

## 2

### Extensão do Produto Vetorial Sobre uma Álgebra Exterior

Seja  $\mathbb{R}^3$  o espaço euclidiano tridimensional, chamamos de álgebra exterior de  $\mathbb{R}^3$  a álgebra  $\Lambda(\mathbb{R}^3)$  gerada pela base canônica  $\{e_1, e_2, e_3\}$  satisfazendo

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i, \quad \forall i, j.$$

Nesta álgebra define-se o operador linear  $*$  que satisfaz:

$$*(1) = e_i \wedge e_j \wedge e_k ; *(e_i) = e_j \wedge e_k ; *(e_i \wedge e_j) = e_k ; *(e_i \wedge e_j \wedge e_k) = 1,$$

para todo  $\{i, j, k\}$  permutação positiva de  $\{1, 2, 3\}$ .

Sejam  $\times$  o produto vetorial e  $\cdot$  o produto interno canônico em  $\mathbb{R}^3$ . Não é difícil mostrar que estes produtos podem ser também expressados fazendo uso da álgebra exterior e do operador estrela  $*$ , a saber :

$$u \times v = *(u \wedge v) \quad \text{e} \quad u \cdot v = *(u \wedge *v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Neste capítulo estenderemos a definição de  $\times$  e  $\cdot$  visto como produtos na álgebra exterior de qualquer espaço vetorial e veremos algumas propriedades as quais são parecidas ao caso  $\mathbb{R}^3$ .

#### 2.1

##### Produto Interno Sobre $\Lambda(E)$

Seja  $E$  um espaço vetorial real de dimensão  $n$  com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Fixemos  $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  uma base ortonormal de  $E$ . Chamamos de álgebra exterior de  $E$  a álgebra  $\Lambda(E)$  gerada por  $\beta$  cujo produto  $\wedge$  é anticomutativo em  $\beta$ , isto é, para todo  $i$  e  $j$  em  $\{1, \dots, n\}$  temos que  $u_i \wedge u_j = -u_j \wedge u_i$ . O sub-espaço  $\Lambda_k(E)$  gerado pelos elementos da forma  $\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  é dita a  $k$ -álgebra exterior de  $E$ . Cada  $u \in \Lambda_k(E)$  é chamado de  $k$ -vetor e no caso de  $u = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$ , onde os  $v_i \in E$ , será chamado de  $k$ -vetor decomponível. Notemos que  $\Lambda(E)$  pode ser definida pela soma direta

$$\Lambda(E) := \Lambda_0(E) \oplus \Lambda_1(E) \oplus \dots \oplus \Lambda_n(E).$$

Observemos que a propriedade distributiva de uma álgebra garante a extensão da propriedade anticomutativa do produto  $\wedge$  para cada par de vetores em  $E$ , isto é, para todo  $u$  e  $v$  em  $E$  se satisfaz  $u \wedge v = -v \wedge u$ , em particular, para todo  $u \in E$  temos que  $u \wedge u = 0$ . logo, se  $\{v_1, \dots, v_k\}$  é um subconjunto de  $E$  linearmente dependente então

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = 0. \quad (2-1)$$

Notemos também que se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é um subconjunto de  $E$  e se para cada  $i$  temos que  $(v_i)_\beta$  denota as coordenadas de  $v_i$  na base  $\beta$  então por (2-1) e a propriedade anticomutativa do produto  $\wedge$  temos que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = [(v_1)_\beta, \dots, (v_n)_\beta] u_1 \wedge \dots \wedge u_n,$$

onde  $[(v_1)_\beta, \dots, (v_n)_\beta]$  é o determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas  $(v_i)_\beta$ . Em geral, se  $\gamma = \{w_1, \dots, w_n\}$  é uma base qualquer de  $E$  então

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = [(v_1)_\gamma, \dots, (v_n)_\gamma] w_1 \wedge \dots \wedge w_n. \quad (2-2)$$

Por outro lado, no caso de  $E^*$  o espaço dual de  $E$  podemos usar definições análogas ao caso de  $\Lambda(E)$  para definir  $\Lambda(E^*)$  a álgebra exterior de  $E^*$  sendo os elementos desta álgebra chamados de covetores. A álgebra  $\Lambda(E^*)$  é isomorfo a  $(\Lambda(E))^*$ . Em particular,  $\Lambda_k(E^*)$  é isomorfo a  $(\Lambda_k(E))^*$ , a saber, se  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  é a base dual de  $\{u_1, \dots, u_n\}$  então a base  $\{\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  de  $\Lambda_k(E^*)$  será identificada como a base dual de  $\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  em  $\Lambda_k(E)$ . Notemos que todo  $k$ -vetor  $u$  pode ser escrito da forma

$$u = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})(u) u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}. \quad (2-3)$$

Analogamente, todo  $k$ -covetor  $\omega$  pode ser escrito da forma

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}) \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}. \quad (2-4)$$

Notemos também, que se  $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$  é um  $k$ -covetor decomponível e  $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_r$  é um  $r$ -vetor decomponível então

$$\alpha(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq r; \\ \det[\alpha_i(v_j)] & \text{se } k = r, \end{cases} \quad (2-5)$$

onde  $\det$  denota o determinante de uma matriz quadrada.

Para cada  $u \in \Lambda(E)$  chamaremos de produto interior por  $u$  à trans-

formação linear

$$\begin{aligned} i_u &: \Lambda(E^*) \longrightarrow \Lambda(E^*), \\ \omega &\longmapsto i_u \omega, \quad i_u \omega(v) = \omega(u \wedge v) \quad \forall v \in A(E). \end{aligned}$$

Em particular, se  $u$  é um 1-vetor,  $u \in E$ , então  $i_u$  é uma antiderivação de grau -1 em  $\Lambda(E^*)$ , isto é,  $i_u$  satisfaz

1.  $i_u(\omega) \in \Lambda_{k-1}(E^*), \quad \forall \omega \in \Lambda_k(E).$
2.  $i_u(\omega \wedge \beta) = i_u(\omega) \wedge \beta + (-1)^k \omega \wedge i_u(\beta), \quad \forall \omega \in \Lambda_k(E^*) \quad \forall \beta \in \Lambda(E^*).$

**Observação 2.1** *Observemos que se  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$  e  $u_k$  são elementos de  $\Lambda(E)$  então*

$$i_{u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_{k-1} \wedge u_k} = i_{u_k} i_{u_{k-1}} \dots i_{u_2} i_{u_1}. \quad (2-6)$$

Para cada  $k \neq 0$  definamos a aplicação bilinear :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_k : \Lambda_k(E) \times \Lambda_k(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para cada par  $u = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$  e  $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  de  $k$ -vetores decomponíveis corresponde o valor :

$$\langle u, v \rangle_k = \det[\langle u_i, v_j \rangle]. \quad (2-7)$$

**Proposição 2.2**  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  é produto interno sobre  $\Lambda_k(E)$ .

Prova: Por definição, o produto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  é bilinear. Por outro lado, sabendo que para toda matriz quadrada  $A$  e sua transposta  $A^t$  se satisfaz  $\det A = \det A^t$ , por definição do produto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  temos

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle_k = \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_k, u_1 \wedge \dots \wedge u_k \rangle_k.$$

Logo o produto é simétrico. Agora, seja  $\{u_1, \dots, u_n\}$  base ortonormal de  $E$ . Tomando  $u = u_{r_1} \wedge \dots \wedge u_{r_k}$  e  $v = u_{s_1} \wedge \dots \wedge u_{s_k}$  decomponíveis tais que  $r_1 < \dots < r_k$  e  $s_1 < \dots < s_k$ , temos

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_k &= \det[\langle u_{r_i}, u_{s_j} \rangle] \\ &= \det[\delta_{s_j}^{r_i}] = \begin{cases} 1 & \text{se } r_i = s_i \text{ para todo } i. \\ 0 & \text{se } r_i \neq s_i \text{ para algum } i. \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, se  $u = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k} \in \Lambda_k(E)$  então

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_k &= \sum a_{i_1 \dots i_k} a_{j_1 \dots j_k} \langle u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}, u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_k} \rangle \\ &= \sum a_{i_1 \dots i_k}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde as somas são tomadas sobre todos os  $k$ -uplos tais que

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n. \quad \square$$

Notemos que a definição do produto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  implica que o conjunto  $\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  é uma base ortonormal de  $\Lambda_k(E)$ .

Definamos o produto interno:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda(E) \times \Lambda(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que se  $u \in \Lambda_k(E)$  e  $v \in \Lambda_r(E)$

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} \langle u, v \rangle_k & \text{se } k = r. \\ 0 & \text{se } k \neq r. \end{cases} \quad (2-8)$$

A norma de um vetor  $u \in \Lambda(E)$  será definido como  $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

Este produto interno induz o isomorfismo

$$\begin{aligned} j : \Lambda(E) &\longrightarrow \Lambda(E^*) \\ u &\longmapsto j(u), \quad j(u)(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in \Lambda(E) \end{aligned} \quad (2-9)$$

**Proposição 2.3**  $j$  é um isomorfismo de álgebras, isto é

$$j(u \wedge v) = j(u) \wedge j(v) \quad \forall u, v \in \Lambda(E). \quad (2-10)$$

Prova: Seja  $u = u_1 \wedge \dots \wedge u_k$  um  $k$ -vetor decomponível. Tomemos um  $k$ -vetor  $v = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  decomponível arbitrário. Notemos que

$$\begin{aligned} [j(u)](v) &= \langle u, v \rangle \\ &= \det[\langle u_i, v_j \rangle] \\ &= \det[j(u_i)(v_j)] \\ &= [j(u_1) \wedge \dots \wedge j(u_k)](v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \\ &= [j(u_1) \wedge \dots \wedge j(u_k)](v). \end{aligned}$$

ou seja, temos que  $j(u) = j(u_1) \wedge \dots \wedge j(u_k)$ .  $\square$

**Observação 2.4** O isomorfismo  $j^{-1} : \Lambda(E^*) \longrightarrow \Lambda(E)$  induz o produto interno  $\prec, \succ : \Lambda(E^*) \times \Lambda(E^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\prec \alpha, \beta \succ = \langle j^{-1}(\alpha), j^{-1}(\beta) \rangle$

Observemos que se  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é qualquer base ortonormal de  $E$  e  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  é a base dual em  $E^*$  então para todo  $i$  temos que  $\omega_i = j(u_i)$ . Disso e da definição do produto  $\prec, \succ$  temos que  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  é também uma base ortonormal de  $E^*$ .

### Exemplo 2.5

Sejam  $E = \mathbb{R}^n$  com o produto interno usual,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base canônica de  $\mathbb{R}^n$  e  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  a base dual.

1. Seja  $A := \langle 3e_1 \wedge e_2 + 4e_2 \wedge e_3, 4e_1 \wedge e_2 + e_2 \rangle$ . Logo:

$$\begin{aligned} A &= 12\langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2 \rangle + 3\langle e_1 \wedge e_2, e_2 \rangle \\ &\quad + 16\langle e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \rangle + \langle e_2 \wedge e_3, e_2 \rangle \\ &= 12 \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 \end{vmatrix} \\ &= 12. \end{aligned}$$

2. Seja  $B := \prec 3\alpha_1 \wedge \alpha_2 + 4\alpha_2 \wedge \alpha_3, 4\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_2 \succ$ . Logo:

$$\begin{aligned} B &= \langle j^{-1}(3\alpha_1 \wedge \alpha_2 + 4\alpha_2 \wedge \alpha_3), j^{-1}(4\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_2) \rangle \\ &= \langle j^{-1}(3\alpha_1 \wedge \alpha_2) + j^{-1}(4\alpha_2 \wedge \alpha_3), j^{-1}(4\alpha_1 \wedge \alpha_2) + j^{-1}(\alpha_2) \rangle \\ &= \langle 3e_1 \wedge e_2 + 4e_2 \wedge e_3, 4e_1 \wedge e_2 + e_2 \rangle = 12. \quad \square \end{aligned}$$

## 2.2

### Os Produtos $\cdot$ e $\times$

Sejam  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ortonormal de  $E$ . O subespaço  $\Lambda_n(E)$  é gerado pelo  $n$ -vetor  $u_1 \wedge \dots \wedge u_n$ , logo, a dimensão de  $\Lambda_n(E)$  é igual a 1. Assim,  $\Lambda_n(E) - \{0\}$  tem duas componentes e a escolha de uma destas componentes define uma orientação para  $E$ . Fixando uma componente dizemos que  $E$  é um espaço vetorial orientado. Denotaremos esta componente por  $\mathcal{O}$ . Além disso, toda base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $E$  tal que  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \mathcal{O}$  será chamada de uma base positiva de  $E$ .

**Definição 2.6** Sejam  $E$  um espaço vetorial orientado com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ortonormal positiva de  $E$ . Chamamos de operador estrela de Hodge à aplicação linear  $*$  :  $\Lambda(E) \longrightarrow \Lambda(E)$  que satisfaz

$$1. \quad *(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n) = 1.$$

$$2. \ * (1) = u_1 \wedge \dots \wedge u_n.$$

3. Se  $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\}$  é uma permutação positiva de  $\{1, \dots, n\}$  então

$$*(u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}) = u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_{n-k}}, \quad k \neq n.$$

**Observação 2.7** O operador estrela de Hodge  $*$  independe da escolha da base ortonormal positiva  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

Analogamente, podemos definir o operador estrela de Hodge sobre o dual  $\Lambda(E^*)$  considerando sobre  $E^*$  o produto interno e a orientação induzida pelo isomorfismo  $j$ . O operador  $*$  possui as seguintes propriedades:

Sejam  $\{i_1, \dots, i_k\}$ , com os  $i_l$ s distintos, e  $\{j_1, \dots, j_r\}$  contidos em  $\{1, \dots, n\}$  com interseção não nula. Então

$$(u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}) \wedge * (u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}) = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n. \quad (2-11)$$

$$(u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}) \wedge * (u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_r}) = 0. \quad (2-12)$$

O operador  $*$  também satisfaz as propriedades

$$**u = (-1)^{k(n-k)}u \quad \forall u \in \Lambda_k(E). \quad (2-13)$$

$$|*u| = \|u\| \quad \forall u \in \Lambda_n(E). \quad (2-14)$$

### Exemplo 2.8

Sejam  $E = \mathbb{R}^5$  e  $\{e_1, \dots, e_5\}$  sua base canônica ortonormal. Suponha que  $e_1 \wedge \dots \wedge e_5$  define a orientação  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^5$ . Neste caso sendo  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$  a base dual da base canônica e que  $\{1, 3, 4, 2, 5\}$  e  $\{1, 2, 5, 3, 4\}$  são permutações positivas de  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  temos que

$$1. \ * e_1 \wedge e_3 = e_4 \wedge e_2 \wedge e_5 = - e_2 \wedge e_4 \wedge e_5.$$

$$2. \ *(e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 - e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4 - e_3 \wedge e_4 \wedge e_5.$$

$$3. \ *\alpha_1 \wedge \alpha_3 = -\alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5.$$

$$4. \ **\alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5. \quad \square$$

Consideremos  $\Lambda(E) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k(E)$ , onde  $\bigoplus$  denota soma direta de subespaços,  $\mathbb{Z}$  denota os inteiros e  $\Lambda_k(E) = 0$  se  $k < 0$  ou  $k > n$ . Definamos os

seguintes produtos em  $\Lambda(E)$ :

$$\begin{aligned} \cdot : \Lambda(E) \times \Lambda(E) &\longrightarrow \Lambda(E) \\ (u, v) &\longmapsto u \cdot v = * (u \wedge *v). \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$\begin{aligned} \times : \Lambda(E) \times \Lambda(E) &\longrightarrow \Lambda(E) \\ (u, v) &\longmapsto u \times v = * (u \wedge v). \end{aligned} \quad (2-16)$$

Note que se  $u \in \Lambda_k(E)$  e  $v \in \Lambda_r(E)$  então  $u \cdot v \in \Lambda_{r-k}(E)$  e  $u \times v \in \Lambda_{n-(r+k)}(E)$ .

### Observação 2.9

Sejam  $E = \mathbb{R}^3$  e  $\{e_1, e_2, e_3\}$  a base canônica tal que  $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$  define a orientação. Então, pelas propriedades do operador  $*$ , temos que

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &= *(e_i \wedge *e_j) = \begin{cases} *(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = 1 & \text{se } i = j. \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \\ e_i \times e_j &= *(e_i \wedge e_j) = \begin{cases} e_k & \text{se } i \neq j. \\ 0 & \text{se } i = j, \end{cases} \end{aligned}$$

onde  $\{i, j, k\}$  é permutação positiva de  $\{1, 2, 3\}$ . Assim,  $\cdot$  e  $\times$  são respectivamente o produto interno e vetorial usuais em  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

Usando somente as definições de  $\times$  e  $\cdot$  podemos mostrar que

$$u \times (v \times w) = u \cdot (v \wedge w) \quad \forall u, v, w \in \Lambda(E). \quad (2-17)$$

Também, para  $\{v_1, \dots, v_n\}$  conjunto de vetores em  $E$  podemos mostrar por definição de  $\times$  e  $\cdot$  e por (2-2) que os vetores decomponíveis  $u = v_1 \wedge \dots \wedge v_{k_1}$ ,  $v = v_{k_1+1} \wedge \dots \wedge v_{k_2}$  e  $w = v_{k_2+1} \wedge \dots \wedge v_n$  satisfazem

$$u \times v \cdot w = [(v_1)_\beta, (v_2)_\beta, \dots, (v_n)_\beta], \quad (2-18)$$

onde  $\beta$  é qualquer base ortonormal que define a orientação de  $E$  e usamos a notação de (2-2).

**Proposição 2.10** *Sejam  $u, v \in \Lambda_k(E)$ . Então*

$$u \cdot v = v \cdot u = \langle u, v \rangle. \quad (2-19)$$

Prova: Seja  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ortonormal de  $E$ . A definição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  implica que  $\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  é base ortonormal de  $\Lambda_k(E)$ .

Por outro lado, por (2-11) e (2-12) temos que

$$\begin{aligned} (u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}) \cdot (u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_k}) &= *((u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}) \wedge *(u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_k})) \\ &= \begin{cases} 1 & , i_r = j_r \ \forall r \\ 0 & , i_r \neq j_r \text{ para algum } r \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, os produtos  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  e  $\cdot$  coincidem numa base de  $\Lambda_k(E)$ . Disso e do fato que ambos produtos são bilineares, temos que

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v, \quad \forall u, v \in \Lambda_k(E). \quad \square$$

Seja  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base positiva de  $E$ . Notemos por definição de norma que  $\|u_1 \wedge \dots \wedge u_n\|^2 = \det[\langle u_i, u_j \rangle]$ , onde  $\det$  denota determinante.

**Corolário 2.11** *Sejam  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base positiva de  $E$  e  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  a base dual de  $E^*$ . Se  $\bar{g} = \det[\langle u_i, u_j \rangle] = \|u_1 \wedge \dots \wedge u_n\|^2$  então*

$$j * (u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = \sqrt{\bar{g}} \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n \quad (2-20)$$

$$*j^{-1}(\omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n) = \frac{(-1)^{k(n-k)}}{\sqrt{\bar{g}}} u_1 \wedge \dots \wedge u_k \quad (2-21)$$

Prova: Sendo  $j*(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)$  um  $r$ -covetor,  $r = n-k$ , e  $\{\omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_r}\}_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n}$  a base dual em  $\Lambda_r(E^*)$  de  $\{u_{l_1} \wedge \dots \wedge u_{l_r}\}_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n}$  então por (2-4), definição de  $j$ , proposição anterior, (2-13), (2-1) e (2-14) temos

$$\begin{aligned} j * (u_1 \wedge \dots \wedge u_k) &= \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n} [j*(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)(u_{l_1} \wedge \dots \wedge u_{l_r})] \omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_r} \\ &= \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n} [(u_{l_1} \wedge \dots \wedge u_{l_r}) \cdot *(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)] \omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_r} \\ &= \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n} [* (u_1 \wedge \dots \wedge u_k \wedge u_{l_1} \wedge \dots \wedge u_{l_r})] \omega_{l_1} \wedge \dots \wedge \omega_{l_r} \\ &= [* (u_1 \wedge \dots \wedge u_k \wedge u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n)] \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n \\ &= \sqrt{\bar{g}} \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n, \end{aligned}$$

mostrando assim (2-20). Usaremos este resultado para mostrar (2-21).

$$*j^{-1}(\omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n) = *j^{-1}(j * (\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} u_1 \wedge \dots \wedge u_k)) = (-1)^{k(n-k)} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} u_1 \wedge \dots \wedge u_k. \quad \square$$

Sejam  $\{u_1, \dots, u_n\}$  base ortonormal positiva de  $E$  e  $\{j(u_1), \dots, j(u_n)\}$  sua base dual em  $E^*$ . Definamos o  $n$ -covetor unitário  $vol_E := j(u_1 \wedge \dots \wedge u_n)$  dual ao vetor unitário  $u_1 \wedge \dots \wedge u_n$ .

**Proposição 2.12** *Seja  $u \in E_k(M)$ . Então*

$$i_u vol_E = j(*u). \quad (2-22)$$

Prova: Sendo  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ortonormal temos que  $\{j(u_1), \dots, j(u_n)\}$  é a base dual em  $E^*$ . Para cada  $i$  denotemos  $\omega_i := j(u_i)$ , logo  $\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  é uma base ortonormal de  $\Lambda_k(E)$  e  $\{\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  é a base ortonormal dual de  $\Lambda_k(E^*)$ . Consideremos o caso  $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ . Notemos que  $i_{u_1 \wedge \dots \wedge u_k} \text{vol}_E \in \Lambda_{n-k}(E^*)$ . Por (2-4), definição de  $i_{u_1 \wedge \dots \wedge u_k} \text{vol}_E$ , (2-1)) e definição de  $j$  temos que

$$\begin{aligned}
 i_{u_1 \wedge \dots \wedge u_k} \text{vol}_E &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n} [i_{u_1 \wedge \dots \wedge u_k} \text{vol}_E(u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_{n-k}})] \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-k}} \\
 &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n} [\text{vol}_E(u_1 \wedge \dots \wedge u_k \wedge u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_{n-k}})] \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-k}} \\
 &= [\text{vol}_E(u_1 \wedge \dots \wedge u_k \wedge u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n)] \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n \\
 &= [\|u_1 \wedge \dots \wedge u_n\|^2] \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n \\
 &= \omega_{k+1} \wedge \dots \wedge \omega_n \\
 &= j(u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ortonormal positiva, temos que  $*(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n$ . Logo

$$j(*(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)) = j(u_{k+1} \wedge \dots \wedge u_n).$$

Assim  $j(*(u_1 \wedge \dots \wedge u_k)) = i_{u_1 \wedge \dots \wedge u_k} \text{vol}_E$ . No caso de  $i_{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}} \text{vol}_E$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , podemos considerar uma permutação positiva  $\{j_1, \dots, j_n\}$  de  $\{1, \dots, n\}$  tal que para todo  $r \in \{1, \dots, k\}$  temos que  $i_r = j_r$  e mostrar como acima que

$$j(*(u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k})) = i_{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}} \text{vol}_E. \quad \square$$

**Proposição 2.13** *Sejam  $u \in \Lambda_k(E)$  e  $v \in \Lambda_r(E)$  então*

$$j(u \cdot v) = (-1)^{(r-k)(n-r)} i_u j(v). \quad (2-23)$$

Prova: Por definição  $u \cdot v \in \Lambda_{r-k}(E)$ . Seja  $w \in \Lambda_{r-k}(E)$  arbitrário. Por definição de  $j$  e (2-19) temos que  $j(u \cdot v)(w) = w \cdot (u \cdot v)$ . Aplicando as propriedades de  $*$  convenientemente temos  $w \cdot (u \cdot v) = (-1)^{(r-k)(n-r)} (u \wedge w) \cdot v$ . Logo, por (2-19) e definição de  $i_u$  temos que

$$j(u \cdot v)(w) = (-1)^{(r-k)(n-r)} \langle v, u \wedge w \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{(r-k)(n-r)} j(v)(u \wedge w) \\
&= (-1)^{(r-k)(n-r)} i_u j(v)(w). \quad \square
\end{aligned}$$

**Corolário 2.14** *Seja  $u \in E$ ,  $\dim(E) = n$ . Se  $v \in \Lambda_k(E)$  e  $w \in \Lambda_s(E)$  então*

$$u \cdot (v \wedge w) = (-1)^{ns} (u \cdot v) \wedge w + (-1)^{(n+1)k} v \wedge (u \cdot w). \quad (2-24)$$

Prova: Sejam  $v \in \Lambda_k(E)$  e  $w \in \Lambda_s(E)$ . Por (2-23), (2-10) e sendo  $i_u$  antiderivada temos que

$$\begin{aligned}
j(u \cdot (v \wedge w)) &= (-1)^{(k+s-1)(n-k-s)} i_u j(v \wedge w) \\
&= (-1)^{n(k+s-1)} i_u (j(v) \wedge j(w)) \\
&= (-1)^{n(k+s-1)} \{ (i_u j(v)) \wedge j(w) + (-1)^k j(v) \wedge (i_u j(w)) \}.
\end{aligned}$$

Disto, (2-23) e (2-10) temos

$$j(u \cdot (v \wedge w)) = (-1)^{ns} j((u \cdot v) \wedge w) + (-1)^{(n+1)k} j(v \wedge (u \cdot w)).$$

Logo pela linearidade de  $j$  temos

$$j(u \cdot (v \wedge w)) = j((-1)^{ns} (u \cdot v) \wedge w + (-1)^{(n+1)k} v \wedge (u \cdot w)).$$

Finalmente, sendo  $j$  um isomorfismo podemos aplicar  $j^{-1}$  à última equação e obter o resultado.  $\square$

**Corolário 2.15** *Sejam  $u, v_i$ ,  $i=1, \dots, k$ , vetores em  $E$ . Então*

$$u \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = (-1)^{(k-1)n} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \langle u, v_i \rangle v_1 \wedge \dots \widehat{v_i} \dots \wedge v_k. \quad (2-25)$$

Prova: ( Por indução )

$$k = 1: u \cdot v_1 = \langle u, v_1 \rangle.$$

Para  $k + 1$  sabendo que se cumpre para  $k$ :

Por (2-24) temos que

$$u \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}) = (-1)^n (u \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)) \wedge v_{k+1} + (-1)^{(n+1)k} v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge (u \cdot v_{k+1}).$$

Como a formula se cumpre para  $k$ , temos que

$$u \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = (-1)^{(k-1)n} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \langle u, v_i \rangle v_1 \wedge \dots \widehat{v_i} \wedge \dots \wedge v_k.$$

Além disso, como  $u \cdot v_{k+1} = \langle u, v_{k+1} \rangle \in \mathbb{R}$ , podemos escrever

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge (u \cdot v_{k+1}) = \langle u, v_{k+1} \rangle v_1 \wedge \dots \wedge v_k.$$

Portanto,

$$u \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}) = (-1)^{kn} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \langle u, v_i \rangle v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_k \wedge v_{k+1}. \square$$

### Observação 2.16

Sejam  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ . Então por (2-17) e (2-25) temos que

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w) v - (u \cdot v) w.$$