



**Marcelo Ladeira Reis**

**Um algoritmo de geração de colunas e  
cortes para o problema de roteamento  
de veículos**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-  
graduação em Informática do Departamento de In-  
formática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Marcus Poggi de Aragão

Co-Orientador: Prof. Eduardo Uchoa

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2004



**Marcelo Ladeira Reis**

**Um algoritmo de geração de colunas e  
cortes para o problema de roteamento  
de veículos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Informática do Departamento de Informática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marcus Poggi de Aragão**

Orientador

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Eduardo Uchoa**

Co-Orientador

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Nair Maria Maia de Abreu**

Departamento de Engenharia de Produção –

COPPE/UFRJ

**Prof. Eduardo Sany Laber**

Departamento de Informática – Puc-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico —

PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de Dezembro de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Marcelo Ladeira Reis**

Graduou-se em Ciência da Computação na Universidade Federal de Viçosa (Viçosa-MG, Brasil).

Ficha Catalográfica

Reis, Marcelo Ladeira

Um algoritmo de geração de colunas e cortes para o problema de roteamento de veículos/ Marcelo Ladeira Reis; orientador: Marcus Poggi de Aragão; co-orientador: Eduardo Uchoa. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Informática, 2004.

v., 85 f: il. ; 30 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Informática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Roteamento de Veículos, 2. Programação Linear Inteira, 3. Geração de Colunas, 4. Métodos de Planos de Corte. I. Aragão, Marcus Poggi de. II. Uchoa, Eduardo. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Informática. IV. Título.

CDD: 004

Esta dissertação é dedicada à Sabrina, aos meus pais Maria e Dilermando, à minha irmã Fernanda e à minha avó Aracy.

## Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador Marcus Poggi, ao meu co-orientador Eduardo Uchoa, ao Prof. Oscar Porto e aos meus colegas e amigos, Ricardo Fukasawa, Renato Werneck, Humberto Longo e Alexandre Pigatti, que foram extremamente importantes na realização deste trabalho e também me ajudaram muito na minha formação acadêmica e pessoal.

Aos amigos Fred, Fernanda Menezes, Fernanda Hamacher, Marcel, Lorenza, Marcus Salles e Pedro pelo aprendizado e convivência durante o curso.

Aos amigos Alexandre Duarte, Francisco Fonseca, André Oliveira e Luis Gustavo Ferrão pela amizade e apoio ao longo deste período.

À CAPES pela bolsa recebida e à PUC-Rio pelas condições de ensino durante o Mestrado.

À todos os meus amigos que sempre me apoiaram e me ajudaram.

A toda a minha família que me criou, me educou e incentivou a poder superar todas as dificuldades.

À Sabrina que esteve sempre ao meu lado nos momentos que eu precisava e sempre me apoiou.

## Resumo

Reis, Marcelo Ladeira; Aragão, Marcus Poggi de; Uchoa, Eduardo.  
**Um algoritmo de geração de colunas e cortes para o problema de roteamento de veículos.** Rio de Janeiro, 2004.  
85p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Informática,  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O problema de Roteamento de Veículos com restrição de capacidade (CVRP) é um dos problemas mais estudados em Otimização Combinatória. Sendo uma generalização imediata do conhecido problema do Caixeiro Viajante, o CVRP tem atraído a atenção dos pesquisadores mais proeminentes da área desde os anos 60. Um dos algoritmos mais importantes para a sua resolução foi proposto no início dos anos 80 quando um algoritmo utilizando uma relaxação Lagrangeana particularmente adequada provou ser bastante superior aos algoritmos contemporâneos. Este algoritmo sugeriu a utilização de técnicas de geração de colunas que, nos anos seguintes até o início dos anos 90, assumiram o rótulo de melhor algoritmo para o CVRP. Finalmente, em meados dos anos 90, algoritmos de planos de corte apresentaram resultados que convenceram a comunidade de que esta deveria ser a abordagem para resolver os problemas mais difíceis de CVRP. Esta dissertação apresenta uma revisão deste algoritmos anteriores e propõe um formulação que permite reunir o melhor deles. O algoritmo resultante, que pode ser rotulado como de *branch-and-cut-and-price*, trabalha com um número exponencial de variáveis e restrições que definem um espaço relaxado de soluções que corresponde à interseção dos espaços de solução relaxados utilizados pelos algoritmos anteriores. Esta dissertação também descreve um implementação especial do algoritmo de programação dinâmica para resolução do problema de geração de colunas. Estratégias para fazer um *branching* robusto também são discutidas. Tudo isso permite construir um algoritmo que é capaz de ter uma boa performance quando aplicado a diferentes classes de instâncias. A experiência computacional mostrou que a abordagem proposta obtém limites inferiores consistentemente melhores que os dos algoritmos anteriores. Mais ainda, permite resolver em tempo hábil diferentes tipos de instâncias de até 135 vértices, incluindo 18 que foram resolvidas pela primeira vez.

## Palavras-chave

Roteamento de Veículos, Programação Linear Inteira, Geração de Colunas, Métodos de Planos de Corte.

## Abstract

Reis, Marcelo Ladeira; Aragão, Marcus Poggi de; Uchoa, Eduardo.  
**An algorithm with column and cut generation for the Capacitated Vehicle Routing problem.** Rio de Janeiro, 2004.  
85p. MSc. Dissertation — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The Capacitated Vehicle Routing problem (CVRP) has been one of the most studied problems in the field of Combinatorial Optimization. A straight forward generalization of the popular Travelling Salesperson problem, the CVRP has drawn attention of the most prominent researchers since the early 60's. One of the most important algorithms appeared in the early 80's when a suitable Lagrangean relaxation algorithm has demonstrated to be far better than the contemporary ones. This algorithm suggested the use of column generation algorithms that succeeded to become the best ones in the late 80's and early 90's. Finally, in the mid 90's, cutting plane methods presented results that convinced the community that this should be the approach for solving the hardest CVRP problems. This dissertation presents an overview of those early algorithms and proposes a formulation that allows uniting the best contributions of them. The resulting algorithm, labeled as a *branch-and-cut-and-price* algorithm, deals with exponentially many variables and constraints that define a relaxed solution space that is the intersection of the relaxed solution spaces considered in the previous algorithms. The dissertation also describes a specially devised dynamic programming algorithm to solve the column generation subproblem and discusses robust branching strategies that altogether allowed to build an algorithm that performs well on several different classes of instances. The computational experience has shown that the approach here proposed leads to lower bounds superior than the previous ones. Moreover, it allowed to consistently solve instances with up to 135 vertices, including 18 that were solved for the first time.

## Keywords

Vehicle Routing, Integer Programming, Column Generation, Cutting Planes Methods.

# Conteúdo

|     |  |           |
|-----|--|-----------|
| 1   | Introdução   | <b>12</b> |
| 1.1 | Características dos Problemas de Roteamento  | 13        |
| 1.2 | O Problema de Roteamento de Veículos com Capacidades                                       | 15        |
| 1.3 | Algoritmos exatos para o CVRP  | 17        |
| 1.4 | Estrutura da dissertação   | 19        |
| 2   | Formulações para o CVRP  | <b>21</b> |
| 2.1 | Uma formulação com número polinomial de variáveis e número exponencial de restrições       | 21        |
| 2.2 | Uma formulação com número polinomial de variáveis e restrições                             | 23        |
| 2.3 | Uma formulação com um número exponencial de variáveis e um número polinomial de restrições | 25        |
| 3   | Algoritmos Exatos  | <b>29</b> |
| 3.1 | Relaxação Lagrangeana  | 29        |
| 3.2 | Geração de Colunas   | 33        |
| 3.3 | Planos de corte  | 34        |
| 4   | Uma formulação com número exponencial de variáveis e restrições para o CVRP                | <b>36</b> |
| 4.1 | Técnicas para construção de Algoritmos de BCP Robustos                                     | 37        |
| 4.2 | Limites inferiores para o CVRP   | 41        |
| 4.3 | A formulação com número exponencial de variáveis e restrições                              | 43        |
| 5   | O Algoritmo de <i>Branch-and-Cut-and-Price</i>   | <b>45</b> |
| 5.1 | Geração de Colunas   | 46        |
| 5.2 | Geração de Cortes  | 54        |
| 5.3 | Representação de variáveis e restrições  | 59        |
| 5.4 | Regra de <i>Branching</i>  | 59        |
| 5.5 | Seleção de nós e limites superiores  | 61        |
| 5.6 | Escolha Dinâmica para a Geração de Colunas   | 61        |
| 6   | Resultados   | <b>63</b> |
| 6.1 | Limites Inferiores   | 63        |
| 6.2 | Algoritmo Completo   | 66        |

|   |              |    |
|---|--------------|----|
| 7 | Conclusão    | 73 |
| 7 | Bibliografia | 78 |

## Lista de Figuras

- 1.1 Solução para uma instância do CVRP. 18
- 5.1 Árvore de cláusulas representando o caminho terminando em  $7 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow v$ . Nós internos, representados por retângulos numerados, são as cláusulas padrão. Os números são os guardas, e o filho padrão é indicado por três pontos(...). Cláusulas falsas são representadas por quadrados preenchidos, e cláusulas verdadeiras por círculos vazios. 51
- 6.1 Diminuição do *gap* por BCP com  $s = 3$  ( $s3$ ) em relação à [46] ( $lle$ ). O gráfico representa  $\frac{s3-lle}{opt-lle}$  em função de  $\frac{n}{K}$ . Círculos representam instâncias resolvidas à otimalidade pela primeira vez e cruzeiros as que já haviam sido resolvidas anteriormente. 69
- 7.1 Solução ótima para E-n76-k10 (capacidade dos veículos = 140). 74
- 7.2 Solução ótima para E-n76-k14 (capacidade dos veículos = 100). 75
- 7.3 Solução ótima para E-n101-k14 (capacidade dos veículos = 112). 76

## Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 6.1 | Comparação dos limites inferiores.   | 68 |
| 6.2 | Estatísticas para o nó raiz para as diferentes variações do BCP.                     | 69 |
| 6.3 | Estatísticas detalhadas para o nó raiz de um conjunto de instâncias representativas. | 70 |
| 6.4 | Resultados do algoritmo Dyn-BCP para as instâncias A e B.                            | 71 |
| 6.5 | Resultados do algoritmo Dyn-BCP para as instâncias E,F,M e P.                        | 72 |