

3

Teorema Fundamental do Apreçamento via transformada de Esscher

Vimos na seção anterior a demonstração do teorema fundamental no caso de espaço amostral finito. Para o caso não-finito, existem várias provas desse resultado. As provas geralmente usam técnicas de análise funcional (ver [3],[4],[6]). Além da necessidade de tais pré-requisitos, são todas provas de existência enquanto que no caso que veremos, usando a técnica da Transformada de Esscher, temos uma construção que nos dá explicitamente qual é a medida de martingal equivalente. A prova da suficiência é essencialmente idêntica a vista na seção anterior. Para a prova da necessidade seguiremos a do Shiriyayev ([8]).

3.1

Prova da necessidade

A prova da existência de uma M.M.E. sob A.O.A. baseia-se na seguinte idéia. Suponha por simplicidade que $d=1$. Sob A.O.A. veremos que podemos supor, sem perda de generalidade, que para todo $n = 1, \dots, N$,

$$\mathbf{P}(\Delta S_n > 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{P}(\Delta S_n < 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0, \quad (3-1)$$

ou, o que dá no mesmo,

$$\mathbf{P}(\Delta S_n \leq 0 | \mathcal{F}_{n-1}) < 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{P}(\Delta S_n \geq 0 | \mathcal{F}_{n-1}) < 1. \quad (3-2)$$

e o Lema 5 vai mostrar que a condição 3-1 acima implica na existência da M.M.E.

Que podemos supor 3-2, decorre das seguintes observações. Primeiro, se para algum instante $n = 1, 2, \dots, N$ tivermos $\mathbf{P}(\Delta S_n = 0) = 1$ então este instante pode ser suprimido pois não contribui para $V_N(\theta)$. Por outro lado, se 3-2 não é satisfeita, i.e., se $\mathbf{P}(\Delta S_n \leq 0 | \mathcal{F}_{n-1}) = 1$ ou $\mathbf{P}(\Delta S_n \geq 0 | \mathcal{F}_{n-1}) = 1$

para algum $n = 1, 2, \dots, N$, então $\mathbf{P}(\Delta S_n \leq 0) = 1$ ou $\mathbf{P}(\Delta S_n \geq 0) = 1$. De fato, por definição de probabilidade condicional, dado $A \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$:

$$\int_A X d\mathbf{P} = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbf{P}.$$

Por exemplo, no nosso caso, tomando $A = \Omega$ e $X = 1_{\{\Delta S_n \geq 0\}}$ temos:

$$\int_{\Omega} 1_{\{\Delta S_n \geq 0\}} d\mathbf{P} = \int_{\Omega} 1 d\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}(\Delta S_n \geq 0) = P(\Omega) = 1.$$

Mas,

$$1 = \mathbf{P}(\Delta S_n \geq 0) = \mathbf{P}(\Delta S_n = 0) + \mathbf{P}(\Delta S_n > 0).$$

Logo, se fosse $\mathbf{P}(\Delta S_n = 0) < 1$ então $\mathbf{P}(\Delta S_n > 0) > 0$ que junto com $\mathbf{P}(\Delta S_n \geq 0) = 1$ implica, pela proposição 1.27, que existe oportunidade de arbitragem, logo sob A.O.A. $\mathbf{P}(\Delta S_n = 0) = 1$. Assim, como vimos, podemos descartar esse instante, ou seja, quem não satisfaz 3-2 é irrelevante e portanto A.O.A. é condição necessária para 3-2.

Dividiremos a prova em alguns lemas, que vão aos poucos sendo generalizados para a prova da necessidade. O Lema crucial é:

Lema 4 *Seja X uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tal que*

$$\mathbf{P}(X > 0) > 0 \quad e \quad \mathbf{P}(X < 0) > 0.$$

Então existe uma medida de probabilidade $\tilde{\mathbf{P}} \sim \mathbf{P}$ tal que $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[e^{aX}] < \infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$, em particular, $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[|X|] < \infty$. Além disso,

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[X] = 0.$$

Observação: A partir de agora, $\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[X]$ significa a esperança de X em relação a medida \mathbf{P} , ou seja,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbf{P}.$$

Demonstração:

Dada a medida \mathbf{P} , construímos primeiro uma medida de probabilidade auxiliar \mathbf{Q} , tal que a distribuição de X sob \mathbf{Q} em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ é:

$$\mathbf{Q}_X(dx) = ce^{-x^2} \mathbf{P}_X(dx),$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $c > 0$ é coeficiente normalizador, i.e. ,

$$c^{-1} = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-X^2}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathbf{P}_X(dx) < \infty.$$

Que existe tal medida em $\sigma(X)$ (ver em [2])

Seja $\varphi(a) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{aX}]$ para $a \in \mathbb{R}$ e defina $Z_a(x) = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)}$, a chamada *Transformada de Esscher de X sob Q*. Note que $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ e que para todo $a \in \mathbb{R}$, $\varphi(a) > 0$. Temos também que para cada a fixo, $\varphi(a) < \infty$ pela construção de \mathbf{Q} . De fato,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{aX}] = \int_{\Omega} e^{aX(\omega)} \mathbf{Q}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \mathbf{Q}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax-x^2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-X^2}]} \mathbf{P}_X(dx).$$

Mas note que dado $\varepsilon > 0$, existe um $M > 0$ tal que se $|x| > M$ então $e^{ax-x^2} < \varepsilon$, e portanto,

$$\int_{[-M, M]^c} e^{ax-x^2} \mathbf{P}_X(dx) \leq \int_{[-M, M]^c} \varepsilon \mathbf{P}_X(dx) = \varepsilon \mathbf{P}_X([-M, M]^c) \leq \varepsilon \mathbf{P}_X(\mathbb{R}) = \varepsilon.$$

Como, claramente

$$\int_{[-M, M]} e^{ax-x^2} \mathbf{P}_X(dx) < \infty,$$

segue que $\varphi(a) < \infty$, já que

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{aX}] = \int_{\Omega} e^{aX(\omega)} \mathbf{Q}(d\omega) = \int_{[-M, M]^c} \frac{e^{ax-x^2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-X^2}]} \mathbf{P}_X(dx) + \int_{[-M, M]} \frac{e^{ax-x^2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-X^2}]} \mathbf{P}_X(dx).$$

Notando que $Z_a(x) > 0$ e $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_a(X)] = 1$ (pois $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[\frac{e^{aX}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{aX}]}\right] = 1$), vem que, para cada a em \mathbb{R} podemos definir a medida de probabilidade

$$\tilde{\mathbf{P}}_X^a(dx) = Z_a(x) \mathbf{Q}_X(dx)$$

e denotemos por $\tilde{\mathbf{P}}_a$ a medida correspondente em Ω . Note que as medidas de probabilidade correspondentes satisfazem

$$\mathbf{P} \sim \mathbf{Q} \sim \tilde{\mathbf{P}}_a.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}_a}[e^{aX}] &= \int_{\Omega} e^{aX(\omega)} \tilde{\mathbf{P}}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \frac{e^{ax}}{\varphi(a)} \mathbf{Q}_X(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ax}}{\varphi(a)} \mathbf{Q}_X(dx) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{e^{2aX}}{\varphi(a)} \right] = \frac{1}{\varphi(a)} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{2aX}] < \infty, \end{aligned}$$

já que $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{aX}] < \infty \forall a \in \mathbb{R}$. Decorre então do Lema 8 no Apêndice, que $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}_a}|X| < \infty$.

A função $\varphi = \varphi(a)$ definida para $a \in \mathbb{R}$ é estritamente convexa já que $\varphi''(a) > 0$. De fato, como as duas primeiras derivadas de e^{ax-x^2} são integráveis com respeito a \mathbf{P}_X , podemos derivar dentro da integral como consequência da Proposição 5.1 no Apêndice.

Assim,

$$\varphi''(a) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ax} \mathbf{Q}_X(dx) \right)'' = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax-x^2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-X^2}]} \mathbf{P}_X(dx) \right)'' = \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{ax} \mathbf{Q}_X(dx) \right).$$

Então, se $\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{ax} \mathbf{Q}_X(dx) = 0$, teríamos $x^2 e^{ax} = 0 \mathbf{Q}_X - q.c.$, o que não ocorre, logo $\varphi''(a) > 0$.

Considere agora, $\varphi_* = \inf \{\varphi(a); a \in \mathbb{R}\}$. Então dois casos são possíveis:

1. $\exists a_* : \varphi(a_*) = \varphi_*$;
2. $\nexists a_* : \varphi(a_*) = \varphi_*$.

No primeiro caso, teremos $\varphi'(a_*) = 0$ e

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}_{a_*}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{X e^{a_* X}}{\varphi(a_*)} \right] = \frac{\varphi'(a_*)}{\varphi(a_*)} = 0.$$

Logo, nesse caso, podemos tomar $\tilde{\mathbf{P}}_{a_*}$ como a medida requerida pelo Lema 4. Agora, mostraremos a impossibilidade do caso 2.

De fato, seja $\{a_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência tal que $\varphi_{a_n} \downarrow \varphi_*$. Essa sequência deve tender a $+\infty$ ou $-\infty$, caso contrário poderíamos escolher uma subsequência convergente e o valor mínimo seria atingido num certo ponto, recaindo no caso 1.

Seja $u_n = \frac{a_n}{|a_n|}$, então $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm 1$. Como \mathbf{P} e \mathbf{Q} são equivalentes, pela hipótese do Lema temos que:

$$\mathbf{Q}(X > 0) > 0 \text{ e } \mathbf{Q}(X < 0) > 0.$$

Logo,

$$\mathbf{Q}(uX > 0) > 0$$

e, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{Q}(uX > \delta) = \varepsilon > 0,$$

onde podemos escolher δ sendo um ponto de continuidade de \mathbf{Q} , i.e., tal que

$$\mathbf{Q}(uX = \delta) = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\mathbf{Q}(a_n X > \delta | a_n) = \mathbf{Q}(u_n X > \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{Q}(uX > \delta) = \varepsilon.$$

Note que $\mathbf{Q}(a_n X > \delta | a_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. De fato, $\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_0; \forall n \geq n_0$,

$$|\mathbf{Q}(a_n X > \delta | a_n) - \varepsilon| \leq \varepsilon_1$$

Tomando $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ temos:

$$\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \leq \mathbf{Q}(u_n X > \delta) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon.$$

Assim, para todo n suficientemente grande, temos:

$$\begin{aligned} \varphi(a_n) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X}] &\geq \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X} 1_{\{a_n X > \delta | a_n\}}] \\ &\geq \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{\delta | a_n|} 1_{\{a_n X > \delta | a_n\}}] \\ &= e^{\delta | a_n|} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[1_{\{a_n X > \delta | a_n\}}] \\ &= e^{\delta | a_n|} \mathbf{Q}(a_n X > \delta | a_n) \\ &\geq \frac{e^{\delta | a_n|} \varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Assim, quando $n \rightarrow \infty$, temos $\varphi(a_n) \rightarrow \infty$, o que contradiz $\varphi(a_n) \downarrow \varphi_*$, pois $\varphi_* \leq \varphi(0) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{0X}] = 1$. □

A seguir generaliza-se o Lema 4 para o caso de um vetor aleatório $X = (X_0, X_1, \dots, X_N)$ com $X_n \in \mathcal{F}_n$, $0 \leq n \leq N$ e $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Lema 5 *Assuma que para $1 \leq n \leq N$,*

$$\mathbf{P}(X_n > 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0 \text{ e } \mathbf{P}(X_n < 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0.$$

Então existe uma medida de probabilidade $\tilde{\mathbf{P}}$ equivalente a \mathbf{P} no espaço (Ω, \mathcal{F}) tal que a sequência X_0, X_1, \dots, X_N é um $(\tilde{\mathbf{P}}, \mathbb{F})$ -martingal diferença.

Demonstração:

Como no Lema 4 podemos, se necessário, tomar uma medida auxiliar \mathbf{Q} tal que

$$\mathbf{Q}(d\omega) = ce^{-\sum_{i=0}^N X_i^2(\omega)} \mathbf{P}(d\omega)$$

onde $0 < c < \infty$ é fator de normalização e tal que

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{\sum_{i=0}^N a_i X_i}] < \infty, \quad a_i \in \mathbb{R}; \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

De fato, tomando \mathbf{Q} obtemos:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{\sum_{i=0}^N a_i X_i}] = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} e^{\sum_{i=0}^N a_i x_i} \frac{e^{-\sum_{i=0}^N x_i^2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-\sum_{i=0}^N X_i^2}]} \mathbf{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \frac{e^{\sum_{i=0}^N (x_i a_i - x_i^2)}}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-\sum_{i=0}^N X_i^2}]} \mathbf{P}_X(dx),$$

onde \mathbf{P}_X é a distribuição do vetor aleatório $X = (X_0, \dots, X_N)$. Mas note que para todo $\varepsilon_i > 0$ existe $M_i > 0$; $|x_i| > M_i \Rightarrow e^{a_i x_i - x_i^2} < \varepsilon_i$, e assim, fazendo $[-M, M] = [-M_0, M_0] \times [-M_1, M_1] \times [-M_2, M_2] \times \dots \times [-M_N, M_N]$ temos:

$$\begin{aligned} & \int_{[-M, M]^c} \frac{e^{\sum_{i=0}^N (x_i a_i - x_i^2)}}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-\sum_{i=0}^N X_i^2}]} \mathbf{P}_X(dx) < \int_{[-M, M]^c} \frac{\prod_{i=0}^N \varepsilon_i}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-\sum_{i=0}^N X_i^2}]} \mathbf{P}_X(dx) < \\ & < \frac{\prod_{i=0}^N \varepsilon_i}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-\sum_{i=0}^N X_i^2}]} \int_{[-M, M]^c} \mathbf{P}_X(dx) < \frac{\prod_{i=0}^N \varepsilon_i}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-\sum_{i=0}^N X_i^2}]} \mathbf{P}_X([-M, M]^c) \leq \frac{\prod_{i=0}^N \varepsilon_i}{\mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{-\sum_{i=0}^N X_i^2}]} \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{\sum_{i=0}^N a_i X_i}] = \int_{[-M, M]^c} e^{\sum_{i=0}^N a_i x_i} \mathbf{Q}_X(dx) + \int_{[-M, M]} e^{\sum_{i=0}^N a_i x_i} \mathbf{Q}_X(dx) < \infty.$$

já que a segunda integral é claramente finita por estar em $[-M, M]$.

Podemos construir a medida desejada $\tilde{\mathbf{P}}$ seguindo procedimento semelhante ao visto anteriormente.

Definimos

$$\varphi_n(a, \omega) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{aX_n} | \mathcal{F}_{n-1}](\omega), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Como podemos escrever

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{aX_n} | \mathcal{F}_{n-1}](\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \mathbf{Q}_{X_n}(\omega, dx) \quad \mathbf{Q} - q.c.$$

onde $\mathbf{Q}_{X_n}(\omega, B)$, para todo $\omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a distribuição condicional regular de X_n com respeito a \mathcal{F}_{n-1} (ver [7] para mais detalhes), então repetindo o argumento do Lema anterior para cada ω fixo (se necessário redefinindo num conjunto nulo) temos que as $\varphi_n(a, \omega)$ são estritamente convexas em a .

Como no Lema 4, podemos mostrar que existe um único valor $a_n = a_n(\omega)$ tal que $\inf_a \varphi_n(a, \omega)$ é atingido em a_n .

De fato, $\inf_a \varphi_n(a, \omega) < \varphi_n(a, \omega) \downarrow \varphi_*$.

Existem 2 possibilidades:

$$1) \exists a_n; \varphi_* = \varphi_n(a_n, \omega).$$

$$2) \nexists a_n; \varphi_* = \varphi_n(a_n, \omega).$$

Mostraremos que 2 não é possível e depois o que acontece então no caso 1.

Seja a_k sequência divergente p/ $+\infty$ ou $-\infty$ (caso contrário o mínimo seria atingido em um ponto finito) e, seja $u_k = \frac{a_k}{|a_k|}$ e $u = \lim u_k = \pm 1$.

Como $\mathbf{P}(X_n > 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0$ e $\mathbf{P}(X_n < 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0$, e temos $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$,

$$\mathbf{Q}(X_n > 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0 \text{ e } \mathbf{Q}(X_n < 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0$$

e assim,

$$\mathbf{Q}(uX_n > 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0.$$

Logo $\exists \delta > 0$;

$$\mathbf{Q}(uX_n > \delta | \mathcal{F}_{n-1}) = \varepsilon > 0,$$

e escolhemos δ como sendo ponto de continuidade i.e.

$$\mathbf{Q}(uX_n = \delta | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Assim,

$$\mathbf{Q}(a_k X_n > \delta | a_k | \mathcal{F}_{n-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{Q}(uX_n > \delta | \mathcal{F}_{n-1}) = \varepsilon.$$

Logo, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \varphi_n(a_k, \omega) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_k X_n} | \mathcal{F}_{n-1}] &\geq \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_k X_n} I(a_k X_n > \delta | a_k) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\geq \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{\delta | a_k |} I(a_k X_n > \delta | a_k) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\geq e^{\delta | a_k |} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[I(a_k X_n > \delta | a_k) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\geq e^{\delta | a_k |} \mathbf{Q}[(a_k X_n > \delta | a_k) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\geq \frac{e^{\delta | a_k |} \varepsilon}{2} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Contradição com $\varphi(a_k, \omega) \downarrow \varphi_* = \varphi_n(a_n, \omega) = \inf_{a \in \mathbb{Q}} \varphi_n(a, \omega)$, onde

$$\varphi_* \leq \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{0X_n} | \mathcal{F}_{n-1}](\omega) = 1.$$

Note que $\varphi_n(\omega) = \inf_{a \in \mathbb{Q}} \varphi_n(a, \omega)$ é \mathcal{F}_{n-1} mensurável já que $\varphi_n(a, \omega)$ o é. Mas então $a_n(\omega)$ é também \mathcal{F}_{n-1} mensurável. De fato, para o intervalo fechado $[A, B]$ temos:

$$\{\omega \in \Omega; a_n(\omega) \in [A, B]\} = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [A, B]} \left\{ \omega : \varphi_n(a, \omega) < \varphi_n(\omega) + \frac{1}{m} \right\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

onde \mathbb{Q} é o conjunto dos racionais.

Defina recursivamente $Z_0, Z_1(\omega), \dots, Z_N(\omega)$ colocando $Z_0 = 1$ e:

$$Z_n(\omega) = Z_{n-1}(\omega) \frac{e^{a_n(\omega)X_n(\omega)}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X_n} | \mathcal{F}_{n-1}](\omega)}, \quad n \geq 1.$$

Claramente, os $Z_n(\omega)$ são \mathcal{F}_n mensuráveis e formam um martingal. De fato, $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[|Z_n|] < \infty$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= Z_{n-1} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{e^{a_n X_n}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X_n} | \mathcal{F}_{n-1}]} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \quad \mathbf{Q} - q.c. \\ &= \frac{Z_{n-1}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X_n} | \mathcal{F}_{n-1}]} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X_n} | \mathcal{F}_{n-1}] \quad \mathbf{Q} - q.c. \\ &= Z_{n-1} \quad \mathbf{Q} - q.c. \end{aligned}$$

Definamos $\tilde{\mathbf{P}}$ por

$$\tilde{\mathbf{P}}(d\omega) = Z_N(\omega) \mathbf{P}(d\omega),$$

lembrando que essa \mathbf{P} pode ser substituída por uma \mathbf{Q} se necessário.

Analogamente ao Lema 4, segue do Lema 8(ver Apêndice) , que $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[X_n] < \infty$ $0 \leq n \leq N$

Sendo assim, $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[|X_n|] < \infty$; $0 \leq n \leq N$ e :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= Z_{n-1} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{e^{a_n X_n} X_n}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X_n} | \mathcal{F}_{n-1}]} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= Z_{n-1} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{(e^{a_n X_n})'}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X_n} | \mathcal{F}_{n-1}]} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &= Z_{n-1} \frac{\varphi'_n(a_n; \omega)}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_n X_n} | \mathcal{F}_{n-1}]} = 0 \quad \tilde{\mathbf{P}} - q.c. \end{aligned}$$

Para ver isso, note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[X_N|\mathcal{F}_{N-1}] &= Z_{N-1}\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[\frac{e^{a_N X_N} X_N}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_N X_N}|\mathcal{F}_{N-1}]} \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right] \\ &= Z_{N-1}\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[\frac{(e^{a_N X_N})'}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_N X_N}|\mathcal{F}_{N-1}]} \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right] \\ &= Z_{N-1}\frac{\varphi'_N(a_N; \omega)}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_N X_N}|\mathcal{F}_{N-1}]} = 0 \quad \tilde{\mathbf{P}} - q.c.\end{aligned}$$

assim como,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[X_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2}] &= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_N X_{N-1}|\mathcal{F}_{N-2}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[Z_{N-1}\frac{e^{a_N X_N} X_{N-1}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_N X_N}|\mathcal{F}_{N-1}]} \middle| \mathcal{F}_{N-2}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[Z_{N-2}\frac{e^{a_{N-1} X_{N-1}} X_{N-1}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_{N-1} X_{N-1}}|\mathcal{F}_{N-2}]} \frac{e^{a_N X_N}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_N X_N}|\mathcal{F}_{N-1}]} \middle| \mathcal{F}_{N-2}\right] \\ &= \frac{Z_{N-2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_{N-1} X_{N-1}}|\mathcal{F}_{N-2}]} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[e^{a_{N-1} X_{N-1}} X_{N-1} \frac{e^{a_N X_N}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_N X_N}|\mathcal{F}_{N-1}]} \middle| \mathcal{F}_{N-2}\right]\end{aligned}$$

Usando a propriedade da torre,

$$\begin{aligned}&= \frac{Z_{N-2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_{N-1} X_{N-1}}|\mathcal{F}_{N-2}]} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[e^{a_{N-1} X_{N-1}} X_{N-1} \frac{e^{a_N X_N}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_N X_N}|\mathcal{F}_{N-1}]} \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right] \middle| \mathcal{F}_{N-2}\right] \\ &= \frac{Z_{N-2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_{N-1} X_{N-1}}|\mathcal{F}_{N-2}]} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[e^{a_{N-1} X_{N-1}} X_{N-1} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[\frac{e^{a_N X_N}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_N X_N}|\mathcal{F}_{N-1}]} \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right] \middle| \mathcal{F}_{N-2}\right] \\ &= \frac{Z_{N-2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_{N-1} X_{N-1}}|\mathcal{F}_{N-2}]} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}\left[e^{a_{N-1} X_{N-1}} X_{N-1} \middle| \mathcal{F}_{N-2}\right] \\ &= \frac{Z_{N-2}}{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{a_{N-1} X_{N-1}}|\mathcal{F}_{N-2}]} \varphi'_{N-1}(a_{N-1}; \omega) = 0 \quad \tilde{\mathbf{P}} - q.c.\end{aligned}$$

e por indução temos o resultado.

Lembrando que X_0 é $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ - mensurável, logo constante, podemos tomar $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[X_0] = 0$. Portanto, (X_0, X_1, \dots, X_N) é um martingal diferença com respeito a $\tilde{\mathbf{P}}$, ou seja, se $X_n = S_n - S_{n-1}$ teremos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[S_n - S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] &= 0 \Rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[S_n|\mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1} \quad \tilde{\mathbf{P}} - q.c.\end{aligned}$$

i.e., $\{S_n\}_{n \in \Pi}$ é martingal.

□

Assim, o Teorema está completamente provado para modelos de mercado com um bônus e uma ação ($d=1$), pois basta considerar o processo de preços descontados $S_0^0, S_1^0, \dots, S_N^0$ como o bônus. Agora generalizaremos para o caso de $d \geq 1$, ou seja, quando temos mais de um ativo de risco.

Lema 6 *Seja (X_0, X_1, \dots, X_N) seqüência de d -vetores \mathcal{F}_n mensuráveis*

$$X_n = (X_n^1, X_n^2, \dots, X_n^d)^T, \quad 0 \leq n \leq N$$

definidos em um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbf{P})$ com $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

Assuma também que se

$$\gamma_n = (\gamma_n^1, \gamma_n^2, \dots, \gamma_n^d)^T, \quad 0 \leq n \leq N$$

é um vetor \mathcal{F}_{n-1} -mensurável com componentes limitadas ($|\gamma_n^i(\omega)| \leq c < \infty, \omega \in \Omega$) tal que

$$\mathbf{P}(\langle \gamma_n, X_n \rangle > 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0 \quad \mathbf{P} - q.c.,$$

então

$$\mathbf{P}(\langle \gamma_n, X_n \rangle < 0 | \mathcal{F}_{n-1}) > 0 \quad \mathbf{P} - q.c.$$

onde $\langle \gamma_n, X_n \rangle$ é o produto escalar. Então existe uma medida de probabilidade $\tilde{\mathbf{P}}$ equivalente a \mathbf{P} em (Ω, \mathcal{F}) tal que a seqüência (X_0, X_1, \dots, X_N) é um martingal diferença d -dimensional com respeito a $\tilde{\mathbf{P}}$:

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[|X_n|] < \infty, \quad \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[X_0] = 0 \quad e \quad \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{P}}}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0, \quad 1 \leq n \leq N$$

Observação: Se o suporte da probabilidade condicional regular $\mathbf{P}(X_n \in \cdot | \mathcal{F}_{n-1})(\omega)$ não está num subespaço próprio de \mathbb{R}^d então, como no caso de $d=1$, repetindo o procedimento do Lema anterior,

$$\varphi_n(a, \omega) = \mathbb{E}_{\mathbf{P}}[e^{\langle a, X_n \rangle} | \mathcal{F}_{n-1}](\omega), \quad a \in \mathbb{R}^d,$$

são estritamente convexas e o menor valor de $\inf \varphi(a, \omega)$ é atingido em um único ponto $a_n = a_n(\omega) \in \mathbb{R}^d$ além de que as funções $a_n(\omega)$ são \mathcal{F}_{n-1} -mensuráveis. A medida $\tilde{\mathbf{P}}$ pode ser construída como antes se tratarmos $a_n(\omega)X_n(\omega)$ como produto escalar dos vetores $a_n(\omega)$ e $X_n(\omega)$. O caso em que $\mathbf{P}(X_n \in \cdot | \mathcal{F}_{n-1})(\omega)$ está concentrado num subespaço próprio de \mathbb{R}^d a demonstração é mais delicada e referimos a [6].