

6

Fórmulas de Enlaçamento

6.1

Índice de Enlaçamento

Seja S_1 uma variedade conexa, compacta, orientada e sem bordo de dimensão n . Sendo S_1 conexa toda função f de S_1 em $\mathbb{R}$ que satisfaz $df = 0$ é uma função constante. Logo, por definição temos que $H^0(S_1) = \mathbb{R}$, onde $H^0(S_1)$ é a 0-ésima cohomologia de S_1 . Logo, a dualidade de Poincaré garante que $H^n(S_1) = \mathbb{R}$. Por outro lado, o teorema de de Rham afirma que a k -ésima homologia $H_k(S_1)$ é isomorfo a $H^k(S_1)$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Em particular, $H_n(S_1) = \mathbb{R}$, logo podemos considerar a classe fundamental de S_1 como gerador de $H_n(S_1)$. Logo, se S_2 é outra variedade conexa, compacta, orientada e sem bordo de dimensão n então cada aplicação $f : S_1 \rightarrow S_2$ suave satisfaz $f_* S_1 = m_f S_2$, onde m_f é uma constante. Um resultado importante da topologia assegura que m_f é um inteiro chamado de grau de f e denotado por $\deg(f)$.

Suponha agora que a variedade S_1 acima seja de dimensão $n - 1$ e imersa em $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ sendo f a função que define a imersão. Seja $g := \pi \circ f : S_1 \rightarrow S^{n-1}$, onde $\pi : \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \rightarrow S^{n-1}$, $\pi(p) = \frac{p}{\|p\|}$, é a projeção na esfera unitária. O inteiro $\deg(g)$ indica o número de vezes que $f(S_1)$ roda em torno da origem e será denotado por $I_f(S_1)$. Neste caso, se σ é a forma de volume de S^{n-1} e a_n é o $(n - 1)$ -volume de S^{n-1} então

$$\deg(g) = \frac{\deg(g)}{a_n} \int_{S^{n-1}} \sigma = \frac{1}{a_n} \int_{\deg(g)S^{n-1}} \sigma = \frac{1}{a_n} \int_{(\pi \circ f)_* S_1} \sigma = \frac{1}{a_n} \int_{S_1} (\pi \circ f)^* \sigma.$$

Portanto, se $\tau = \pi^* \sigma$ então $I_f(S_1) = \frac{1}{a_n} \int_{S_1} f^* \tau$.

Observação 6.1

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n. \quad (6-1)$$

$$\tau = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x_i}{r^n} dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n, \quad (6-2)$$

onde r é a norma euclidiana do vetor posição $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\square$

Seja M uma variedade riemanniana, conexa e orientada de dimensão n . Sejam S_1 e S_2 sub-variedades orientadas imersas em M , ambas compactas, sem bordo e de dimensões k_1 e k_2 respectivamente, onde $k_1 + k_2 = n - 1$. Suponha que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ e ambas sejam de homologia nula em M . Seja $\tilde{S}_1$ uma $(k_1 + 1)$ -cadeia em M tal que

1. $\partial\tilde{S}_1 = S_1$, como cadeias
2. $\tilde{S}_1$ é transversal a S_2 .

Define-se o índice de enlaceamento de S_1 e S_2 por

$$lk(S_1, S_2) = \sum_{\tilde{S}_1 \cap S_2} \pm 1, \quad (6-3)$$

onde sumamos $+1$ em cada ponto de transversalidade positiva e -1 se a transversalidade for negativa. Notemos que o conjunto $\tilde{S}_1 \cap S_2$ é finito, já que S_2 é compacto e os pontos de transversalidade são isolados, logo $lk(S_1, S_2)$ é finito. Na definição deste índice de enlaceamento poderíamos também ter usado uma sub-variedade $\tilde{S}_2$ de M tal que $\partial\tilde{S}_2 = S_2$. Afirmamos que este índice independe da escolha de $\tilde{S}_i$, $i = 1, 2$, já que este índice também pode ser definida por uma integral que depende somente de S_1 e S_2 . Mostraremos este fato, primeiro para o caso $M = \mathbb{R}^n$. Sendo S_1 e S_2 compactas, orientadas e sem bordo a variedade produto $S_1 \times S_2$ é também uma variedade compacta, orientada e sem bordo. sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ as imersões de S_1 e S_2 em $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Por ser $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ podemos definir a aplicação suave

$$\begin{aligned} f : S_1 \times S_2 &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}. \\ (x, y) &\mapsto y - x. \end{aligned}$$

Então pode-se mostrar que

$$lk(S_1, S_2) = I_f(S_1 \times S_2) = \frac{1}{a_n} \int_{S_1 \times S_2} f^*(\tau) \quad (6-4)$$

Esta fórmula mostra a independência do $lk(S_1, S_2)$ com respeito a escolha das $\tilde{S}_1$ ou $\tilde{S}_2$.

Agora, sendo estas sub-variedades orientadas existem o k_1 -campo unitário N_1 e o k_2 -campo unitário N_2 que definem as orientações de S_1 e S_2 , respectivamente. Para cada $p \in S_1$ identificaremos $T_p(S_1)$, o espaço tangente de S_1 em p , como o subespaço de $\mathbb{R}^n$ de vetores tangentes da imersão no ponto $x(p)$, isto é, estamos considerando $T_p(S_1) \subset \mathbb{R}^n$. Logo, se $\{u_1, \dots, u_{k_1}\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_p(S_1)$ então $N_1(p) = u_1 \wedge \dots \wedge u_{k_1}$. Identificações análogas serão feitas para os espaços tangentes de S_2 .

Proposição 6.2 *O índice de enlaçamento de S_1 e S_2 pode ser calculado pela fórmula*

$$lk(S_1, S_2) = \frac{(-1)^{k_1}}{a_n} \int_{p \in S_1} \int_{q \in S_2} \frac{(q-p) \times N_1(p) \cdot N_2(q)}{\|y-x\|^n} vol(p) vol(q). \quad (6-5)$$

Prova: A fórmula (6-2) afirma que $\tau = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{x_i}{r^n} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$. Agora, sendo $f(x, y) = y - x$ temos que

$$f^*(\tau) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^n} (dy_1 - dx_1)(dy_2 - dx_2) \dots (\widehat{dy_i - dx_i}) \dots (dy_n - dx_n).$$

Por outro lado, localmente os sistemas de coordenadas $(t_1, \dots, t_{k_1})$ de S_1 e $(r_1, \dots, r_{k_2})$ de S_2 originam o sistema de coordenadas $(t_1, \dots, t_{k_1}, r_1, \dots, r_{k_2})$ de $S_1 \times S_2$. Notemos que $dx_i = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\partial x_i}{\partial t_i} dt_i$ e $dy_i = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\partial y_i}{\partial r_i} dr_i$. Seja base $\beta = \{dr_1, \dots, dr_{k_2}, dt_1, \dots, dt_{k_1}\}$ então as coordenadas de $dy_i - dx_i$ na base β são

$$(dy_i - dx_i)_\beta = \left(\frac{\partial y_i}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial y_i}{\partial r_{k_2}}, \frac{\partial x_i}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x_i}{\partial t_{k_1}} \right).$$

Usando a fórmula (2-2) temos que

$$f^*(\tau) = \left\{ \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^n} [(dy_1 - dx_1)_\beta, (dy_2 - dx_2)_\beta \dots (\widehat{dy_i - dx_i}_\beta) \dots (dy_n - dx_n)_\beta] \right. \\ \left. \cdot dr_1 \dots dr_{k_2} dt_1 \dots dt_{k_1}, \right\}.$$

onde o pontinho na primeira e segunda linha significa continuação da fórmula. O cálculo de um determinante pelo método de cofatores com respeito a primeira linha implica que

$$f^*(\tau) = \frac{[(y_1 - x_1, (dy_1 - dx_1)_\beta), \dots, (y_n - x_n, (dy_n - dx_n)_\beta)]}{\|y-x\|^n} dr_1 \dots dr_{k_2} dt_1 \dots dt_{k_1},$$

onde cada $(y_i - x_i, (dy_i - dx_i)_\beta)$ está sendo considerada vetor coluna. Notemos que as k últimas linhas são $-\frac{\partial x}{\partial t_1}, \dots, -\frac{\partial x}{\partial t_{k_1}}$. Então

$$f^*(\tau) = (-1)^k \frac{[(y_1 - x_1, (dy_1 + dx_1)_\beta), \dots, (y_n - x_n, (dy_n + dx_n)_\beta)]}{\|y-x\|^n} dr_1 \dots dr_{k_2} dt_1 \dots dt_{k_1},$$

Agora, aplicando a propriedade anticomutativa do determinante com respeito

as linhas e sabendo que $dr_1 \dots dr_{k_2} dt_1 \dots dt_{k_1} = (-1)^{k_1 k_2} dt_1 \dots dt_{k_1} dr_1 \dots dr_{k_2}$ temos

$$f^*(\tau) = (-1)^k \frac{[(y_1 - x_1, (dy_1 + dx_1)_{\beta'}), \dots, (y_n - x_n, (dy_n + dx_n)_{\beta'})]}{\|y - x\|^n} dr_1 \dots dr_{k_2} dt_1 \dots dt_{k_1},$$

onde $\beta' = \{dt_1, \dots, dt_{k_1}, dr_1, \dots, dr_{k_2}\}$. Escrevendo o determinante por linhas temos que

$$f^*(\tau) = (-1)^k \frac{[(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n), \frac{\partial x}{\partial t_1} \dots \frac{\partial x}{\partial t_{k_1}}, \frac{\partial y}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial r_{k_2}}]}{\|y - x\|^n} dr_1 \dots dr_{k_2} dt_1 \dots dt_{k_1}.$$

Finalmente usando a fórmula (2-17) obtemos o resultado desejado. $\square$

Exemplo 6.3 Sejam S_i , $i = 1, 2$ curvas fechadas e disjuntas em $\mathbb{R}^3$, onde $k_1 = k_2 = 1$. Seja $\alpha_i : [0, T_i] \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de S_i . Denotemos por $\dot{\alpha}_i$, $i = 1, 2$, ao vetor tangente $\frac{\partial \alpha_i}{\partial t_i}$. Logo $N_i = \frac{\dot{\alpha}_i}{\|\alpha_i\|}$ e $vol_i = \|\dot{\alpha}_i\| dt_i$. Então

$$\begin{aligned} lk(S_1, S_2) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{p \in S_1} \int_{q \in S_2} \frac{(q - p) \times N_1(p) \cdot N_2(q)}{\|p - q\|^3} vol(p) vol(q) \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \frac{(\alpha_2(t_2) - \alpha_1(t_1)) \times \frac{\dot{\alpha}_1(t_1)}{\|\dot{\alpha}_1(t_1)\|} \cdot \frac{\dot{\alpha}_2(t_2)}{\|\dot{\alpha}_2(t_2)\|}}{\|\alpha_2(t_2) - \alpha_1(t_1)\|^3} \|\dot{\alpha}_1\| \|\dot{\alpha}_2\| dt_1 dt_2 \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \frac{(\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t_2)) \times \dot{\alpha}_1(t_1) \cdot \dot{\alpha}_2(t_2)}{\|\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t_2)\|^3} dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Esta é a conhecida formula de Gauss para o índice de enlaçamento de duas curvas fechadas. $\square$

Observação 6.4

Sejam $X(t_1, \dots, t_{k_1})$, $(t_1, \dots, t_{k_1}) \in [0, T^1] \times \dots \times [0, T^{k_1}]$ e $Y(r_1, \dots, r_{k_2})$, $(r_1, \dots, r_{k_2}) \in [0, R^1] \times \dots \times [0, R^{k_2}]$ parametrizações de S_1 e S_2 , respectivamente. Por (3-3) temos que

$$\frac{\partial X}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial X}{\partial t_{k_1}} = \sqrt{g_1} N_1 ; \quad \frac{\partial Y}{\partial r^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial Y}{\partial t^{k_2}} = \sqrt{g_2} N_2.$$

e por (3-4) temos que

$$dt_1 \dots dt_{k_1} = \sqrt{g_1} vol_1 ; \quad dr_1 \dots dr_{k_2} = \sqrt{g_2} vol_2.$$

Então usando a fórmula (2-18) podemos localmente escrever

$a_n(-1)^{k_1} lk(S_1, S_2)$ como

$$\int_0^{R^{k_2}} \cdots \int_0^{R^1} \int_0^{T^{k_1}} \cdots \int_0^{T^1} \frac{\left[X - Y, \frac{\partial X}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial t_{k_1}}, \frac{\partial Y}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial Y}{\partial r_{k_2}} \right]}{\|X - Y\|^n} d\mu_1 d\mu_2, \quad (6-6)$$

onde $d\mu_1 = dt_1 \dots dt_{k_1}$ e $d\mu_2 = dr_1 \dots dr_{k_2}$. $\square$.

Continuemos agora para o caso de M ser uma variedade riemanniana compacta e sem bordo. Sendo S_i sem bordo, a aplicação linear $[\alpha] \mapsto \int_{S_i} \alpha$ está bem definida sobre $H^k(M)$. A dualidade de Poincaré garante que $H^{n-k_i}(M) = (H^{k_i}(M))^*$, logo existe $[\eta_i] \in H^{n-k_i}(M)$, chamado o dual de Poincaré de S_i , tal que toda k -forma fechada $\alpha \in E^k(M)$ satisfaz $\int_{S_i} \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_i$. Agora, como existe $\tilde{S}_i$ tal que $\partial \tilde{S}_i = S_i$, temos

$$\int_{S_i} \alpha = \int_{\partial \tilde{S}_i} \alpha = \int_{\tilde{S}_i} d\alpha = 0.$$

Assim, $[\eta_i] = 0$, isto é, η_i é exata. Escolhamos vizinhanças tubulares W_i de S_i tal que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Podemos escolher representantes η_i do dual de Poincaré de S_i tal que o suporte de η_i está contido em W_i . Podemos mostrar que se α_1 é uma forma diferencial que satisfaz $d\alpha_1 = \eta_1$ então

$$lk(S_1, S_2) = \int_M \alpha_1 \wedge \eta_2.$$

De fato, W_2 pode ser escolhida sendo um fibrado normal de S_2 e o dual de Poincaré η_2 de S_2 pode ser escolhida como uma $(n - k_2)$ -forma diferenciável fechada que representa a classe de Thom de S_2 em W_2 . Seja U_1 um fibrado normal de $\tilde{S}_1$, onde $\tilde{S}_1$ é qualquer sub-variedade singular tal que $\partial \tilde{S}_1 = S_1$, então podemos escolher por α_1 a classe de Thom de $\tilde{S}_1$ em U_1 . Então o produto exterior $\alpha_1 \wedge \eta_2$ representa a classe de Thom de $\tilde{S}_1 \cap S_2$ em $U_1 \cap W_2$. A classe de Thom $\theta \in E^n(M)$ de um ponto satisfaz $\int_{supp(\theta)} \theta = 1$ Como $\tilde{S}_1 \cap S_2$ é um conjunto finito de pontos temos que

$$\begin{aligned} \int_M \alpha_1 \wedge \eta_2 &= \int_{V_p} \varphi(\tilde{S}_1 \cap S_2) = \sum_{p \in \tilde{S}_1 \cap S_2} \pm 1 \\ &= lk(S_1, S_2) \end{aligned}$$

Outro fato importante é que a escolha da classe de Thom η_2 tem integral +1 sobre cada fibra da vizinhança W_i que é isomorfa a um disco D_ϵ . Assim

$$\int_M \alpha_1 \wedge \eta_2 = \int_{W_2} \alpha_1 \wedge \eta_2 = \int_{p \in S_2} \alpha_1 \int_{D_\epsilon} \eta_2.$$

Portanto

$$\int_M \alpha_1 \wedge \eta_2 = \int_{S_2} \alpha_1. \quad (6-7)$$

6.2

Formas de Enlacamento

Definição 6.5 Uma forma de enlaçamento em M é uma forma dupla L em $M \times M$ tal que para duas subvariedades disjuntas e fechadas $S_1^{k_1}, S_1^{k_2}$, $k_1 + k_2 = n - 1$ ambas sem bordo e de homologia nula, a seguinte igualdade se satisfaz

$$lk(S_1, S_2) = \int_{S_1} \int_{S_2} L.$$

Por exemplo em $\mathbb{R}^n$, se $v_1^1, v_2^1, \dots, v_{k_1}^1 \in T_p S_1$ e $v_1^2, v_2^2, \dots, v_{k_2}^2 \in T_q S_2$ Podemos definir $L_{\mathbb{R}^n}$ por

$$L_{\mathbb{R}^n}(v_1^1, v_2^1, \dots, v_{k_1}^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{k_2}^2) = \frac{1}{a_n} \frac{[p - q, v_1^1, v_2^1, \dots, v_{k_1}^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{k_2}^2]}{\|p - q\|^n}.$$

No caso de M ser uma variedade riemanniana compacta sem bordo uma forma de enlaçamento é construída como segue:

Pelo teorema de decomposição de Hodge, cada $\alpha \in E^k(M)$ pode ser escrita de forma única como

$$\alpha = d\partial(G\alpha) + \partial d(G\alpha) + H(\alpha), \quad (6-8)$$

onde d é o operador diferencial, $\partial = *d*$ é o operador codiferencial, H é o operador de projeção na parte harmônica da k -forma e G é o operador de Green. Nesta formula as componentes são ortogonais entre si na métrica

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge * \beta.$$

O operador de Green é definida por $G(\alpha) = \omega - H(\omega)$, onde ω é solução da equação $\Delta \omega = \alpha - H(\alpha)$. O operador de Green também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} G(\alpha)(x) &= \int_M \alpha \wedge *_y g(x, y) \beta \\ &= \langle \alpha, g(x, \cdot) \rangle, \end{aligned}$$

onde $g(x, y)$, chamado o núcleo de G , é uma forma dupla em $M \times M$ a qual é suave fora da diagonal e tem polo de ordem $n - 2$ ao longo da diagonal.

Denotemos por w_y o operador linear que age sobre o espaço das formas duplas decomponíveis $w_y(\alpha(x) \wedge \beta(y)) = (-1)^{k(n-k)}\alpha(x) \wedge \beta(y)$ sempre que $\beta(y) \in E^k(M)$.

Proposição 6.6 *A forma dupla $L := w_y(*_y d_y g(x, y))$ é uma forma de enlaçamento em M . L tem singularidade $r(x, y)^{1-n}$ ao longo da diagonal e é suave fora dela, onde r é a função distancia riemanniana. Além disso, para cada k -forma α existe uma $(k-1)$ -forma h tal que*

$$\int_{y \in M} L(x, y) \wedge d\alpha(y) = \alpha(x) - H(\alpha)(x) + dh(x). \quad (6-9)$$

Prova. O operador G comuta com d e ∂ , logo por (5.3) temos

$$\begin{aligned} G(\partial d\alpha)\alpha &= \alpha - H(\alpha)d(-\partial(G\alpha)) \\ &= \alpha - H(\alpha) + dh \end{aligned}$$

Por outro lado, ∂ é operador adjunto de d na métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, logo temos

$$\begin{aligned} G(\partial d\alpha) &= \langle \partial d\alpha, g(x, \cdot) \rangle = \langle d\alpha, dg(x, \cdot) \rangle \\ &= \int_M d\alpha \wedge *_y d_y g(x, y) = \int_M w_y *_y d_y g(x, y) \wedge \alpha \\ &= \int_M L(x, y) \wedge \alpha \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que $L(x, y)$ é uma forma de enlaçamento em M . Seja $\epsilon > 0$ e denotemos por $D_\epsilon^{n-k_1}$ a bola de raio ϵ em $\mathbb{R}^{n-k_1}$. Se o fibrado normal de S_i em M é trivial, podemos tomar W_i como a imagem de $S_i \times D_\epsilon^{n-k_i}$ pelo difeomorfismo dado pela aplicação exponencial geodésica restrita ao fibrado normal de S_i em M . As coordenadas compatíveis com estes produtos serão denotadas por (p, a) e (q, b) para W_1 e W_2 respectivamente. Escolhendo as classes de Thom como representantes, no fibrado respectivo, do dual de Poincaré η_i de S_i com $\text{supp}(\eta_i) \subset (W_i)$ temos para cada $p \in W_i$

$$\int_{p \times D_\epsilon^{n-k_1}} \exp^* \eta_i = 1.$$

Então, se α_1 é primitiva de η_1 , por (5.4) temos

$$\begin{aligned} lk(S_1, S_2) &= \int_M \alpha_1 \wedge \eta_2 \\ &= \int_{x \in M} (H(\alpha_1)(x) - dh(x) + \int_{y \in M} L(x, y) \wedge \eta_1) \wedge \eta_2(x). \end{aligned}$$

As integrais

$$\int_M H(\alpha_1) \wedge \eta_2 \text{ e } \int_M dh \wedge \eta_2$$

se anulam pelo teorema de Stokes já que η_2 é exata e $dH(\alpha_1) = 0$. Como η_i tem suporte em W_i obtemos

$$lk(S_1, S_2) = \int_{x \in W_2} \left(\int_{y \in W_1} L(x, y) \wedge \eta_1 \right) \wedge \eta_2(x)$$

Como W_1 e W_2 são disjuntas, $L(x, y)$ é suave em W_2 . Para ϵ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} lk(S_1, S_2) &= \int_{(q,b) \in W_2} \left(\int_{(p,a) \in W_1} (L((p,0), (q,0)) + O(\epsilon)) \wedge \eta_1 \right) \wedge \eta_2(x) \\ &= \int_{(q,b) \in W_2} \left(\int_{p \in S_1} (L(p, (q,0)) + O(\epsilon)) \right) \wedge \eta_2(x) \\ &= \int_{q \in S_2} \int_{p \in S_1} L(p, q) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Como ϵ pode ser arbitrariamente pequeno, segue o resultado.

No caso em que o fibrado normal de S_i não é trivial, uma calculação semelhante, onde W_i é a imagem pela aplicação exponencial dos vetores normais a de norma menor ou igual a ϵ , dá o mesmo resultado. $\square$

6.3

Índice de enlaçamento para ciclos singulares em M

Podemos estender o índice de enlaçamento a cadeias e ciclos singulares em M . Lembremos que um k -simplexo singular em M é uma aplicação $\sigma : \Delta_k \rightarrow M$, a qual podemos supor suave sem perda de generalidade, onde Δ_k é o k simplexo canônico, o menor conjunto convexo que contém os pontos $e_1, e_2, \dots, e_{k+1}$ da base canônica em $\mathbb{R}^{k+1}$. Uma k -cadeia é uma combinação linear $c = \sum i = 1^l a_i \sigma_i$, de um número finito de k -simplexos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ em M com coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$. O bordo ∂c de uma k -cadeia c é uma $(k-1)$ -cadeia (vide [BT], §15, para a definição), e c é um k -ciclo se $\partial c = 0$. No caso de um k -simplexo $\sigma : \Delta_k \rightarrow M$, definimos $\frac{\partial}{\partial t_i} := \frac{\partial F}{\partial t_i}$. Seja g a métrica em M . Se $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j}\right)$ e $\bar{g} = \det[g_{ij}]$ então definimos como no caso de variedades

$$vol = \sqrt{\bar{g}} dt_1 \dots dt_k, \quad (6-10)$$

uma k -forma singular a qual chamaremos a forma de volume singular em C . Agora, se para cada $p \in C$ aplicarmos Gram-Schmidt a $\left\{ \frac{\partial}{\partial t_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial t_k}(p) \right\}$ obtemos $\{X_1(p), \dots, X_k(p)\}$ (possivelmente algum $X_i(p)$ nulo), que será chamado

de sistema ortonormal singular em C e definiremos o k -campo unitário singular por $N := X_1 \wedge \dots \wedge X_k$. Notemos como no caso de variedades que

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial t_k} = \sqrt{g} N$$

Sejam C_1 um k -ciclo e C_2 um s -ciclo em M , onde $r + s = n - 1$, e suponha que sejam disjuntas. Se C_1 e C_2 são de homologia nula então podemos definir o índice de enlaçamento de C_1 e C_2 pela integral

$$lk(C_1, C_2) = \int_{x \in C_1} \int_{y \in C_2} L_{(x,y)}.$$

Este índice de enlaçamento coincide com o usual sempre que C_1 e C_2 sejam sub-variedades orientadas em M . Agora, suponha que $M = \mathbb{R}^n$ e sejam N_1 e N_2 o k -campo unitário singular em C_1 e o s -campo unitário singular em C_2 , respectivamente. Então como no caso de sub-variedades em $\mathbb{R}^n$ podemos definir

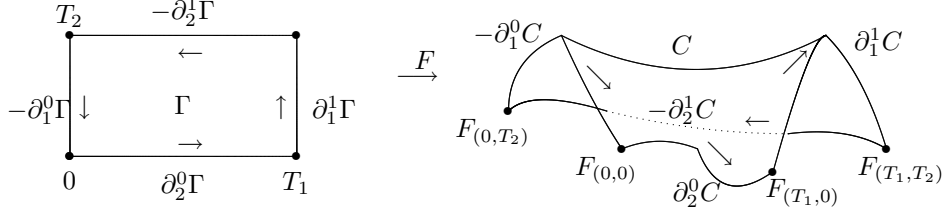
$$\begin{aligned} lk(C_1, C_2) &= \int_{p \in C_1} \int_{q \in C_2} L_{(p,q)} \\ &= \int_{p \in C_1} \int_{q \in C_2} \frac{(p - q) \times N_1(p) \cdot N_2(q)}{\|p - q\|^n} vol_p vol_q. \end{aligned} \quad (6-11)$$

A integral está bem definida porque o conjunto onde cada N_i se anula é mensurável.

Para finalizar este capítulo definiremos classes especiais de cadeias singulares e criaremos uma notação própria para estes já que serão de muita importancia no proximo capítulo para poder definir o índice de enlaçamento assintótico para ações que preservam volume numa variedade riemanniana.

Chamaremos de k -retângulo canônico a qualquer k -retângulo da forma $\Gamma = [0, T_1] \times \dots \times [0, T_k]$ que será denotada por Γ . Denotaremos por $\widehat{\Gamma}^i$ ao $(k - 1)$ - retângulo $[0, T_1] \times \dots \widehat{[0, T_i]} \dots \times [0, T_k]$. As faces de Γ serão definidas pelas aplicações $(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_k)$ e $(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, T_i, t_{i+1}, \dots, t_k)$ de $\widehat{\Gamma}^i$ em Γ e serão denotadas por $\partial_{i_0}\Gamma$ e $\partial_{i_1}\Gamma$, respectivamente. Uma aplicação suave $F : \Gamma \rightarrow M$ será chamada de k -retângulo singular em M e as restrições de F a $\partial_{i_0}\Gamma$ e a $\partial_{i_1}\Gamma$ serão chamadas de i_0 -bordo de C e de i_1 -bordo de C e denotadas por $\partial_{i_0}C$ e $\partial_{i_1}C$, respectivamente. Uma k -cadeia singular da forma $\sum_{i=1}^m a_i C_i$, onde C_i é um k retângulo singular em M , será chamada de k -cadeia retângulo singular em M . Se C é um k -retângulo singular em M o bordo de C será a $(k - 1)$ -cadeia retângulo $\partial C = \sum_{i=1}^k (-1)^i (\partial_{i_0}C - \partial_{i_1}C)$. Duas aplicações suaves do tipo $F : \Gamma_1 \rightarrow M$ e $G : \Gamma_2 \rightarrow M$, onde Γ_i é k -retângulo canônico, representam o

mesmo k -retângulo singular em M si existe difeomorfismo $\theta : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ que preserva orientação tal que $G \circ \theta = F$.



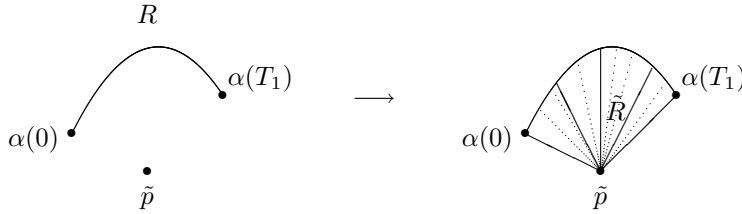
$k=2$, Γ um retângulo e C um 2-retângulo singular.

Seja R um k -retângulo singular definida por $F : \Gamma \rightarrow \Omega^n$, onde Ω é uma região compacta e convexa em $\mathbb{R}^n$. O cone $\mathcal{C}(R)$ gerado por R de vértice $\tilde{p} \in \Omega^n$ é o $(k+1)$ -retângulo singular em M definida pela aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{F} : [0, T_1] \times \dots \times [0, T_s] \times [0, 1] &\rightarrow \Omega^n \\ (t_1, \dots, t_k, t) &\mapsto (1-t)F(t_1, \dots, t_k) + t\tilde{p} \end{aligned}$$

Como Ω^n é convexa, segue-se que $\tilde{F}$ está bem definida. Agora, se $C = \sum_{i=1}^m a_i C_i$ é uma s -cadeia tal que cada C_i é um k -retângulo singular então a pirâmide gerado por C de vértice $\tilde{p}$ é a $(k+1)$ -cadeia retângulo $\mathcal{C}(C) = \sum_{i=1}^m a_i \mathcal{C}(C_i)$.

Exemplo 6.7



Naturalmente, $\mathcal{C}(0) = 0$. Em particular, se R é um k -retângulo então não é difícil mostrar que

$$\partial \mathcal{C}(R) = (-1)^{k+1}(R - \tilde{p}) + \mathcal{C}(\partial R), \quad (6-12)$$

onde $\tilde{p}$ é o k -retângulo constante e $\mathcal{C}(R)$ é a pirâmide gerada por ∂R . Em particular, se ∂R é o bordo do k -retângulo R então $\partial(\mathcal{C}(\partial R)) = (-1)^k \partial R$, como veremos a seguir. De fato, sendo $\partial R = \sum_{i=1}^k (-1)^i [\partial_i^0 R - \partial_i^1 R]$ temos que

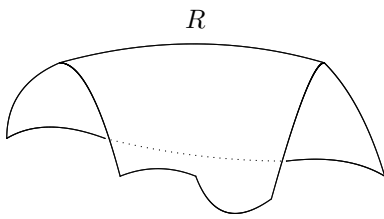
$$\mathcal{C}(\partial R) = \sum_{i=1}^k (-1)^i [\mathcal{C}(\partial_i^0 R) - \mathcal{C}(\partial_i^1 R)].$$

Logo, pela linearidade de ∂ temos

$$\partial(\mathcal{C}(\partial R)) = \sum_{i=1}^k (-1)^i [\partial \mathcal{C}(\partial_i^0 R) - \partial \mathcal{C}(\partial_i^1 R)].$$

Agora, sabendo que $\partial_i^j R$ é um $(k-1)$ -retângulo temos pela fórmula (6-12)

$$\begin{aligned} \partial(\mathcal{C}(\partial R)) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i [(-1)^k (\partial_i^0 R - \tilde{p}) + \mathcal{C}(\partial \partial_i^0 R) - (-1)^k (\partial_i^1 R - \tilde{p}) - \mathcal{C}(\partial \partial_i^1 R)] \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^i [(-1)^k (\partial_i^0 R - \tilde{p} - \partial_i^1 R + \tilde{p}) + \mathcal{C}(\partial \partial_i^0 R) - \mathcal{C}(\partial \partial_i^1 R)] \\ &= (-1)^k \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i [\partial_i^0 R - \partial_i^1 R] \right) + \sum_{i=1}^k (-1)^i [\mathcal{C}(\partial \partial_i^0 R) - \mathcal{C}(\partial \partial_i^1 R)] \\ &= (-1)^k \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i [\partial_i^0 R - \partial_i^1 R] \right) + \mathcal{C} \left(\partial \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i [\partial_i^0 R - \partial_i^1 R] \right) \right) \\ &= (-1)^k \partial R + \mathcal{C}(\partial^2(R)) \\ &= (-1)^k \partial R. \end{aligned}$$



$k = 2$

