

1

Introdução

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas fechadas, disjuntas e orientadas em \mathbb{R}^3 (ou na esfera unitária S^3 em \mathbb{R}^4). Seja N qualquer superfície orientável, transversal a γ_1 e que tem a γ_2 como bordo orientado. O índice de enlaçamento $lk(\gamma_1, \gamma_2)$ é o inteiro definido como o número algébrico de interseções de γ_1 com a superfície N . Agora, se uma aplicação $f : S^3 \rightarrow S^2$ é suave, onde S^2 é a esfera unitária em \mathbb{R}^3 , então para cada par de pontos p e q em S^2 podemos definir $I_f := lk(f^{-1}(p), f^{-1}(q))$ sempre que as curvas fechadas $f^{-1}(p)$ e $f^{-1}(q)$ em S^3 sejam disjuntas. O inteiro I_f é chamado de Invariante de Hopf para f sendo que independe da escolha de p e q . O interessante deste invariante I_f é que também pode ser calculado como um valor integral $\int_{S^3} d^{-1}\beta \wedge \beta$, onde β é a 2-forma em S^3 pull back $f^*(\theta)$ de uma 2-forma θ que é um gerador de $H^2(S^2, \mathbb{Z})$ e $d^{-1}\beta$ representa uma 1-forma α em S^3 tal que $d\alpha = \beta$.

Em (Arn), Arnold define para cada campo X (fluxo φ) de divergência nula em S^3 o índice de enlaçamento assintótico $lk(X)$ a qual é uma extensão do invariante de Hopf visto como enlaçamento. Para isso, ele define um sistema Σ de curvas que ele chama de sistema de caminhos curtos tal que para cada $p \in S^3$ e tempo $T \geq 0$ existe uma única curva $\sigma(p, T)$ em Σ com ponto inicial p e ponto final $\varphi_T(p)$. Assim, para cada pedaço de orbita $\vartheta(p, T) = \{\varphi_t(p); t \in [0, T]\}$ ele associa uma única curva fechada $\tilde{\vartheta}(p, T) := \vartheta(p, T) \cup \sigma(p, T)$. Logo, define para cada par de pontos p e q em S^3 o limite $lk(p, q) := \lim_{T, R \rightarrow \infty} \frac{1}{TR} lk(\tilde{\vartheta}(p, T), \tilde{\vartheta}(q, R))$ e mostra, devido à definição de Σ , que este limite existe para todo (p, q) no complemento de um conjunto de medida nula em $S^3 \times S^3$. Assim, define o índice de enlaçamento assintótico pela integral $lk(X) = \int_{S^3 \times S^3} lk(p, q) vol \times vol$, onde $dvol$ é a forma de volume na métrica usual de S^3 .

Alem disso, sendo $\alpha := i_X vol$ uma 2-forma fechada em S^3 (X sendo de divergência nula), define a invariante de Hopf para X como o valor integral $I(X) := \int_{S^3} d^{-1}\alpha \wedge \alpha$ e mostra, como no caso de aplicações suaves de S^3 em S^2 , que $I(X) = lk(X)$.

No trabalho de Arnold, ele assume a existência dos sistemas dos caminhos curtos e dá idéias de como construir estes sistemas para campos com zeros

isolados mas não dá um exemplo concreto no caso geral. Vogel em (Vog) consegue dar exemplos naturais destes sistemas Σ , onde cada curva em Σ é um pedaço de geodésica em S^3 , mas a sua definição de Σ somente considera a convergência em $L_1(S^3 \times S^3)$ da função $lk(p, q)$ e não a convergência q.t.p. Vogel observa que para este tipo de convergência o índice $lk(X)$ ainda está bem definida.

Observemos que, tanto $lk(X)$ como $I(X)$ podem ser estendidas naturalmente para definir o índice de enlaçamento assintótico $lk(X, Y)$ de um par de campos de divergência nula. Aqui $lk(p, q)$ é o enlaçamento assintótico da órbita de X que passa por p e da órbita de Y que passa por q , e o invariante de Hopf $I(X, Y) = \int_{S^3} d^{-1}\alpha \wedge \beta$, onde $\alpha = i_X vol$ e $\beta = i_Y vol$. Ainda temos a igualdade $I(X, Y) = lk(X, Y)$. Por outro lado, sabemos que φ e ψ os fluxos de X e Y , respectivamente, são ações de \mathbb{R} em S^3 de difeomorfismos que preservam volume (de divergência nula). Naturalmente, poderíamos ter definido $I(X, Y)$ e $lk(X, Y)$ como $I(\Phi, \Psi)$ e $lk(\Phi, \Psi)$, respectivamente.

Por outro lado, analogamente como em \mathbb{R}^3 , podemos definir o índice de enlaçamento de duas subvariedades $N_1^{k_1}$ e $N_2^{k_2}$ de M^n , $k_1 + k_2 = n - 1$, sempre que ambas sejam de homologia nula.

O propósito deste trabalho é estender o índice de enlaçamento assintótico para ações φ de \mathbb{R}^k numa variedade riemanniana compacta M^n , $n > 3$, de difeomorfismos que preservam volume. Isto é, uma ação Φ_1 de \mathbb{R}^{k_1} enlaçando-se com uma ação Φ_2 de \mathbb{R}^{k_2} , $k_1 + k_2 = n - 1$, ambas agindo em M . Os resultados desta extensão serão feitas para o caso $M = D^n$ (a bola unitária em \mathbb{R}^n). Para isto, precisaremos que as ações Φ_1 e Φ_2 sejam tangentes ao bordo de D^n .

No trabalho de Arnold em \mathbb{R}^3 a lei de Biot-Savart é crucial para estabelecer a igualdade $lk(X) = I(X)$. A lei de Biot-Savart afirma que se Ω é um domínio em \mathbb{R}^3 com bordo suave e X é um campo em Ω de divergência nula e tangente a $\partial\Omega$ então o campo $BS(X)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{(y-x) \times X(y)}{\|y-x\|^3} vol(y)$ satisfaz $rot(BS(X)) = X$.

Assim, neste trabalho primeiro estendemos a definição do produto vetorial e do produto interior para k -vetores (Capítulo 2) e em seguida damos uma definição de divergência e rotacional para k -campos (Capítulo 3). Também estendemos a Lei de Biot-Savart para k -campos (Capítulo 5). Agora, para a extensão do índice de enlaçamento assintótico, seguiremos a idéia de Vogel, isto é, construiremos um sistema Σ_{k_i} (Teorema 7.9) de k -subvariedades singulares, tal que para cada k_i -retângulo de órbita ϑ_i de Φ_i existe σ_i em Σ_{k_i} que satisfaz $\partial\vartheta_i = \partial\sigma_i$. Deste modo obtemos k_i -subvariedades singulares $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_i \cup \sigma_i$ fechadas e sem bordo as quais serão usadas para definir a função limite $lk(p, q)$, como no caso §3, e mostraremos que esta função converge em $L^1(M \times M)$ e

independe dos sistemas Σ_{k_i} escolhidos (Proposição 7.10). Também mostraremos que podemos definir invariante de Hopf integral $I(\varphi_1, \varphi_2) = \int_M d^{-1}\alpha \wedge \beta$ (Capítulo 4), onde as formas α e β estão associadas naturalmente às ações φ_{k_1} e φ_{k_2} . E finalmente, mostraremos que $lk(\varphi_1, \varphi_2) = I(\varphi_1, \varphi_2)$ (Teorema 7.12) e daremos alguns exemplos no caso $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ e $n = 4$.