

3

Traçado estocástico de caminhos

3.1

Formulação por integral de caminhos

Partindo da formulação por operadores lineares, no capítulo anterior apresentamos a solução para a equação do transporte da luz pela série de Neumann:

$$L = L_e + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}^i L_e.$$

Vamos agora tornar mais explícita essa equação desenvolvendo a aplicação iterada do operador de reflexão. Usando a formulação por área da equação (2-8):

$$(\mathbf{R}L_e)(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{M}} L_e(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) dA_{\mathbf{x}_2}.$$

Aplicando o operador duas vezes,

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^2 L_e)(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) &= (\mathbf{R}(\mathbf{R}L_e))(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) \\ &= \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{R}L_e)(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) dA_{\mathbf{x}_2} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\int_{\mathcal{M}} L_e(\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_2) K(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) dA_{\mathbf{x}_3} \right) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) dA_{\mathbf{x}_2} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} L_e(\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_2) K(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) dA_{\mathbf{x}_3} dA_{\mathbf{x}_2} \\ &= \int_{\mathcal{M}^2} L_e(\mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_2) K(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) d\mu_{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3}, \end{aligned}$$

onde $d\mu_{\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3} = dA_{\mathbf{x}_2} dA_{\mathbf{x}_3}$. De maneira geral,

$$(\mathbf{R}^i L_e)(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) = \int_{\mathcal{M}^i} L_e(\mathbf{x}_{i+1} \rightarrow \mathbf{x}_i) \left(\prod_{j=1}^i K(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j-1}) \right) d\mu_{\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{i+1}}, \quad (3-1)$$

onde $d\mu_{\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{i+1}} = dA_{\mathbf{x}_2} \dots dA_{\mathbf{x}_{i+1}}$. Ou seja, em cada termo da série estamos integrando no espaço de caminhos de comprimento finito $(\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i+1})$, onde cada vértice é um ponto sobre as superfícies da cena (Figura 3.1). Uma interpretação física para esse resultado é que cada termo nos fornece a

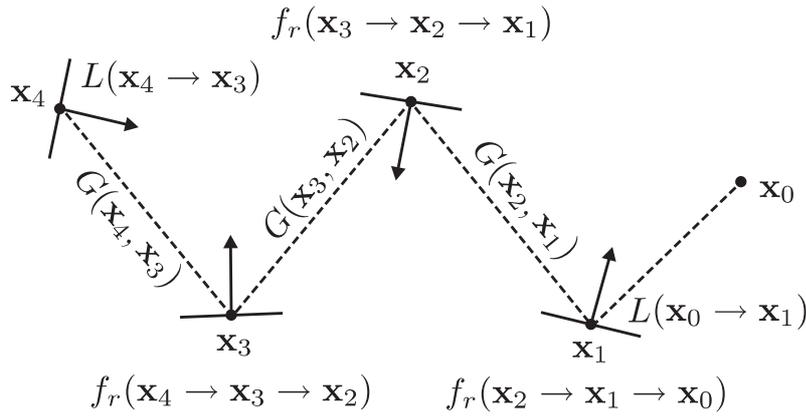


Figura 3.1: Solução da equação do transporte da luz como uma integral de caminhos

contribuição dos fótons que percorrem os caminhos $(\mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_2)$ entre uma fonte de luz até o ponto \mathbf{x}_2 , de onde é espalhado por \mathbf{x}_1 para atingir \mathbf{x}_0 . O produto dos fatores K corresponde às atenuações que os fótons sofrem em cada reflexão, sendo que os caminhos não permitidos recebem o valor 0 em função do termo de visibilidade. O termo fora da série pode ser interpretado como correspondente aos fótons atingindo diretamente o ponto \mathbf{x}_0 .

Portanto, o nosso problema pode ser enunciado da seguinte maneira: para calcular a radiância em uma dada direção, como, por exemplo, a radiância atingindo um ponto do plano de formação da imagem passando por um ponto na abertura da câmera, precisamos calcular a soma de um número infinito de termos, onde cada termo é uma integral em um espaço de caminhos com um comprimento fixo.

Em primeiro lugar, considere o que acontece se truncarmos a série em seu i -ésimo termo. Se $i = 0$, vemos apenas as fontes de luz. Se $i = 1$, calculamos apenas uma reflexão, ou seja, a iluminação direta, e assim em diante. Fixando um termo onde iremos truncar a série, resta ainda o problema de calcular cada termo da soma finita separadamente, o que envolve resolver uma integral com domínios de dimensão alta. Para integração numérica multidimensional, uma escolha natural são técnicas de integração de Monte Carlo (ver apêndice).

Para resolver a integral (3-1) por integração de Monte Carlo, precisamos gerar n caminhos $(\mathbf{x}_1^k, \dots, \mathbf{x}_i^k) \in \mathcal{M}^i$, $k = 1, \dots, n$, segundo alguma função de densidade de probabilidade p , definida em relação à medida μ , e usar o estimador

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{L_e(\mathbf{x}_{i+1}^k \rightarrow \mathbf{x}_i^k) K(\mathbf{x}_{i+1}^k, \mathbf{x}_i^k, \mathbf{x}_{i-1}^k) \cdots K(\mathbf{x}_2^k, \mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_0^k)}{p(\mathbf{x}_2^k, \dots, \mathbf{x}_{i+1}^k)} \quad (3-2)$$

para a integral. Pelo princípio da amostragem por importância, a função de densidade p deve ser escolhida de modo que seja priorizada a geração

de caminhos que contribuam mais para a radiância resultante, isto é, que tenham um formato parecido com o integrando. Fazer isso de maneira global é extremamente difícil, pois o integrando envolve uma função complicada que depende da geometria da cena e de propriedades de emissão e de reflexão de todas as superfícies.

3.2

Caminhos como cadeias de Markov

Uma alternativa para esse problema foi proposta em (Kajiya 86), o mesmo artigo que formulou pela primeira vez na computação gráfica a equação do transporte da luz. Kajiya resolveu o problema construindo os caminhos como cadeias de Markov. Os caminhos são construídos incrementalmente partindo do ponto \mathbf{x}_1 . Em cada ponto \mathbf{x}_i , o próximo ponto \mathbf{x}_{i+1} no caminho é escolhido aleatoriamente segundo uma probabilidade puramente local $P(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$. Não é difícil ver que a probabilidade de um caminho $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ ser escolhido é simplesmente

$$P(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \times \dots \times P(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k).$$

Com isso, a função de densidade definida no espaço de caminhos relaciona-se com a função de densidade das transições locais, que supomos serem medidas em relação à área, por

$$p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \times \dots \times p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k).$$

E, portanto, no final do caminho, um termo do estimador pode ser avaliado segundo (3-2) que, para a nossa função de densidade, pode ser escrita como

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_e(\mathbf{x}_{i+1}^k \rightarrow \mathbf{x}_i^k) \cdot \left(\prod_{j=1}^i \frac{K(\mathbf{x}_{j+1}^k, \mathbf{x}_j^k, \mathbf{x}_{j-1}^k)}{p(\mathbf{x}_j^k, \mathbf{x}_{j+1}^k)} \right) \quad (3-3)$$

A motivação por trás dessa construção é transformar o problema original de encontrar uma função de densidade global no espaço dos caminhos com um dado comprimento para o problema mais simples de encontrar transições intermediárias puramente locais. Evidentemente, nem todas as distribuições podem ser descritas dessa forma. Ao restringirmos a nossa atenção a um subconjunto dos estimadores estamos correndo o risco de não considerarmos possibilidades melhores.

Gerando caminhos dessa forma, a nossa única liberdade é tentarmos otimizar localmente os estimadores na esperança de que nos forneçam estimadores globais razoáveis. Mesmo com essa simplificação, escolhas corretas para as

funções de densidade das transições intermediárias podem reduzir significativamente a variância. Por exemplo, a transição final não precisa gerar amostras sobre superfícies não emissoras, que não contribuiriam com radiância no vértice seguinte (e final) no caminho. Para essa distribuição, uma alternativa simples é amostrar uniformemente uma das fontes, onde a fonte que será amostrada é escolhida uniformemente entre todas as fontes.

As transições internas sofrem um problema semelhante. Ao amostrarmos os pontos das demais superfícies, estamos correndo o risco de amostrarmos um ponto que não esteja visível a partir do ponto atual (lembre-se de que o termo K inclui um fator de visibilidade). Uma solução para esse problema é, ao invés de amostrarmos um ponto sobre as superfícies, nós amostrarmos uma direção no hemisfério superior do ponto corrente, e o vértice seguinte no caminho é obtido lançando-se um raio na direção da amostra. Um cuidado que temos que tomar aqui é aplicar o fator de correção à função de densidade, para levar em consideração que agora estamos calculando a densidade em relação ao ângulo sólido, e não mais em relação à área, isto é,

$$p(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}) = p(\mathbf{x}_j, \omega_j) \frac{d\omega_j}{dA_{\mathbf{x}_{j+1}}} = p(\mathbf{x}_j, \omega_j) \frac{N_{\mathbf{x}_{j+1}} \cdot \omega_j}{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2}, \quad (3-4)$$

onde $\omega_j = \widehat{\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j}$. Substituindo a função (3-4) no estimador (3-3) e cancelando os fatores K ,

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{L_e(\mathbf{x}_{i+1}^k \rightarrow \mathbf{x}_i^k) K(\mathbf{x}_{i+1}^k, \mathbf{x}_i^k, \mathbf{x}_{i-1}^k)}{p(\mathbf{x}_i^k, \mathbf{x}_{i+1}^k)} \cdot \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{f(\mathbf{x}_{j+1}^k \rightarrow \mathbf{x}_j^k \rightarrow \mathbf{x}_{j-1}^k) (N_{\mathbf{x}_j^k} \cdot \omega_j^k)}{p(\mathbf{x}_j^k, \omega_j^k)} \right) \quad (3-5)$$

Uma maneira de ver essa alteração é que estamos, na verdade, trocando o domínio de integração e usando uma medida diferente para a integração. Devido ao termo de visibilidade, alguns caminhos são geometricamente impossíveis. Para visualizar os caminhos possíveis, podemos imaginar que dois pontos das superfícies da cena estão ligados entre si por uma aresta se o termo de visibilidade for 1. Com isso, os caminhos interessantes de serem amostrados são os caminhos nesse “grafo” contínuo. Sob esse ponto de vista, na descrição original onde só amostrávamos uma seqüência de vértices, devido ao termo de visibilidade poderíamos estar amostrando em algum estágio dois vértices em seguida que não eram conectados por uma aresta e, portanto, não poderiam aparecer em seqüência em um caminho. Com essa nova estratégia de amostrar as direções ao invés de vértices estamos garantindo que, até o penúltimo vértice, todos os vértices no caminho estão ligados por uma aresta e formam, portanto, um caminho válido. Portanto, ao amostrarmos a direção, estamos automaticamente aplicando o princípio da amostragem por importância e desconsiderando os caminhos que são geometricamente impossíveis e não contribuem, pois, para

a radiância final.

Ainda sobre as transições internas, temos que tentar escolher distribuições que priorizem (localmente) a escolha de caminhos importantes. O primeiro fator que podemos observar é a distribuição segundo o ângulo polar. Considere um material perfeitamente difuso. Se distribuirmos uniformemente as amostras sobre o hemisfério, o fator $N_{\mathbf{x}_j} \cdot \omega_j = \cos \theta_j$ dará peso maior às amostras com o ângulo polar menor. Levando isso em consideração, podemos procurar gerar as amostras segundo uma distribuição que tenha o mesmo “formato” de $\cos \theta_j$, isto é,

$$p(\mathbf{x}_j, \omega_j) = \frac{N_{\mathbf{x}_j} \cdot \omega_j}{\pi}, \quad (3-6)$$

onde o fator $1/\pi$ é para garantir que a função integrada no hemisfério resulte em 1 e seja, portanto, uma função de densidade de probabilidade.

Dados números ξ_1 e ξ_2 distribuídos uniformemente sobre o intervalo $[0, 1]$, podemos gerar amostras em coordenadas polares segundo a distribuição (3-6) por inversão da função de distribuição acumulada (que é separável no nosso caso):

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \sqrt{\xi_1} \\ \phi &= 2\pi\xi_2 \end{aligned}$$

Não vamos entrar nos detalhes sobre geração de amostras. Apenas para situar o problema, observe que, em geral, como os geradores de números (pseudo)aleatórios disponíveis geram somente números distribuídos uniformemente, temos que ter uma maneira de transformá-los em números segundo uma distribuição qualquer. Consulte a bibliografia citada no apêndice sobre integração de Monte Carlo para diferentes maneiras de fazer essa transformação.

Se o vértice estiver localizado sobre uma superfície lambertiana, a estratégia de transição que descrevemos gera amostras localmente de maneira ótima. Mas, em geral, essa distribuição não esgota as possibilidades de otimização. O ideal é que sejamos capazes de também levar em consideração a BRDF na geração de amostras. Podemos então, da mesma forma que fizemos para superfícies lambertianas, tentar gerar amostras com uma distribuição parecida com o produto da BRDF e o cosseno do ângulo polar. Infelizmente, em poucos casos consegue-se fazer analiticamente a inversão da função de distribuição acumulada desse produto como conseguimos na situação anterior. Nesses casos, uma alternativa é inverter a distribuição acumulada numericamente, como em (Lawrence et al. 04), ou aproximar o produto por uma função que possa ser amostrada eficientemente. De qualquer forma, a distribuição (3-6) pode ser usada como padrão caso não se considere a BRDF.

Como última nota, observe que, na transição final, também existe um fator $K(\mathbf{x}_{i+1}^k, \mathbf{x}_i^k, \mathbf{x}_{i-1}^k)$, que inclui a BRDF e o fator geométrico $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Logo, mesmo que sejamos capazes de amostrar eficientemente as fontes de luz segundo a distribuição de L_e e G , podemos estar escolhendo uma direção que assuma uma importância baixa na BRDF, como ocorre facilmente em uma superfície altamente especular. O resultado disso é uma variância alta do estimador. Por outro lado, se amostrarmos segundo a BRDF, como nas transições anteriores, em geral dificilmente iremos atingir uma fonte de luz, o que, novamente, resultaria em uma variância alta do estimador. O ideal seria que pudéssemos de alguma maneira combinar os dois estimadores. (Veach & Guibas 95) introduziu a técnica de amostragem por importância múltipla para resolver problemas como esse, onde queremos combinar em um único estimador as vantagens de duas ou mais distribuições construídas levando-se em consideração diferentes fatores do integrando.

3.3

Roleta russa

Nas seções anteriores mostramos como construir um estimador não-tendencioso \hat{L}_i para cada termo L_i da série que estamos querendo calcular. Truncando a série no n -ésimo termo, construímos um estimador não-tendencioso para a série truncada da forma

$$\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \cdots + \hat{L}_n.$$

Para amostrar \hat{L} , então, amostramos cada \hat{L}_i separadamente e, como o valor esperado de \hat{L} é a soma dos valores esperados dos estimadores \hat{L}_i , isto é, ao seu termo L_i correspondente da série, \hat{L} é um estimador não-tendencioso para o truncamento da série até o n -ésimo termo. Repetindo o processo várias vezes e tirando a média de todos os resultados, obtemos uma aproximação para o resultado da série truncada que, pela lei dos grandes números, converge probabilisticamente para o seu valor.

Por enquanto, vamos assumir que conhecemos um valor de n para o qual o truncamento da série nos fornece uma aproximação suficientemente boa para o resultado final. Em virtude da conservação de energia, quanto maior a ordem do termo na série, menor sua contribuição para a soma total. E isso se traduz no estimador \hat{L} como, na média, uma contribuição menor dos termos \hat{L}_i para os maiores índices i . Mais ainda, além de fornecerem uma contribuição menor, levamos mais tempo calculando os termos mais altos, já que envolvem a amostragem de caminhos mais longos. Ou seja, estamos gastando mais tempo

para calcular termos que contribuem menos para o resultado final.

A idéia por trás da técnica de roleta russa, introduzida na computação gráfica por (Arvo & Kirk 90), é permitir que sejamos capazes de evitar aleatoriamente a avaliação de alguns dos termos de somas como a nossa e, mesmo assim, obter o resultado correto. Por exemplo, suponha que sejamos capazes de avaliar de alguma maneira que as contribuições a partir do termo L_i da soma não são tão importantes para a radiância que estamos calculando. Então deixamos de avaliar com uma probabilidade q_i os termos a partir de L_i , isto é, seja ξ uma variável aleatória distribuída uniformemente entre 0 e 1, construímos o estimador

$$\hat{L}' = \hat{L}_1 + \cdots + L_{i-1} + \begin{cases} 0 & \text{se } \xi < q_i \\ \frac{1}{1-q_i}(\hat{L}_i + \cdots + \hat{L}_n) & \text{se } \xi \geq q_i \end{cases}$$

E esse estimador ainda nos dá o resultado correto, já que

$$\begin{aligned} E[\hat{L}'] &= E[\hat{L}_1 + \cdots + L_{i-1}] + q_i E[0] + (1 - q_i) E\left[\frac{1}{1 - q_i} (\hat{L}_i + \cdots + \hat{L}_n)\right] \\ &= E[\hat{L}_1 + \cdots + L_{i-1}] + E[\hat{L}_i + \cdots + \hat{L}_n] \\ &= E[\hat{L}_1] + \cdots + E[\hat{L}_n] \\ &= L_1 + \cdots + L_n \end{aligned}$$

Ou seja, temos um estimador que é não-tendencioso sempre que o original também é. Com o custo de um aumento na variância, podemos ganhar eficiência ao decidirmos evitar probabilisticamente a avaliação dos termos mais altos na soma. E o tempo que economizamos com isso pode ser gasto gerando mais amostras para L e melhorando a nossa estimativa. Podemos pensar que as amostras de \hat{L}' estão gerando todos os caminhos, mas como os caminhos dos termos onde paramos de avaliar não contribuem para o seu valor, não precisam ser explicitamente geradas. Logo, mesmo gerando um número menor de caminhos, estamos ainda estimando corretamente L como se tivéssemos gerado um número maior de caminhos do que estamos efetivamente gerando. Como as contribuições dos caminhos mais curtos são geralmente maiores, é razoável escolher $q_i = 0$ para os termos iniciais e decidir não avaliar somente os termos mais altos.

Levando a idéia adiante, podemos construir um estimador que decide evitar a avaliação dos termos seguintes da série a cada passo. Note também que agora o termo onde truncamos a série pode ser arbitrariamente grande, isto é, podemos truncar um número infinito de termos e ainda obter o resultado correto, como se tivéssemos avaliado um número infinito de termos.

Por motivos de eficiência, uma vez que, para amostrar o termo $L_{i-1}^{\hat{}}$ já construímos um caminho de comprimento $i - 1$, se for necessário que amostramos um caminho de comprimento i para amostrar o termo $L_i^{\hat{}}$, reutilizamos o caminho construído no termo anterior. Embora isso introduza uma correlação entre os termos da soma, o que aumenta a variância de L' , permite gerar significativamente mais amostras de L' com uma dada restrição de tempo. Sob o ponto de vista dos caminhos que construímos com as cadeias de Markov, significa que, dado um caminho $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$, o caminho usado para estimar o termo seguinte pode ser construído apenas com mais uma transição que depende apenas de \mathbf{x}_{i-1} . Já adiantando a implementação, construindo os caminhos do comprimento menor para o maior, só precisamos guardar o vértice final do caminho de tamanho $i - 1$, \mathbf{x}_{i-1} , para amostrar o caminho de tamanho i .

3.4

Traçado de caminhos e a equação de medição

Por último, vamos ver como o cálculo da radiância se encaixa no cálculo das medições. Do mesmo modo que fizemos com a equação do transporte da luz, podemos trocar o domínio de integração da equação de medição para as superfícies da cena, ao invés das direções do hemisfério superior em cada ponto:

$$S = \int_A \int_{\mathcal{M}} W_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) L(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) dA_{\mathbf{x}_0} dA_{\mathbf{x}_1},$$

onde usamos a notação para a responsividade $W_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1)$, para indicar que \mathbf{x}_0 dá uma importância W_e na direção de \mathbf{x}_1 . Para simplificar a notação, como fizemos para as fontes de luz, vamos assumir que os sensores estão sobre as superfícies da cena, colocando W_e igual a zero para os pontos fora de \mathcal{A} . Com isso, a equação acima fica

$$S = \int_{\mathcal{M}^2} W_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) L(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) K(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) dA_{\mathbf{x}_0} dA_{\mathbf{x}_1},$$

Mas, pela série de Neumann,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{M}^2} W_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{R}^i L_e)(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) \right) G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) dA_{\mathbf{x}_0} dA_{\mathbf{x}_1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathcal{M}^2} W_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) (\mathbf{R}^i L_e)(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) dA_{\mathbf{x}_0} dA_{\mathbf{x}_1}. \end{aligned}$$

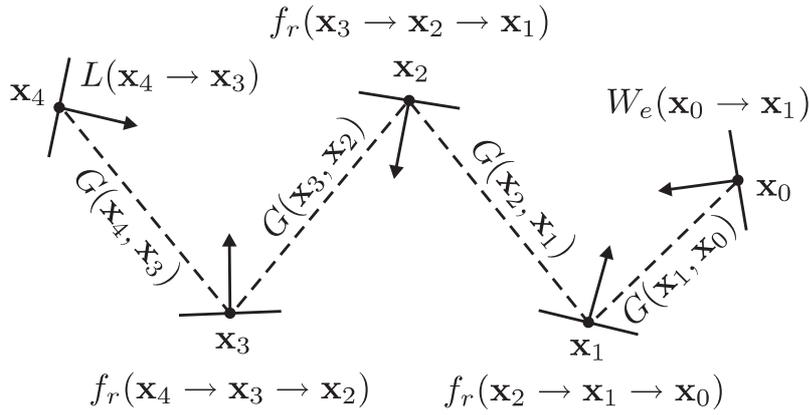


Figura 3.2: Equação de medição como uma integral de caminhos

Expandindo $(\mathbf{R}^i L_e)(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0)$ segundo (3-1),

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathcal{M}^{i+2}} W_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) K(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{i+1}) L_e(\mathbf{x}_{i+1} \rightarrow \mathbf{x}_i) dA_{\mathbf{x}_0} \dots dA_{\mathbf{x}_{i+1}},$$

onde

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{i+1}) &= \left(\prod_{j=1}^i K(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j-1}) \right) G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \\ &= G(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i) f_r(\mathbf{x}_{i+1} \rightarrow \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i-1}) \times \dots \\ &\quad \times G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) f_r(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) \\ &= G(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i) f_r(\mathbf{x}_{i+1} \leftarrow \mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_{i-1}) \times \dots \\ &\quad \times G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) f_r(\mathbf{x}_2 \leftarrow \mathbf{x}_1 \leftarrow \mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Ou seja, a medição só aumentou em 2 o comprimento dos caminhos do espaço em cada termo. Agora estamos, em cada termo, integrando em um espaço de caminhos ligeiramente mais longos, onde introduzimos em uma extremidade um vértice correspondendo a uma posição sobre o sensor, seguido do primeiro vértice na cena, que era dado como ponto de partida fixo para calcularmos a radiância, ou seja, agora temos mais 2 graus de liberdade para posicionar o primeiro e segundo vértices (Figura 3.2).

Na equação, note que há uma simetria interessante entre as funções W_e e L_e . Por um lado, podemos ver o domínio como os caminhos de um fóton que transporta energia de uma fonte de luz até atingir um sensor, onde a sua energia é ponderada pelo fator W_e para nos dar uma resposta. Mas, por outro lado, podemos interpretar os caminhos também no sentido inverso, como os caminhos de uma partícula de importância sendo emitida pelos sensores até atingir uma fonte de luz, onde a resposta é ponderada pela radiância emitida L_e . Maneiras diferentes de interpretar e explorar esse espaço

de caminhos nos fornecem diferentes algoritmos. Por exemplo, se construirmos os caminhos progressivamente partindo dos sensores em direção às fontes de luz, temos o algoritmo de (Kajiya 86) que já descrevemos. Mas também podemos, do mesmo modo, construir os caminhos progressivamente partindo das fontes de luz em direção ao sensor. Nesse caso, embora o algoritmo também esteja correto, dificilmente atingiríamos o sensor na amostragem final com as decisões puramente locais que fizemos nas transições internas, o que resultaria em uma variância alta no estimador, traduzida em ruído na imagem final. Embora os dois algoritmos sejam corretos, o primeiro funciona melhor pois, em geral, como a união das superfícies das fontes de luz resulta em uma superfície bem mais extensa que a dos sensores, a probabilidade de o termo de visibilidade assumir o valor 0 na última transição do segundo algoritmo é bem maior que no primeiro. Mas é possível construir instâncias onde o segundo se sai melhor que o primeiro. Uma terceira alternativa é combinar as duas estratégias, partindo-se simultaneamente dos sensores e das fontes de luz e conectando os dois caminhos, como fazem os algoritmos de traçado bidirecional de caminhos, desenvolvidos independentemente por (Lafortune & Willems 93) e (Veach & Guibas 94). Variando as profundidades que se caminha vindo de cada extremidade, temos diferentes estimadores.

Vamos concluir apresentando a equação de medição no contexto mais específico para câmeras. Pela equação (2-11), embutindo o termo $\cos^4 \theta/f$ no filtro espacial,

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{M}^i} h(\mathbf{x}_0) K(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{i+1}) L_e(\mathbf{x}_{i+1} \rightarrow \mathbf{x}_i) dA_{\mathbf{x}_0} \cdots dA_{\mathbf{x}_{i+1}}.$$

Para estendermos o algoritmo de traçado de caminhos para calcular a medição S , temos apenas que especificar como escolhemos o vértice inicial sobre o suporte do sensor e o segundo vértice sobre a abertura da câmera. Note que se quiséssemos calcular a exposição, a única diferença é que teríamos mais uma integral no tempo por fora de cada termo da equação. Vamos simplificar o problema e considerar somente o cálculo da medição e usar a aproximação para câmeras de furo da equação (2-13). Com isso, temos somente que amostrar mais um vértice sobre o suporte do filtro espacial. Lembre-se de que substituímos a amostragem sobre a abertura para evitar amostrarmos em direções que não passavam pela abertura, e o primeiro vértice amostrado na cena fica, portanto, determinado pela amostra na abertura. Em uma câmera de furo, essa amostra é tratada como um caso particular, já que temos uma densidade que é um δ de Dirac, isto é, a posição sobre o sensor já determina o próximo ponto no caminho.