Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, R. G.. **The Elements of Integration**. John Wiley and Sons, inc., 1966.

[2] BREIMAN, L.. **Probability**. siam, 1992.

[3] DALANG, R.; MORTON, A. ; WILLINGER, W.. **Equivalent martingale measures and no arbitrage in stochastic securities market models**. Stochastics and Sthocastics Reports, 29(2):185–201, 1990.

[4] DELBAEN, F.; SCHACHERMAYER, W.. **A general version of the fundamental theorem of asset pricing**. Mathematische Annalen, 300(3):463–520, 1994.

[5] ROGERS, L. C. G.. **Equivalent martingale measures and no arbitrage**. Stochastic and Stochastics Reports, 51(1):41–50, 1994.

[6] SHIRYAEV, A. N.. **Probability**. Springer-Verlag, 1984.

[7] SHIRYAEV, A. N.. **Essentials of Sthocastic Finance, Facts, Models, Theory**. World Scientific Publishing Co., 1999.

[8] VOLCHAN, S. B.. **Modelos matemáticos em finanças: Avaliação de opções**. Matemática Universitária, 1999.

[9] HARRISON; KREPS ; PLISKA. **Security markets**. J.Econ. Theory 20, p. 341–408, 1979.

[10] HARRISON; KREPS ; PLISKA. **Theory of continuous trading**. Stoch. Proc. and Appl 110, p. 215–260, 1981.

5
Apêndice

Neste capítulo introduziremos alguns lemas que foram úteis na demonstração do Teorema principal mas que se ficassem junto ao texto principal quebraria a linha de raciocínio original.

Iremos primeiramente, ver um resultado do Teorema da Convergência Monótona(T.C.M.) que consiste em "trocar somatório com integrais". Esse resultado vai nos ajudar a demonstrar o Lema seguinte.

Lema 7 *Seja* $\{g_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de funções mensuráveis não negativas, então:*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu \right)$$

Demonstração: Faça $f_n = g_1 + ... + g_n$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu &= \int \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} g_n \right) d\mu \\ &\overset{T.C.M.}{=} \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int g_1 + ... + g_n d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int g_n d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n d\mu \right) \end{aligned}$$

Lema 8 *Se* $\varphi(a) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[e^{aX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{ax} \mathbf{Q}_X(dx) < \infty$ *, para* $a \in (-a_0, a_0), a_0 > 0$*, então* $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}|X|^k < \infty \ \forall k \geq 1$ *, i.e., todos os momentos absolutos são finitos. Além disso, escreve-se:*

$$\varphi(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[X^k].$$

Em particular, $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}|X| < \infty$.

Demonstração:

Note que $e^{|ax|} < e^{ax} + e^{-ax}$. Então por hipótese $e^{|ax|}$ é integrável em relação a $\mathbf{P}_X$ já que $a \in (-a_0, a_0)$. Fazendo $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!}$ temos:

$$e^{|ax|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|ax|^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} f_n(ax)$$

e pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{|ax|}\mathbf{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|ax|^k}{k!}\mathbf{P}_X(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|ax|^k}{k!}\mathbf{P}_X(dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|aX|^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a|^k}{k!}\mathbb{E}[|X|^k].$$

Assim,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a|^k}{k!}\mathbb{E}|X|^k < \infty \ \forall k \geq 1 \Rightarrow \mathbb{E}[|X|^k] < \infty \ \forall k \geq 1$$

Além disso, como $a \in (-a_0, a_0)$

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(ax)^k}{k!} \leq e^{ax}$$

e portanto,

$$|f_n| = |\sum_{k=0}^{n} \frac{(ax)^k}{k!}| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(|ax|)^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|ax|)^k}{k!} = e^{|ax|}$$

usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,temos:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ax}\mathbf{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{k!}\mathbf{P}_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ax)^k}{k!}\mathbf{P}_X(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ax)^k}{k!}\mathbf{P}_X(dx).$$

Assim,

$$\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(ax)^k}{k!}\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{(ax)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{(ax)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\mathbb{E}[X^k].$$

$\square$

Proposição 5.1 *Suponha que para algum $t_0 \in$ [a,b], a função $x \mapsto f(x, t_0)$ é integrável em X, que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe em $X \times$ [a,b], e que existe uma função integrável g em X tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x),$$

então a função $F(t) = \int f(x,t)d\mu(x)$ *é diferenciável em [a,b] e*

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int f(x,t)d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x).$$

Esse Corolário do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue se encontra com sua demonstração em [1].