

2 Formulação do Problema

Nesse capítulo é apresentada a formulação necessária para obter o funcional de energia do sistema torre-pêndulo, tanto em sua forma linear quanto em sua forma não-linear. Através dos funcionais de energia e utilizando as ferramentas do Cálculo Variacional, obtêm-se as equações diferenciais de movimento.

A torre é modelada como uma coluna de seção transversal variável com a extremidade inferior engastada e a extremidade superior livre. Plataformas de observação, antenas e equipamentos são modelados como massas concentradas ao longo da torre. Exemplos dessa classe de estruturas foram mostrados na Figura 1.1. O pêndulo absorvor é considerado como um elemento discreto ao longo da torre. Em termos de eficiência, a melhor localização para o pêndulo é o topo da torre, embora, em alguns casos, por motivos construtivos, o pêndulo deva ser colocado em uma outra posição.

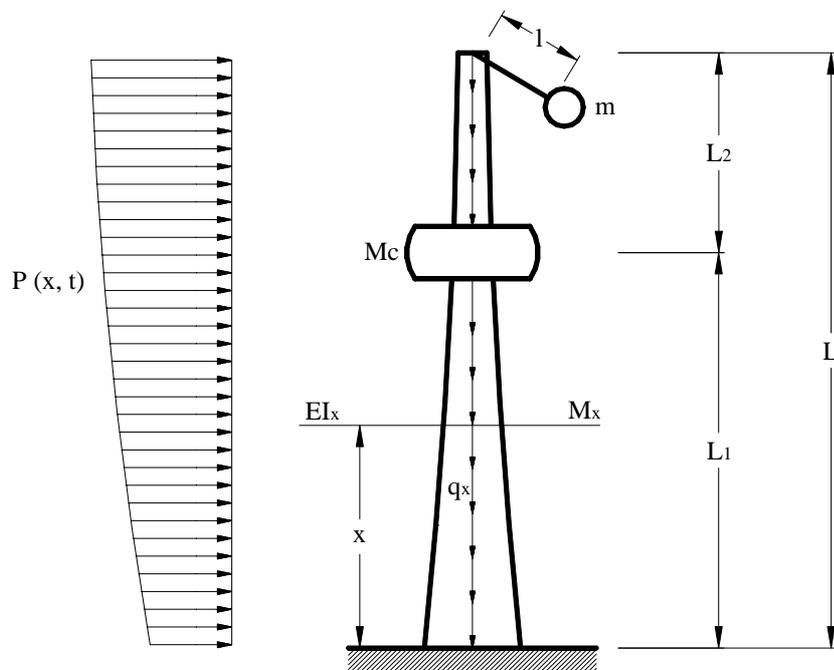


Figura 2.1: Coluna em estudo.

O modelo estrutural considerado é ilustrado na Figura 2.1, onde EI_x é a rigidez a flexão em x e N_x , a força axial em x devido ao peso próprio q_x . M_x é a massa por unidade de comprimento em x , $P(x,t)$ a força transversal que age na seção x em um tempo t e L , o comprimento da coluna. M_c é a massa concentrada a uma distância L_1 da base da coluna. Finalmente, l e m são o comprimento da haste e a massa do absorvedor pendular.

2.1. Funcional de Energia do Sistema – Formulação Não-Linear

As equações de movimento são obtidas através do Princípio de Hamilton. Para um sistema conservativo, ou seja, sem dissipação de energia, tem-se que a variação da energia cinética menos a energia potencial durante um intervalo de tempo de t_1 a t_2 é nula, a saber:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \pi) dt = 0 \quad (2.1)$$

sendo que T é a energia cinética, π a energia potencial total e o símbolo δ representa a variação dos termos entre parênteses.

A equação (2.1) é utilizada para sistemas onde tem-se a vibração livre sem amortecimento ou qualquer outra forma de dissipação de energia.

Para o caso de terem-se forças não-conservativas, tem-se que a variação de energia cinética e potencial mais a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas durante um intervalo de tempo de t_1 a t_2 deve ser igual a zero, ou seja:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta(W_{nc}) dt = 0 \quad (2.2)$$

onde W_{nc} é o trabalho realizado pelas forças não conservativas.

2.1.1. Energia Potencial Total da Coluna

A energia potencial total de uma estrutura (π) é obtida através da soma da energia interna de deformação (U) com o potencial das cargas externas (V_p), ou seja:

$$\pi = U + V_p \quad (2.3)$$

Na expressão (2.3), U é o somatório da energia de membrana gerada pela deformação axial (U_m) e da energia de flexão gerada pelo alongamento das fibras tracionadas e o encurtamento das fibras comprimidas (U_f), que, portanto, pode ser expresso como:

$$U = U_m + U_f = \int_0^L \frac{1}{2} EA_x \varepsilon^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} EI_x \chi^2 dx \quad (2.4)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, I_x , o momento de inércia da seção transversal em x , A_x , a área da seção transversal em x , χ , representa a mudança de curvatura e ε , a deformação específica da linha neutra.

Seguindo procedimento adotado na literatura na análise de colunas esbeltas desprezou-se a parcela relativa à deformação axial da coluna (Timoshenko, 1961). Então, a expressão (2.4) toma a forma:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI_x \chi^2 dx \quad (2.5)$$

Através da Figura 2.2, tem-se que o trabalho realizado (W) é dado pelo produto da força axial no topo da coluna, N_x , pelo encurtamento da coluna, Δ nesta seção. Logo tem-se a equação:

$$W = N_x \Delta \quad (2.6)$$

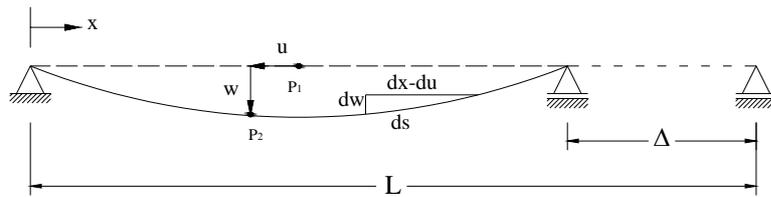


Figura 2.2: Deslocamento transversal e encurtamento da coluna.

O potencial das cargas é dado por:

$$V_p = -W = -N_x \Delta \quad (2.7)$$

Assim, pode-se chegar à equação da energia potencial total π , substituindo-se (2.5) e (2.7) em (2.3).

$$\pi = \int_0^L \frac{1}{2} EI_x \chi^2 dx - N_x \Delta \quad (2.8)$$

Partindo da Figura 2.2, tem-se que o deslocamento de um ponto P_1 na configuração indeformada para uma nova posição P_2 em uma configuração deformada pode ser representado por um vetor de deslocamentos decomposto em duas componentes: deslocamento axial u e deslocamento lateral w . Ainda, se a linha neutra da estrutura é inextensível, considera-se o elemento infinitesimal dx igual ao elemento curvo ds , como apresentado na Figura 2.3.

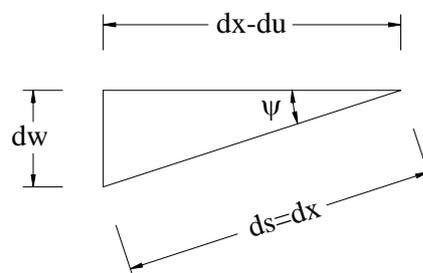


Figura 2.3: Elemento infinitesimal da linha neutra da viga.

Da Figura 2.3, pode-se deduzir as relações:

$$\text{sen } \psi = \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} = w_{,x} \quad (2.9)$$

$$\psi = \text{sen}^{-1}(w_{,x}) \quad (2.10)$$

sendo que ψ é o ângulo formado entre o eixo horizontal e o eixo da estrutura deformada.

A curvatura do eixo deformado, $1/R_f$, é dada por:

$$\frac{1}{R_f} = \psi_{,x} = (\text{sen}^{-1} w_{,x})_{,x} = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{1/2}} \quad (2.11)$$

Já a curvatura da estrutura indeformada, $1/R_0$, é:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (2.12)$$

Assim, a variação da curvatura, χ , tem a forma:

$$\chi = \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_0} = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{1/2}} \quad (2.13)$$

Expandindo a expressão (2.13) em séries de Taylor até a segunda ordem, chega-se à aproximação:

$$\chi = w_{,xx} \left(1 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.5), pode-se reescrever a energia interna de deformação (U) como:

$$U \cong \frac{1}{2} \int_0^L EI_x \left(w^2_{,xx} + w^2_{,xx} w^2_{,x} + \frac{1}{4} w^2_{,xx} w^4_{,x} \right) dx \quad (2.15)$$

Observa-se na equação (2.15), que a grandeza EI_x não é constante, pois varia com o comprimento da coluna. Nesse caso é necessário adotar uma função aproximada para representar a variação de rigidez à flexão da coluna. Li *et al.* (2000) sugerem a seguinte expressão:

$$EI_x = EI_o (1 + \eta x)^{n+2} \quad (2.16)$$

onde EI_o é a rigidez a flexão na base da coluna, η e n são os parâmetros que descrevem a mudança da seção transversal da coluna.

Escolhendo-se de forma conveniente os parâmetros η e n , pode-se representar uma série de geometrias encontradas na prática (Li *et al.* , 2000).

Com isso, a equação (2.15) é dada, agora, por:

$$U \cong \frac{1}{2} \int_0^L EI_o (1 + \eta x)^{n+2} \left(w^2_{,xx} + w^2_{,xx} w^2_{,x} + \frac{1}{4} w^2_{,xx} w^4_{,x} \right) dx \quad (2.17)$$

Dym & Shames (1973) demonstram que esta expressão não-linear é suficiente para determinar de forma precisa a energia interna de deformação, incluindo até a região de grandes deslocamentos laterais.

O parâmetro Δ , que representa o encurtamento da coluna, pode ser escrito em termos do vetor deslocamento. Através da Figura 2.3 e usando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dw)^2 \quad (2.18)$$

Dividindo-se todos os termos da equação (2.18) por $(dx)^2$, obtém-se:

$$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = \left(\frac{dx - du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (2.19)$$

Admitindo que $ds = dx$, tem-se:

$$1 = (1 - u_{,x})^2 + w^2_{,x} \quad (2.20)$$

o que leva a

$$\frac{du}{dx} = 1 - (1 - w^2_{,x})^{1/2} \quad (2.21)$$

Partindo da relação

$$\Delta = \int_0^L du = \int_0^L [1 - (1 - w^2_{,x})^{1/2}] dx \quad (2.22)$$

e expandindo o termo $(1 - w^2_{,x})^{1/2}$ até a quarta ordem em séries de Taylor, chega-se à expressão:

$$\Delta = \int_0^L \left(-\frac{1}{2} w^2_{,x} - \frac{1}{8} w^4_{,x} \right) dx \quad (2.23)$$

Assim, substituindo a expressão (2.23) em (2.7), tem-se:

$$V_p = - \int_0^L N_x \left(-\frac{1}{2} w^2_{,x} - \frac{1}{8} w^4_{,x} \right) dx \quad (2.24)$$

Considere agora que a força axial, N_x , varia como a rigidez a flexão, EI_x .

Em conformidade com a expressão (2.16), adota-se:

$$N_x = N_o (1 + \eta x)^{n+1} \quad (2.25)$$

onde N_o é um parâmetro que depende do carregamento.

Com base em (2.24), Li *et al.* (2000) sugerem a seguinte expressão para o potencial das cargas externas.

$$V_p = -\int_0^L N_o (1 + \eta x)^{n+1} \left(-\frac{1}{2} w^2_{,x} - \frac{1}{8} w^4_{,x} \right) dx \quad (2.26)$$

Para cada distribuição de cargas axiais a expressão (2.26) deve-se determinar os valor de N_o , como será mostrado no próximo capítulo.

Finalmente, de posse das equações (2.17) e (2.26), referentes, respectivamente, à energia interna de deformação e ao potencial das cargas externas, pode-se escrever a expressão para a energia potencial total da coluna.

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_0^L EI_o (1 + \eta x)^{n+2} \left(w^2_{,xx} + w^2_{,xx} w^2_{,x} + \frac{1}{4} w^2_{,xx} w^4_{,x} \right) dx \\ & - \int_0^L N_o (1 + \eta x)^{n+1} \left(-\frac{1}{2} w^2_{,x} - \frac{1}{8} w^4_{,x} \right) dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.1.2. Energia Cinética da Coluna

Em um elemento de coluna esbelta geralmente é considerado apenas o efeito da inércia à translação na direção transversal ao eixo da viga. A energia cinética é dividida em duas parcelas, a primeira parcela é referente ao efeito da massa da coluna e a segunda refere-se ao efeito da massa concentrada, M_c , então:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} M_x \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_c \left(\frac{\partial w(L_1)}{\partial t} \right)^2 \quad (2.28)$$

Na equação anterior, M_x representa a massa por unidade de comprimento da coluna na seção x. Como a seção transversal da coluna não é constante, tem-se que esse coeficiente é variável. Como feito para a rigidez a flexão, EI_x , e para a força axial, N_x , adota-se, para representar a variação da massa, a função:

$$M_x = M_o (1 + \eta x)^n \quad (2.29)$$

onde M_o é a massa por unidade de comprimento na base da coluna.

Assim, a energia cinética é dada por:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} M_o (1 + \eta x)^n \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_c \left(\frac{\partial w(L_1)}{\partial t} \right)^2 \quad (2.30)$$

2.1.3. Amortecimento da Coluna

O amortecimento está presente em todos os sistemas oscilatórios. Entretanto é difícil a descrição real da força de amortecimento, embora seja possível a admissão de modelos ideais de amortecimento, que muitas vezes resultam em prognósticos satisfatórios da resposta. Dentre esses modelos, a força de amortecimento viscoso, proporcional à velocidade, conduz a um tratamento matemático simples. A presença do agente amortecedor muda as características do movimento, passando-se a ter um “movimento harmônico amortecido” ou até sem caráter oscilatório.

Portanto, a parcela de trabalho (Re) é adicionada ao funcional de energia, sendo que essa parcela pode ser escrita da forma sugerida por Rayleigh:

$$Re = \int_0^L C \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.31)$$

onde C é o parâmetro de amortecimento. C pode ser expresso em termos da taxa de amortecimento, ξ_c , e da frequência natural da coluna, ω_c (Meirovitch, 1975).

Considerando um sistema em vibração livre, o valor de ξ_c determina o caráter oscilatório do sistema. Se o parâmetro $\xi_c < 1,0$ tem-se um movimento oscilatório subamortecido, quando $\xi_c > 1,0$ o movimento é superamortecido. Para $\xi_c = 1,0$ tem-se o caso crítico.

2.1.4. Força Harmônica

Considera-se que a coluna está submetida a uma carga harmônica lateral $P(x,t)$ (veja Figura 2.1) dada por:

$$P(x,t) = F_o \text{sen}(\omega_e t) \quad (2.32)$$

onde ω_e é a frequência da excitação e F_o a sua amplitude em x .

No funcional introduz-se a força harmônica, ao considerar o trabalho W_p realizado por essa, que tem a forma:

$$W_p = \int_0^L P(x,t) w dx \quad (2.33)$$

2.1.5. Funcional de Energia da Coluna – Formulação Não-Linear

Com base nas equações (2.27) e (2.30), tem-se a função de Lagrange que representa a coluna em estudo, sendo esta:

$$\begin{aligned} L_{s1} = T - \pi = & \int_0^L \frac{1}{2} M_o (1 + \eta x)^n \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_c \left(\frac{\partial w(L_1)}{\partial t} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L EI_o (1 + \eta x)^{n+2} \left(w^2_{,xx} + w^2_{,xx} w^2_{,x} + \frac{1}{4} w^2_{,xx} w^4_{,x} \right) dx \\ & + \int_0^L N_o (1 + \eta x)^{n+1} \left(-\frac{1}{2} w^2_{,x} - \frac{1}{8} w^4_{,x} \right) dx \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.1.6. Funcional de Energia do Pêndulo – Formulação Não-Linear

O funcional de energia do pêndulo absorvedor é obtido através da equação (2.1), como o funcional da coluna. O mesmo é expresso em sua forma não-linear devido a não-linearidade geométrica do pêndulo.

As parcelas de energia cinética (T_{pl}), energia potencial total (V_{pl}) e energia dissipada do sistema (E_d) podem ser deduzidas através da Figura 2.4, onde θ representa o deslocamento angular do pêndulo e v é a velocidade tangencial da massa m . Considera-se também que na ligação coluna-pêndulo há uma mola de rigidez torsional, K_p . O pêndulo possui ainda um amortecimento, C_p , que não está representado na Figura 2.4.

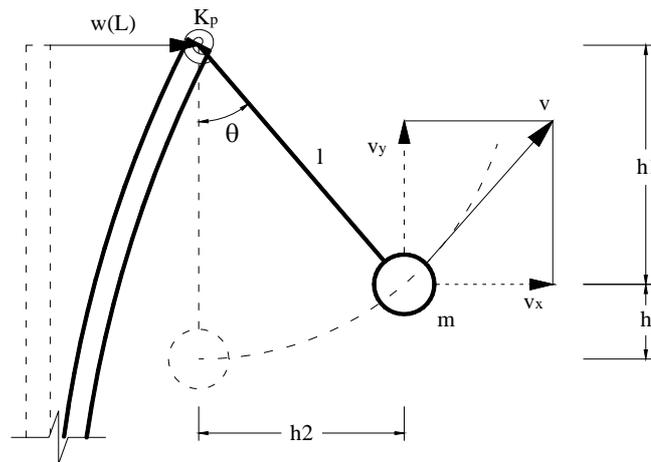


Figura 2.4: Parâmetros do pêndulo.

As parcelas de energia cinética, energia potencial e energia dissipada são:

$$T_{pl} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.35)$$

$$V_{pl} = mgh + \frac{1}{2}K_p\theta^2 \quad (2.36)$$

$$E_d = \frac{1}{2}C_p\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (2.37)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Da Figura 2.4 têm-se as seguintes equações:

$$h = l - h_1 = l(1 - \cos(\theta)) \quad (2.38)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (2.39)$$

Tomando θ como coordenada generalizada, torna-se necessário escrever v em função de θ , para isso deve-se ter em mente que:

$$\bar{x} = x + h_2 = w(L) + l \operatorname{sen}(\theta) \quad (2.40a)$$

$$y = h_1 = l \cos(\theta) \quad (2.40b)$$

de onde pode-se chegar às seguintes componentes de velocidade:

$$v_x = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial w(L)}{\partial t} + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \cos(\theta) \quad (2.41a)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -l \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \operatorname{sen}(\theta) \quad (2.41b)$$

Substituindo as expressões (4.41) em (4.39), tem-se:

$$v^2 = \left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right)^2 + 2l \left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \cos(\theta) + l^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \quad (2.42)$$

As parcelas de energia cinética, energia potencial e energia dissipada resultantes são:

$$T_{pl} = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right)^2 + 2l \left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \cos(\theta) + l^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (2.43)$$

$$V_{pl} = mgl(1 - \cos(\theta)) + \frac{1}{2} K_p \theta^2 \quad (2.44)$$

$$E_d = \frac{1}{2} C_p \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (2.45)$$

Então, o funcional não-linear do pêndulo é:

$$L_{g2} = T - \pi = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right)^2 + 2l \left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \cos(\theta) + l^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right) - mgl(1 - \cos(\theta)) - \frac{1}{2} K_p \theta^2 \quad (2.46)$$

2.1.7. Montagem do Funcional de Energia do Sistema – Formulação Não-Linear

Através das expressões anteriores pode-se estudar as vibrações não-lineares livres ou forçadas com e sem amortecimento, de um sistema coluna-pêndulo.

Com as equações (2.34) e (2.46), chega-se a função de Lagrange que representa o sistema coluna-pêndulo.

$$L_g = \int_0^L \frac{1}{2} M_o (1 + \eta x)^n \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_c \left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \int_0^L EI_o (1 + \eta x)^{n+2} \left(w^2_{,xx} + w^2_{,xx} w^2_{,x} + \frac{1}{4} w^2_{,xx} w^4_{,x} \right) dx + \int_0^L N_o (1 + \eta x)^{n+1} \left(-\frac{1}{2} w^2_{,x} - \frac{1}{8} w^4_{,x} \right) dx + \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right)^2 + 2l \left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \cos(\theta) + l^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] - mgl(1 - \cos(\theta)) - \frac{1}{2} K_p \theta^2 \quad (2.47)$$

2.2. Funcional de Energia do Sistema – Coluna Linear

Considerando que a coluna sofre pequenas rotações após a sua deformação, tem-se que o ângulo ψ , apresentado na Figura 2.3, é muito pequeno e, dessa forma, pode-se fazer a aproximação:

$$(1 - w^2_{,x})^{1/2} \cong 1 \quad (2.48)$$

Em consequência dessa aproximação, a energia interna de deformação toma a forma:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI_o (1 + \eta x)^{n+2} w^2_{,xx} dx \quad (2.49)$$

Considerando mais uma vez a hipótese de pequenas rotações, tem-se que o potencial das cargas é dado por:

$$V_p = \int_0^L -\frac{1}{2} w^2_{,x} (N_o (1 + \eta x)^{n+1}) dx \quad (2.50)$$

Com as expressões (2.49) e (2.50), pode-se reescrever a energia potencial da coluna (π), sendo essa:

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI_o (1 + \eta x)^{n+2} w^2_{,xx} - \frac{1}{2} w^2_{,x} (N_o (1 + \eta x)^{n+1}) \right] dx \quad (2.51)$$

Somando as expressões (2.51), (2.30) e (2.46), tem-se o funcional de energia do sistema coluna-pêndulo.

$$\begin{aligned} L_g = & \int_0^L \frac{1}{2} M_o (1 + \eta x)^n \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} M_c \left(\frac{\partial w(L_1)}{\partial t} \right)^2 \\ & - \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI_o (1 + \eta x)^{n+2} w^2_{,xx} - \frac{1}{2} w^2_{,x} (N_o (1 + \eta x)^{n+1}) \right] dx \\ & + \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right)^2 + 2l \left(\frac{\partial w(L)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \cos(\theta) + l^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right] \\ & - mgl(1 - \cos(\theta)) - \frac{1}{2} K_p \theta^2 \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.3. Dedução das Equações Diferenciais de Movimento

Como o sistema coluna-pêndulo, apresentado na Figura 2.1, possui duas variáveis, w e θ , tem-se uma equação diferencial parcial para cada variável. O funcional, a ser minimizado nesse caso, é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L L_g(w, w_x, w_{xx}, w_t, \theta, \theta_t, t) dx dt \quad (2.53)$$

Faz-se necessário encontrar uma função $w(x,t)$, para o deslocamento transversal da coluna, e uma função $\theta(t)$, para o deslocamento angular do pêndulo absorvor, porém as ferramentas do cálculo variacional não fornecem essas funções diretamente, mas sim as equações diferenciais que essas funções devem satisfazer. Aplicando as ferramentas do cálculo variacional e o princípio de Hamilton, tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial w_t} \right) - \left(\frac{\partial L_g}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L_g}{\partial w_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L_g}{\partial w_{xx}} \right) \right) \right] \delta w dx dt = 0 \quad (2.54)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L_g}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_g}{\partial \theta_t} \right) \right] \delta \theta dt = 0 \quad (2.55)$$

Na expressão (2.54), o termo entre colchetes representa a equação de Euler-Lagrange da coluna, ou seja, sua equação de movimento. Já na expressão (2.55) o termo entre colchetes na integral representa a equação de Euler-Lagrange do pêndulo, sendo essa a sua equação de movimento.

Com base nas expressões (2.54) e (2.55) e no funcional de energia, dado pela expressão (2.52), e ainda calculando as derivadas necessárias, obtêm-se as equações diferenciais para o sistema coluna-pêndulo.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI_o (1 + \eta x)^{n+2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{d}{dx} \left[N_o (1 + \eta x)^{n+1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + M_o (1 + \eta x)^n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + M_c \delta(x - L_1) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + m \delta(x - L) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \quad (2.56)$$

$$ml \delta(x - L) \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \cos(\theta) - ml \delta(x - L) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin(\theta) = 0$$

$$ml^2 \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) + K_p \theta + mgl \sin(\theta) + ml \delta(x - L) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \cos(\theta) = 0 \quad (2.57)$$

onde δ é a função delta de Dirac.