5
A Generalização da Lei de Biot-Savart

Seja Ω um domínio compacto em $\mathbb{R}^3$ com bordo suave e X um campo vetorial em Ω de divergência nula e tangente ao bordo de Ω. A Lei de Biot Savart afirma que o campo vetorial $BS(X)$ em Ω definido pela igualdade

$$BS(X)(x) := \frac{-1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{(x-y)\times X(y)}{\|y-x\|^3}vol(y)$$

satisfaz $rot(BS(X)) = X$. Neste capítulo estenderemos este resultado para um k-campo U em Ω da forma $U = U^1 \wedge .. \wedge U^k$ tal que cada U^i é um campo em Ω de divergência nula e tangente ao bordo. Neste caso, definiremos o $(n-k-1)$-campo $BS(U)$ de Ω pela igualdade

$$BS(U)(x) := \frac{(-1)^k}{a_n}\int_{\Omega}\frac{(x-y)\times U(y)}{\|x-y\|^n}vol(y),$$

onde a_n é o $(n-1)$-volume da esfera unitaria S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$, e mostraremos que este $(n-k-1)$-campo satisfaz $rot(BS(U)) = U$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

5.1
Distribuições em $\mathbb{R}^n$

Seja C_0^∞ o espaço das funções suaves em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto. Uma forma linear sobre C_0^∞ é dita uma distribuição se $u[\phi_k] \to 0$ para cada seqüência $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em C_0^∞ satisfazendo

1. Existe conjunto compacto K tal que para todo i o suporte de ϕ_i está contido em K, isto é, $supp\ \phi_i \subset K$; e

2. A norma do supremo de qualquer derivada parcial das funções ϕ_i converge para 0 , isto é, para cada n-upla $= (i_1, ..., i_n)$ fixa de inteiros não negativos e $r = \sum_{j=1}^{n} i_j$ temos que $sup\ \left|\frac{\partial^r \phi_k}{\partial x_n^{i_n}..\partial x_1^{i_1}}\right| \to 0$.

No que segue, se u é uma distribuição e f é uma função suave com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ então $u[f]$ denotará o valor da distribuição aplicado a f. O espaço das distribuições será denotado por $\mathcal{D}$. Em particular, se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, isto é uma função em $\mathbb{R}^n$ tal que $|f|$ é localmente integrável, então esta define naturalmente uma distribuição, a qual denotaremos pela própria f, fazendo

$$f[\phi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(y)vol.$$

Agora, suponha que a função f, que define a distribuição, é suave. Então cada derivada parcial $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_n^{i_n}..\partial x_1^{i_1}}$ de f também define uma distribução. Neste caso, fazendo integração por partes, temos, para cada ϕ suave de suporte compacto, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}(y)\phi(y)vol \\
&= (-1)^r \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial^r \phi}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}(y)vol \\
&= (-1)^r f[\frac{\partial^r \phi}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}].
\end{aligned}$$

Logo, pela definição de distribuição, podemos definir a distribuição derivada parcial $\partial^\alpha u$ de uma distribuição u por

$$\frac{\partial^r u}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}[\phi] := (-1)^r u[\frac{\partial^r \phi}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}]. \tag{5-1}$$

Em particular, se f é uma função que tem derivada parcial $\dfrac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}$ localmente integrável então

$$\frac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}[\phi] = \int_{y\in\mathbb{R}^n} \phi(y)\frac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}(y)vol. \tag{5-2}$$

Chamamos de operador laplaciano ao operador $\triangle$ que age em $\mathcal{D}$ e é definida para cada distribuição u por

$$\triangle u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}. \tag{5-3}$$

Entre as distribuições que não são definidas por uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ existe uma que requer especial atenção, a distribuição delta de Dirac centrada em x que é denotada por δ_x e é definida por $\delta_x[\phi] := \phi(x)$. No caso de $\delta_{\vec{0}}$, onde $\vec{0}$ é a origem em $\mathbb{R}^n$ escreveremos simplesmente δ. Seja $f_n,\ n \geq 3$, a distribuição definida pela função

$$f_n(y) = -\frac{1}{(n-2)a_n}\,\frac{1}{\|y-x\|^{n-2}}, \tag{5-4}$$

onde a_n é o $(n-1)$-volume da esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Podemos verificar que $\triangle f_n = 0,\ y \neq \overrightarrow{0}$, e que $\dfrac{\partial f_n}{\partial y_i} = \dfrac{1}{a_n}\dfrac{y_i}{\|y\|^n}$ é uma função localmente integrável

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

em $\mathbb{R}^n$. Alem disso

$$\delta_x = \triangle f_n. \tag{5-5}$$

De fato, mostraremos este resultado para o caso $x = \vec{0}$. Por (5-1) e por definição do laplaciano de uma função em $\mathbb{R}^n$

$$\triangle f[\phi] = f[\triangle \phi] = f[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{\partial \phi}{\partial y_i})].$$

Agora, pela linearidade de uma distribuíção e por (5-2) temos

$$\triangle f[\phi] = -\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}[\frac{\partial \phi}{\partial y_i}] = -\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial \phi}{\partial y_i} vol.$$

Notemos que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial y_i}\dfrac{\partial \phi}{\partial y_i} = \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$. Disso, por definição de integral de uma função com singularidades, por (3-12), aplicando divergência de Gauss temos que

$$\begin{aligned}
\triangle f[\phi] &= -\lim_{\xi\to 0}\int_{\|y\|\geq\xi} \langle \nabla f, \nabla \phi\rangle\ vol \\
&= -\lim_{\xi\to 0}\int_{\|y\|\geq\xi} div(\phi\nabla f) - \phi\triangle f\ vol \\
&= -\lim_{\xi\to 0}\int_{\|y\|\geq\xi} div(\phi\nabla f). \\
&= -\lim_{\xi\to 0}\int_{\|y\|=\xi} \phi\langle \nabla f, N\rangle dS \\
&= -\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{a_n}\int_{\|y\|=\xi} \phi(y)\langle \frac{y}{\|y\|^n}, \frac{-y}{\|y\|}\rangle dS \\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{a_n}\int_{\|y\|=\xi} \phi(y)\frac{1}{\xi^{n-1}} dS \\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{a_n}\int_{\|y\|=\xi} (\phi(0)+O(\xi))\frac{1}{\xi^{n-1}} dS \\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{\phi(0)}{\xi^{n-1}a_n}\int_{\|y\|=\xi} dS \\
&= \phi(0). \qquad \square
\end{aligned}$$

Consideremos $E_o(\mathbb{R}^n)$, o subconjunto de $E(\mathbb{R}^n)$ formado pelos k-campos cujas funções coordenadas tem suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{D}^n$ o espaço dos 1-campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ cujas funções coordenadas são funções em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que serão consideradas distribuições em $\mathbb{R}^n$. Definamos o produto $\wedge_{\mathcal{D}}$ entre os espaços $\mathcal{D}^n$ e $E_o(\mathbb{R}^n)$ tal que se multiplicamos dois de estes elementos obtemos um elemento da algebra exterior de $\mathbb{R}^n$, a saber, se $F = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i \in \mathcal{D}^n$ e

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

$U = \sum_{i_1,..,i_k} u_{i_1,..,i_k} e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k} \in E_o(\mathbb{R}^n)$ então definimos o produto por

$$F \wedge_{\mathcal{D}} U := \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}]\ e_i \wedge e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k} \in \Lambda(\mathbb{R}^n),$$

onde cada f_i é considerada distribuição e $f_i[u_{i_1,..,i_k}]$ é o valor de f_i aplicado na função $u_{i_1,..,i_k}$. Observemos que podemos definir os produtos

$$\begin{aligned}
F \times_{\mathcal{D}} U &:= *(F \wedge_{\mathcal{D}} U) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}] * (\ e_i \wedge e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}]\ e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}). \\
F \cdot_{\mathcal{D}} U &:= *(F \wedge_{\mathcal{D}} (*U)) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}] * (\ e_i \wedge *(e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k})) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}]\ e_i \cdot *(e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}).
\end{aligned}$$

Agora, suponha que o k-campo U depede das variaveis x e y. Então podemos calcular a distribuição com respeito a variavel y e definir div_x e rot_x como veremos a seguir

$$\begin{aligned}
div_x(F \times_{\mathcal{D}} U) &:= div_x(\sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)\ e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} (\nabla_x f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)) \cdot (e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k})). \\
rot_x(F \times_{\mathcal{D}} U) &:= rot_x(\sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)\ e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\
&= (-1)^{(k+1)s} \sum_{i,i_1,..,i_k} *(\nabla_x f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)) \wedge (e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k})) \\
&= (-1)^{(k+1)s} \sum_{i,i_1,..,i_k} *(\nabla_x f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)) \wedge *(e_i \wedge (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k})). \\
&= (-1)^{(k+1)s} \sum_{i,i_1,..,i_k} (\nabla_x f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)) \cdot (e_i \wedge e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}).
\end{aligned}$$

Exemplo 5.1

Sejam $U = (U_1, U_2, U_3) \in E_o(\mathbb{R}^3)$ e $f, h_1 = \dfrac{y_1}{\|y\|^3}, h_2 = \dfrac{y_2}{\|y\|^2}, h_3 = \dfrac{y_3}{\|y\|^3}$ distribuições em $\mathbb{R}^3$. Definamos $F := (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{D}^3$. Notemos que $F = \nabla f_3$,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

onde f_3 satisfaz $\triangle f_3 = \delta$. Logo

$$\begin{aligned}
\langle\ F\ ,\ U\ \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle\ (h_1, h_2, h_3)\ ,\ (U_1, U_2, U_3)\ \rangle_{\mathcal{D}} \\
&= f_1[U_1] + f_2[U_2] + f_3[U_3] \in \mathbb{R} \\
F \times_{\mathcal{D}} U &= (h_1, h_2, h_3) \times_{\mathcal{D}} (U_1, U_2, U_3) \\
&= (h_2[U_3] - h_3[U_2])e_1 + (-h_1[U_3] + h_3[U_1])e_2 + (h_1[U_2] - h_2[U_1])e_3 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{y_2U_3 - y_3U_2}{\|y\|^3} vol, \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-y_1U_3 + y_3U_1}{\|y\|^3} vol, \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y_1U_2 - y_2U_1}{\|y\|^3} vol \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} F \times U vol \in \mathbb{R}^3. \qquad (5\text{-}6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\ F\ , \nabla U_i\ \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle \nabla f_3\ , \nabla U_i\ \rangle_{\mathcal{D}} \\
&= \langle (\frac{\partial f_3}{\partial y_1}, \frac{\partial f_3}{\partial y_2}, \frac{\partial f_3}{\partial y_3})\ ,\ (\frac{\partial U_i}{\partial y_1}, \frac{\partial U_i}{\partial y_2}, \frac{\partial U_i}{\partial y_3}) \rangle_{\mathcal{D}} \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial y_1}[\frac{\partial U_i}{\partial y_1}] + \frac{\partial f_3}{\partial y_2}[\frac{\partial U_i}{\partial y_2}] + \frac{\partial f_3}{\partial y_3}[\frac{\partial U_i}{\partial y_3}] \\
&= -\frac{\partial^2 f_3}{\partial y_1^2}[U_i] - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_2^2}[U_i] - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_3^2}[U_i] \\
&= -(\frac{\partial^2 f_3}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_3^2})[U_i] \\
&= -\triangle f_3[U_i] \\
&= -U_i(\vec{0}). \qquad (5\text{-}7)
\end{aligned}$$

5.2
A Lei de Biot-Savart em $\mathbb{R}^3$

Agora, fazendo uso do produto $\wedge_{\mathcal{D}}$ mostraremos a Lei de Biot-Savart. No que segue consideraremos $x = (x_1, .., x_n)$ e $y = (y_1, .., y_n)$.

Proposição 5.2 *(Lei de Biot-Savart) Seja Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^3$ com bordo suave $\partial\Omega$. Se U é um campo vetorial em Ω tal que $div(U) = 0$ e é tangente a $\partial(\Omega)$ então o campo definido por*

$$BS(U)(x) := \frac{-1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^n} \times U(y) vol(y)$$

satisfaz

$$rot(BS(U))(x) = U(x)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Prova: Sejam $p \in \Omega$, $r = dist(p, \partial\Omega)$, $0 < 2\zeta \ll r$ e $f : \Omega \to [0, 1]$ uma função suave tal que

$$f(y) = \begin{cases} 1 & se \quad \|y - p\| \leq \zeta. \\ 0 & se \quad \|y - p\| \geq 2\zeta. \end{cases}$$

Em Ω definamos os campos vetoriais $U^1 := fU$, $U^2 = (1 - f)U$ e

$$BS_1(U^1)(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_\Omega \frac{(x - y)}{\|x - y\|^3} \times U^1(y)vol(y).$$

Notemos que $U^1 \in E_o(\mathbb{R}^n)$ e que $\nabla(-\frac{1}{4\pi\|y\|}) = \frac{1}{4\pi}\frac{y}{\|y\|^3}$. Então fazendo uma mudança de coordenadas na integral, por (5-4) para o caso $x = \vec{0}$ e por (5-6) temos que

$$\begin{aligned} BS_1(U^1)(x) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x - y)}{\|x - y\|^3} \times U^1(y)vol(y) \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y}{\|y\|^3} \times U^1(x - y)vol(y) \\ &= -\nabla_y f_3 \times_{\mathcal{D}} U^1(x - y). \end{aligned}$$

Notemos por (3-9) que

$$rot_x(\nabla_y f_3 \times_{\mathcal{D}} U^1(x - y)) = div_x(\nabla_y f_3 \wedge_{\mathcal{D}} U^1(x - y)).$$

Logo, por (3-17), observando que $\nabla_y f_3$ independe de x e usando a fórmula (3-16) para o colchete de Lie temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS_1(U^1))(x) &= -div_x(\nabla_y f_3 \wedge_{\mathcal{D}} U^1(x - y)) \\ &= -\nabla_y f_3 \wedge_{\mathcal{D}} (div_x(U^1(x - y))) + \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_y f_3, \nabla_x U_i^1(x - y)\rangle_{\mathcal{D}} e_i \\ &= \nabla_y f_3 \wedge_{\mathcal{D}} (div_y(U^1(x - y))) - \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_y f_3, \nabla_y U_i^1(x - y)\rangle_{\mathcal{D}} e_i. \end{aligned}$$

Logo, por definição de distribuição, por (5-7) e por (5-5)

$$\begin{aligned} rot_x(BS_1(U^1))(x) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{y \in \mathbb{R}^3} div(U^1)(x - y)) \frac{y}{\|y\|^3} vol + \sum_{i=1}^{3} \triangle f_3 [U_i^1(x - y)] e_i \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{y \in \mathbb{R}^3} div(U^1)(y)) \frac{x - y}{\|x - y\|^3} vol + \sum_{i=1}^{3} \delta [U_i^1(x - y)] e_i \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{y \in \mathbb{R}^3} div(U^1)(y) \frac{x - y}{\|x - y\|^3} vol + U^1(x). \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Assim, pela definição do campo U^1 temos que

$$rot_x(BS_1(U^1))(x) = U^1(x) - \frac{1}{4\pi}\int_{\zeta \leq \|y-p\| \leq 2\zeta} div(fU)(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}vol.$$

Por outro lado, seja

$$BS_2(U^2)(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^3} \times U^2(y)vol(y).$$

Se $\Omega_0 := \{\|y-p\| \geq \zeta\} \cap \Omega$ temos , pela definição de U^2, que

$$BS_2(U^2)(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\Omega_0} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^3} \times U^2(y)vol(y).$$

Neste caso, $\forall x \in \Omega$ tal que $\|x-p\| < \zeta$ estamos integrando funções suaves. Logo, podemos derivar dentro da integral. Assim, por (3-9) e por (3-17) temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS_2(U^2))(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_0} div_x(\frac{(x-y)}{\|x-y\|^3} \wedge U^2(y))vol(y) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_0} div_x(\frac{(x-y)}{\|x-y\|^3})U^2(y)vol(y) - \\ &\quad \sum_i \left\{\int_{\Omega_0} \langle \nabla_x(\frac{(x_i-y_i)}{\|x-y\|^3}), U^2(y)\rangle vol\right\} e_i. \end{aligned}$$

Como $div_x(\frac{(x-y)}{\|x-y\|^3}) = 0$ e $\nabla_x(\frac{(x_i-y_i)}{\|x-y\|^3}) = -\nabla_y(\frac{(x_i-y_i)}{\|x-y\|^3})$ temos

$$\begin{aligned} 4\pi\ rot_x(BS_2(U^2))(x) &= \sum_i \left\{\int_{\Omega_0} \langle \nabla_y(\frac{(x_i-y_i)}{\|x-y\|^3}), U^2(y)\rangle vol \right\} e_i \\ &= \sum_i \left\{\int_{\Omega_0} \left(div(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}U^2) - \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}divU^2\right) vol\right\} e_i. \end{aligned}$$

Por definição de U^2 e teorema de Stokes temos

$$\begin{aligned} 4\pi\ rot_x(BS_2(U^2))(x) &= \sum_i \{\int_{\partial\Omega_0} \langle \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}U^2, N\rangle dS - \\ &\quad - \int_{\zeta \leq \|y-p\| \leq 2\zeta} \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3} divU^2 vol\}e_i. \end{aligned}$$

Como $\partial\Omega_0 = \{\|y-p\| = \zeta\} \cup \partial\Omega$, $U_2|_{\{\|y-p\|=\zeta\}} = \vec{0}$ e $U_2|_{\partial\Omega} = U|_{\partial\Omega}$ é tangente ao bordo, temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS_2(U^2))(x) &= -\frac{1}{4\pi}\sum_i \left\{\int_{\zeta\leq\|y-p\|\leq 2\zeta} divU^2(y)\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}vol\ \right\} e_i \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\zeta\leq\|y-p\|\leq 2\zeta} div(1-f(y))U(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}vol \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\zeta\leq\|y-p\|\leq 2\zeta} divf(y)U(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}vol. \end{aligned}$$

Finalmente, $rot_x(BS(U))(x) = rot_x(BS(U_1))(x) + rot_x(BS(U_2))(x) = U(x)$.
$\square$

Nesta demonstração dividimos U em dois campos com a finalidade de integrar a singularidade de $BS(U)$ usando propriedades de distribuição. Ressaltamos que podemos demonstrar o teorema de Biot-Savart em forma prática, derivando dentro da integral como se estivessemos trabalhando com funções suaves. Neste caso podemos usar o teorema de divergência de Gauss, quando for o caso, e observar se podemos usar a distribuição delta de Dirac. Na verdade a propria demonstração do teorema sugere este fato, já que as integrais que faltam na forma prática são as integrais que se anulam ao dividir U em duas partes na demonstração rigorosa. Apresentaremos agora esta demonstração prática:

Seja $f(x,y) = \dfrac{-1}{4\pi\|y-x\|}$. Notemos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}$, $\forall i,j$. Observemos que $\dfrac{1}{4\pi\|x-y\|^3} = \nabla_x f$. Disso, por (2-17), (3-22) e sendo U de divergência nula temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS(U))(x) &= -\int_\Omega rot_x\left(\nabla_x f\right) \times U(y)vol(y) \\ &= -\int_\Omega div_x\left(\nabla_x\left(f\right) \wedge U(y)\right) vol(y) \\ &= \int_\Omega \left(\triangle_y f\right) U(y)vol(y) + \sum_{i=1}^{3}\left(\int_\Omega div_y\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}U\right) vol\right) e_i. \end{aligned}$$

Por outro lado, por (5-4) e (5-5) temos que $\triangle_y f = \delta_x$. Logo, pela definição de δ_x, pelo teorema de divergência de Gauss e sabendo que U é tangente ao bordo de Ω, temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS(U))(x) &= \delta_x[U] + \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{\partial\Omega}\left\langle\frac{\partial f}{\partial y_i}U, N\right\rangle dS\right) e_i \\ &= U(x). \end{aligned} \tag{5-8}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

5.3
A lei de Biot-Savart em $\mathbb{R}^n$

Agora, generalizaremos o teorema de Biot-Savart para dimensões maiores. No que resta deste capítulo fixemos k e s inteiros positivos tal que $k+s = n-1$. Lembremos que $(U^1, U^2, .., U^k)$ é uma n-upla em $\widetilde{\mathfrak{g}}_k(\Omega)$ se cada coordenada U^i é um 1-campo vetorial em Ω que satisfazem $div(U^i) = [U^i, U^j] = 0$, para todo i e j, além disso se $\widetilde{U} = U^1 \wedge .. \wedge U^k$ é o k-campo associado a U então $j(*\widetilde{U}) = i_{\widetilde{U}} vol$, a $(n-k)$-forma associada a $\widetilde{U}$, é exata.

Proposição 5.3 *Seja Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com bordo $\partial\Omega$ suave. Sejam $U = (U^1, .., U^k) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k(\Omega)$ e $\widetilde{U}$ o k-campo associado a U. Suponha que cada 1-campo U^i é tangente ao bordo de Ω. Então o s-campo $BS(U)$ definido por*

$$BS(U)(x) := \frac{(-1)^k}{a_n} \int_\Omega \frac{(x-y)}{\|x-y\|^n} \times \widetilde{U}(y) vol(y), \tag{5-9}$$

onde a_n é o $(n-1)$-volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, satisfaz

$$rot(BS(U))(x) = \widetilde{U}(x) \tag{5-10}$$

Prova: A demonstração será feita na forma prática como no caso do teorema de Biot-Savart. Seja $f(x,y) = \dfrac{-1}{a_n(n-2)\|y-x\|^{n-2}}$. Notemos que esta função satisfaz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}$,e observemos que $\dfrac{x-y}{a_n\|x-y\|^n} = \nabla_x f$. A observação 2.15 garante que $div(\widetilde{U}) = 0$. Suponha que para cada i temos que $U^i = \sum_{j=1}^n u_j^i e_j$, logo, por (3-9), (2-17), (3-22) e sendo $\widetilde{U}$ de divergência nula temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS(U))(x) &= -\int_\Omega rot_x\left(\nabla_x f\right) \times U(y) vol(y) \\ &= -\int_\Omega div_x\left(\nabla_x(f) \wedge U(y)\right) vol(y) \\ &= (-1)^{n+k} \sum_{r,j,j_1,..\widehat{j_r}..,j_k}^{k,n,n,..,n} \{\ (-1)^r \left(\int_\Omega div_y \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} u_{j_1}^1 .. \widehat{u_{j_r}^r} .. u_{j_k}^k U^r \right) vol \right). \\ &\qquad .e_j \wedge e_{j_1} \wedge .. \widehat{e_{j_r}} .. \wedge e_{j_k}\ \} + \int_\Omega \left(\triangle_y f\right) U(y) vol(y), \end{aligned}$$

onde os pontinhos nas últimas linhas significa continuação do sumatório. Agora, o teorema de divergência de Gauss e sabendo que U é tangente ao bordo garantem que

$$\int_\Omega div_y \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} u_{j_1}^1 .. \widehat{u_{j_r}^r} .. u_{j_k}^k U^r \right) vol = 0.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Alem disso, por (5-4) e (5-5) temos que $\triangle_y f = \delta_x$. Assim

$$\begin{aligned} rot_x(BS(U))(x) &= \delta_x[\widetilde{U}] \\ &= \widetilde{U}(x). \qquad \square \end{aligned}$$

Agora usaremos o teorema de Biot-Savart generalizado para dar uma fórmula da invariante de Hopf de duas n-uplas $U \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k(\Omega)$ e $V \in \widetilde{\mathfrak{g}}_s(\Omega)$ a qual será muito importante para resultados posteriores.

Corolário 5.4 *Seja Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com bordo $\partial\Omega$ suave e com a cohomologia nula em dimensão s, isto é, $H^s(\Omega) = \{0\}$. Sejam $U = (U^1, .., U^k) \in \widetilde{\mathcal{G}}_k(\Omega)$ e $V = (V^1, ..V^s) \in \widetilde{\mathcal{G}}_s(\Omega)$. Suponha que os U^i e os V^j são tangentes ao bordo de Ω. Se $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ são o k-campo e o s-campo associados a U e V, respectivamente, então*

$$\begin{aligned} I(U,V) &= \frac{(-1)^k}{a_n} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{(y-x)\times\widetilde{U}\cdot\widetilde{V}}{\|y-x\|^n} vol(x)vol(y) && (5\text{-}11) \\ &= \frac{(-1)^k}{a_n} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{[y-x, U^1(x), .., U^k(x), V^1(y), .., V^s(y)]}{\|y-x\|^n} vol(x)vol(y). && (5\text{-}12) \end{aligned}$$

Prova:
Pelo Teorema de Biot-Savart generalizado, $rot[BS(\widetilde{U})](y) = \widetilde{U}(y)$. Disso e do fato que $H^s(\Omega) = \{0\}$, temos pela proposição 3.8 e pela proposição 3.9 que $I(U,V) = \int_\Omega BS(\widetilde{U})(y)\cdot\widetilde{V}(y)vol(y)$. Logo por definição do s-campo $BS(\widetilde{U})$ temos

$$\begin{aligned} I(U,V) &= \frac{(-1)^k}{a_n} \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{(y-x)\times\widetilde{U}(x)}{\|y-x\|^n} vol(x) \right) \cdot \widetilde{V}(y)vol(y) \\ &= \frac{(-1)^k}{a_n} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{(y-x)\times\widetilde{U}(x)\cdot\widetilde{V}(y)}{\|y-x\|^n} vol(x)vol(y) \end{aligned}$$

mostrando assim (5-11). Para mostrar (5-12) consideramos a base canônica de $\mathbb{R}^n$, $\beta = \{e_1, .., e_n\}$, e o resultado será obtido usando a formula (2-18). $\square$

Observação 5.5

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

O invariante de Hopf usado por Arnold em [Arn] para um campo $X \in E_1(M)$ de divergência nula satisfaz

$$\begin{aligned} I(X) := I(X,X) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Omega\int_\Omega \frac{(x-y)\times X(x)\cdot X(y)}{\|x-y\|^3} vol(x)vol(y), \\ &= \frac{1}{a_2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{[x-y, X(x), X(y)]}{\|x-y\|^3} vol(x)vol(y) \end{aligned}$$

onde $\times$ e $\cdot$ são o produto vetorial e interno usual em $\mathbb{R}^3$ e $[\quad]$ é o produto mixto, os quais como sabemos coincidem com o produto $\times$, o produto $\cdot$ e o determinante no caso $\mathbb{R}^3$ e observamos que este resultado de Arnold coincide com o resultado do último corolário para o caso $k = 1$, $U = X$ e $V = X$. $\square$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA