

### 3

## PRV - Problema de Roteamento de Veículos

O Problema de Roteamento de Veículo (PRV) é um nome genérico para uma classe de problemas onde o que se deseja é: realizar o serviço em uma série de clientes com o uso de um conjunto de veículos, localizados em um ou mais depósitos, dirigido por um conjunto de motoristas e que se movimentam por uma malha rodoviária. A solução do PRV determina um conjunto de rotas, a ser realizada por cada um dos veículos que comece e termine no depósito, de forma que todos os clientes sejam atendidos e que todas as restrições operacional sejam satisfeitas, minimizando o custo total de transporte.

Nesta seção descreveremos as características de cada um dos componentes do problema (malha rodoviária, clientes, depósitos, motoristas), as diferentes restrições operacionais que podem ser impostas na construção de rotas e os possíveis objetivos que devem ser alcançados pelo processo de otimização.

A malha rodoviária é descrita por um grafo onde os arcos são ruas ou estradas e os vértices são cruzamentos e as localizações dos depósitos e dos clientes. Os arcos podem ser direcionados ou não, dependendo se pode ser percorrido em apenas um sentido ou em ambos os sentidos. A cada arco é associado um custo, que em geral representa o seu tamanho, e um tempo de viagem, que pode depender do tipo de veículo que está atravessando o arco.

Os clientes são localizados em vértices do grafo e tem uma demanda, que pode ser de entrega ou de coleta; períodos do dia (janela de tempo) em que podem ser servidos; tempo de serviço para realizar a entrega ou coleta (por exemplo, tempo de carregamento ou descarregamento), que pode depender do tipo de veículo. Um cliente pode estar restrito a receber apenas um subconjunto dos veículos disponíveis, seja por motivo de limitações de acesso ao local ou por motivo de incompatibilidade em equipamentos de carregamento e descarregamento.

As vezes não é possível atender totalmente a demanda do cliente. Neste

caso a quantidade a ser entregue ou coletada pode ser reduzida, ou alguns clientes podem não ser servidos. Para lidar com essas situações, penalidades podem ser associadas ao não atendimento parcial ou total da demanda do cliente.

As rotas devem começar e terminar em um depósito, não necessariamente o mesmo, localizado em um vértice do grafo. Cada depósito tem um número de veículos disponível, de diferentes tipos ou não. Em algumas aplicações do mundo real, os clientes são a priori associados a um depósito e os veículos devem retornar ao depósito de origem ao final da rota.

Os veículos podem ser caracterizados pelo peso máximo que podem carregar, o volume ou o número de pallets, e podem ter um custo de utilização, que pode ser por distância, por tempo ou por rota.

Restrições operacionais que aparecem no problema são do tipo: a capacidade do veículo não pode ser excedida em nenhum momento durante a rota, os clientes tem que ser atendidos dentro de suas janelas de tempo. Restrições de precedência podem aparecer, impondo uma ordem na qual os clientes devem ser atendidos em uma rota. Um tipo de restrição de precedência pode impor que um cliente tem que ser atendido pela mesma rota que atende a um determinado subconjunto de clientes, e este cliente deve ser atendido antes dos clientes do subconjunto. Este é o caso que acontece no problema conhecido com Problema de Roteamento de Veículos com Entrega e Coleta. Neste problema as rotas podem realizar tanto entrega quanto coleta de mercadorias, e as mercadorias coletadas em um cliente devem ser transportadas para o seu destino no mesmo veículo. No Problema de Roteamento de Veículos com Coletas na Volta também aparecem esse tipo de restrição. Neste problema os veículos também realizam entregas e coletas, porém todas as entregas devem ser feitas antes das coletas.

Diversas outras variantes do problema foram classificadas por Desrochers, Lenstra e Savelsbergh e podem ser encontradas em [31]. Os métodos exatos disponíveis até 1980 foram coletados em um extenso estudo de Laporte e Nobert [53]. O leitor que tiver maior interesse sobre o problema pode consultar o livro editado por Toth e Vigo [71], onde pode ser encontrado métodos de resolução, variações do problema e estudos de caso.

De forma a calcular o custo global das rotas, e checar as restrições operacionais, é necessário conhecer o custo de viajar e o tempo de viagem entre cada par de clientes e entre os depósitos e os clientes. Para isso, a malha rodoviária original, que geralmente é muito esparsa, é transformada em um grafo completo, onde os vértices do grafo são os vértices da malha rodoviária correspondentes aos clientes e aos depósitos. Para cada par de

vértices  $i$  e  $j$  do grafo completo, um arco  $(i, j)$  com custo  $c_{ij}$  dado pelo custo do caminho mais curto começando em  $i$  e terminando em  $j$  no grafo original. Daqui para frente, sempre iremos nos referir ao grafo completo, ao invés do grafo correspondente a malha rodoviária. Este grafo pode ser direcionado ou não direcionado, dependendo se a matriz de custos e tempos de viagem é simétrica ou assimétrica, respectivamente.

Diferentes funções objetivos podem ser considerada para o PRV. As mais comuns são:

- minimizar o custo global de transporte, que depende da distância total viajada, ou o tempo total viajado, e o custo fixo associado a utilização dos veículos.
- minimizar o número total de veículos necessário para atender todos os clientes
- minimizar as penalidades associadas ao atendimento parcial dos clientes.

ou ainda alguma combinação desses objetivos.

### 3.1

#### Problema de Roteamento de Veículos com Restrição de Capacidade

O primeiro problema de roteamento de veículos apresentado é a versão mais básica e clássica do PRV, o problema de roteamento de veículos com restrição de capacidade (PRVC). No PRVC todos os clientes correspondem a entregas ou coletas e todas as demandas são determinísticas, ou seja, são conhecidas a priori, e não podem ser divididas em mais de um veículo. Todos os veículos são idênticos e estão localizados em um depósito central e são impostas apenas restrições de capacidade. O objetivo é minimizar o custo total para atender todos os clientes. Este problema, proposto por Dantzig e Ramser em 1959 [27], pertence à classe  $\mathcal{NP}$ -difícil de problemas de otimização combinatória, já que generaliza o problema do caixeiro viajante (PCV), que por sua vez também pertence à classe  $\mathcal{NP}$ -difícil (veja [38]).

É de grande importância a apresentação deste problema pois este será a base para os problemas que serão resolvidos ao longo desta dissertação (capítulos 4, 5 e 6). Para os problemas posteriores usaremos a mesma formulação do PRVC que é proposta neste capítulo, porém em cada um deles a maneira com a qual as colunas serão geradas é diferente. A geração de colunas contemplará as restrições impostas por cada problema. O objetivo

de formularmos os outros problemas como o PRVC é que poderemos usar as rotinas de separação de diversas classes de cortes proposta por Lysgaard [56]. Apesar desta rotina de separação só separar cortes relativos a restrições de capacidade dos veículos, o objetivo é compararmos os resultados encontrados com os cortes apenas de capacidade com os resultados já conhecidos de metodologias que utilizam não só cortes com respeito a capacidade, mas também quanto a janela de tempo.

### 3.1.1

#### Trabalhos Existentes

Existe uma extensa literatura disponível a respeito do PRVC e que cobre os mais diferentes aspectos do mesmo. O caso particular do PRVC em que apenas um veículo está disponível no depósito e nenhuma restrição operacional é imposta, o chamado PCV, é extensivamente descrito em um livro editado por Lawler et al. [54].

Christofides, Mingozzi e Toth [22] propuseram, em 1981, um algoritmo que usa um limite Lagrangeano, obtido resolvendo-se o problema das  $q$ -rotas mínimas. Uma  $q$ -rota é uma seqüência que inicia no depósito, percorre um conjunto de clientes com demanda total máxima  $C$  e retorna ao depósito (a demanda é computada na ocupação do veículo a cada visita a um cliente). Como os vértices relativos aos clientes podem ser visitados mais de uma vez por uma  $q$ -rota, o conjunto de rotas válidas para o PRVC está estritamente contido no conjunto de  $q$ -rotas.

Este trabalho de Christofides, Mingozzi e Toth também descreve um limite inferior baseado em árvores geradoras em que o nó que representa o depósito tem grau  $K \leq k \leq 2K$  e são utilizadas  $2K - k$  arestas de menor custo possível, onde  $K$  é o número de veículos. Limites Lagrangeanos, calculados para o caso em que o depósito tem grau  $2K$  e são utilizadas  $n + K - 1$  arestas, foram utilizados por Fisher [33] e Martinhon, Lucena, e Maculan [58], dentre outros. Formas de se melhorar limites Lagrangeanos foram propostas em [33, 59] e [58].

Uma segunda família de algoritmos exatos considera a formulação do PRVC como um problema de particionamento de conjuntos, dentre estes estão os algoritmos apresentados por Balinski e Quandt [14], Agarwal, Marthur e Salkin [9] e Hadjiconstantinou et al. [45]. Toth e Vigo apresentam em [72, 71] resultados comparativos entre vários desses algoritmos citados.

As pesquisas mais recentes têm se concentrado na descrição poliedral da envoltória convexa de conjuntos de  $K$  rotas viáveis (representadas

por conjuntos de arestas) e no desenvolvimento de rotinas de separação [7, 10, 12, 13, 25, 55, 61]. Algoritmos *branch-and-cut* foram descritos por Araque et al. [11], Augerat et al. [13], Blasum and Hochstättler [20], Ralphs et al. [68], Achuthan, Caccetta e Hill [8] e Lysgaard, Letchford, e Eglese [57], os quais são os melhores métodos exatos atualmente disponíveis para o PRVC. Contudo, mesmo estes algoritmos podem falhar na obtenção de boas estimativas para o valor da solução ótima nos casos em que o valor de  $K$  é alto ( $K \geq 7$ ). Assim, muitas instâncias com menos de 80 clientes, incluindo muitas propostas há mais de 30 anos por Christofides and Eilon [21], não puderam ser resolvidas por estes algoritmos.

Mais recentemente, Fukasawa et al. [37] apresentaram um algoritmo *branch-and-cut-and-price* para o PRVC que combina um algoritmo *branch-and-cut* com  $q$ -rotas, as quais são interpretadas como o subproblema de geração de colunas, para a obtenção de melhores estimativas para o valor da solução ótima. Os experimentos computacionais realizados com este algoritmo, com as principais instâncias da literatura, mostraram que o mesmo pode resolver de forma consistente instâncias de até 135 clientes.

### 3.1.2

#### Definição e Notação

O PRVC pode ser descrito como um grafo não orientado completo  $G = (V, E)$ , onde  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  e  $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V, i < j\}$ . O vértice  $v_0$  representa o depósito e os demais representam os clientes ( $V_+ = \{v_1, \dots, v_n\}$ ).

O depósito é a base de uma frota de  $m$  veículos de capacidade idêntica  $C$  (o número de veículos pode tanto ser conhecido a priori quanto ser expresso como uma variável de decisão). Um custo não negativo,  $c_{ij}$ , é associado a cada aresta  $(v_i, v_j) \in E$  e este representa o custo de viajar do vértice  $v_i$  para o vértice  $v_j$ . Cada cliente  $i = v_1, \dots, v_n$  tem uma demanda não negativa conhecida,  $d_i$ , associada, que deve ser entregue e o objetivo é encontrar um conjunto  $F$  de  $m$  caminhos fechados, com início e término no vértice  $v_0$ , cujo custo total seja mínimo. Cada demanda deve ser atendida por apenas um caminho e a demanda total a ser atendida por cada caminho de  $F$  não deve exceder a capacidade  $C$  do veículo.

Dado um conjunto de vértices  $S \subseteq V$ ,  $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$  é a demanda total do conjunto. Um conjunto de  $K$  veículos idênticos, com capacidade  $C$ , estão disponíveis no depósito. De forma a garantir a viabilidade, assumimos que  $d_i \leq C$  para  $i = v_1, \dots, v_n$ . Cada veículo percorre uma única rota, e

assumimos que  $K$  não é menor que  $K_{\min}$ , onde  $K_{\min}$  é o número mínimo de veículos necessários para atender todos os clientes. O valor de  $K_{\min}$  pode ser determinado resolvendo o problema de *Bin Packing* associado ao PRVC, chamado para determinar número de compartimentos necessários para carregar os  $n$  itens, cada um com um peso não negativo igual a  $d_i, i = v_1, \dots, v_n$ . Apesar do *Bin Packing* ser um problema  $\mathcal{NP}$ -difícil, instâncias com centenas de itens podem ser resolvidas na otimalidade.

Dado um conjunto de clientes  $S \subseteq V \setminus \{0\}$ ,  $r(S)$  é o número mínimo de veículos necessário para atender os clientes em  $S$ , isto é, a solução ótima do problema de *Bin Packing* associado aos itens em  $S$ . Geralmente, substituímos o valor de  $r(S)$  pelo limite inferior do problema de *Bin Packing*  $\left\lceil \frac{d(S)}{C} \right\rceil$ .

A solução do PRVC determina o conjunto de  $K$  rotas, uma para cada veículo, minimizando o custo, dado pela soma dos custos do arcos que pertencem a uma rota, tal que:

- Cada rota começa e termina no depósito
- Cada cliente é visitado por apenas um veículo
- A soma das demandas dos vértices visitados na rota não excede a capacidade do veículo.

### 3.1.3

#### Formulação do PRVC

A formulação mais clássica para o PRVC [52] representa por  $x_{ij}$  o número de vezes que um veículo percorre a aresta  $(v_i, v_j) \in E$ . Seja  $d(S)$  a soma das demandas de todos os vértices em  $S$ , onde  $S \subseteq V_+$ ;  $\delta(S)$  é o conjunto de arestas incidentes aos vértices do conjunto  $S$  que se removidas desconectam o grafo  $G$  (*cut-set* definido por  $S$ ). Considere o seguinte politopo  $P_1$  em  $\mathbb{R}^{|E|}$ :

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{e \in \delta(\{v_i\})} x_e = 2 & \forall v_i \in V_+ \quad (1) \\ \sum_{e \in \delta(\{v_0\})} x_e = 2K & \quad (2) \\ \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2r(S) & \forall S \subseteq V_+ \quad (3) \\ x_e \leq 1 & \forall e \in E \setminus \delta(\{v_0\}) \quad (4) \\ x_e \geq 0 & \forall e \in E \end{array} \right.$$

As restrições (3) são as chamadas restrições de eliminação de subciclos, as quais especificam, para qualquer subconjunto  $S$  de clientes, que  $r(S)$

veículos devem entrar e sair de  $S$ . Em resumo, tais restrições forçam todo subconjunto de clientes a ser atendido pela quantidade adequada de veículos. Os demais blocos de restrições especificam que: (1) – cada cliente (vértice) deve ser atendido por apenas um veículo; (2) –  $K$  veículos devem sair e retornar ao depósito; e (4) – cada aresta não adjacente ao depósito está limitada a ser percorrida no máximo uma vez (arestas adjacentes ao depósito podem ser usadas duas vezes quando a rota é composta de apenas um cliente a ser atendido).

O conjunto  $\mathcal{F}_1 = \{x \in P_1\}$  define todas as soluções viáveis para o PRVC. Como o número de desigualdades do tipo (3) é exponencial, é necessário um algoritmo que gere iterativamente tais desigualdades para calcular a estimativa a seguir:

$$L_1 = \min_{x \in P_1} \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e . \quad (3-1)$$

Usando o conceito de  $q$ -rotas, uma formulação alternativa, com um número exponencial de variáveis, pode ser obtida definindo as variáveis correspondentes a  $q$ -rotas sem 2-ciclos (subcaminhos  $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_i$ ,  $v_i \neq v_0$ ). Uma  $q$ -rota pode ser definida como uma rota  $\{0, v_1, \dots, v_r, 0\}$  tal que  $\sum_{i=1}^r d(v_i) \leq C$ , onde  $v_i \neq 0$  para cada  $i$  em  $\{1, \dots, r\}$  e  $r \geq 1$ . Encontrar as  $q$ -rotas de custos reduzidos negativos pode ser feito em tempo pseudo-polinomial,  $O(n^2 \cdot C)$ . Essa restrição de  $q$ -rotas sem 2-ciclos não altera a complexidade do subproblema de geração de colunas e melhora a formulação [22]. Seja  $Q$  uma matriz  $m \times p$ , onde as colunas são os vetores de incidência de  $p$   $q$ -rotas. Assim, cada variável  $\lambda_j$  é associada a uma das  $p$  possíveis  $q$ -rotas. Seja  $q_j^e$  o coeficiente associado à aresta  $e$  na  $j$ -ésima coluna de  $Q$ , ou seja, o número de vezes que a aresta  $e$  ocorre na  $j$ -ésima  $q$ -rota. Considere o seguinte politopo  $P_2$  em  $\mathbb{R}^{|E|}$ , definido como a projeção de um politopo em  $\mathbb{R}^{p+|E|}$ :

$$P_2 = \text{proj}_x \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^p q_j^e \cdot \lambda_j - & x_e = 0 \quad \forall e \in E \quad (5) \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j & = K \quad (6) \\ \sum_{e \in \delta(\{v_i\})} x_e = 2 & \forall v_i \in V_+ \quad (1) \\ x_e \geq 0 & \forall e \in E \\ \lambda_j \geq 0 & \forall j \in \{1, \dots, p\} . \end{array} \right.$$

As restrições (5) definem as variáveis  $x$  em termos das variáveis  $\lambda$ ; (6) define o número de veículos a ser utilizado. Cada variável  $\lambda_j$  é associada a uma

das possíveis  $q$ -rotas.

Pode-se demonstrar que o conjunto  $\mathcal{F}_2 = \{x \in P_2\}$  também define todas as soluções viáveis para o PRVC. Como o número de variáveis  $\lambda$  é exponencial, a estimativa  $L_2$ , definida a seguir, deve ser calculada usando-se a técnica de geração de colunas ou relaxação lagrangeana:

$$L_2 = \min_{x \in P_2} \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e . \quad (3-2)$$

Essa descrição de poliedros em termos de dois conjuntos de variáveis,  $\lambda$  e  $x$ , associado a geração de colunas ou relaxação Lagrangeana é chamada de *Mestre Explícita* [66]. A formulação mestre explícita para o PRVC, como apresentada por Fukasawa et al. [37], combina a formulação por geração de colunas com a formulação clássica com variáveis por arestas. Essa formulação utiliza o politopo  $P_3 = P_1 \cap P_2$ , cuja descrição no formato mestre explícito, é a seguinte:

$$\text{proj}_x \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{e \in \delta(\{v_i\})} x_e = 2 & \forall v_i \in V_+ \quad (1) \\ \sum_{e \in \delta(\{v_0\})} x_e = 2.K & \quad (2) \\ \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2.r(S) & \forall S \subseteq V_+ \quad (3) \\ x_e \leq 1 & \forall e \in E \setminus \delta(\{v_0\}) \quad (4) \\ \sum_{j=1}^p q_j^e \cdot \lambda_j - x_e = 0 & \forall e \in E \quad (5) \\ \sum_{j=1}^p \lambda_j = K & \quad (6) \\ x_e \geq 0 & \forall e \in E \\ \lambda_j \geq 0 & \forall j \in \{1, \dots, p\} . \end{array} \right.$$

As restrições (6) podem ser descartadas, já que são definidas por (2) e (5). O cálculo da estimativa  $L_3$ , definida a seguir,

$$L_3 = \min_{x \in P_3} \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e , \quad (3-3)$$

requer a resolução de um problema de programação linear *ME-PRVC* com



número exponencial de restrições e de variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ME-PRVC} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e \quad (0) \\ \text{sujeito a} \\ \sum_{e \in \delta(\{v_i\})} x_e = 2 \quad \forall v_i \in V \setminus \{0\} \quad (1) \\ \sum_{e \in \delta(\{v_0\})} x_e \geq 2 \cdot K^* \quad (2) \\ \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \cdot k(S) \quad \forall S \subseteq V \setminus \{v_0\} \quad (3) \\ x_e \leq 1 \quad \forall e \in E \setminus \delta(\{v_0\}) \quad (4) \\ \sum_{j=1}^p q_j^e \cdot \lambda_j - x_e = 0 \quad \forall e \in E \quad (5) \\ x_e \in \{0, 1, 2\} \quad \forall e \in E \\ \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Uma formulação mais compacta é obtida se toda ocorrência da variável  $x_e$ , nas restrições (0)–(4), é substituída pela expressão equivalente dada pela restrição (5). Relaxadas as restrições de integralidade, a formulação resultante, que será chamada de *DWM-PRVC* (*Dantzig-Wolfe Master PRVC*), é apresentada a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{DWM-PRVC} \left\{ \begin{array}{l} L_3 = \min \sum_{j=1}^p \sum_{e \in E} c_e \cdot q_j^e \cdot \lambda_j \\ \text{sujeito a} \\ \sum_{j=1}^p \sum_{e \in \delta(\{v_i\})} q_j^e \cdot \lambda_j = 2 \quad \forall v_i \in V_+ \quad (1) \\ \sum_{j=1}^p \sum_{e \in \delta(\{v_0\})} q_j^e \cdot \lambda_j = 2 \cdot K \quad (2) \\ \sum_{j=1}^p \sum_{e \in \delta(S)} q_j^e \cdot \lambda_j \geq 2 \cdot k(S) \quad \forall S \subseteq V_+ \quad (3) \\ \sum_{j=1}^p q_j^e \cdot \lambda_j \leq 1 \quad \forall e \in E \setminus \delta(\{v_0\}) \quad (4) \\ \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### 3.1.4

#### Geração de cortes

A relaxação linear inicial do problema consistindo apenas das restrições de grau nos clientes e no depósito e dos limites impostos nas variáveis pode ser resolvida facilmente, porém o *bound* gerado é muito fraco mas este pode ser fortalecido adicionando planos de cortes ao *LP*. A adição de cortes

é feita através da chamada de um algoritmo de separação. O algoritmo de separação exato para uma dada classe de desigualdades tem como entrada a solução do  $LP$  e como saída uma ou mais restrições dessa tal classe, caso exista. Já uma heurística de separação não garante que se não for encontrada nenhuma restrição violada que elas não existam.

Para separar os cortes do PRVC utilizamos o algoritmo desenvolvido por Lysgaard [56] que procura por restrições violadas das classes de desigualdades descritas a seguir. Esses cortes são definidos em termos das variáveis  $x_e^*$ . Porém qualquer corte da forma  $\sum_{e \in E} a_e \cdot x_e \geq b$  pode ser incluído na formulação como  $\sum_{j=1}^p (\sum_{e \in E} a_e \cdot q_j^e) \cdot \lambda_j \geq b$ .

- *Capacity Inequalities (connected components, fractional capacity inequality e greedy construction heuristic)*

Seja  $V_c = V \setminus \{0\}$  o conjunto dos clientes. Dado um subconjunto de clientes  $S \subseteq V_c$ , seja  $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$ ,  $\delta(S)$  o conjunto de arestas com uma das extremidades em  $S$  e  $r(S)$  o número mínimo de veículos necessários para atender a demanda da  $S$ . Assim, de forma a impor a restrição de capacidade dos veículos as *capacity inequalities* são escritas da seguinte forma:

$$x(\delta(S)) \geq 2r(S), \forall S \subseteq V_c, |S| \geq 2$$

- *Framed Capacity Inequalities*

Para algum subconjunto  $S \subseteq V_c$ , seja  $\Omega = \{S_1, \dots, S_p\}$  uma partição de  $S$ . Seja agora  $r(S, \Omega)$  igual ao número mínimo de veículos necessário para atender  $S$  dado que a restrição de capacidade para cada  $S_i$  está na igualdade. Um bom limite inferior para  $r(S, \Omega)$  pode ser encontrado resolvendo o problema de *Bin Packing*. Assim, a *framed capacity inequality* pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(\delta(S)) + \sum_{i=1}^p x(\delta(S_i)) \geq 2r(S, \Omega) + 2 \sum_{i=1}^p r(S_i)$$

- *Strengthened Comb Inequalities*

As *comb inequalities* são uma classe de desigualdades para o PCV que mostrou ter grande utilidade como plano de cortes. Assim, vários autores adaptaram-as para o PRVC. Definimos um *comb* como sendo um conjunto de vértices  $H \subset V$  chamado de *handle* e  $T_1, \dots, T_t$ ,  $t \geq 2$ , outros conjuntos chamados de *teeth*, tal que:

$$H \cap T_j \neq \emptyset \text{ e } T_j \cap H \neq \emptyset \text{ para } j = 1, \dots, t;$$

$$\text{Para cada par } \{i, j\} \subset \{1, \dots, t\}: T_i \cap T_j \subset H \text{ ou } T_i \cap T_j \cap H = \emptyset$$

Agora, para qualquer conjunto  $S \subset V$ , seja  $\tilde{r}(S)$  igual a  $r(S)$  se  $0 \notin S$ , e  $r(V \setminus S)$  caso contrário. Definimos então a quantidade:

$$S(H, T_1, \dots, T_t) := \sum_{j=1}^t (\tilde{r}(T_j \cap H) + \tilde{r}(T_j \setminus H) + \tilde{r}(T_j))$$

Se  $S(H, T_1, \dots, T_t)$  é ímpar, então a *strengthened comb inequality* a seguir é válida para o PRVC.

$$x(\delta(H)) + \sum_{j=1}^t x(\delta(T_j)) \geq S(H, T_1, \dots, T_t) + 1$$

- *Multistar and Partial Multistar Inequalities*

As *Multistar inequalities* foram definidas originalmente por Araque, Hall e Magnanti para o PRVC com demandas unitárias. Essas desigualdades são escritas da seguinte forma:

$$\alpha x(E(N)) + \beta x(E(N : S)) \leq \gamma$$

onde  $E(N)$  é o conjunto de arestas do grafo com as duas extremidades em  $N$ ,  $N \subset V_c$  é chamado de núcleo,  $S \subseteq V_c \setminus N$  é o conjunto dos chamados satélites, e  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes que dependem de  $|S|$  e  $|N|$ . Os mesmos autores também introduziram as *Partial Multistar Inequalities* que são escritas da seguinte forma:

$$\alpha x(E(N)) + \beta x(E(C : S)) \leq \gamma$$

onde  $C \subset N$  é o conjunto dos chamados vértices conectores e novamente  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes que dependem de  $|N|$ ,  $|S|$  e  $|C|$ .

- *Hypotour Inequalities*

Seja  $F \subset E$  tal que qualquer solução viável do PRVC utilize pelo menos uma aresta de  $F$ . Assim, a *hypotour inequality* é:

$$x(F) \geq 1.$$

uma variação da *hypotour inequality* também considerada é a *2-edges extended hypotour inequality*. Para um dado conjunto  $W \subset V_c$  e duas arestas distintas  $e_1$  e  $e_2 \in \delta(W)$ , a *2-edge extended hypotour inequality* é:

$$x(\delta(W)) + 2x(F) \geq 2x_{e_1} + 2x_{e_2}.$$