Bibliografia

[1] EMBRECHTS, P.. **Actuarial versus financial pricing of insurance**. http://www.math.ethz.ch/∼embrechts.

[2] BOWERS, E. A.. **Actuarial Mathematics,** 2^a **ed.** Actex. textbooks, 1997.

[3] BREIMAN, L.. **Probability**. Classics in Applied Mathematics, 1992.

[4] BUHLMANN, H.. **Mathematical Methods in Risk Theory**. Springer, 1970.

[5] CHUNG, K. L.. **A Course in Probability Theory**. Academic Press, 2001.

[6] II, J. G.. **Finite-time ruin probabilites martingales**. Informatica, (2):3–32, 1991.

[7] H.FOLLMER; SCHIED, A.. **Stochastic Finance**. Walter Gruyter, NY, 2002.

[8] GRANDELL, J.. **Aspects of Risk Theory**. Springer-Verlag, 1991.

[9] KARATZAS, I.; SHREVE, S. E.. **Brownian motion and stochastic calculus**. Springer, 1991.

[10] BINGHAM, N. H.; KIESEL, R.. **Risk-Neutral Valuation**. Springer-2ªed., 2004.

[11] GEMAN, H.. **Learning about Risk: Some Lessons from Insurance**. European Finance Review, 2:113–124, 1999.

[12] P. EMBRECHTS, C. K.; MIKOSCH, T.. **Modelling Extremal Events**. Springer, 1997.

[13] OKSENDAL, B.. **Stochastic Differential Equations**. Springer, 1998.

5
Apêndice

O modelo de Black-Scholes

Exemplo de aplicação de martingais em tempo contínuo;

Trata-se de um modelo para mercados financeiros onde existem um ativo livre de risco e um ativo de risco, ações e bônus, cujos preços satisfazem a uma evoluçao estocástica.

Supomos dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}, \{W_t\}_{t\in\mathbb{T}}), \mathbb{T} = [0, T]$, onde$\{W_t\}$é o processo de Wiener estandarde , $T <$ $+\infty$. Sejam $\{S_t^0\},\ \{S_t^1\}$ os preços de ações e bônus no instante $t \in \mathbb{T}$.

.Dinâmica de preços

$$\begin{cases} dS_t^0 = rS_t^0 dt, S_0^0 = 1 \ (r > o \ \text{ fixo}) \\ dS_t^1 = S_t^1(\mu dt + \sigma dW_t),\ S_0^1 = S_0 > 0,\ \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} S_t^0 = e^{rt},\ t \in \mathbb{T} \\ S_t^1 = S_0 e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t]},\ t \in \mathbb{T} \text{ (note que } S_t^1 > 0). \end{cases}$$

. Estratégia de investimento

É um processo estocástico $\Theta = \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{T}},\ \theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^1) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}$-adaptado, isto é, $\theta_t^i \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \in \mathbb{T}$.

O valor da carteira Θ no instante t é $V_t(\Theta) = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1$.Note que $\{V_t(\Theta)\}_{t\in\mathbb{T}}$ é processo estocástico.

Vamos supor que Θ é auto-financiadora, isto é,

$$dV_t(\theta) = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t^1 dS_t^1$$

$$\Updownarrow$$

$$V_t(\Theta) = V_0(\Theta) + \int_0^t \theta_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \theta_u^1 dS_u^1 =$$

$$= V_0(\Theta) + \int_0^t r\theta_u^0 S_u^0 du + \int_0^t \mu\theta_u^1 S_u^1 du + \int_0^t \sigma\theta_u^1 S_u^1 dW_x,$$

onde supomos que $E[\int_0^T (S_t^1\theta_t^1)^2 dt] < +\infty$ e $E[\int_0^T |\theta_t^0| dt] < +\infty$ a fim de que as integrais estejam bem definidas. Note que a última integral é a integral estocástica de Itô (ver [13]).

. **Preços descontados:** $\overline{S}_t^1 \equiv \dfrac{S_t^1}{S_t^0} = e^{-rt}S_t^1,\ \overline{S}_t^0 \equiv 1$

A regra do produto, consequência do lema de Itô, fornece:

$$\begin{aligned} d\overline{S}_t^1 &= d(e^{-rt}S_t^1) = -re^{-rt}S_t^1 dt + e^{-rt}dS_t^1 \\ &= -r\overline{S}_t^1 dt + e^{-rt}S_t^1(\mu dt + \sigma dW_t) \\ &= \overline{S}_t^1[(\mu - r)dt + \sigma dW_t]. \end{aligned}$$

. Valor descontado: $\overline{V}_t(\Theta) = e^{-rt}V_t(\theta) = \theta_t^0 + \theta_t^1\overline{S}_t^1$

Fato:

Θ é auto-financiadora $\Longleftrightarrow \overline{V}_t(\Theta) = V_0(\Theta) + \int_0^t \theta_t^1 dS_t^1$

Um pagamento condicional ou contingente (ver [10]) é um contrato assinado hoje que promete um montante aleatório a ser pago num instante futuro (vencimento).

Exemplo: Opção de compra sobre uma ação com preço de exercício K vencimento T. Nesse caso:

$$F(t, S_t^1) = X(\omega) = \max(S_t^1(\omega) - K, 0) = (S_t^1(\omega) - K)^+$$

Problema do Apreçamento: Qual é o preço (prêmio) “justo” para adquir o contrato?

Proposta : O preço justo seria aquele obtido sob a hipótese de ausência de oportunidade de arbitragem (isto é, ”não existe almoço grátis”).

Definição 5.1 *Uma oportunidade de arbitragem é uma estratégia Θ auto-financiadora (e admissível) tal que*

$$\mathbb{P}(V_0(\Theta) = 0) = 1, \mathbb{P}(V_T(\Theta) \geq 0) = 1$$

e

$$\mathbb{P}(V_T(\Theta) > 0) > 0.$$

A hipótese de ausência de oportunidade de arbitragem (AOA) afirma que tais arbitragens não existem. Tais modelos são ditos viáveis.

Questão: O nosso modelo é viável?

Lembre que $d\overline{S}_t^1 = \overline{S}_t^1[(\mu - r)dt + \sigma dW_t]$

$\mu = r \Longrightarrow d\overline{S}_t^1 = \overline{S}_t^1 \sigma dW_t$ ou

$$\overline{S}_t^1 = S_0^1 + \int_0^t \sigma \overline{S}_u^1 dW_u$$

$\Longrightarrow \{\overline{S}_t^1\}_{t\in\mathbb{T}}$ é um $(\mathbb{P},\mathbb{F})-$martingal .

Além disso, $\overline{V_t}(\Theta)_{t\in\tau}$ também é um $(\mathbb{P},\mathbb{F})-$martingal com valor inicial V_0:

$$\overline{V}_t(\Theta) = V_0(\Theta) + \int_0^t \theta_u^1 d\overline{S}_u^1 =$$

$$= V_0(\Theta) + \int_0^t \sigma\Theta_u^1 \overline{S}_u^1 dW_u$$

Sob estas condições não há oportunidade de arbitragem!

De fato, suponha que exista Θ tal que

$\mathbb{P}(V_0(\Theta) = 0) = 1$, $\mathbb{P}(V_T(\Theta) \geq 0) = 1$ e $\mathbb{P}(V_T(\Theta) > 0) > 0$ (1)

Mas, pela propriedade de martingal:

$E[\overline{V}_T(\Theta)] = E[V_0(\Theta)] = 0$ (2)

Da segunda de (1) e (2) $\Longrightarrow \mathbb{P}(\overline{V}_T(\Theta) = 0) = 1 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(V_T(\Theta) = 0) = 1$,

Contradição com a terceira parte de (1).

Mais geralmente, uma medida de martingal equivalente (MME) é uma medida de probabilidade $\mathbb{P}^*$ sob a qual $\{\overline{S}_t^1\}_{t\in\tau}$ é $(\mathbb{P},\mathbb{F})$-martingal.

Logo, se existir uma MME, então o modelo é viável.

Construa $\widehat{W_t} = W_t + (\frac{\mu - r}{\sigma})t$

$$\Longrightarrow d\overline{S}_t^1 = \sigma\overline{S}_t^1 d\widehat{W_t}$$

O Teorema de Cameron-Martin-Girsanov garante que existe uma medida de probabilidade $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ sob a qual $\{\widehat{W_t}\}_{t\in\mathbb{T}}$ é um processo de Wiener estandarde.

$$\Downarrow$$

O modelo de Black-Scholes é viável.

E o apreçamento? Aqui, aidéia crucial é:

Definição 5.2 *Um pagamento contingente X é dito ser replicável se existe Θ auto financiadora tal que*
$V_T(\Theta) = X \quad \mathbb{P} - qc$

Fato: Sob AOA o processo de valor é bem definido, isto é, se X é replicável para uma estratégia Θ

$$V_T(\Theta) = X$$

então, se φ é outra estratégia replicadora $V_T(\varphi) = X$ vale $V_t(\Theta) = V_t(\varphi)$, $\forall t \in \mathbb{T}$.

Definição 5.3 *O preço justo de um pagamento contingente replicável X num instante $t \in \mathbb{T}$ é dado por $X_t \equiv V_t(\Theta)$, onde Θ é a estratégia replicadora para X.*

Note que se $\mathbb{P}^*$ é uma MME, então $\{\overline{V}_t(\Theta)\}_{t\in\tau}$ é $(\mathbb{P}^*, \mathbb{F})$-martingal, portanto

$$E^*[\overline{V}_T(\Theta)|\mathcal{F}_t] = \overline{V}_t(\Theta)$$

$$\Longrightarrow V_T(\Theta) = E^*[e^{-r(T-t)}V_T(\Theta)|\mathcal{F}_t]$$

e se X é replicável, concluímos que
$X_t = V_t(\Theta) = E^*[e^{-r(T-t)}X|\mathcal{F}_t]$, $(E^*[X^2] < +\infty)$

(fórmula de apreçamento)
Questão: Quando é que $X \in L^2(\Omega, F_T, \mathbb{P}^*)$ é replicável?
Fato: O modelo de Black-Scholes é completo
Observação:
No caso $X = \max(S_T^1 - K, 0)$, então

$$X_t = E^*[e^{-r(T-t)}X|\mathcal{F}_t] = Ke^{-r(T-t)\Phi(-d_2)} - S_T^1\Phi(-d_1)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_T^1}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

[14] PLATO, J. V.. **Creating Modern Probability**. Cambridge University Press, 1998.

[15] T. ROLSKY, H. SCHMIDLI, V. S.; TEUGELS, J.. **Stochastic Processes for Insurance and Finance**. Wiley, 1999.

[16] DANÍELSSON, J.; EMBRECHTS, P.; GOODHART, C.; KEATING, C.; F. MUENNICH, O. R. ; SHIN, H. S.. **An Academic Response to Basel II**. LSE Financial Markets Group an ESRC Research Centre Special Paper Series, (130), 2001.

[17] DYBVIG, P. H.; MARSHALL, W. J.. **The New Risk Management: The Good, The Bad, and The Ugly**. Federal Reserve Bank of ST. Louis, p. 9–21, 1997.

[18] SHIRYAEV, A. N.. **Probability**. Springer, 1996.