

**Luzia da Costa Tonon**

**O Teorema de  
Cramér-Lundberg via  
martingais**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
Programa de Pós-Graduação em  
Matemática

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Luzia da Costa Tonon**

**O Teorema de Cramér-Lundberg via  
martingais**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Sergio Volchan

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2005



**Luzia da Costa Tonon**

**O Teorema de Cramér-Lundberg via  
martingais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Sergio Volchan**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Hélio Cortes Vieira Lopes**

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Fernanda Chaves**

IAG - PUC-Rio

**Prof. Derek Douglas Jack Hacon**

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Max Oliveira de Souza**

Departamento de Matemática - UFF

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do

Centro Técnico Científico-PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de Fevereiro de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Luzia da Costa Tonon**

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo

#### Ficha Catalográfica

Tonon,Luzia

O Teorema de Cramér-Lundberg via martingais/ Luzia da Costa Tonon; orientador: Sergio Volchan. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2005.

v., 51 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

I. Volchan, Sergio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.



## Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Sérgio Volchan pela dedicação e parceria para a realização deste trabalho.

À CAPES, ao ICATU e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos meus amigos Charlie, Edu, Et, Fabiano Petronetto, Léo Martins, Léo Rolla, Bernardo, Renato, Aldo, Paulinha, Ju Freire, Ju Prado, Ju Zanella, Evelyn, Susana, Gurí, John, Pedro, André, Marcelo, Crica por todo apoio, paciência e compreensão.

À minha família, pelo carinho, apoio e atenção.

Ao professor e amigo Florêncio Ferreira Guimarães, pela confiança e incentivo.

Aos meus colegas da PUC-Rio.

Aos professores que participaram da Comissão organizadora.

A todos os professores e funcionários do Departamento pelos ensinamentos e pela ajuda.

A todos os meus amigos e familiares que de uma forma ou de outra me estimularam ou me ajudaram.

## Resumo

Tonon, Luzia; Volchan, Sergio. **O Teorema de Cramér-Lundberg via martingais**. Rio de Janeiro, 2005. 51p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Métodos da teoria de martingais tem sido amplamente utilizados em matemática nos últimos decênios. Mais recentemente, eles também vêm sendo usados em matemática atuarial. Nesta tese discutimos um exemplo de aplicação desta metodologia na demonstração do teorema clássico de Cramér-Lundberg para o problema da ruína.

## Palavras-chave

\*-Martingais; Atuária; Ruína.

## Abstract

Tonon, Luzia; Volchan, Sergio. **The Cramér-Lundberg using martingales..** Rio de Janeiro, 2005. 51p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the last decades martingale theory tools have been extensively in mathematical finance. More recently, they have also been used in actuarial mathematics. In this thesis we illustrate this methodology in the proof of the classical Lundberg-Cramér theorem for the ruin problem.

## Keywords

\*-Martingales, Actuary, Ruin.

# Conteúdo

1	Introdução	9
2	Noções sobre Martingais em tempo discreto e contínuo	15
2.1	Esperança/Valor médio/Valor esperado	18
2.2	Esperança Condicional	20
2.3	Martingais em tempo discreto	22
2.4	Integrabilidade Uniforme e Convergência em $L^1$	28
2.5	Processos Estocásticos	30
3	O teorema de Cramér-Lundberg via martingais	34
3.1	Estimativa da probabilidade de ruína num modelo simples	34
3.2	O modelo de Cramér-Lundberg em tempo contínuo	36
4	Conclusão	44
5	Apêndice	46
	Bibliografia	50