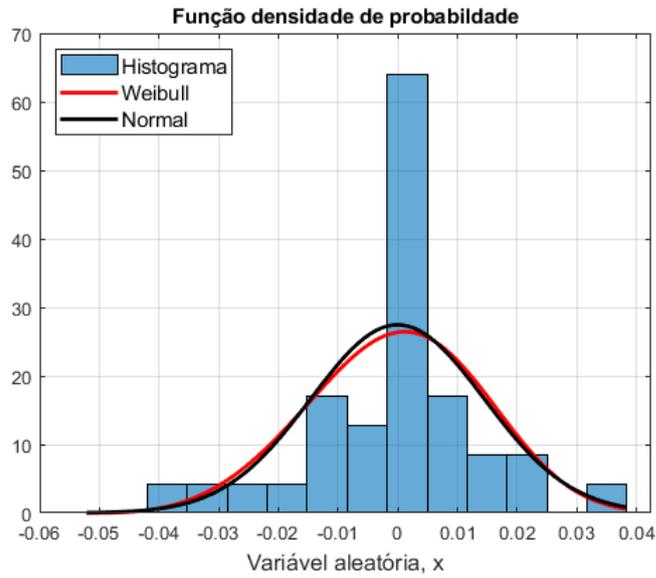


5.39(a): Função de densidade de probabilidade.

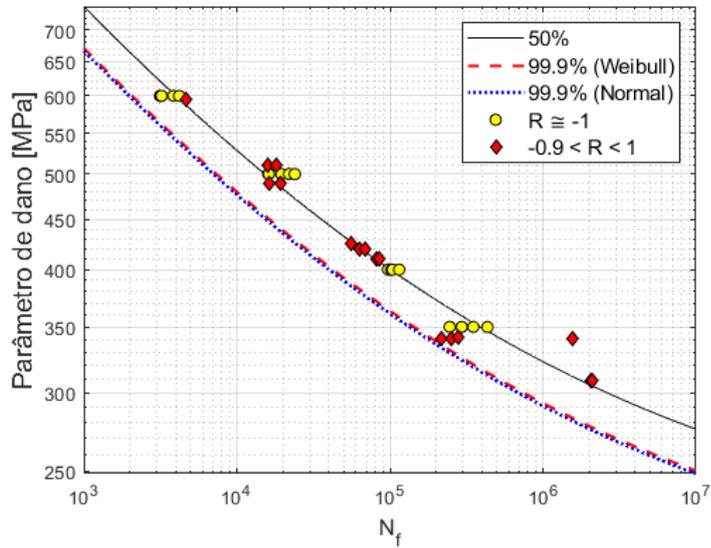


5.39(b): Curvas de confiabilidade de $R_r = 99,9\%$.

Figura 5.39: Modelos propostos para o caso em que $\beta > 3,6$, para o aço SAE 1045.

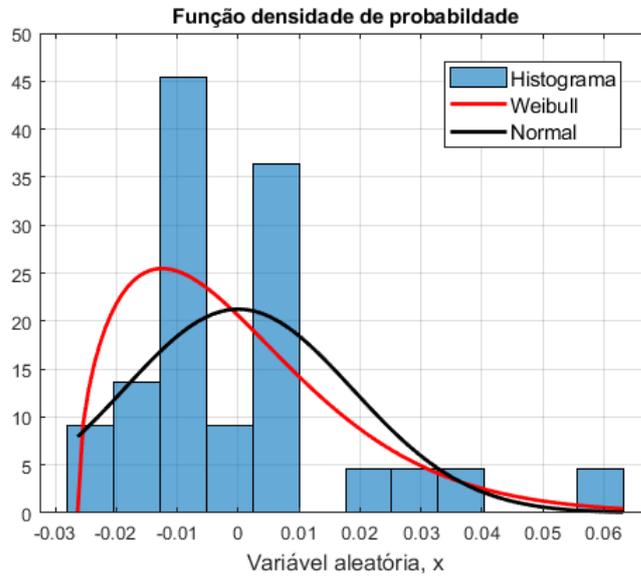


5.40(a): Função de densidade de probabilidade.

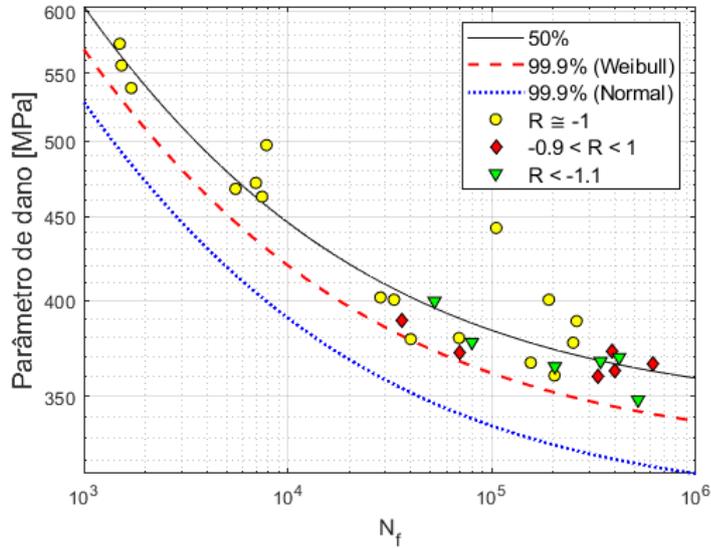


5.40(b): Curvas de confiabilidade de $R_r = 99,9\%$.

Figura 5.40: Modelos propostos para o caso em que $\beta \approx 3,6$, para o ferro fundido 120-90-02.



5.41(a): Função de densidade de probabilidade.



5.41(b): Curvas de confiabilidade de $R_r = 99,9\%$.

Figura 5.41: Modelos propostos para o caso em que $\beta < 3,6$, para o aço Ck 45.

6

Conclusões

Neste trabalho, foram introduzidos métodos de ajustes otimizados para diversas equações envolvidas nos métodos εN e SN, usando uma versão logarítmica dessas equações para aplicação do método de Levenberg-Marquardt (LM). Além disso, uma equação SN que modela explicitamente o limite de fadiga foi ajustada por um procedimento iterativo proposto. Em seguida, uma análise estatística nos dados SN permitiu desenvolver uma versão probabilística dessa equação, gerando curvas de percentis para qualquer confiabilidade desejada no projeto a vidas longas.

A verificação das equações de Coffin-Manson e Ramberg-Osgood se baseou em ensaios εN de um alumínio 6351-T6. Concluiu-se que é muito importante ajustar separadamente as partes elástica e plástica das equações deformação-vida, pois somente assim é possível garantir a validade física dos parâmetros encontrados. O outro ponto observado é que, para se levantar uma curva εN confiável, dez corpos de prova não foram suficientes para garantir um bom ajuste. Entretanto, nenhum desses dois tópicos é devidamente abordado na norma ASTM E606, que padroniza os ensaios εN . Já para a análise do ajuste da equação de Ramberg-Osgood, é possível salientar a importância de filtrar deformações plásticas muito pequenas, e a superioridade do ajuste LM proposto, partindo de equações linearizadas, frente aos pré-programados no ambiente computacional *Matlab*, uma vez que converge em apenas uma iteração e independe da estimativa inicial.

A análise de modelos εN de carga média, desenvolvida a partir de dados da literatura, verificou que os algoritmos LM propostos ajustam bem os dados experimentais, e que os modelos com expoente de Walker possuem um melhor desempenho no ajuste dos dados. Entretanto, ressalta-se que esses modelos estudados também possuem limitações, não sendo adequados para ajustar pontos de tensões médias compressivas e trativas de forma simultânea. Sugere-se que diferentes expoentes de Walker sejam calibrados para casos de tensão média tratativa e compressiva. Naturalmente, os modelos tipo Walker exigem mais esforço experimental quando comparados aos modelos clássicos, uma vez que é preciso calibrar seus expoentes a partir de testes com carga média diferente de zero.

Por fim, a partir da avaliação dos resultados de vida longa, foi possível verificar não só o bom comportamento da equação SN de carga média proposta, que inclui um expoente de Walker e incorpora explicitamente o limite de fadiga como parâmetro ajustável, mas também o bom funcionamento do algoritmo LM desenvolvido em seu ajuste, que nesse caso requer processo iterativo. Além disso, conclui-se que fatores de confiabilidade k_e difundidos na literatura (e.g. por Shigley) para projetos SN nem sempre representam a realidade dos problemas, sendo muitas vezes conservativos em excesso. A alternativa apresentada propôs avaliar esse fatores de confiabilidade a partir de funções de distribuição de probabilidade mais versáteis, como o caso de Weibull em sua formulação de três parâmetros, ou mesmo a Normal, porém assumindo $\log(k_e)$ como a variável aleatória em vez de k_e . O modelo proposto baseado em Weibull resultou em fatores k_e mais representativos e fiéis à dispersão dos dados de cada material, e mais precisos em relação às propostas demasiadamente conservativas de Shigley.

6.1

Trabalhos futuros

Para que seja dada continuidade no trabalho do tema abordado nesta dissertação, foram propostos os tópicos que se seguem:

1. Realização de mais ensaios εN e com diferentes materiais, para que se possa verificar com mais precisão a quantidade de pontos suficiente para que se obtenha uma curva confiável;
2. Verificação do desempenho do fator de confiabilidade com as alterações propostas para outras equações de vida longa;
3. Aplicação do método de Levenberg-Marquardt para outras equações de fadiga, como para modelos de propagação de trinca, por exemplo.

Referências bibliográficas

- [1] CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A.. **Fatigue Design Techniques**, volumen I - High-Cycle Fatigue. CreateSpace, 2016.
- [2] CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A.. **Fatigue Design Techniques**, volumen II - Low-Cycle and Multiaxial Fatigue. CreateSpace, 2016.
- [3] SMITH, K.; WATSON, P. ; TOPPER, T.. **Stress-strain function for the fatigue of metals**. J mater, 5(4):767–778, 1970.
- [4] DOWLING, N. E.. **Mechanical behavior of materials**. Prentice, 2007.
- [5] DOWLING, N. E.; CALHOUN, C. ; ARCARI, A.. **Mean stress effects in stress-life fatigue and the Walker equation**. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 32(3):163–179, 2008.
- [6] DOWLING, N. E.. **Mean stress effects in stress-life fatigue**. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, p. 1004–1019, 2009.
- [7] WALKER, K.. **The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminum**. 1970.
- [8] LI, J.; QIU, Y.; LI, C. ; ZHANG, Z.. **A Walker exponent corrected model for estimating fatigue life of metallic materials**. Materials Science and Engineering Technology, 50(9):1106–1112, 2019.
- [9] NIHEI, M.; HEULER, P.; BOLLER, C. ; SEEGER, T.. **Evaluation of mean stress effect on fatigue life by use of damage parameters**. International Journal of Fatigue, 8(3):119–126, 1986.
- [10] ROBERTS, R.; ERDOGAN, F.. **The effect of mean stress on fatigue crack propagation a literature review**. International Journal of Fatigue, 11:389–408, 1975.
- [11] INCE, A.; GLINKA, G.. **A modification of Morrow and Smith–Watson–Topper mean stress correction models**. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 34:854–867, 2011.

- [12] CORREIA, J.; APETRE, N.; ARCARI, A.; DE JESUS, A.; MUÑIZ-CALVENTE, M.; CALÇADA, R.; BERTO, F. ; FERNÁNDEZ-CANTELI, A.. **Generalized probabilistic model allowing for various fatigue damage variables**. *International Journal of Fatigue*, 100:187–194, 2017.
- [13] ELLYIN, F.. **Fatigue damage, crack growth and life prediction**. Chapman and Hall, 1997.
- [14] BUDYNAS, R.; NISBETT, J.. **Elementos de Máquinas de Shigley**. AMGH, 8 edition, 2011.
- [15] CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A.. **Fatigue Design Techniques**, volumen III - Crack Propagation, Temperature and Statistical Effects. CreateSpace, 2016.
- [16] LEE, Y.-L.; BARKEY, M. E. ; KANG, H.-T.. **Metal fatigue analysis handbook**. Butterworth-Heinemann, 2011.
- [17] SPIEGEL, M. R.. **Probabilidade e Estatística**. McGraw-Hill Ltda., 1978.
- [18] LEVENBERG, K.. **A method for the solution of certain non-linear problems in least squares**. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2:164–168, 1944.
- [19] MARQUARDT, D.. **An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters**. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11:431–441, 1963.
- [20] GAVIN, H. P.. **The levenberg-marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems**. Department of Civil and Environmental Engineering Duke University, September 2020.
- [21] Bachem, A., editor. **Mathematical Programming The State of the Art**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
- [22] ASM International. **Volume 2. Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Special-Purpose Materials**, metals handbook edition, 1990.
- [23] ASTM. **E3 - 11 Standard Guide for Preparation of Metallographic Specimens**, 2017.
- [24] ASTM. **E8/E8M - Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials**, 2011.
- [25] ASTM. **E606/E606M - 12 - Standard Test Method for Strain-Controlled Fatigue Testing**, 2012.

- [26] GUIZZO, T.. **Laços de histerese elastoplásticos gerados sob carregamentos complexos**. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.
- [27] PINHO DA CRUZ, J.; COSTA, J. ; FERREIRA, J.. **Fatigue life prediction in AlMgSi1 lap joint weldments**. *International Journal of Fatigue*, 22:601–610, 2000.
- [28] MARTINS, G. C. P.; BANDEIRA, C. F. C.; LIMA, G. W. ; CASTRO, J. T. P.. **Fatigue limit evaluations of Al 6351-T6 by thermographic and en methods**. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 43(1):1–14, 2021.
- [29] MEGGIOLARO, M. A.; CASTRO, J. T. P.. **An improved strain-life model based on the Walker equation to describe tensile and compressive mean stress effects**. *International Journal of Fatigue*, 161:106905, 2022.
- [30] BÄUMEL, A. J.; SEEGER, T.. **Materials data for cyclic loading**. *Materials Science Monographs*, 61, 1990.
- [31] LIN, C.-K.; CHU, C.-C.. **Mean stress effects on low-cycle fatigue for a precipitation-hardening martensitic stainless steel in different tempers**. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures (Print)*, 23(7):545–553, 2000.
- [32] FANG, D.; BERKOVITS, A.. **Mean stress models for low-cycle fatigue of a nickel-base superalloy**. *International Journal of Fatigue*, 16(6):429–437, 1994.
- [33] KESHAVAN, S.. **Some studies on the deformation and fracture of normalised mild steel under cyclic conditions**. PhD thesis, University of Waterloo, Ontario, 1967.
- [34] LAZAN, B.; BLATNERWICK, A.. **Fatigue properties of aluminum alloys at various direct stress ratios. Part 1. Rolled alloys**. Technical report, MINNESOTA UNIV MINNEAPOLIS INST OF TECH, 1952.
- [35] ZHAO, T.; JIANG, Y.. **Fatigue of 7075-T651 aluminum alloy**. *International Journal of Fatigue*, 30(5):834–849, 2008.
- [36] WEHNER, T.; FATEMI, A.. **Effects of mean stress on fatigue behaviour of a hardened carbon steel**. *International Journal of Fatigue*, 13(3):241–248, 1991.

- [37] MEYER, N. M.. **Effects of mean stress and stress concentration on fatigue behavior of ductile iron**. The University of Toledo, 2014.

A

Algoritmos implementados

A.1

Coffin-Manson

```
1 clc
2 clear all
3 close all
4
5 E=72300; %modulo de elasticidade em MPa
6
7 %entrada de x e y
8 data=xlsread('eN_data.xlsx','30cps'); %nome do
    arquivo e aba da planilha
9
10 xdata = data(:,1); %2N
11 ydata = data(:,2); %De/2
12
13 %deformacoes plasticas e elasticas
14 y_reta_el = data(:,3);
15 y_reta_pl = data(:,4);
16
17 %chute inicial
18 p0 = [0, 0, 1, 1]; %[b, c, sc, ec]
19 p0_el = [p0(1), p0(3)];
20 p0_pl = [p0(2), p0(4)];
21
22 %impedimento plastico
23 t=1;
24 for u = 1:length(y_reta_pl)
25     if y_reta_pl(u) >= 0.0003
26         y_reta_pl_selc(t) = y_reta_pl(u);
27         xdata_selc(t) = xdata(u);
28         t=t+1;
```

```

29     end
30 end
31
32 %LM
33 x_LM_el = log(xdata);
34 x_LM_pl = log(xdata_selc);
35 y_LM_el = log(y_reta_el);
36 y_LM_pl = log(y_reta_pl_selc);
37 p0_el_LM = [p0(1); log(p0(3)/E)];
38 p0_pl_LM = [p0(2); log(p0(4))];
39 Jt_el = [x_LM_el ones(size(x_LM_el))];
40 Jt_pl = [x_LM_pl ones(size(x_LM_pl))];
41 et_el = y_LM_el - p0_el_LM(1)*x_LM - p0_el_LM(2)*ones
        (size(y_LM_el));
42 et_pl = y_LM_pl - p0_pl_LM(1)*x_LM - p0_pl_LM(2)*ones
        (size(y_LM_pl));
43 q_el = pinv(Jt_el)*et_el; q_pl = pinv(Jt_pl)*et_pl;
44 p_el_LM = p0_el_LM+q_el; p_pl_LM = p0_pl_LM+q_pl;
45 sc_reta_LM = E*exp(p_el_LM(2)); b_reta_LM = p_el_LM
        (1);
46 ec_reta_LM = exp(p_pl_LM(2)); c_reta_LM = p_pl_LM(1);

```

A.2

Ramberg-Osgood

```

1 clc
2 clear all
3 close all
4
5 E=72300; %modulo de elasticidade em MPa
6
7 %entrada de x e y
8 data=xlsread('eN_data.xlsx','RO'); %nome do arquivo e
        aba da planilha
9 e = data(:,1); %deformacao
10 s = data(:,2); %tensao
11
12 %LM
13
14 x_LM = log(e-s/E);

```

```

15 y_LM = log(s);
16
17 P0_LM = [1; 8]; %vetor de parametros - P1=hc e P2=ln(
    Hc)
18
19 Jt = [x_LM ones(size(x_LM))];
20 et = y_LM-P0_LM(1)*x_LM-P0_LM(2)*ones(size(y_LM));
21 q = pinv(Jt)*et;
22 P_fin=P0_LM+q;
23
24 hc_LM = P_fin(1);
25 Hc_LM = exp(P_fin(2));

```

A.3 SWT

```

1 clc
2 clear all
3 close all
4
5
6 %Dados de entrada
7 data=xlsread('carga_media.xlsx','al7075t651'); %nome
    do arquivo e aba da planilha
8 %Materiais: CC450SSSoln;al7075t651; MnCrMo33steel;
    Al2024-T4; SAE1015steel;
9 %Incoloy901;AlMg45Mn;GSMnNi63steel
10 e_tot = data(:,1); %deformacao total
11 e_el = data(:,2); %deformacao elastica
12 e_pl = data(:,3); %deformacao plastica
13 rev = data(:,4); %revolucoes
14 s_max = data(:,5); %tensao maxima
15 R = data(:,6); %R = s_min/s_max
16 s_a = data(:,7); %amplitude de tensao
17 vida = rev/2; %ciclos ate a falha
18 E = data(1,10);%modulo de elasticidade em MPa
19 s_med = data(:,8);%tensao media
20
21 %chute inicial
22 p0 = [1; 1; 1; 1; 1; 1]; %[b, c, sc, ec,gamma,A]

```

```

23 p0_el = [p0(1); p0(3)];
24 p0_pl = [p0(2); p0(4)];
25
26 %LM SWT -1<R<1
27 %IMPEDIMENTO GERAL
28 t=1;
29 for u = 1:length(e_pl)
30     if -1.1<R(u) && R(u)<=1
31         e_tot_selc_SWT(t) = e_tot(u);
32         e_pl_selc_SWT(t) = e_pl(u);
33         e_el_selc_SWT(t) = e_el(u);
34         s_med_selc_SWT(t) = s_med(u);
35         s_max_selc_SWT(t) = s_max(u);
36         s_a_selc_SWT(t) = s_a(u);
37         R_selc_SWT(t) = R(u);
38         rev_selc_SWT(t) = rev(u);
39         vida_selc_SWT(t) = vida(u);
40         t=t+1;
41     end
42 end
43 %parte elastica
44 x_el_SWT = log(rev_selc_SWT. '); %determinando x de LM
45 y_el_SWT = ones(size(e_el_selc_SWT));
46 for m = 1:length(e_el_selc_SWT)
47     y_el_SWT(m) = e_el_selc_SWT(m)*s_max_selc_SWT(m);
48 end
49 y_LM_el_SWT = log(y_el_SWT. '); %determinando y de LM
50 Jt_el_SWT = [x_el_SWT ones(size(x_el_SWT))]; %
    determiando a jacobiana
51 P0_el_SWT = [2*p0(1); log(p0(3)^2/E)]; %vetor de
    parametros - P1=2b e P2=ln(sc^2/E)
52 et_el_SWT = y_LM_el_SWT - P0_el_SWT(1)*x_el_SWT -
    P0_el_SWT(2)*ones(size(y_LM_el_SWT));
53 q_el_SWT = pinv(Jt_el_SWT)*et_el_SWT;
54 P_LM_el_SWT = P0_el_SWT+q_el_SWT;
55 sc_SWT = sqrt(exp(P_LM_el_SWT(2))*E);
56 b_SWT = P_LM_el_SWT(1)/2;
57
58 %IMPEDIMENTOS PARTE PLASTICA

```

```

59 t=1;
60 for u = 1:length(e_pl)
61     if e_pl(u) > 0.0003 && -1.1<R(u) && R(u)<=1
62         e_pl_selc_SWT_PL(t) = e_pl(u);
63         rev_selc_SWT_PL(t) = rev(u);
64         s_max_selc_SWT_PL(t) = s_max(u);
65         t=t+1;
66     end
67 end
68 %parte plastica
69 x_pl_SWT = log(rev_selc_SWT_PL. '); %determinando x de
    LM
70 y_pl_tot = ones(size(e_pl));
71 for i = 1:length(e_pl)
72     y_pl_tot(i) = e_pl(i)*s_max(i);
73 end
74 y_pl = ones(size(e_pl_selc_SWT_PL));
75 for k = 1:length(e_pl_selc_SWT_PL)
76     y_pl(k) = e_pl_selc_SWT_PL(k)*s_max_selc_SWT_PL(k
    );
77 end
78 y_LMpl = log(y_pl. '); %determinando y de LM
79 Jt_pl_SWT = [x_pl_SWT ones(size(x_pl_SWT))]; %
    determinando jacobiana
80 P0_pl_SWT = [p0(1)+p0(2); log(p0(3)*p0(4))]; %vetor
    de parametros - P1=b+c e P2=ln(sc*ec)
81 et_pl_SWT = y_LMpl - P0_pl_SWT(1)*x_pl_SWT -
    P0_pl_SWT(2)*ones(size(y_LMpl));
82 q_pl_SWT = pinv(Jt_pl_SWT)*et_pl_SWT;
83 P_LM_pl_SWT = P0_pl_SWT+q_pl_SWT;
84 ec_SWT = exp(P_LM_pl_SWT(2))/sc_SWT;
85 c_SWT = P_LM_pl_SWT(1)-b_SWT;

```

A.4

Dowling

```

1 clc
2 clear all
3 close all
4

```

```

5
6 %Dados de entrada
7 data=xlsread('carga_media.xlsx','al7075t651'); %nome
      do arquivo e aba da planilha
8 %Materiais: CC450SSSoln;al7075t651; MnCrMo33steel;
      Al2024-T4; SAE1015steel;
9 %Incoloy901;AlMg45Mn;GSMnNi63steel
10 e_tot = data(:,1); %deformacao total
11 e_el = data(:,2); %deformacao elastica
12 e_pl = data(:,3); %deformacao plastica
13 rev = data(:,4); %revolucoes
14 s_max = data(:,5); %tensao maxima
15 R = data(:,6); %R = s_min/s_max
16 s_a = data(:,7); %amplitude de tensao
17 vida = rev/2; %ciclos ate a falha
18 E = data(1,10);%modulo de elasticidade em MPa
19 s_med = data(:,8);%tensao media
20
21 %chute inicial
22 p0 = [1; 1; 1; 1; 1; 1]; %[b, c, sc, ec,gamma,A]
23 p0_el = [p0(1); p0(3)];
24 p0_pl = [p0(2); p0(4)];
25
26 %LM Dowling para -1.1<R<1
27 %IMPEDIMENTO GERAL
28 t=1;
29 for u = 1:length(e_pl)
30     if R(u)<1 && -1.1<R(u)
31         e_tot_selc_DW(t) = e_tot(u);
32         e_pl_selc_DW(t) = e_pl(u);
33         vida_selc_DW(t) = vida(u);
34         s_max_selc_DW(t) = s_max (u);
35         R_selc_DW(t) = R(u);
36         t=t+1;
37     end
38 end
39
40 y_DW=log(vida_selc_DW. ');
41 x2_DW_prim = ones(size(vida_selc_DW));

```

```

42 for i = 1:length(vida_selc_DW)
43     x2_DW_prim(i) = log((1-R_selc_DW(i))/2);
44 end
45 x2_DW = x2_DW_prim.';
46 x1_DW = log(s_max_selc_DW.'');
47 x_DW=[x1_DW,x2_DW];
48 Jt_DW = [x1_DW, x2_DW, - ones(size(y_DW))]; %
    determiando a jacobiana
49 P0_DW = [1/p0(1); p0(5)/p0(1); 1/p0(1)*log(p0(6))]; %
    vetor de parametros - P1=1/b e P2=gama/b e P3=1/b
    ln(A)
50 et_DW = y_DW - P0_DW(1)*x1_DW - P0_DW(2)*x2_DW +
    P0_DW(3)*ones(size(y_DW));
51 q_DW = pinv(Jt_DW)*et_DW;
52 P_DW = P0_DW+q_DW;
53 b_DW=1/P_DW(1);
54 gama_DW=P_DW(2)/P_DW(1);
55 A_DW=exp(P_DW(3)/P_DW(1));
56 sc_DW=A_DW/(2^b_DW);
57
58 N_w_selc = vida_selc_DW.*((1-R_selc_DW)/2).^((1-
    gama_DW)/b_DW);
59 doisN_w = 2*N_w_selc;
60
61
62 %IMPEDIMENTO PARTE PLASTICA
63 t=1;
64 for u = 1:length(vida)
65     if e_pl(u) >= 0.0003 && R(u)<1 && -1.1<R(u)
66         vida_selc_DW_PL(t) = vida(u);
67         e_pl_selc_DW_PL(t) = e_pl(u);
68         R_selc_DW_PL(t) = R(u);
69         t=t+1;
70     end
71 end
72 doisN_w_PL = 2*vida_selc_DW_PL.*((1-R_selc_DW_PL)/2)
    .^((1-gama_DW)/b_DW);
73
74 %Ajuste pl por LM

```

```

75 x_DW_pl = log(doisN_w_PL. ');
76 y_DW_pl = log(e_pl_selc_DW_PL. ');
77 p0_pl_DW = [p0(1); log(p0(2))];
78 Jt_pl_DW = [x_DW_pl ones(size(x_DW_pl))];
79 et_pl_DW = y_DW_pl - p0_pl_DW(1)*x_DW_pl - p0_pl_DW
      (2)*ones(size(y_DW_pl));
80 q_pl_DW = pinv(Jt_pl_DW)*et_pl_DW;
81 p_pl_LM_DW = p0_pl_DW+q_pl_DW;
82 ec_DW = exp(p_pl_LM_DW(2));
83 c_DW = p_pl_LM_DW(1);

```

A.5

Li

```

1 clc
2 clear all
3 close all
4
5
6 %Dados de entrada
7 data=xlsread('carga_media.xlsx','al7075t651'); %nome
      do arquivo e aba da planilha
8 %Materiais: CC450SSSoln;al7075t651; MnCrMo33steel;
      Al2024-T4; SAE1015steel;
9 %Incoloy901;AlMg45Mn;GSMnNi63steel
10 e_tot = data(:,1); %deformacao total
11 e_el = data(:,2); %deformacao elastica
12 e_pl = data(:,3); %deformacao plastica
13 rev = data(:,4); %revolucoes
14 s_max = data(:,5); %tensao maxima
15 R = data(:,6); %R = s_min/s_max
16 s_a = data(:,7); %amplitude de tensao
17 vida = rev/2; %ciclos ate a falha
18 E = data(1,10);%modulo de elasticidade em MPa
19 s_med = data(:,8);%tensao media
20
21 %chute inicial
22 p0 = [1; 1; 1; 1; 1; 1]; %[b, c, sc, ec,gamma,A]
23 p0_el = [p0(1); p0(3)];
24 p0_pl = [p0(2); p0(4)];

```

```

25
26 %LM J. Li para -1.1<R<1
27 %IMPEDIMENTO GERAL
28 t=1;
29 for u = 1:length(e_pl)
30     if R(u)<1 && -1.1<R(u)
31         e_tot_selc_Li(t) = e_tot(u);
32         e_pl_selc_Li(t) = e_pl(u);
33         e_el_selc_Li(t) = e_el(u);
34         s_med_selc_Li(t) = s_med(u);
35         s_max_selc_Li(t) = s_max(u);
36         rev_selc_Li(t) = rev(u);
37         vida_selc_Li(t) = vida(u);
38         t=t+1;
39     end
40 end
41
42 %parte elastica
43 y_el_Li=log(e_el_selc_Li. '); %determinando y de LM
44 x1_el_Li = log(s_max_selc_Li. '); %determinando x1 de
    LM
45 x2_el_Li = log(rev_selc_Li. '); %determinando x2 de LM
46 Jt_el_Li = [x1_el_Li, x2_el_Li, ones(size(y_el_Li))];
    %determiando a jacobiana
47 P0_el_Li = [(p0(5)-1)/p0(5); p0(1)/p0(5); 1/p0(5)*log
    (p0(3))]; %vetor de parametros - P1=(w-1)/w e P2=b/
    w e P3=1/w ln(sc)
48 et_el_Li = y_el_Li - P0_el_Li(1)*x1_el_Li - P0_el_Li
    (2)*x2_el_Li - P0_el_Li(3)*ones(size(y_el_Li)) +
    log(E)*ones(size(y_el_Li));
49 q_el_Li = pinv(Jt_el_Li)*et_el_Li;
50 P_el_Li = P0_el_Li+q_el_Li;
51 w_Li = 1/(1-P_el_Li(1));
52 b_Li = P_el_Li(2)/(1-P_el_Li(1));
53 sc_Li = exp(P_el_Li(3)/(1-P_el_Li(1)));
54
55 %parte plastica
56 B = (1-w_Li)/w_Li*log(sc_Li);
57 %IMPEDIMENTO PARTE PLASTICA

```

```

58 t=1;
59 for u = 1:length(vida)
60     if R(u)<1 && e_pl(u) >= 0.0003 && -1.1<R(u)
61         rev_selc_Li_PL(t) = rev(u);
62         e_pl_selc_Li_PL(t) = e_pl(u);
63         s_max_selc_Li_PL(t) = s_max(u);
64         t=t+1;
65     end
66 end
67 y_pl_Li=log(e_pl_selc_Li_PL. '); %determinando y de LM
68 x1_pl_Li = log(rev_selc_Li_PL. '); %determinando x1 de
    LM
69 x2_pl_Li = (w_Li-1)/w_Li*log(s_max_selc_Li_PL. '); %
    determinando x2 de LM
70 Jt_pl_Li = [x1_pl_Li, ones(size(y_pl_Li))]; %
    determiando a jacobiana
71 P0_pl_Li = [(1-w_Li)/w_Li*b_Li+p0(2); log(p0(4))]; %
    vetor de parametros - P1=(w-1)/w*b+c e P2=ln(ec)
72 et_pl_Li = y_pl_Li - P0_pl_Li(1)*x1_pl_Li - P0_pl_Li
    (2)*ones(size(y_pl_Li)) - x2_pl_Li - B*ones(size(
    y_pl_Li));
73 q_pl_Li = pinv(Jt_pl_Li)*et_pl_Li;
74 P_pl_Li = P0_pl_Li+q_pl_Li;
75 c_Li = P_pl_Li(1)-(1-w_Li)*b_Li/w_Li;
76 ec_Li = exp(P_pl_Li(2));

```

A.6 Nihei

```

1 clc
2 clear all
3 close all
4
5
6 %Dados de entrada
7 data=xlsread('carga_media.xlsx','al7075t651'); %nome
    do arquivo e aba da planilha
8 %Materiais: CC450SSSoln;al7075t651; MnCrMo33steel;
    Al2024-T4; SAE1015steel;
9 %Incoloy901;AlMg45Mn;GSMnNi63steel

```

```
10 e_tot = data(:,1); %deformacao total
11 e_el = data(:,2); %deformacao elastica
12 e_pl = data(:,3); %deformacao plastica
13 rev = data(:,4); %revolucoes
14 s_max = data(:,5); %tensao maxima
15 R = data(:,6); %R = s_min/s_max
16 s_a = data(:,7); %amplitude de tensao
17 vida = rev/2; %ciclos ate a falha
18 E = data(1,10);%modulo de elasticidade em MPa
19 s_med = data(:,8);%tensao media
20
21 %chute inicial
22 p0 = [1; 1; 1; 1; 1; 1]; %[b, c, sc, ec,gamma,A]
23 p0_el = [p0(1); p0(3)];
24 p0_pl = [p0(2); p0(4)];
25
26 %LM Nihei para -1.1<R<1
27
28 %IMPEDIMENTO GERAL
29 t=1;
30 for u = 1:length(e_pl)
31     if R(u)<=1 && -1.1<R(u)
32         e_tot_selc_Nihei(t) = e_tot(u);
33         e_pl_selc_Nihei(t) = e_pl(u);
34         e_el_selc_Nihei(t) = e_el(u);
35         s_med_selc_Nihei(t) = s_med(u);
36         s_max_selc_Nihei(t) = s_max(u);
37         s_a_selc_Nihei(t) = s_a(u);
38         rev_selc_Nihei(t) = rev(u);
39         vida_selc_Nihei(t) = vida(u);
40         t=t+1;
41     end
42 end
43
44 %parte elastica
45 y_pacial_Nihei = ones(size(e_el_selc_Nihei));
46 for m = 1:length(e_el_selc_Nihei)
47     y_pacial_Nihei(m) = e_el_selc_Nihei(m)*
        s_max_selc_Nihei(m);
```

```

48 end
49 y_el_Nihei = log(y_pacial_Nihei. '); %determinando y
      de LM
50 x1_el_Nihei = log(rev_selc_Nihei. '); %determinando x1
      de LM
51 x2_pacial_Nihei = ones(size(e_el_selc_Nihei));
52 for m = 1:length(e_el_selc_Nihei)
53     x2_pacial_Nihei(m) = log(s_max_selc_Nihei(m))-log
      (s_a_selc_Nihei(m));
54 end
55 x2_el_Nihei = x2_pacial_Nihei. '); %determinando x2 de
      LM
56 Jt_el_Nihei = [x1_el_Nihei, x2_el_Nihei, ones(size(
      y_el_Nihei))]; %determiando a jacobiana
57 P0_el_Nihei = [p0(1)*2; p0(5); 2*log(p0(3))]; %vetor
      de parametros - P1=2*b e P3=n e P2=2*ln(sc) e P3=n
58 et_el_Nihei = y_el_Nihei - P0_el_Nihei(1)*x1_el_Nihei
      - P0_el_Nihei(2)*x2_el_Nihei...
      - P0_el_Nihei(3)*ones(size(y_el_Nihei))+log(E);
59 q_el_Nihei = pinv(Jt_el_Nihei)*et_el_Nihei;
60 P_el_Nihei = P0_el_Nihei+q_el_Nihei;
61 n_Nihei = P_el_Nihei(2);
62 b_Nihei = P_el_Nihei(1)/2;
63 sc_Nihei = exp(P_el_Nihei(3)/2);
64
65
66 %parte plastica
67
68 %IMPEDIMENTO PARTE PLASTICA
69 t=1;
70 for u = 1:length(vida)
71     if R(u)<1 && e_pl(u) >= 0.0003 && -1.1<R(u)
72         rev_selc_Nihei_PL(t) = rev(u);
73         e_pl_selc_Nihei_PL(t) = e_pl(u);
74         s_max_selc_Nihei_PL(t) = s_max(u);
75         s_a_selc_Nihei_PL(t) = s_a(u);
76         t=t+1;
77     end
78 end
79 y_pacial_Nihei_PL = ones(size(e_pl_selc_Nihei_PL));

```

```

80 for m = 1:length(e_pl_selc_Nihei_PL)
81     y_pacial_Nihei_PL(m) = e_pl_selc_Nihei_PL(m)*
        s_max_selc_Nihei_PL(m);
82 end
83 y_pl_Nihei = log(y_pacial_Nihei_PL. '); %determinando
        y de LM
84 x1_pl_Nihei = log(rev_selc_Nihei_PL. '); %determinando
        x1 de LM
85 x2_pacial_Nihei_PL = ones(size(e_pl_selc_Nihei_PL));
86 for m = 1:length(e_pl_selc_Nihei_PL)
87     x2_pacial_Nihei_PL(m) = s_a_selc_Nihei_PL(m)/
        s_max_selc_Nihei_PL(m);
88 end
89 x2_pl_Nihei = n_Nihei*log(x2_pacial_Nihei_PL. '); %
        determinando x2 de LM
90 Jt_pl_Nihei = [x1_pl_Nihei, ones(size(y_pl_Nihei))];
        %determiando a jacobiana
91 P0_pl_Nihei = [(b_Nihei+p0(2)); log(p0(4)*sc_Nihei)];
        %vetor de parametros - P1=b+c e P2=ln(ec*sc)
92 et_pl_Nihei = y_pl_Nihei - P0_pl_Nihei(1)*x1_pl_Nihei
        - P0_pl_Nihei(2)*ones(size(y_pl_Nihei)) +
        x2_pl_Nihei;
93 q_pl_Nihei = pinv(Jt_pl_Nihei)*et_pl_Nihei;
94 P_pl_Nihei = P0_pl_Nihei+q_pl_Nihei;
95 c_Nihei = P_pl_Nihei(1)-b_Nihei;
96 ec_Nihei = exp(P_pl_Nihei(2))/sc_Nihei;

```

A.7

Equação SN

```

1 clc
2 clear all
3 close all
4
5 Material = 30; %escolher 1 a 35
6 v = v(v(:,1)==Material, :); %escolhe apenas esse
        material
7 R = (v(:,4)-v(:,3))./v(:,5); %R = s_min/s_max
8 v = v((R>-2)&(R<1), :); %filtra apenas para -2 < R <
        1

```

```

9 vida = v(:,6); %ciclos ate a falha (N)
10 v = v(vida>=1e3,:); %Na > 1000
11
12 eps_a = v(:,2); %deformacao alternada
13 sig_a = v(:,3); %tensao alternada
14 sig_m = v(:,4); %tensao media
15 sig_max = v(:,5); %tensao maxima
16 vida = v(:,6); %ciclos ate a falha
17 R = (sig_m-sig_a)./sig_max; %R = s_min/s_max
18
19 %LM equacao SN
20
21 x1_LM = log(2*vida);
22 x2_LM = ones(size(R));
23 for m = 1:length(R)
24     x2_LM(m)=log(sig_max(m)/sig_a(m));
25 end %determinando x de LM
26 y_LM = log(sig_a); %determinando y de LM
27
28 P0 = [log(1000); -0.1; log(100); 0.5]; %vetor de
      parametros
29
30 mod=[1; 1; 1; 1];
31 int=0;
32 lambda=1;
33 Ve=2;
34
35 while abs(mod)>10(-7)
36
37 Jt1 = ones(size(R));
38 for m = 1:length(R)
39     Jt1(m)=(exp(P0(1)+P0(2)*x1_LM(m)))/(exp(P0(1)+P0
      (2)*x1_LM(m))+exp(P0(3)));
40 end
41
42 Jt2 = ones(size(R));
43 for m = 1:length(R)
44     Jt2(m)=(x1_LM(m)*exp(P0(1)+P0(2)*x1_LM(m)))/(exp(
      P0(1)+P0(2)*x1_LM(m))+exp(P0(3)));

```

```

45 end
46
47 Jt3 = ones(size(R));
48 for m = 1:length(R)
49     Jt3(m)=exp(P0(3))/((exp(P0(1)+P0(2)*x1_LM(m))+exp
        (P0(3))));
50 end
51
52 Jt = [Jt1 Jt2 Jt3 -x2_LM]; %determiando a jacobiana
53
54 et = ones(size(R));
55 for m =1:length(R)
56 et(m) = y_LM(m) - log(exp(P0(1)+P0(2)*x1_LM(m))+exp(
        P0(3))) + P0(4)*x2_LM(m); %determinando et
57 end
58
59 S1 = sum(et.^2);
60
61 q = inv(Jt'*Jt+lambda/ve*eye(4))*Jt'*et;
62
63 P1 = P0+q;
64
65 et2 = ones(size(R));
66 for m =1:length(R)
67 et2(m) = (y_LM(m) - log(exp(P1(1)+P1(2)*x1_LM(m))+exp
        (P1(3)))) + P1(4)*x2_LM(m));
68 end
69
70 S2 = sum(et2.^2);
71
72 if S2<S1
73     P0=P0+q;
74     lambda=lambda/ve;
75     mod=q;
76 else
77     q2 = inv(Jt'*Jt+lambda*eye(4))*Jt'*et;
78     P2 = P0+q2;
79     et22 = ones(size(R));
80     for m =1:length(R)

```

```

81         et22(m) = (y_LM(m) - log(exp(P2(1)+P2(2)*
           x1_LM(m))+exp(P2(3)))) + P2(4)*x2_LM(m));
82     end
83     S22=sum(et22.^2);
84     if S22<S1
85         P0=P0+q2;
86         mod=q2;
87     else
88         S3=S2;
89         k=1;
90         while S3>=S1
91             q3 = inv(Jt'*Jt+lambda*Ve^k*eye(4))*Jt'*
           et;
92             P3 = P0+q3;
93             et3 = ones(size(R));
94             for m =1:length(R)
95                 et3(m) = (y_LM(m) - log(exp(P3(1)+P3
           (2)*x1_LM(m))+exp(P3(3)))) + P3(4)*
           x2_LM(m));
96             end
97             S3=sum(et3.^2);
98             k=k+1;
99         end
100        P0=P0+q3;
101        lambda = lambda*Ve^k;
102        mod=q3;
103    end
104 end
105
106 int=int+1;
107
108 end
109
110 %resultados
111 sc = exp(P0(1));
112 b=P0(2);
113 Psi0 = exp(P0(3));
114 gamma = 1-P0(4);

```