

3

O teorema de Cramér-Lundberg via martingais

O teorema clássico de Cramér-Lundberg, base da modelagem atuarial (ramo não-vida, veja [2]), fornece uma estimativa para a probabilidade da ruína de uma seguradora, num modelo simplificado. Para dar uma idéia do método, começamos com um modelo mais simples em tempo discreto.

3.1

Estimativa da probabilidade de ruína num modelo simples

Seja S_n o capital total de uma seguradora ao final do n -ésimo ano. Suponha que o influxo de prêmios recebidos por ano seja constante $c > 0$ e que ξ_n seja o montante de pagamentos feitos no n -ésimo ano. Então:

$$S_{n+1} = S_n + c - \xi_{n+1}$$

Suponhamos que $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ sejam independentes e identicamente distribuídas (iid) em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, por simplicidade com distribuição normal $\eta(\mu, \sigma^2)$, com $\mu < c$ e seja S_0 o capital inicial.

Defina o evento

$$\{\text{Ruína}\} = \bigcup_{n \geq 1} \{S_n < 0\}, \quad (3-1)$$

isto é, de que o capital da seguradora seja negativo em algum ano n . Vamos checar que

$$\mathbb{P}(\text{Ruína}) \leq e^{-2(\frac{c-\mu}{\sigma^2})S_0},$$

e portanto deve-se ter $\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_0$ grande para garantir que com grande probabilidade a seguradora não vá a bancarrota.

Demonstração. Note que $S_1 = S_0 + c - \xi_1$, $S_2 = S_1 + c - \xi_2 = S_0 + 2c - \xi_1 - \xi_2$, etc... $S_n = S_0 + nc - (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$, e portanto S_n é $\mathcal{F}_n$ -mensurável, onde $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Considere a sequência $\{M_n\}_{n \geq 0}$, onde:

$$M_n = \exp\left\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_n\right\}.$$

Note que M_n é $\mathbb{F}$ -adaptado, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{n+1}\}|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_n - 2\frac{c-\mu}{\sigma^2}c + 2\frac{c-\mu}{\sigma^2}\xi_{n+1}\}|\mathcal{F}_n] \\ &= \exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_n\} \exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}c\} \mathbb{E}[\exp\{2\frac{c-\mu}{\sigma^2}\xi_{n+1}\}|\mathcal{F}_n]\end{aligned}$$

Mas, como ξ_{n+1} é independente de $\mathcal{F}_n$ temos que:

$$\mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}\xi_{n+1}\}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}\xi_{n+1}\}] = \varphi(-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}),$$

onde:

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{t\xi_1}],$$

é chamada a função geradora de ξ_1 , que para $\xi_1 = N(\mu, \sigma^2)$ é explicitamente dada por: $\varphi(t) = \exp\{t\mu + t^2\frac{\sigma^2}{2}\}$. Logo:

$$\begin{aligned}\varphi(2\frac{c-\mu}{\sigma^2}) &= \exp\{2\frac{c-\mu}{\sigma^2}[\mu + \frac{2}{\sigma^2}(c-\mu)\frac{\sigma^2}{2}]\} \\ &= \exp\{2c\frac{c-\mu}{\sigma^2}\}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n, \text{ ou seja, } \{M_n\}_{n \geq 0} \text{ é um } \mathbb{F}\text{-martingal.}$$

Defina agora o tempo de parada

$$\tau = \inf\{n : S_n < 0\}$$

Então:

$$\mathbb{P}(\text{Ruína}) = \mathbb{P}(\tau < \infty)$$

Mas, para cada $n \geq 0$, o tempo de parada $\tau \wedge n$ é limitado e pelo teorema de Doob temos:

$$\mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{\tau \wedge n}\}] = \exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_0\}$$

Mas por outro lado,

$$\mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{\tau\wedge n}\}] = \mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{\tau\wedge n}\}\mathbb{I}_{\{\tau\leq n\}}] + \mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{\tau\wedge n}\}\mathbb{I}_{\{\tau>n\}}] \geq \mathbb{P}(\tau \leq n)$$

pois

$$\mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{\tau\wedge n}\}\mathbb{I}_{\{\tau>n\}}] \geq 0$$

e em $\mathbb{E}[\exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{\tau\wedge n}\}\mathbb{I}_{\{\tau\leq n\}}]$ tem-se

$$S_{\tau\wedge n} = S_{\tau} < 0 \implies -2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{\tau\wedge n} \geq 0$$

$$\implies \exp\{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_{\tau\wedge n}\} \geq 1.$$

Logo, $\forall n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(\tau \leq n) \leq e^{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_0}$$

e como $\{\tau \leq n\} \downarrow \{\tau < \infty\}$ vem que

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau \leq n) \leq e^{-2\frac{c-\mu}{\sigma^2}S_0}$$

3.2

O modelo de Cramér-Lundberg em tempo contínuo

Vamos discutir a forma mais simples do modelo de Cramér-Lundberg em tempo contínuo. Para uma discussão extensa veja [15] e [6]. A demonstração clássica do Teorema de Cramér-Lundberg utiliza métodos relacionados ao chamado Processo de Renovação. Para uma discussão veja [8].

Iremos assumir agora que a evolução do capital $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ de uma certa companhia de seguros é um processo estocástico em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, como segue.

O capital inicial é $X_0 = u > 0$. O pagamento do seguro (prêmio) chega continuamente à taxa constante $c > 0$ (em Δt a quantia que chega é de $c\Delta t$) e os sinistros ocorrem em instantes aleatórios $T_1, T_2, \dots (0 < T_1 < T_2 < \dots)$, e seus valores são descritos por variáveis aleatórias não negativas $\xi_1, \xi_2, \dots$

Portanto, o capital X_t ¹ no tempo $t > 0$ é dado por

$$X_t = u + ct - S_t, \tag{3-2}$$

¹ $\mathbb{X}$ também é chamado “processo de risco”

onde o valor agregado dos sinistros no instante t é dado por

$$S_t = \sum_{i \geq 1} \xi_i \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}}. \quad (3-3)$$

Considere o tempo de parada

$$T = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 0\},$$

isto é, o primeiro instante em que o capital da companhia de seguros torna-se menor ou igual a zero, chamado instante de ruína.

Uma problema natural relacionado as operações de uma Seguradora é o cálculo da *probabilidade de ruína*, $\mathbb{P}(T < \infty)$, e a probabilidade de ruína antes (inclusive) do tempo t , $\mathbb{P}(T \leq t)$.

Para calcular estas probabilidades assumimos o contexto do modelo clássico de Cramér-Lundberg caracterizado pelas seguintes hipóteses:

I Os tempos em que os sinistros ocorrem $T_1, T_2, \dots$ são tais que

$$\sigma_i = T_i - T_{i-1}, i \geq 1 \quad (T_0 \equiv 0)$$

são variáveis aleatórias iid com distribuição exponencial com densidade $\lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0, \lambda > 0$.

II As variáveis aleatórias $\xi_1, \xi_2, \dots$ são iid com função de distribuição

$$F(x) = \mathbb{P}(\xi_1 \leq x); \quad F(0) = 0, \quad \mu = E[\xi_n] = \int_0^\infty x dF(x) < \infty.$$

III As sequências $T_1, T_2, \dots$ e $\xi_1, \xi_2, \dots$ são independentes .

Denotamos o processo do número de sinistros por $\{N_t\}_{t \geq 0}$, isto é,

$$N_t = \sum_{i \geq 1} \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} \quad (3-4)$$

Lema 3.1 $\{T_k > t\} = \{\sigma_1 + \dots + \sigma_k > t\} = \{N_t < k\}$

Demonstração:

De fato,

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_k = T_1 - T_0 + T_2 - T_1 + T_3 - T_2 + \dots + T_k - T_{k-1} = T_k,$$

obtendo desta maneira a primeira igualdade.

Para mostrar que $\{T_k > t\} = \{N_t < k\}$, basta observar que

$$T_k > t \implies T_j > t \quad \forall j \geq k \implies \sum_{j \geq k} \mathbb{I}_{\{T_j \leq t\}} = 0$$

Dai,

$$N_t = \sum_{i \geq 1} \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} + \sum_{j \geq k} \mathbb{I}_{\{T_j \leq t\}} = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}} < k. \quad \square$$

Podemos agora reescrever $S_t = \sum_{i \geq 1} \xi_i \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}}$ como

$$S_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i & \text{se } N_t > 0 \\ 0 & \text{se } N_t = 0. \end{cases} \quad (*)$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} S_t &= \sum_{i \geq 0} S_t \mathbb{I}_{\{N_t = n\}} = \sum_{i \geq 1} S_t \mathbb{I}_{\{N_t = n\}} \stackrel{(*)}{=} \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \mathbb{I}_{\{N_t = n\}} \right) = \\ &= \sum_{i \geq 1} \sum_{n \geq i} \xi_i \mathbb{I}_{\{N_t = n\}} = \sum_{i \geq 1} \xi_i \sum_{n \geq i} \mathbb{I}_{\{N_t = n\}} = \sum_{i \geq 1} \xi_i \mathbb{I}_{\{N_t \geq i\}}. \end{aligned}$$

Esta maneira de escrever S_t facilitará algumas manipulações que serão feitas adiante.

Sob a hipótese **I** temos que:

$$\mathbb{P}(N_t < k) = \mathbb{P}(\sigma_1 + \dots + \sigma_k > t) = \sum_{i=1}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

Dai,

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3-5)$$

isto é, a variável aleatória N_t tem distribuição de Poisson com parâmetro (ou intensidade) λt . Aqui, $E[N_t] = \lambda t$

Semelhante ao movimento Browniano, o processo de Poisson é um processo com incrementos independentes e estacionários, onde, para $s < t$, os incrementos $N_t - N_s$ têm distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda(t-s)$.

A partir da hipótese **III** temos que:

$$E[X_t - X_0] = ct - E[S_t] = ct - E\left[\sum_i \xi_i \mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}}\right] =$$

$$ct - \sum_i E[\xi_i] E[\mathbb{I}_{\{T_i \leq t\}}] = ct - \mu \sum_i \mathbb{P}(T_i \leq t) =$$

$$ct - \mu \sum_i \mathbb{P}(N_t \geq i) = ct - \mu E[N_t] = t(c - \lambda\mu).$$

É natural exigir que $E[X_t - X_0] > 0, t > 0$, pois como $E[X_t] \geq E[X_t - X_0]$, a condição garante que X_t não pode ser menor ou igual a zero com probabilidade um, o que implicaria ruína garantida. Logo,

$$c > \lambda\mu, \quad (3-6)$$

chamada “condição de ganho líquido positivo”. Chama-se $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ de “reserva de segurança” (safety load).

Na análise seguinte, a função abaixo será de grande importância:

$$h(z) = \int_0^\infty (e^{zx} - 1) dF(x), \quad z \geq 0, \quad (3-7)$$

que é igual a $\hat{F}(-z) - 1$, onde

$$\hat{F}(z) = \int_0^\infty e^{-zx} dF(x)$$

é a transformada de Laplace-Stieltjes de F (z é um número complexo)

Chamando

$$g(z) = \lambda h(z) - cz, \quad \xi_0 \equiv 0,$$

encontramos para $r > 0$ com $(h(r) < \infty)$,

$$\begin{aligned} E[e^{-r(X_t - u)}] &= e^{-rct} E[e^{r \sum_{i=0}^{N_t} \xi_i}] \\ &= e^{-rct} \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{r \sum_{i=0}^{N_t} \xi_i} | N_t = n] \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= e^{-rct} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + h(r))^n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \\ &= e^{-rct} e^{\lambda t h(r)} = e^{t(\lambda h(r) - rc)} = e^{tg(r)}. \end{aligned}$$

Lema 3.2 *Para quaisquer $s < t$*

$$E e^{-r(X_t - X_s)} = e^{(t-s)g(r)}, \quad (3-8)$$

Demonstração:

De fato,

$$\begin{aligned}
Ee^{-r(X_t - X_s)} &= E[e^{-rc(t-s)} e^{-r \sum_{i=N_s}^{N_t} \xi_i}] \\
&= \sum_{m, n \geq 0} E[e^{-rc(t-s)} e^{-r \sum_{i=N_s}^{N_t} \xi_i} \mid N_t - N_s = m, N_s = n] \mathbb{P}(N_t - N_s = m, N_s = n) = \\
&= \sum_{m, n \geq 0} E[e^{-rc(t-s)} e^{-r \sum_{i=n}^{n+m} \xi_i} \mid N_t - N_s = m, N_s = n] \mathbb{P}(N_t - N_s = m) \mathbb{P}(N_s = n) \\
&= \sum_{m, n \geq 0} E[e^{-rc(t-s)} e^{-r \sum_{i=n}^{n+m} \xi_i}] \mathbb{P}(N_t - N_s = m) \mathbb{P}(N_s = n) \\
&= \sum_{m \geq 0} E[e^{-rc(t-s)} e^{-r \sum_{i=0}^m \xi_i}] \mathbb{P}(N_t - N_s = m) \\
&= e^{-rc(t-s)} \sum_{m \geq 0} (1 + h(r))^m e^{-\lambda(t-s)} \frac{\lambda(t-s)^m}{m!} \\
&= e^{(t-s)g(r)} \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 3.3 *O processo $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo com incrementos independentes.*

Demonstração: Para demonstrar esta afirmação, usaremos a seguinte resultado (ver [3]):

Seja o vetor aleatório $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ são independentes $\iff \forall a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ $E[e^{i \langle a, X \rangle}] = E[e^{iaX_1 + iaX_2 + \dots + iaX_n}] = \prod_{i=1}^n E[e^{ia_j X_j}]$.

Mostraremos o lema no caso simples para dois incrementos (o caso geral é análogo).

Temos para r, u arbitrários:

$$\begin{aligned}
&E[e^{ir(X_\beta - X_\alpha)} e^{iu(X_\delta - X_\sigma)}] = \\
&= E[e^{irc(\beta - \alpha)} e^{ir(S_\beta - S_\alpha)} e^{iuc(\delta - \sigma)} e^{iu(S_\delta - S_\sigma)}] = \\
&= E[e^{k_1} e^{ir \sum_{k=N_\alpha}^{N_\beta} \xi_k} e^{k_2} e^{iu \sum_{j=N_\sigma}^{N_\delta} \xi_j}],
\end{aligned}$$

onde

$$k_1 = irc(\beta - \alpha) \text{ e } k_2 = iuc(\delta - \sigma) \text{ e } \beta > \alpha > \delta > \sigma.$$

Logo,

$$E[e^{k_1} e^{ir \sum_{i=N_\alpha}^{N_\beta} \xi_i} e^{k_2} e^{iu \sum_{j=N_\sigma}^{N_\delta} \xi_j}] =$$

$$= e^{k_1+k_2} \sum_{m,n,p,q \geq 0} E[e^{ir \sum_{k=n+p+q}^{m+n+p+q} \xi_k + iu \sum_{j=p}^{p+q} \xi_j} \mid N_\beta - N_\alpha = m, N_\alpha - N_\delta = n, N_\delta - N_\sigma = p, N_\sigma = q] \mathbb{P}(N_\beta - N_\alpha = m) \mathbb{P}(N_\alpha - N_\delta = n) \mathbb{P}(N_\delta - N_\sigma = p) \mathbb{P}(N_\sigma = q).$$

Observe que

$$\alpha > \beta > \delta > \sigma \implies N_\alpha = N_\delta + n = N_\sigma + p + n = p + n + q.$$

$$\begin{aligned} &= e^{k_1+k_2} \sum_{m,n,p,q \geq 0} E[e^{ir \sum_{k=n+p+q}^{m+n+p+q} \xi_k + iu \sum_{j=p}^{p+q} \xi_j}] \mathbb{P}(N_\beta - N_\alpha = m) \mathbb{P}(N_\alpha - N_\delta = n) \mathbb{P}(N_\delta - N_\sigma = p) \mathbb{P}(N_\sigma = q) \\ &= e^{k_1} \sum_{m,n,p,q \geq 0} E[e^{ir \sum_{k=0}^m \xi_k}] \mathbb{P}(N_\beta - N_\alpha = m) \mathbb{P}(N_\alpha = n+p+q) e^{k_2} E[e^{iu \sum_{j=0}^q \xi_j}] \mathbb{P}(N_\delta - N_\sigma = p) \mathbb{P}(N_\sigma = q) \\ &= E[e^{ir(X_\beta - X_\alpha)}] E[e^{iu(X_\delta - X_\sigma)}]. \quad \square \end{aligned}$$

Considere agora o filtro $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0} = \mathbb{G}$ onde $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Uma vez que o processo $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ é um processo com incrementos independentes, temos para $t > s$

$$E(e^{-r(X_t - X_s)} | \mathcal{G}_s) = E e^{-r(X_t - X_s)} = e^{(t-s)g(r)} \quad \mathbb{P} - q.c$$

então

$$E(e^{-rX_s - tg(r)} | \mathcal{G}_s) = e^{-rX_s - sg(r)} \quad \mathbb{P} - q.c \quad (3-9)$$

Denotando, para $t \geq 0$:

$$Z_t = e^{-rX_s - tg(r)} \quad (3-10)$$

vemos que a equação (3-9) pode ser reescrita na forma

$$E[Z_t | \mathcal{G}_s] = Z_s, \quad \mathbb{P} - q.c \quad s \leq t, \quad (3-11)$$

que é a propriedade de martingal.

Como o processo $\mathbb{Z} = \{Z_t\}_{t \geq 0}$ é tal que $E[Z_t] = e^{-ru} < \infty$ e é $\mathbb{G}$ -adaptado, concluímos que $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ é um martingal.

Segue então, pelo teorema de Doob em tempo contínuo que:

$$E[Z_{t \wedge \tau}] = E[Z_0] \quad (3-12)$$

para qualquer tempo de parada τ .

A partir de (3-10) e (3-12) encontramos que para $\tau = T$,

$$\begin{aligned} e^{-ru} &= E[e^{-rX_{t \wedge T} - (t \wedge T)g(r)}] \\ &= E[e^{-rX_{t \wedge T} - (t \wedge T)g(r)} | T \leq t] \mathbb{P}(T \leq t) + E[e^{-rX_{t \wedge T} - (t \wedge T)g(r)} | T > t] \mathbb{P}(T > t) \\ &\geq E[e^{-rX_{t \wedge T} - (t \wedge T)g(r)} | T \leq t] \mathbb{P}(T \leq t) = E[e^{-rX_T - Tg(r)} | T \leq t] \mathbb{P}(T \leq t) \\ &\geq E[e^{-Tg(r)} | T \leq t] \mathbb{P}(T \leq t) \geq \min_{0 \leq s \leq t} e^{-sg(r)} \mathbb{P}(T \leq t). \end{aligned}$$

Segue então que:

$$\mathbb{P}(T \leq t) \leq \frac{e^{-ru}}{\min_{0 \leq s \leq t} e^{-sg(r)}} = e^{-ru} \max_{0 \leq s \leq t} e^{sg(r)}. \quad (3-13)$$

Consideremos agora a função $g(r) = \lambda h(r) - cr$, $r \geq 0$.

Claramente, $g(0) = 0$, $g'(0) = \lambda\mu - c < 0$ (por 3-6) e $g''(r) = \lambda h''(r) \geq 0$. Portanto, existe um (único) valor positivo $r = R$ com $g(R) = 0$.

Observando que para $r > 0$, pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{rx}(1 - F(x))dx &= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{rx} dF(y) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^y e^{rx} dx \right) dF(y) \\ &= \frac{1}{r} h(r), \end{aligned}$$

podemos afirmar que $R > 0$ é a única raiz da equação

$$\int_0^\infty e^{rx} \overline{F}(x) dx = \int_0^\infty e^{rx}(1 - F(x)) dx = \frac{c}{\lambda}, \quad (3-14)$$

onde $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ é a cauda da distribuição F . A condição (3-14) chama-se “condição de Cramér-Lundberg”.

Fazendo $r = R$ em (3-13). Obtemos, para qualquer $t > 0$,

$$\mathbb{P}(T \leq t) \leq e^{-Ru}. \quad (3-15)$$

Daí,

$$\mathbb{P}(T < \infty) \leq e^{-Ru}, \quad (3-16)$$

que fornece uma estimativa para a probabilidade de ruína (R chama-se “expoente de Lundberg”).

Em resumo, obtemos o seguinte:

Teorema 3.1 *Suponha que no modelo de Cramér-Lundberg as suposições I, II, III e 3-6 são satisfeitas. Então a desigualdade 3-16 vale para a probabilidade de ruína $\mathbb{P}(T < \infty)$, onde R é a raiz positiva da equação 3-14 (isto é, R satisfaz a condição de Cramér-Lundberg).*