

2 Modelo Log-periódico

Neste capítulo serão apresentados o desenvolvimento fenomenológico do modelo log-periódico e a dedução da equação fundamental que descreve o crescimento dos preços no tempo na fase pré-*crash*.

2.1. Introdução

A hipótese básica do modelo log-periódico é de que o *crash* financeiro pode ser causado por uma tendência crescente de imitação entre os agentes do mercado, levando ao surgimento de uma bolha financeira. Caso esta tendência evoluísse até um certo valor crítico, uma grande proporção de agentes assumiriam a mesma posição de venda, resultando no *crash*.

A equação fundamental que descreve o crescimento dos preços no tempo neste modelo, na fase pré-*crash*, é dada por uma lei de potência pura com uma correção log-periódica:

$$p(t) = A + B(t_c - t)^\beta \{1 + C \cos[w \log(t_c - t) + \phi]\} \quad (1)$$

onde $p(t)$ representa o índice de preço de um ativo no instante t ; t_c é o tempo crítico; β e w são parâmetros característicos do mercado; ϕ é a fase; A , B e C são constantes de ajuste.

O comportamento log-periódico é gerado pelo cosseno do logaritmo da distância temporal de t até t_c . A equação (1) descreve uma singularidade observável em t_c que representa o ponto crítico do sistema.

O valor de t_c é interpretado como o instante no qual o *crash* tem a maior probabilidade de ocorrer. Portanto, o *crash* financeiro não é considerado um evento certo, mas é caracterizado por uma distribuição de probabilidade de ocorrência ao longo do tempo.

Assim, segundo a teoria das expectativas racionais, é racional para o agente financeiro continuar investindo, já que o risco do *crash* ocorrer é compensado pelo retorno positivo gerado pela bolha financeira e porque existe uma probabilidade pequena da bolha se esvaecer suavemente, sem a ocorrência do *crash*.

2.2. Dinâmica do Preço

Johansen *et al.*, 2000 [2] consideram um mercado ideal em um cenário puramente especulativo, que não paga dividendos. Por simplicidade, são ignoradas as taxas de juros, a aversão ao risco e as condições de liquidez do mercado. Neste cenário, existe pelo menos um agente racional, neutro ao risco e com expectativas racionais. Dada esta hipótese, o preço $p(t)$ do ativo financeiro deve seguir um processo estocástico martingal:

$$E_t[p(t')] = p(t), \quad \forall t' > t \quad (2)$$

onde $E_t[.]$ representa o valor esperado condicional sobre toda informação disponível até o tempo t .⁴

Na condição de equilíbrio de mercado, onde os agentes se comportam de forma ótima, de acordo com suas preferências, a eq. (2) é condição necessária de não arbitragem. Se $E_t[p(t')] > p(t)$, um agente neutro ao risco considerará lucrativo manter uma infinita quantidade de ativos. Conseqüentemente, agentes racionais aumentarão o preço em t até a eq. (2) ser satisfeita. Da mesma forma, se $E_t[p(t')] < p(t)$, agentes racionais considerarão lucrativo vender uma infinita quantidade de ativos. Como a quantidade de ativos é finita, nenhuma das duas possibilidades é consistente com o equilíbrio de mercado.

Em um mercado onde os preços não flutuam devido ao impacto de ruído, para $t' = t + 1$, a eq.(2) se traduzirá na seguinte equação de diferenças:

$$p_{t+1} = p_t \quad (3)$$

cuja solução é uma constante: $p(t) = p(t_0)$, onde t_0 representa um valor inicial qualquer.

Considerando que existe uma probabilidade não nula do *crash* ocorrer, formalmente, podemos definir um contador para a ocorrência do *crash*, dado por uma função degrau $j(t) = \Theta(t - t_c)$ cujo valor é zero antes do *crash* e um após a ocorrência do *crash* em um tempo t_c . Como t_c é desconhecido, ele é descrito por uma variável estocástica sujeita a uma função densidade de probabilidade $q(t)$ e

a uma função de distribuição cumulativa $Q(t) = \int_{-\infty}^t q(t') dt'$.

⁴ Em [3], mostra-se que esta modelagem é robusta em relação à introdução de uma formulação geral de aversão ao risco.

Define-se a *hazard rate* (taxa de perigo) $h(t)$ como sendo a probabilidade por unidade de tempo do *crash* ocorrer no próximo instante, dado que ele ainda não ocorreu. Logo, pode-se escrever (ver apêndice A):

$$h(t) = \frac{q(t)}{1 - Q(t)} \quad (4)$$

Assumindo por simplicidade que, na ocorrência do *crash*, o preço cai com um percentual fixo $k \in (0,1)$, a dinâmica do preço do ativo é dada por (desprezando-se flutuações estocásticas):

$$dp = \mu(t)p(t)dt - k p(t)dj \quad (5)$$

onde $dj = 1$ ou 0 segundo a ocorrência ou não do *crash* no intervalo dt e $E_t[dj] = h(t)dt$.⁵

O fator de tendência $\mu(t)$ é obtido a fim de que o processo do preço satisfaça a condição martingal (2).

A condição de não-arbitragem juntamente com a expectativa racional implica que o retorno esperado em qualquer instante é exatamente zero:

$$E_t[dp] = \mu(t)p(t)dt - k p(t)h(t)dt = 0 \quad (6)$$

Daí segue que:

$$\mu(t) = k h(t) \quad (7)$$

Logo, $\mu(t)$ é proporcional à probabilidade do *crash* ocorrer, dado que ele ainda não ocorreu, ou seja, se o *crash hazard rate* aumentar, $\mu(t)$ também cresce. O fator $\mu(t)$ representa assim o retorno percentual por unidade de tempo, condicionado à não-ocorrência anterior do *crash*.

Substituindo a eq.(7) na eq.(5), obtém-se a equação diferencial antes da ocorrência do *crash* dada por (sendo $dj = 0$):

$$d(\log p(t)) = kh(t) \quad (8)$$

cuja solução para a evolução temporal dos preços é dada por:

$$p(t) = p(t_0) \exp\left(k \int_{t_0}^t h(t') dt'\right) \quad (9)$$

Como conseqüência da eq.(7) e da eq.(9), tem-se um importante resultado: quanto maior a probabilidade de ocorrência do *crash* (condicional ao fato de que a quebra ainda não ocorreu), mais rápido deve ser o crescimento do preço. Intuitivamente, os investidores devem ser compensados com

⁵ $E[dj] = P(dj = 0) \times (dj = 0) + P(dj = 1) \times (dj = 1) = 0 + h(t)dt \times 1 = h(t)dt$

oportunidade de altas taxas de retorno pelo aumento do risco de quebra de seus ativos. O desvio significativo dos preços em relação ao seu valor fundamental ao longo de grandes períodos de tempo é uma questão ainda em debate na literatura financeira e em particular foi analisada por Blanchard, 1979, com a introdução de um modelo de bolhas de expectativa racional.

Este efeito não é particular da dinâmica descrita pela eq.(5). Se assumirmos alternativamente que durante o *crash* o preço cai um percentual fixo $k \in (0,1)$ do aumento (especulativo) do preço em relação à um valor de referência p^* , então a dinâmica do preço antes da ocorrência do *crash* é dada por:

$$dp = \mu(t)p(t)dt - k[p(t) - p^*]dj \quad (10)$$

A condição martingal agora implica que:

$$\mu(t)p(t) = k[p(t) - p^*]h(t) \quad (11)$$

Da mesma forma que em (7), se a *hazard rate* $h(t)$ aumenta, o retorno $\mu(t)$ aumenta para compensar os agentes do risco crescente.

Substituindo (11) em (10), considerando-se $p(t) - p(t_0) < p(t_0) - p^*$, obtém-se a equação diferencial antes da ocorrência do *crash* dada por (sendo $dj = 0$):

$$dp = k[p(t_0) - p^*]h(t)dt \quad (12)$$

cuja solução para evolução temporal dos preços é dada por:

$$p(t) \approx p(t_0) + k[p(t_0) - p^*] \int_{t_0}^t h(t')dt' \quad (13)$$

O modelo portanto não impõe qualquer vínculo quanto à amplitude do *crash*. Se assumirmos que ele é proporcional ao valor do preço corrente, então a variável natural é, segundo a eq.(8), o logaritmo natural dos preços. Se assumirmos que a amplitude do *crash* é uma fração do ganho observado ao longo da bolha de preços, então a variável natural é, segundo a eq.(12), o próprio preço.

Em ambos os casos, condicionalmente a permanecer na bolha (nenhum *crash* ainda ocorreu), o preço do ativo, anterior ao *crash*, deve crescer racionalmente para compensar os compradores por terem assumido o risco de que o mercado tem de quebrar.

Nesta dissertação será adotada a dinâmica de preços descrita pelas equações (10) – (13).

O modelo distingue ainda entre o fim da bolha e a data de ocorrência do *crash*. A condição de expectativa racional implica que a data do *crash* tem um grau de incerteza.

O tempo crítico t_c sinaliza o esvanecimento teórico da bolha especulativa. Deve-se estar claro que t_c não representa a previsão do momento exato do *crash*, porque o *crash* pode ocorrer em qualquer instante anterior a t_c , embora isto não seja muito provável. Na verdade, t_c representa o instante de maior probabilidade de ocorrência do *crash*.

Por outro lado, a partir do instante presente t existe uma probabilidade pequena

$$1 - \int_t^{t_c} h(t) dt > 0 \quad (14)$$

do sistema chegar ao final da bolha especulativa sem a ocorrência do *crash*. Esta probabilidade residual é crucial para coerência deste modelo, porque, caso contrário, os agentes antecipariam o *crash* e não se manteriam no mercado.

Em resumo, o modelo apresentado considera que o *crash* é um evento estocástico cuja probabilidade de ocorrência é racionalmente refletida no preço do ativo.

Segundo (9) ou (13), a evolução temporal dos preços na fase da bolha especulativa depende da probabilidade $h(t)$. A determinação de $h(t)$, que será apresentada na próxima seção, será obtida a partir da descrição do mercado financeiro através de modelos provenientes da Física Estatística.

2.3. O Modelo de Imitação Racional

Vimos na seção anterior que a grandeza relevante para obtenção do comportamento dos preços, na fase pré-*crash*, é a *hazard rate* $h(t)$, isto é, a probabilidade por unidade de tempo de o *crash* ocorrer, dado que ele ainda não ocorreu.

Nesta seção, será apresentada uma modelagem para $h(t)$ em dois níveis: macroscópico e microscópico.

Os elementos principais desta modelagem, também chamada de modelo da imitação racional, são:

- 1) Um sistema de agentes que são influenciados por seus “vizinhos” em uma rede de informação;
- 2) Imitações locais, que se propagam espontaneamente até atingir o efeito de cooperação global;
- 3) Cooperação global entre os agentes gerando comportamento coletivo, podendo levar ao *crash*;

4) Comportamento temporal dos preços relacionados às propriedades e aos parâmetros deste sistema.

A *crash hazard rate* $h(t)$ quantifica a probabilidade de um grande número de agentes assumir simultaneamente a mesma posição de venda à qual o mercado não consegue atender sem reduzir os preços substancialmente. Deve-se ressaltar que os agentes financeiros neste sistema normalmente discordam entre si e emitem tantas ordens de venda quantas ordens de compra (isto corresponde aos períodos normais nos quais não ocorre o *crash*). O modelo da imitação racional busca descrever quais são os mecanismos que levam os agentes financeiros a se organizarem de forma coordenada, assumindo de repente a mesma posição: a de venda.

Os agentes financeiros estão constantemente trocando informações a fim de medir o posicionamento do mercado. Este modelo considera que todos os agentes financeiros no mundo estão organizados em uma rede de informações (de amigos, familiares, colegas de trabalho, etc.) e que são influenciados entre si, localmente, através desta rede. Por exemplo, um agente está constantemente ao telefone trocando informações e opiniões com um grupo seletivo de colegas. Além disso, existem interações indiretas através de, por exemplo, a mídia. Especificamente, se o agente A está diretamente conectado com k outros agentes (seus “vizinhos mais próximos” na rede), então existem dois tipos de “forças” que podem influenciar a opinião de A (ver figura 5):

- a opinião dos k agentes vizinhos, que representam uma amostra do posicionamento do mercado;
- um sinal idiossincrático representando outras influências recebidas por A, independentemente das decisões de seus vizinhos.

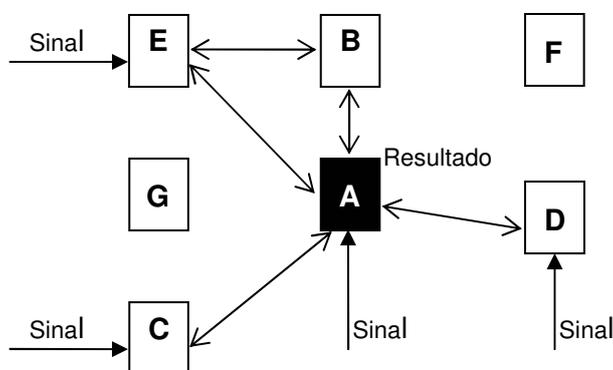


Figura 5 – Conexões entre um bloco de agentes. Os sinais são os ruídos idiossincráticos recebidos independentemente por cada agente. Cada agente envia também um sinal ao seu vizinho. Um dado agente (por exemplo, A) toma sua decisão baseada nos sinais recebidos dos seus vizinhos e em sua própria informação local.

De acordo com este modelo, na ausência de informação do tipo (b) – sinal idiossincrático, a melhor estratégia é imitar o comportamento de seus vizinhos.

A hipótese de que os agentes financeiros tendem a imitar as opiniões de seus vizinhos na rede está baseada em um modelo realista de como os agentes formam suas opiniões através de um processo de constante interação.⁶

A força do tipo (a) corresponde a um mecanismo que tende a criar ordem de posicionamento em grupos de agentes, enquanto a força do tipo (b) representa o efeito de desordem devido à heterogeneidade dos agentes e de informações locais. Um *crash* ocorre quando predomina a ordem (todos assumem a mesma posição de venda) enquanto que durante a situação normal do mercado predomina a desordem (compradores e vendedores discordam entre si, mantendo um posicionamento aproximadamente equilibrado). Deve-se notar que esta caracterização é exatamente o oposto do senso comum, no qual o *crash* é entendido como um momento de caos. Na verdade, desordem, ou um balanceado e variado espectro de opiniões, é o que mantém a liquidez do mercado durante os períodos de normalidade.

Deve-se ressaltar que nesta modelagem, uma resposta coletiva forte, como é o caso do *crash*, não é necessariamente consequência de um mecanismo interno de coordenação global elaborado, podendo surgir a partir das micro-interações locais imitativas que se transmitem pelo sistema resultando em um efeito macroscópico.

2.3.1. Modelagem Macroscópica

Baseando-se na teoria de campo médio da Mecânica Estatística [4], a maneira mais simples de se descrever um processo imitativo é assumindo que a *hazard rate* $h(t)$ evolui segundo a equação:

$$\frac{dh}{dt} \propto h^\delta, \quad \delta > 1 \quad (15)$$

A teoria do campo médio descreve as diversas ações dos agentes de forma agregada, representando-as por um comportamento médio, único, de

⁶ Aqui não está sendo questionado o porquê dos agentes serem influenciados por seus vizinhos dentro da rede. Este é um fato amplamente documentado (ver Boissevain & Mitchell, 1973, *Network Analysis: Studies in Human Interaction*) e está sendo tomado como premissa básica. Justificativas para a tendência de imitação podem ser encontradas na teoria de psicologia evolucionária.

efetiva representatividade do todo. $h(t)$ representa assim o resultado coletivo das ações coordenadas entre os agentes do mercado, como consequência da interação efetiva entre eles. Este consenso geral do mercado, gerado endogenamente, reforça esta interação efetiva. O termo h^δ da eq.(15) modela a forma pela qual a *hazard rate* crescerá, caracterizando este processo de retro-alimentação. O expoente $\delta > 1$ quantifica o número efetivo de agentes conectados informacionalmente na rede que contribuem para a amplificação do comportamento imitativo.

Integrando a eq. (15), obtém-se:

$$h(t) = \left(\frac{h_0}{t_c - t}\right)^\alpha \quad (16)$$

onde $\alpha = \frac{1}{\delta - 1}$.

A partir da eq.(16), verifica-se que a condição $\delta > 1$, conseqüentemente $\alpha > 0$, é crucial para se obter um crescimento de $h(t)$ à medida que $t \rightarrow t_c$.

A aplicação da eq.(16) na eq.(13), resulta na seguinte lei para o preço do ativo:

$$p(t) \approx p_c - \frac{kB}{\beta}(t_c - t)^\beta \quad (\text{antes do } crash) \quad (17)$$

onde B é uma constante, $\beta = 1 - \alpha$ e p_c é o preço do ativo no tempo crítico t_c . Para o preço não divergir em t_c , é necessário que $\beta > 0$, logo $\alpha < 1$. Com a condição anterior $\alpha > 0$, obtém-se que $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in (0,1)$. Usando eq.(16), esta condição se traduz em $2 < \delta < +\infty$, isto é, um agente típico deve estar conectado a pelo menos dois agentes, como era de se esperar para a transmissão em uma rede de informação.

De acordo com eq.(17), o preço anterior ao evento do *crash* se comporta segundo uma lei de potência, com um limite superior finito p_c . No entanto, o retorno esperado do preço do ativo por unidade de tempo, dado por:

$$\frac{dp(t)}{dt} \approx kB(t_c - t)^{\beta-1} \quad (18)$$

com $\beta - 1 \in (-1,0)$, se torna ilimitado ao se aproximar do tempo crítico t_c . Consistentemente com a eq.(13), isto ocorre para compensar a *hazard rate* dada pela eq.(9) que, para $\alpha > 0$, é ilimitada próximo a t_c .

2.3.2. Modelagem Microscópica

Sornette, 2002 [1] propõe uma modelagem, baseada em conceitos da Física Estatística, a fim de justificar a estratégia de imitação utilizada no modelo da imitação racional apresentado na seção 2.3.

Considere I agentes em uma rede, cujas conexões representam os canais de comunicação através dos quais os agentes trocam informações. Cada agente é indexado por um inteiro $i = 1, \dots, I$ e $N(i)$ representa o número de agentes que estão conectados diretamente ao agente i na rede (ver fig.(5), como exemplo de uma estrutura de informação). Por simplicidade, define-se que cada agente i pode assumir somente um de dois possíveis estados: $s_i \in \{-1; +1\}$. Estes estados podem ser interpretados como “comprar”, $s_i = +1$, e “vender”, $s_i = -1$. O estado do agente i é determinado por:

$$s_i = \text{sign}(J \sum_{j \in N(i)} s_j + \sigma \varepsilon_i) \quad (19)$$

onde a função $\text{sign}(x)$ é definida como: $\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. K é uma constante

positiva e ε_i é um ruído i.i.d., normal padrão.

Neste modelo, a tendência para imitação é governada pelo parâmetro J , que representa a “força” de imitação, isto é, o nível de influência entre os agentes. Cada agente i sofre influência significativa de um número $N(i)$ de vizinhos. A tendência a um comportamento idiossincrático (ou ruidoso) é governada pela amplitude σ do ruído. A eq.(19) estabelece que a melhor decisão de investimento de um agente i é seguir a decisão da maioria dos seus vizinhos, até um certo grau de incerteza, que captura a possibilidade de que a maioria pode estar gerando previsões incorretas para o comportamento global do mercado.

Será demonstrado, mais detalhadamente nas seções seguintes que, segundo esta modelagem, $h(t)$ é uma função de J , da distribuição de ε_i e da estrutura da rede.

Define-se o estado médio do sistema como $M = (1/I) \sum_{i=1}^I s_i$. Nos sistemas físicos magnéticos, o estado $s_i = \pm 1$ corresponde às duas orientações possíveis do momento magnético de uma partícula e M corresponde à magnetização total média por partícula. No contexto de alinhamento de

momentos magnéticos localizados, gerando uma magnetização resultante, o modelo, eq.(19), é idêntico ao modelo de Ising.⁷

A eq.(19) somente descreve o estado de um agente em um dado instante t no tempo. No instante seguinte, $t+1$, novos ε_i 's são gerados, novas influências se propagam entre os vizinhos e os agentes podem mudar seus estados (ações, respostas).

Consideraremos para ilustração a rede bidimensional quadrada, onde cada agente possui quatro vizinhos mais próximos: um ao Norte, um ao Sul, um a Oeste e outro a Leste.

Considerando que J é o valor de J , relativo ao de σ , que determina a competição entre ordem e desordem, levando eventualmente à ocorrência do *crash*, o parâmetro relevante a ser avaliado é $K = \frac{J}{\sigma}$, que mede a tendência à imitação relativa à tendência ao comportamento idiossincrático.

Em analogia com o modelo de Ising, existe um ponto crítico K_c , que determina a separação entre fases ou regimes do sistema. Quando $K < K_c$ (ver fig. (6)), a desordem reina: a sensibilidade a uma pequena influência global é baixa, o tamanho dos grupos de agentes, com o mesmo posicionamento, é pequeno e a tendência de imitação se propaga somente entre os agentes mais próximos. Existem diversos grupos, com opiniões diferentes, reagindo às informações externas de forma incoerente e desta forma mantendo um equilíbrio entre o número de agentes distribuídos entre os estados do sistema (entre as posições de compra ou de venda).

⁷ O modelo de Ising bi-dimensional foi desenvolvido explicitamente por Onsager (1944), onde o parâmetro de desordem é representado pela temperatura do sistema.

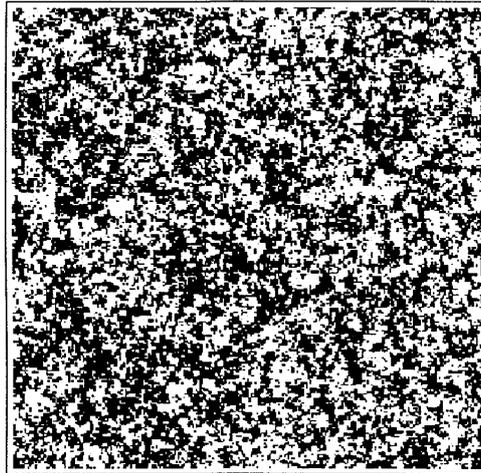


Figura 6 – $K < K_c$: configuração das ordens de compra (células brancas) e das ordens de venda (células pretas) em uma rede planar bi-dimensional de 256 X 256 agentes interagindo com seus quatro vizinhos mais próximos. Existe aproximadamente o mesmo número de células brancas e pretas, isto é, não existe um consenso no mercado. (Fonte: Sornette, 2002, *Why Stock Markets Crash?*).

Por outro lado, quando a força de imitação K cresce, se aproximando de K_c (ver fig. (7)), chega-se ao limiar do aparecimento da ordem. Obtém-se uma hierarquia de grupos de agentes, formados espontaneamente, atuando coletivamente, e em particular formam-se alguns grupos grandes de agentes com o mesmo posicionamento. O sistema torna-se assim extremamente sensível a pequenas perturbações globais devido à tendência de imitação poder se propagar por caminhos longos na rede. Nas Ciências Naturais, estas são as características do chamado fenômeno crítico.

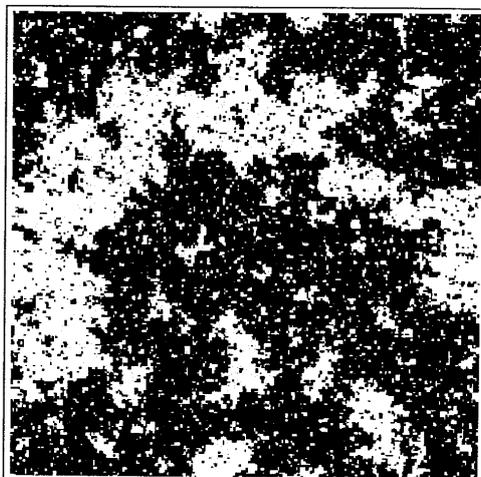


Figura 7 – A mesma descrição da fig.6, porém para K próximo a K_c . Ainda existe aproximadamente o mesmo número de células brancas e pretas. No entanto, o tamanho

do maior grupo de agentes interconectados cresceu a ponto de se tornar comparável com tamanho total do sistema, Além disso, agrupamentos de todos os tamanhos podem ser observados. (Fonte: Sornette, 2002, *Why Stock Markets Crash?*).

Finalmente, para uma força de imitação ainda maior, $K > K_c$, a tendência de imitação é tão intensa que existe um forte predomínio de um tipo de posicionamento dos agentes (ver fig. (8)).

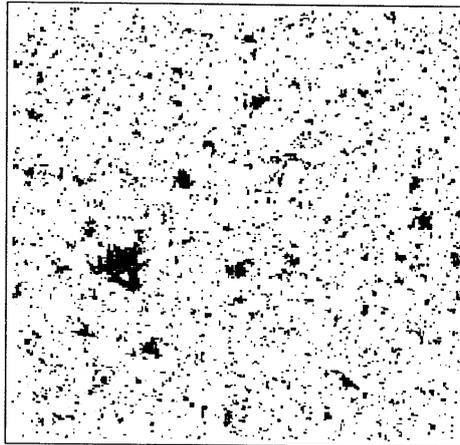


Figura 8 – A mesma descrição da fig.6, porém para $K > K_c$. O comportamento de imitação é tão forte que a rede de agentes espontaneamente interrompe a simetria entre as duas decisões (compra e venda) e uma delas predomina. Aqui, como exemplo, demonstra-se o caso onde o estado de compra foi selecionado. (Fonte: Sornette, 2002, *Why Stock Markets Crash?*).

As grandezas físicas que representam o grau de sensibilidade de um sistema a uma perturbação externa são chamadas de funções-respostas, sendo uma delas a susceptibilidade do sistema. Esta grandeza descreve a possibilidade de um grande grupo de agentes assumir o mesmo estado, ou seja, fornecer as mesmas respostas, considerando as influências externas existentes na rede.

Para definir formalmente a susceptibilidade, assume-se a existência de um termo G , de influência global, adicionado a eq. (19):

$$s_i = \text{sign}\left(J \sum_{j \in N(i)} s_j + \sigma \varepsilon_i + G\right) \quad (20)$$

Este termo de influência global tenderá a favorecer o estado +1 (estado -1) se $G > 0$ (se $G < 0$). No caso dos sistemas físicos magnéticos, o campo G é representado por um campo magnético externo uniforme aplicado ao sistema. No caso do sistema financeiro, este termo corresponde a uma mesma informação compartilhada por todo o mercado.

Na ausência de influência global, a partir da eq.(19) é fácil demonstrar que, por simetria, $E[M] = 0$: os agentes estão equilibradamente distribuídos entre os dois estados. Na presença de uma influência global positiva (negativa), a partir da eq.(20), agentes no estado positivo (negativo) sobressairão aos demais, ou seja, $E[M] \times G \geq 0$.

Segundo esta notação, a susceptibilidade do sistema é definida como:

$$\chi = \left. \frac{d(E[M])}{dG} \right|_{G=0} \quad (21)$$

A susceptibilidade mede a variação, ou a sensibilidade, do estado médio do sistema para a uma pequena mudança de informação ou influência global. Outra interpretação relacionada a esta grandeza é a medida do grau de correlação do sistema, isto é, o grau de interinfluência dos agentes. Por exemplo, considerando dois agentes e forçando o primeiro a assumir um certo estado, o impacto desta intervenção no segundo será em média proporcional a χ . Assim, quanto maior for o grau de correlação das respostas dos agentes, maior será a resposta global do sistema frente a perturbações, pois a informação se propagará por fração maior do sistema. De acordo com as ilustrações nas figuras 6 e 7, a susceptibilidade cresce à medida que $K \rightarrow K_c$.

A susceptibilidade magnética nos sistemas físicos fornece a taxa de magnetização induzida no sistema devido a pequenos campos externos. No ponto crítico de transição de fase paramagnética-ferromagnética, a susceptibilidade diverge, significando que o sistema se ordena macroscopicamente ($M \neq 0$) quando sujeito a qualquer perturbação externa, ou seja, o sistema produz resposta coletiva grande devido ao alto grau de correlação entre os momentos magnéticos do sistema.

No caso do sistema financeiro, a susceptibilidade fornece uma medida da habilidade do sistema de agentes a assumir uma mesma posição devido a pequenas perturbações externas. De acordo com a eq.(21), portanto, o termo G de influência global, que representa as causas exógenas, atua somente como o gatilho para a desestabilização do sistema.

2.4. Comportamento Crítico

A principal característica das grandezas de um sistema que se encontram próximas a um estado crítico é a lei de potência que as descrevem. Quando $K \sim K_c$ (fig. (7)), a susceptibilidade χ do sistema diverge segundo a seguinte lei de potência (ver fig(9)):

$$\chi \approx A(K_c - K)^{-\gamma} \quad , \text{ com } K \rightarrow K_c \quad (22)$$

onde A é uma constante positiva e $\gamma > 0$ é o expoente crítico da susceptibilidade (igual a $7/4$ para o modelo de Ising 2-d). O parâmetro crítico K_c depende das propriedades do sistema, em particular do grau de conectividade da rede.

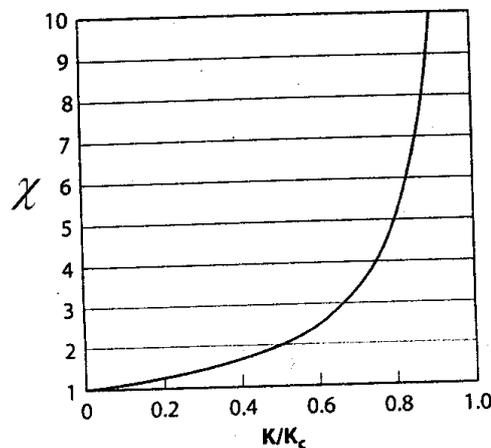


Figura 9 - Comportamento em lei de potência da susceptibilidade χ em função da força de imitação relativa K . Com K tendendo a K_c , χ diverge.

Uma susceptibilidade grande indica um sistema instável, isto é, uma pequena perturbação externa pode desencadear uma reação coletiva entre os agentes, os quais podem drasticamente revisar sua decisão, podendo desequilibrar abruptamente a relação de oferta/demanda ($s_i = -1/s_i = +1$), e levando eventualmente ao *crash*.

A *hazard rate*, conforme introduzido no modelo (ver eq.(9) ou eq.(13)), governa a taxa de crescimento dos preços com o tempo, que se torna arbitrariamente alta no tempo crítico, analogamente à susceptibilidade magnética. Além disso, é exatamente a ascensão de uma sincronização global, a partir de imitações locais, que pode culminar no evento do *crash*. Desta forma, propõe-se que a *hazard rate* deve seguir um comportamento similar ao da susceptibilidade dos sistemas físicos.

O sistema financeiro está constantemente se modificando e se reestruturando. A fim de traduzir os resultados obtidos até aqui para uma função real no tempo assume-se que o parâmetro K de imitação relativa do mercado financeiro evolui lentamente no tempo. Assim, tomando $K(t)$ como uma função no tempo, obtém-se a expansão de Taylor de 1ª ordem em torno do ponto crítico (ver fig.(10) como exemplo).⁸ O tempo crítico t_c é definido como o primeiro ponto no qual $K(t_c) = K_c$. Em um instante imediatamente anterior a t_c , aplica-se a aproximação linear:

$$K(t) \approx K(t_c) + A(t - t_c), \quad (23)$$

Daí se obtém,

$$K_c - K(t) \approx A(t_c - t) \quad (24)$$

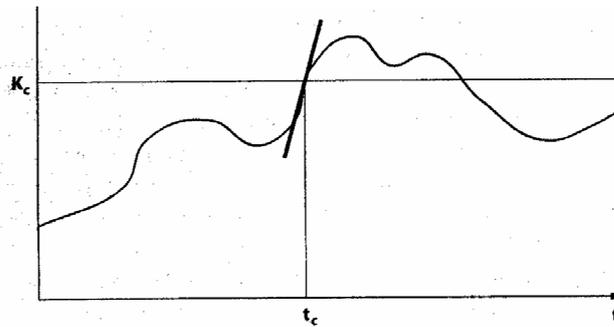


Figura 10 – Uma típica evolução da força de imitação relativa $K(t)$ como função do tempo t : lenta e suave. Ao redor de t_c , $K(t)$ é aproximadamente linear.

Em analogia com os fenômenos críticos, neste modelo assume-se que o sistema de agentes está submetido a uma transição de estado coletivo quando a força de imitação relativa K atinge um valor crítico, ou seja, a sensibilidade da reação do mercado em resposta às informações e influências externas cresce de forma acelerada ao se aproximar desta transição.

Considerando este mecanismo, propõe-se que a *crash hazard rate* se comporte de forma similar à susceptibilidade na vizinhança do ponto crítico (ver

⁸ Não é necessário que a evolução temporal de K seja determinística, podendo ser estocástica, contanto que evolua de forma suficientemente lenta no tempo, de tal maneira que seja possível aplicar em $K(t)$ a aproximação linear de 1ª ordem em torno de t_c .

fig. (11)). Utilizando a eq.(22) e a eq.(24), obtém-se a seguinte expressão para $h(t)$:

$$h(t) \approx D(t_c - t)^{-\alpha} \quad (25)$$

onde D é uma constante positiva e o expoente $\alpha \in (0,1)$, como modelado na seção 2.3.1.

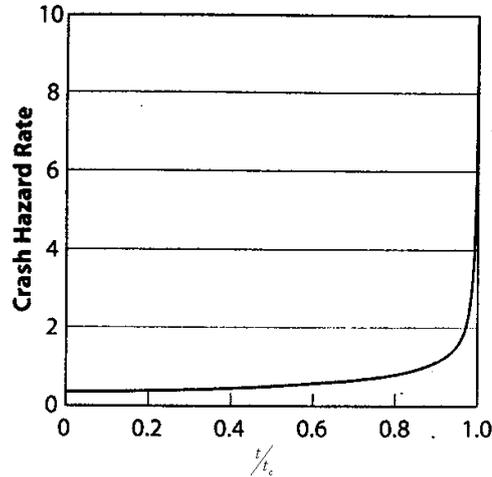


Figura 11 – *Crash hazard rate* : lei de potência no tempo, divergente quando $t \rightarrow t_c$.

Aplicando a eq.(25) na eq.(13), resulta na seguinte lei para o preço do ativo:

$$p(t) \approx p_c - \frac{kD}{\beta} (t_c - t)^\beta \quad \text{antes do crash} \quad (26)$$

onde $\beta = 1 - \alpha \in (0,1)$ e p_c é o preço em t_c .

Este resultado também foi obtido anteriormente na seção 2.3.1 e mostra que a modelagem macroscópica pode ser construída a partir das justificativas que compõem o modelo microscópico, ou seja, a coordenação em um nível global pode surgir a partir das micro-interações imitativas entre os agentes do mercado.

2.5. Resumo das Modelagens

Em resumo, na modelagem do sistema financeiro, através da teoria de Sornette, assume-se que (ver seções 2.2 e 2.3.2):

- Um *crash* pode ser causado pela imitação local retro-alimentada entre os agentes. Este processo de retro-alimentação imitativa é responsável por provocar o surgimento da bolha especulativa.

- Se a tendência de imitação entre os agentes aumentar até um determinado valor, chamado de valor crítico, muitos agentes podem assumir, ao mesmo tempo, a mesma posição (de venda), culminando no *crash*.
- A competição entre a progressiva força de imitação e o ruído onipresente requer uma descrição estocástica: um *crash* não é um evento certo, mas é caracterizado pela sua *hazard rate* $h(t)$.
- Como o fim da bolha especulativa não é um evento determinístico, os agentes financeiros consideram que é racional continuar investindo no mercado, já que existe uma probabilidade pequena da bolha se esvaecer suavemente, sem a ocorrência do *crash*.
- A taxa de retorno do mercado é proporcional a *crash hazard rate* $h(t)$. Quanto maior o risco de ocorrência de um *crash*, maior o retorno sobre o preço do ativo, ou seja, os investidores devem ser recompensados com uma taxa de retorno (ou taxa de crescimento da bolha) maior por assumirem o risco de manter um ativo que pode quebrar.

Na modelagem macroscópica do sistema financeiro (ver seção 2.3.1):

- $h(t)$ representa o resultado coletivo da troca de informações entre os agentes.
- O efeito de retro-alimentação do sistema, que implica no crescimento de $h(t)$ com o tempo, depende do número efetivo de agentes conectados informacionalmente na rede.

Por outro lado, na modelagem microscópica do sistema financeiro, assume-se que (ver seções 2.3.2 e 2.4):

- A tendência de imitação entre os agentes é parametrizada por uma força de imitação relativa K .
- Existe um valor crítico K_c no qual o sistema pode exibir um comportamento cooperativo.
- K_c depende das propriedades do sistema, em particular do grau de conectividade da rede.
- Quando $K \sim K_c$: grupos de investidores de diversos tamanhos compartilham a mesma opinião e podem agir de maneira coordenada. A estrutura dos tamanhos dos grupos torna-se auto-similar, com uma hierarquia contínua representada pelo menor grupo (um investidor individualmente) até o maior (da ordem do tamanho do sistema).

- Quando $K \sim K_c$: Existe um grupo, cujo número de investidores conectados é grande o suficiente para desestabilizar o mercado. Quando assumem coletivamente a posição de venda o resultado é o *crash*.
- No sistema financeiro, o valor característico K evolui suavemente no tempo: $K_c - K(t) \approx A(t_c - t)$.
- A susceptibilidade χ é a grandeza que mede o grau de correlação do sistema ou o quanto o sistema está interconectado informacionalmente.
- A susceptibilidade é utilizada como uma medida da habilidade do grupo de investidores assumir uma mesma posição, dada uma informação perturbativa (eq.(21)).
- Em analogia com a susceptibilidade dos sistemas magnéticos, a *crash hazard rate* quantifica a probabilidade de um grande grupo de investidores assumir simultaneamente a mesma posição de venda, desequilibrando abruptamente a relação de ofertaXdemanda, a qual o mercado não consegue atender sem reduzir os preços substancialmente. (ver seção 2.3)

Em resumo, as modelagens macroscópica e microscópica do sistema financeiro, o risco, por unidade de tempo, de ocorrer um *crash*, dado que o mesmo ainda não ocorreu, cresce abruptamente para $t \sim t_c$ em forma de lei de potência. Neste regime, as interações entre os investidores tornam-se suficientemente fortes de forma a gerar grupos de agentes de todos os tamanhos, atuando coletivamente, em uma rede conectada e organizada.

2.6. Estrutura Hierárquica

Uma característica importante do modelo descrito pela eq.(19) é a conectividade da rede de agentes devido ao termo contendo o somatório pelos $N(i)$ vizinhos de cada agente. Esta estrutura subjacente determina os caminhos possíveis de transmissão de informação através do sistema e conseqüentemente, a resposta global do sistema, medida através da susceptibilidade.

O mercado financeiro é constituído por um conjunto de investidores interagentes, que diferem substancialmente em tamanho, indo desde os investidores individuais até os grandes fundos de pensão. Além disso, existem estruturas em níveis superiores, como exemplo a esfera de influência das

moedas (US\$, EURO, YEN, etc...), que com a globalização e a desregulamentação do mercado, atingem uma escala de influência a nível mundial.

Além disso, todos os investidores no mundo estão organizados dentro de uma rede (de família, amigos, trabalho...), influenciando uns aos outros localmente dentro desta rede.

O modelo de Ising bi-dimensional considera que os investidores estão interconectados de maneira uniforme. No entanto, no mercado real, alguns agentes podem estar mais conectados do que outros.

Todas estas observações acima indicam que a representação do mercado financeiro através da rede bi-dimensional é excessivamente simplificada. Uma representação mais adequada para a estrutura do mercado financeiro é aquela dos sistemas hierárquicos, com agentes em todos os níveis do mercado, com grupos de investidores mais conectados do que outros.

Apesar da grande variedade de estruturas topológicas hierárquicas, a análise qualitativa da existência de um ponto de transição entre a fase ordenada e desordenada, conforme apresentada na subsecção 2.3.2, é a mesma.

2.6.1. Modelo de Estrutura Hierárquica do Diamante

Johansen et al. [2] consideram uma estrutura de rede, denominada estrutura hierárquica do diamante, e em seguida, desenvolvem o modelo da imitação racional segundo esta estrutura.

Esta rede hierárquica pode ser um modelo mais realista, para a complicada rede de comunicação entre os agentes financeiros, do que a rede bi-dimensional de Ising.

A construção desta rede está representada na fig. (12) - neste modelo os nós representam os agentes e as arestas as conexões entre eles:

Passo 0: Inicia com uma aresta e 2 agentes, um em cada extremo.

Passo 1: Substitui esta aresta por 4 novas, formando um diamante, onde os 2 agentes originais ocupam os vértices diametralmente opostos, e onde os dois outros vértices são ocupados por 2 novos agentes.

Passo 2: Para cada uma destas 4 arestas, substitua-as por 4 novas, formando um diamante da mesma forma como no passo 1.

Repetindo esta operação um número arbitrário de vezes, obtém-se a rede hierárquica do diamante.

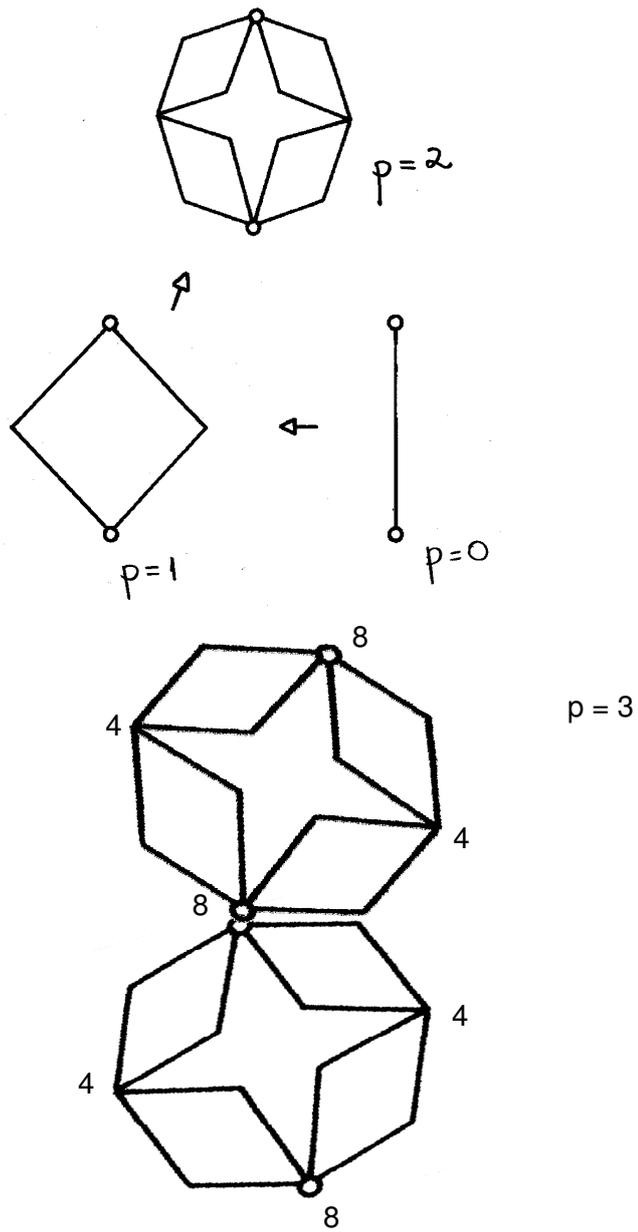


Figura 12 – Os quatro primeiros passos da construção recursiva da rede hierárquica do diamante. Observe que, para $p = 3$, somente a camada esquerda do diamante foi ilustrada. A camada da direita possui igual estrutura.

No final de 3 interações, por exemplo, torna-se evidente que os agentes no nível inicial possuem um número de conexões maior do que os agentes em níveis posteriores.

Além disso, após “ p ” interações, existem $N = \frac{2}{3}(2 + 4^p)$ agentes e $L = 4^p$ arestas entre eles. A maior parte dos agentes (agentes gerados na última interação de recorrência) terá somente dois vizinhos, alguns poucos (os agentes

iniciais) terão 2^p vizinhos, os demais terão um número de vizinhos intermediário entre estes dois extremos.

Considere, agora, que nesta rede hierárquica os agentes estão interagindo com seus vizinhos mais próximos segundo um processo imitativo de acordo com a eq. (19).

Uma versão deste modelo foi solucionada por Derrida et. al. (1983). As propriedades básicas, para esta estrutura de rede, são similares às descritas no modelo da imitação racional usando a rede bi-dimensional, no plano Euclideano. Assim, existe um ponto crítico K_c , tal que, quando $K < K_c$ a susceptibilidade é finita e quando K cresce, atingindo K_c , a susceptibilidade diverge. A única diferença, porém crucial, é que o expoente crítico γ da susceptibilidade (eq.(22)) pode ser um número complexo. Desta forma, a solução geral para a susceptibilidade é o somatório de termos similares aos da eq.(22), mas com expoentes complexos. Já antecipando o resultado que será demonstrado adiante em detalhes, a expansão de primeira ordem da solução geral é dada por:

$$\chi \approx \text{Re}[A_0(K_c - K)^{-\gamma} + A_1(K_c - K)^{-\gamma+iv} + \dots]$$

onde A_0, A_1, w são números reais e $\text{Re}[\cdot]$ representa a parte real do número complexo. χ também pode ser representada por:

$$\chi \approx A_0'(K_c - K)^{-\gamma} + A_1'(K_c - K)^{-\gamma} \cos[w \ln(K_c - K) + \Psi] + \dots \quad (27)$$

onde A_0', A_1', w e Ψ são números reais. Percebe-se que a lei de potência, agora, é corrigida por oscilações chamadas de log-periódicas, pois são periódicas no logaritmo da variável $(K_c - K)$, sendo $\frac{w}{2\pi}$ a sua log-freqüência.

Fazendo-se a mesma analogia desenvolvida na seção 2.4, conclui-se que a *hazard rate* de um *crash*, considerando um modelo de rede hierárquica para o mercado financeiro, possui o seguinte comportamento:

$$h(t) \approx B_0(t_c - t)^{-\alpha} + B_1(t_c - t)^{-\alpha} \cos[w \ln(t_c - t) + \Psi'] \quad (28)$$

Da mesma forma que em (25), $h(t)$ tem comportamento singular quando se aproxima do tempo crítico, porém, agora, apresentando oscilações log-periódicas (ver fig (13)).

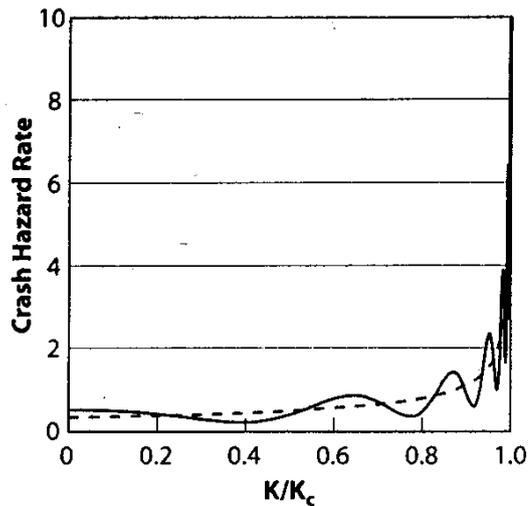


Figura 13 – *Crash hazard rate* para a rede hierárquica do diamante: lei de potência superposta por oscilações log-periódicas, divergindo quando K tende a K_c .

Este comportamento da *hazard rate* indica que o risco de um *crash*, por unidade de tempo, sabendo-se que ele ainda não ocorreu, aumenta drasticamente quando as interações entre os investidores se tornam suficientemente fortes. No entanto, esta aceleração é interrompida e superposta por uma seqüência acelerada de fases nas quais o risco decresce, representada pelos vales das oscilações log-periódicas.

2.6.2. Invariância Discreta de Escala – Origem da Log-periodicidade em Sistemas Hierárquicos

Demonstrou-se que no modelo da imitação racional a *crash hazard rate* é descrita por uma lei de potência na vizinhança de um determinado tempo crítico, com expoente crítico real (rede bi-dimensional) ou expoente crítico complexo (rede hierárquica), onde a lei de potência está superposta por um comportamento oscilatório acelerado.

O fator comum entre estes modelos é que a probabilidade de ocorrência de um *crash* é maior à medida que o sistema, em processo imitativo, tende a um ponto crítico.

Conforme ilustrado na seção 2.3.2 para o modelo de Ising, na Física, a existência de pontos críticos é considerada como uma das principais características dos sistemas macroscópicos. Um sistema tende a um ponto crítico quando influências locais se propagam através de longas distâncias e o

estado médio do sistema torna-se altamente sensível a pequenas perturbações, ou seja, partes diferentes do sistema encontram-se fortemente correlacionadas.

Uma propriedade importante dos sistemas físicos em estado crítico é a auto-similaridade por transformação de escala. A auto-similaridade se refere à propriedade de uma figura geométrica ou uma grandeza se manter invariante, ou seja, conservar suas características, após uma transformação de dilatação do sistema (ver fig. (14)).

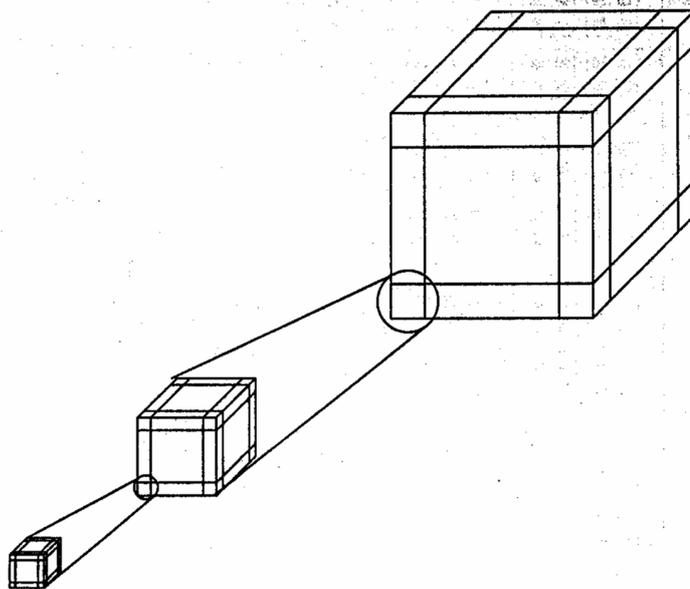


Figura 14 – Modelo de Allègre: dilatação de um cubo, inicialmente formado pela união de oito barras com parafusos em cada canto do cubo. No próximo nível, oito barras maiores formam um cubo maior e os oito cubos menores, do nível anterior, são utilizados como junção para unir as barras. Este processo é repetido recursivamente até escalas maiores.

Como visto anteriormente, na seção 2.3.2, no modelo de imitação racional, quando $K \sim K_c$, grupos de investidores de variados tamanhos compartilham a mesma opinião e podem agir de maneira coordenada. A geometria dos grupos torna-se auto-similar, com uma hierarquia representada pelo menor grupo (um investidor individualmente) até o maior (da ordem do tamanho do sistema). A auto-similaridade por escala de um sistema em estado crítico significa que as imitações locais cascadeiam através de todas as escalas do sistema até a escala global.

Devido à propriedade de invariância por escala, o comportamento de um sistema próximo ao ponto crítico deve ser representado por uma lei de potência (com expoente crítico real ou complexo), por ser esta a única família de funções

que são homogêneas, ou seja, que não se modificam após re-escalamento [5].

Considere uma função $f(x)$ e uma mudança de escala em x pelo fator λ , tal que $x \rightarrow x' = \lambda x$.

A invariância por escala e o comportamento crítico estão intimamente associados à seguinte equação:

$$f(x) = \mu f(\lambda x) \quad (29)$$

onde $f(x)$ representa a grandeza de interesse (neste caso a susceptibilidade), x é a variável ou o parâmetro do sistema e μ é uma constante positiva que descreve como esta grandeza é amplificada quando o sistema é re-escalado por um fator λ .

A solução da eq. (29) é dada por uma lei de potência:

$$f(x) = Cx^\alpha \quad (30)$$

Considere:

$$f(\lambda x) = C\lambda^\alpha x^\alpha \quad (31)$$

Obtém-se que:

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad (32)$$

Esta igualdade é válida para $\forall \lambda$, independentemente do valor de x , ou seja, a forma funcional $f(x)$ em lei de potência é invariante por mudança de escala de x , sendo apenas modificada por um fator constante. Comparando-se as eqs.(29) e (32), verifica-se que $\mu^{-1} = \lambda^\alpha$.

Pontos críticos associados à transição de fase em sistemas físicos exibem invariância de escala contínua, ou seja, $f(x)$ é invariante por mudança de escala para todo fator λ . Por outro lado, em sistemas hierárquicos, como a rede do diamante apresentada na sub-seção anterior, a invariância por escala não é obedecida para qualquer fator λ . Um sistema hierárquico é então descrito por uma invariância de escala discreta, considerando um re-escalamento em x , tal que $x \rightarrow x' = \lambda_n x$, com $\lambda_n = \lambda_0^n$, ou seja, com um fator λ_n discreto, sendo λ_0 específico de cada sistema (no caso da rede do diamante, o fator $\lambda_0 = 4$).

Uma importante consequência da invariância de escala discreta é que o expoente crítico pode ser um número complexo, como será mostrado a seguir.

Considerando como caso (1) a invariância de escala contínua e como caso (2) a invariância de escala discreta, a eq.(29) para a transformação de escala $x \rightarrow x' = \lambda x$ gera as seguintes soluções:

- Caso (1):

Considerando $f(x) = Cx^\alpha$, substituindo-se em (32), obtém-se: $Cx^\alpha = \mu C \lambda^\alpha x^\alpha$, logo $\lambda^\alpha \mu = 1$, ou seja

$$\alpha = \frac{-\ln \mu}{\ln \lambda} \tag{33}$$

onde α é o expoente crítico da grandeza representada por $f(x)$.

- Caso (2):

Considerando o expoente crítico como um número complexo e seguindo o mesmo raciocínio que o caso (1), a expressão $\lambda^\alpha \mu = 1$ pode ser reescrita como $\lambda^{\alpha_n} \mu = \exp(2\pi i n)$, ou seja

$$\alpha_n = \frac{-\ln \mu}{\ln \lambda} + \frac{2\pi n i}{\ln \lambda} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \tag{34}$$

onde α_n é o expoente crítico.

Considerando a expressão para a *crash hazard rate* como:

$h(t) \approx B(t_c - t)^{-\alpha_n}$, obtém-se para:

- Caso (1): α real, dado por $\alpha = \frac{-\ln \mu}{\ln \lambda}$, logo:

$$h(t) \approx B(t_c - t)^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} \tag{35}$$

- Caso (2): α complexo, dado por $\alpha_n = \frac{-\ln \mu}{\ln \lambda} + \frac{2\pi n i}{\ln \lambda}$, logo:

$$h(t) \approx B(t_c - t)^{-\alpha_n} = B(t_c - t)^{\frac{\ln \mu}{\ln \lambda}} (t_c - t)^{-\frac{2\pi n i}{\ln \lambda}} \tag{36}$$

Usando-se que:

$$(t_c - t)^{-\frac{2\pi n i}{\ln \lambda}} = e^{-\frac{2\pi n i}{\ln \lambda} \ln(t_c - t)} \tag{37}$$

A solução geral do caso (2) é dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (t_c - t)^{\alpha_n} = (t_c - t)^{\frac{-\ln \mu}{\ln \lambda}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-\frac{2\pi n i}{\ln \lambda} \ln(t_c - t)} \tag{38}$$

que equivale a uma expansão em série de Fourier complexa. Considerando somente as soluções reais em (38), a expressão geral para $h(t)$ é dada por:

$$h(t) \approx B(t_c - t)^{\alpha_0} [1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(w_n \ln(t_c - t) + \Psi)] \tag{39}$$

onde $w_n = \frac{2\pi n}{\ln \lambda}$ e $\alpha_0 = \frac{-\ln \mu}{\ln \lambda}$.

Comparando-se as equações (28) e (39), conclui-se que a eq.(28) proposta para $h(t)$ é, na verdade, constituída pelos termos de ordem 0 e de ordem 1 da solução mais geral dada pela eq.(39).

2.7. Propriedades do Modelo Log-periódico de Preços

O modelo para o comportamento do preço do ativo financeiro, anterior a ocorrência do *crash*, leva em consideração os seguintes pontos (os quais foram todos detalhados nas seções anteriores):

- 1- o massivo e imprevisível posicionamento de venda entre os investidores durante um *crash* financeiro é o resultado de um comportamento imitativo no nível de micro-interações locais, que se propagam através das escalas do sistema até a cooperação global, quando o sistema se aproxima do seu ponto crítico;
- 2- os *crashes* financeiros são modelados como uma transição de fase em um sistema hierárquico caracterizado por uma invariância de escala discreta;
- 3- o *crash* é um evento estocástico com *hazard rate* $h(t)$ tendo valor máximo em data t_c .

De acordo com a dinâmica de preços descrita pelas equações (10) – (13), para a *hazard rate* descrita pela eq.(28), a evolução do preço do ativo financeiro, anterior à ocorrência do *crash* é dada por:

$$p(t) = A + B(t_c - t)^\beta \{1 + C \cos[w \ln(t_c - t) + \phi]\} \quad (40)$$

onde $p(t)$ representa o índice de preço de um ativo; t_c o tempo crítico; w é a frequência log-periódica; ϕ a fase; A, B e C são constantes de ajuste.

A frequência w é dada por $w = \frac{2\pi}{\ln \lambda}$ (ver eq.(39)), o que resulta em:

$$\lambda = e^{\frac{2\pi}{w}} \quad (41)$$

onde λ é o fator de invariância por escala característico da rede hierárquica do mercado, correspondente ao fator de amplificação entre níveis hierárquicos consecutivos.

A existência de diferentes valores para λ implica na existência de mercados com estruturas hierárquicas diferentes. Sornette, 2001 [6], encontrou em suas análises diferentes valores de λ para diversos mercados:

- $\lambda = 2.5 \pm 0.3$ para grandes mercados,
- $\lambda = 2.8 \pm 1.1$ para mercados emergentes.

Nota-se que a barra de erro para os mercados emergentes é maior do que para os grandes mercados. Sornette, 2001 [6], especula que esta diferença ocorre pelo fato dos mercados emergentes representarem mercados menores, onde o número de interações recursivas na descrição da rede hierárquica é pequeno, não se conseguindo obter com precisão características de longo alcance. A este fato se denomina efeito de tamanho finito.

A associação do comportamento log-periódico às bolhas pré-*crash* fornece uma ferramenta para sua caracterização e detecção.

Observando o gráfico da fig.(15), que representa a eq.(40), encontram-se valores de tempo t_n correspondentes aos máximos locais sucessivos da curva de $p(t)$. Por outro lado, a correção log-periódica implica na existência de uma hierarquia de intervalos de tempo característicos $t_c - t_n$. Pode-se mostrar que

$$\frac{t_c - t_{n+1}}{t_c - t_n} = \lambda, \text{ ou seja, os máximos locais da função } p(t) \text{ distam de } t_c \text{ por}$$

intervalos de tempo que tendem a zero seguindo uma progressão geométrica, tal que, a razão dos intervalos de tempo consecutivos é uma constante igual ao fator característico do mercado λ (ver Apêndice B). Portanto, os intervalos de tempo $t_c - t_n$ não são universais, mas dependem especificamente de cada mercado.

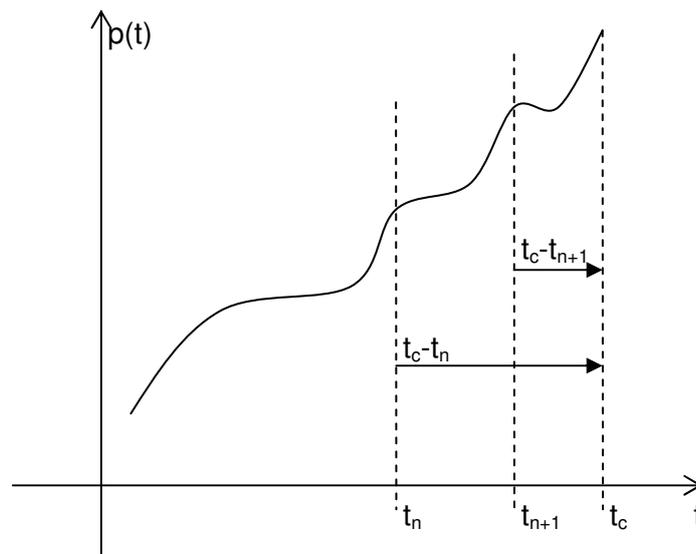


Figura 15 – A razão das distâncias, entre dois máximos consecutivos e t_c , segue uma progressão geométrica cuja razão é igual ao fator λ característico do mercado.

Este resultado é muito útil do ponto de vista empírico, pois as oscilações são de fácil detecção.

As oscilações log-periódicas também podem ser interpretadas como padrões precursores para inferir a data mais provável do *crash*, t_c , que seria o ponto de acumulação dessas oscilações. Assim, neste modelo, o mercado antecipa o *crash*, revelando características precursoras observáveis na série de preços, ou seja, os preços contêm informações sobre o *crash* iminente.

Uma das características de toda modelagem é poder inferir comportamentos. Embora a modelagem de Sornette tenha como objetivo principal uma descrição quantitativa da fase pré-*crash*, ela possui poder preditivo com relação à data mais provável de ocorrência do *crash*.