4 Solução do Sistema Coluna-Pêndulo

Nesse capítulo apresenta-se a metodologia para se obter as freqüências e modos de vibração do sistema coluna-pêndulo. Um exemplo de uma coluna com absorsor pendular é apresentado. A seguir, é realizada uma correlação do sistema coluna-pêndulo com um modelo discreto, donde são obtidas as equações de movimento que representam um sistema coluna-pêndulo com dois graus de liberdade. Por fim, faz-se uma análise linear das equações de movimento do sistema, obtendo-se algumas relações ótimas para o sistema de absorção.

4.1. Solução Modal

Para analisar o sistema coluna-pêndulo, é utilizado o método de Rayleigh-Ritz. Esse método apresenta-se como uma boa ferramenta na análise linear e não-linear, quando tem-se um sistema que apresenta condições de contorno e equações diferenciais não-lineares complexas. O método consiste na substituição, no funcional de energia, de uma função de aproximação, f_b, para a deflexão da coluna, usualmente na forma de séries:

$$f_b = \sum_{j=0}^{b} A_j \phi_j \tag{4.1}$$

onde A_j são constantes que multiplicam as funções ϕ_j e b é o número de termos necessário para a descrição do campo de deslocamentos com a precisão desejada. As funções ϕ_j são dadas pelos modos de vibrações das colunas apresentadas no capítulo anterior.

Substituindo-se a expressão (4.1) no funcional de energia (2.52) e integrando-se a expressão resultante, tem-se uma expressão em termos das constantes A_j e θ.

As constantes A_j e θ são determinadas utilizando o princípio de Hamilton e a expressão discretizada do funcional de energia. Portanto, tem-se $b+1$ equações de equilíbrio, encontradas a partir de:

$$\frac{\partial L_g}{\partial A_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{A}_j}\right) = 0 \qquad j = 1 \ldots b \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial L_g}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_g}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \tag{4.3}$$

Assim, chega-se a um sistema de equações algébricas com as amplitudes A_j e θ como sendo as únicas incógnitas do problema, resultando em um problema de autovalor, onde as freqüências naturais são os autovalores e os autovetores os respectivos modos de vibração.

4.2. Exemplo

O exemplo trata de um sistema coluna-pêndulo, onde a coluna tem seção transversal constante e está sujeita a um carregamento axial devido ao peso próprio. O sistema em estudo é apresentado na Figura 4.1.

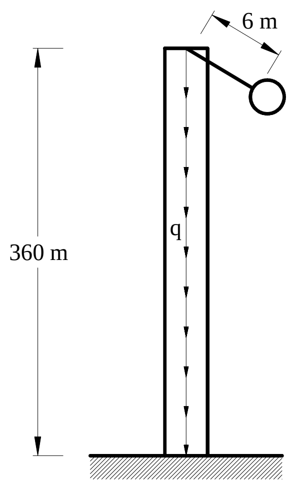


Figura 4.1: Exemplo em estudo.

Os demais parâmetros do sistema são:

- $L = 360\,\text{m}$, comprimento da coluna;
- $A = 2.976\ \text{m}^2$, área da seção transversal da coluna;
- $\rho = 4176\,\text{Kg/m}^3$, massa por unidade de volume da coluna;
- $E = 2.1\times10^{11}\ \text{N/m}^2$, modulo de elasticidade da coluna;
- $I = 133.61\,\text{m}^4$, momento de inércia da seção transversal da coluna;
- $m = 44740\,\text{Kg}$, massa do pêndulo (1.0% da massa total da coluna);
- $l = 6.0\,\text{m}$, comprimento da haste do pêndulo;
- $g = 9.81\ \text{m/s}^2$, aceleração da gravidade.

Esses dados foram baseados no trabalho de Pinheiro (1997), que considerou uma torre de seção variável com 362.7m de altura e uma massa total de 4473.9 t.

Seguindo a teoria clássica para sintonização do absorsor tem-se, para esses dados, que a freqüência do pêndulo isolado é aproximadamente igual à primeira freqüência natural da coluna sem absorsor ($\omega_c \approx \omega_p$).

Adotando a metodologia do item 4.1, considerando os três primeiros termos de (4.1), obtêm-se as quatro equações de movimento do sistema coluna-pêndulo.

$$\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{3.09EIA_1}{L^3} + Mg\left(-0.78A_1 + 0.21A_2 + 0.54A_3\right) + 0.25ML\ddot{A}_1 & \\
\quad + m\left(\ddot{A}_1 - \ddot{A}_2 + \ddot{A}_3\right) + ml\left(\cos(\theta)\ddot{\theta} - \text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2\right) = 0 & (4.4a) \\[2ex]
\dfrac{121.38EIA_2}{L^3} + Mg\left(0.21A_1 - 4.32A_2 - 0.94A_3\right) + 0.25ML\ddot{A}_2 & \\
\quad - m\left(\ddot{A}_1 - \ddot{A}_2 + \ddot{A}_3\right) - ml\left(\cos(\theta)\ddot{\theta} - \text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2\right) = 0 & (4.4b) \\[2ex]
\dfrac{951.63EIA_3}{L^3} + Mg\left(0.54A_1 - 0.94A_2 - 12.47A_3\right) + 0.25ML\ddot{A}_3 & \\
\quad + m\left(\ddot{A}_1 - \ddot{A}_2 + \ddot{A}_3\right) + ml\left(\cos(\theta)\ddot{\theta} - \text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2\right) = 0 & (4.4c) \\[2ex]
mgl\,\text{sen}(\theta) + ml^2\ddot{\theta} + ml\left(\ddot{A}_1 - \ddot{A}_2 + \ddot{A}_3\right)\cos(\theta) = 0 & (4.4d)
\end{array}\right.$$

onde A_j e θ são as incógnitas do problema.

É importante ressaltar que $M = A\rho$ e que o carregamento axial para esse caso é dado por $N = q(L - x)$, onde $q = Mg$.

Para obter as freqüências naturais e os modos de vibração é necessário que as equações de movimento (4.4) sejam linearizadas. Para linearizar, considera-se $\mathrm{sen}(\theta) \cong \theta$ e $\cos(\theta) \cong 1$. A seguir, adota-se como solução $A_j(t) = \overline{A}_j e^{\omega i t}$ e $\theta(t) = \overline{\theta} e^{\omega i t}$. Então, tem-se que o sistema de equações de movimento (4.4) se reduz ao sistema de equações algébricas:

$$
\begin{cases}
\dfrac{3.09EI\overline{A}_1}{L^3} + Mg\left(-0.78\overline{A}_1 + 0.21\overline{A}_2 + 0.54\overline{A}_3\right) + 0.25ML\omega^2\overline{A}_1 \\
\qquad + m\omega^2\left(\overline{A}_1 - \overline{A}_2 + \overline{A}_3\right) + ml\omega^2\overline{\theta} = 0 & \text{(4.5a)} \\[2ex]
\dfrac{121.38EI\overline{A}_2}{L^3} + Mg\left(0.21\overline{A}_1 - 4.32\overline{A}_2 - 0.94\overline{A}_3\right) + 0.25ML\omega^2\overline{A}_2 \\
\qquad - m\omega^2\left(\overline{A}_1 - \overline{A}_2 + \overline{A}_3\right) - ml\omega^2\overline{\theta} = 0 & \text{(4.5b)} \\[2ex]
\dfrac{951.63EI\overline{A}_3}{L^3} + Mg\left(0.54\overline{A}_1 - 0.94\overline{A}_2 - 12.47\overline{A}_3\right) + 0.25ML\omega^2\overline{A}_3 \\
\qquad + m\omega^2\left(\overline{A}_1 - \overline{A}_2 + \overline{A}_3\right) + ml\omega^2\overline{\theta} = 0 & \text{(4.5c)} \\[2ex]
mgl\overline{\theta} + ml^2\omega^2\overline{\theta} + ml\omega^2\left(\overline{A}_1 - \overline{A}_2 + \overline{A}_3\right) = 0 & \text{(4.5d)}
\end{cases}
$$

Com as equações e os parâmetros do problema definidos pode-se obter o sistema (4.6) do qual têm-se as freqüências naturais e os respectivos modos de vibração.

$$
|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0 \qquad (4.6)
$$

Em (4.6) **M** é matriz de massa, **K,** a matriz de rigidez, e ω, a freqüência natural do sistema coluna-pêndulo.

As quatro primeiras freqüências naturais do sistema acoplado são apresentadas na Tabela 4.1.

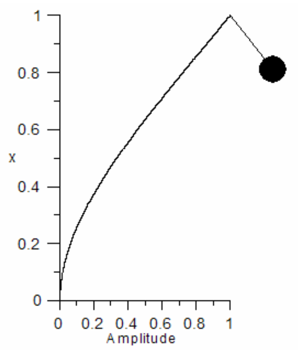
Tabela 4.1: Freqüências naturais do sistema (rad/s).

ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1.144791021	1.401425568	8.053438208	22.59139432

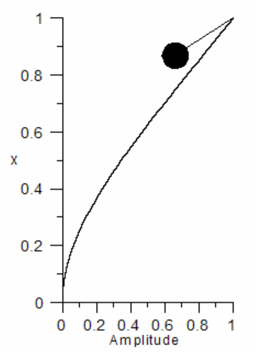
Determinadas as freqüências naturais, pode-se obter a configuração dos modos de vibração do sistema, que estão apresentados na Tabela 4.2 e Figura 4.2. Os mesmos estão normalizados de modo que as amplitudes máximas sejam unitárias.

Tabela 4.2: Modos de vibração do sistema.

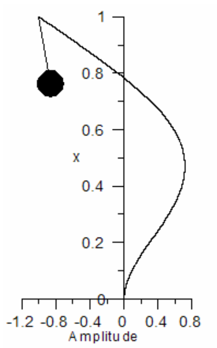
Constantes	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
$\bar{A}_1$	0.78372	0.65126	-0.00009	-0.00002
$\bar{A}_2$	-0.00356	0.00378	0.12867	0.00003
$\bar{A}_3$	0.00032	-0.00057	0.00005	-0.09135
$\bar{\theta}$	0.53022	-0.64364	0.022	0.01528



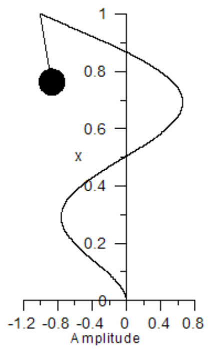
(a) Primeiro



(b) Segundo



(c) Terceiro



(d) Quarto

Figura 4.2: Modos de vibração do sistema coluna-pêndulo.

4.3. Justificativa para o Modelo de dois Graus de Liberdade

Com essa calibração, o pêndulo tem grande influência no primeiro e segundo modo de vibração. Comparando o terceiro e quarto modo da coluna com e sem pêndulo, verifica-se que a influência do pêndulo sobre esses modos é desprezível, o mesmo ocorrendo com as freqüências naturais associadas a esses modos, que são bem superiores às duas primeiras. No segundo modo de vibração o pêndulo atinge seu maior deslocamento angular. Como o pêndulo tem apenas influência no primeiro e segundo modo de vibração, adota-se para a análise do sistema um modelo simplificado com dois graus de liberdade, um grau referente ao deslocamento transversal da coluna e outro referente ao deslocamento angular do pêndulo.

4.3.1. Equações Não-Lineares do Modelo de Dois Graus de Liberdade

As equações de movimento do sistema coluna-pêndulo com dois graus de liberdade é obtida, novamente, através da metodologia explicitada no item 4.1. Considerando o primeiro termo da expressão (4.1), tem-se que o sistema de equações de movimento é dado por:

$$\begin{cases} \left(0.25ML + m\right)\ddot{w} + \left(\dfrac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right)w + ml\left(\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\mathrm{sen}(\theta)\right) = 0 & \text{(4.7a)} \\ ml^2\ddot{\theta} + mgl\,\mathrm{sen}(\theta) + ml\ddot{w}\cos(\theta) = 0 & \text{(4.7b)} \end{cases}$$

onde w é o deslocamento transversal da coluna e θ, o deslocamento angular do pêndulo.

4.4. Correlação com o Modelo Discreto de Dois Graus de Liberdade

O sistema coluna-pêndulo pode ser correlacionado com um modelo discreto de dois graus de liberdade, ou seja, o sistema massa-pêndulo apresentado na Figura 4.3.

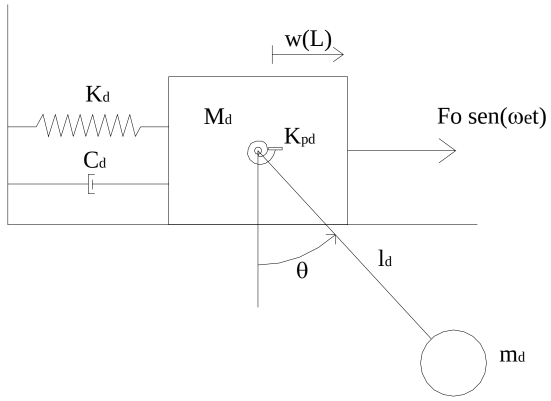


Figura 4.3: Sistema discreto massa-pêndulo.

Na Figura 4.3 M_d, C_d e K_d são a massa, o coeficiente de amortecimento e a rigidez elástica da massa do sistema discreto, respectivamente, F_0 é a amplitude da força de excitação e ω_e, a freqüência de excitação. Já m_d, C_{pd}, K_{pd}, l_d são, respectivamente, a massa do pêndulo, o seu coeficiente de amortecimento (não representado na Figura 4.3), a rigidez e o comprimento da haste do pêndulo.

As equações de movimento do sistema discreto são obtidas usando-se a equação de Lagrange em sua forma fundamental para coordenadas generalizadas q_i, que são dadas por:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T)}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(T)}{\partial q_i} + \frac{\partial(V)}{\partial q_i} + \frac{\partial(E)}{\partial\dot{q}_i} = Q \tag{4.8}$$

onde T é a energia cinética, V a energia potencial, E a energia dissipada e Q a força genérica externa.

As parcelas de energia são deduzidas da Figura 4.3, a saber:

$$T = \frac{1}{2}M_d\dot{w}^2 + \frac{1}{2}m_d v^2 \tag{4.9a}$$

$$V = \frac{1}{2}K_d w^2 + m_d gh + \frac{1}{2}K_{pd}\theta^2 \tag{4.9b}$$

$$E = \frac{1}{2}C_d\dot{w}^2 + \frac{1}{2}C_{pd}\dot{\theta}^2 \tag{4.9c}$$

Sabendo que h e v^2 são dadas pelas expressões (2.38) e (2.42), respectivamente, tem-se que as expressões de energia tomam a forma:

$$T = \frac{1}{2}M_d\dot{w}^2 + \frac{1}{2}m_d(\dot{w}^2 + 2\dot{w}l\dot{\theta}\cos(\theta) + l^2\dot{\theta}^2) \tag{4.10a}$$

$$V = \frac{1}{2}K_d w^2 + m_d gl(1-\cos(\theta)) + \frac{1}{2}K_{pd}\theta^2 \tag{4.10b}$$

$$E = \frac{1}{2}C_d\dot{w}^2 + \frac{1}{2}C_{pd}\dot{\theta}^2 \tag{4.10c}$$

Aplicando a equação de Lagrange e adotando como coordenadas generalizadas w e θ tem-se o sistema de equações de movimento.

$$\begin{cases} (M_d + m_d)\ddot{w} + C_d\dot{w} + K_d w + m_d l_d\left(\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2\mathrm{sen}(\theta)\right) = F_0\mathrm{sen}(\omega_\mathrm{e}\mathrm{t}) & (4.11a) \\ m_d l_d{}^2\ddot{\theta} + C_{pd}\dot{\theta} + K_{pd}\theta + m_d g l_d\mathrm{sen}(\theta) + m_d l_d\ddot{w}\cos(\theta) = 0 & (4.11b) \end{cases}$$

Então, faz-se uma correlação entre o sistema dado em (4.7), com o sistema da expressão (4.11), resultando nas equações de movimento que serão estudas no decorrer desse trabalho:

$$\begin{cases} (0.25ML + m)\ddot{w} + C\dot{w} + \left(\dfrac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right)w + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - \\ \qquad ml\dot{\theta}^2\mathrm{sen}(\theta) = F_0\mathrm{sen}(\omega_\mathrm{e}\mathrm{t}) & (4.12a) \\ ml^2\ddot{\theta} + C_p\dot{\theta} + K_p\theta + mgl\mathrm{sen}(\theta) + ml\ddot{w}\cos(\theta) = 0 & (4.12b) \end{cases}$$

Para facilitar a análise paramétrica, as equações de movimento (4.12) são transformadas em equações adimensionais. Para isso são adotados os parâmetros:

$\mu = m/0.25ML$, $\quad C/0.25ML = 2\xi_c\omega_c$, $\quad K/0.25ML = \omega_c{}^2$,

$C_p/m = 2\xi_p\omega_p l^2$, $\quad g/l = \omega_p{}^2$ e $\quad F_0/0.25ML = w_{es}\omega_c{}^2$.

onde ω_c é a freqüência natural da coluna, ω_p a freqüência natural do pêndulo, ξ_c a taxa de amortecimento da coluna, ξ_p a taxa de amortecimento do absorsor pendular e w_{es} o deslocamento estático do sistema principal.

Além disso, considera-se $w = l\zeta$, onde ζ é o parâmetro adimensional de deslocamento da coluna. Ainda, utilizando a variável auxiliar $\tau = \omega_e t$, onde ω_e é a freqüência de excitação, chega-se às equações de movimento adimensionalizadas:

$$\begin{cases} (1+\mu)\zeta,_{\tau\tau} + 2\xi_c \dfrac{\omega_c}{\omega_e}\zeta,_{\tau} + \left(\dfrac{\omega_c}{\omega_e}\right)^2 \zeta + \mu\theta,_{\tau\tau}\cos(\theta) - \\ \qquad \mu\theta,_{\tau}{}^2 \operatorname{sen}(\theta) = \zeta_s \left(\dfrac{\omega_c}{\omega_e}\right)^2 \operatorname{sen}(\tau) & (4.13a) \\ \mu\theta,_{\tau\tau} + 2\mu\xi_p \dfrac{\omega_p}{\omega_e}\theta,_{\tau} + \mu\zeta,_{\tau\tau}\cos(\theta) + \mu\left(\dfrac{\omega_p}{\omega_e}\right)^2 \operatorname{sen}(\theta) = 0 & (4.13b) \end{cases}$$

onde ζ_s refere-se ao parâmetro adimensional do deslocamento estático.

Chegando as equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 & (4.14a) \\ \dot{y}_2 = \dfrac{\zeta_s \left(\dfrac{\omega_c}{\omega_e}\right)^2 \operatorname{sen}(\tau) - 2\xi_s \dfrac{\omega_c}{\omega_e} y_2 - \left(\dfrac{\omega_c}{\omega_e}\right)^2 y_1 - \mu\dot{y}_4 \cos(y_3) + \mu y_4{}^2 \operatorname{sen}(y_3)}{(1+\mu)} & (4.14b) \\ \dot{y}_3 = y_4 & (4.14c) \\ \dot{y}_4 = -2\xi_p \dfrac{\omega_p}{\omega_e} y_4 - \dot{y}_2 \cos(y_3) - \left(\dfrac{\omega_p}{\omega_e}\right)^2 \operatorname{sen}(y_3) & (4.14d) \end{cases}$$

onde, y_1 é o deslocamento, $\dot{y}_1$ ou y_2, a velocidade e $\dot{y}_2$ a aceleração da coluna, e y_3 é o deslocamento, $\dot{y}_3$ ou y_4, a velocidade e $\dot{y}_4$ a aceleração do pêndulo absorsor.

4.5. Relação Freqüência-Amplitude da Coluna com Pêndulo Absorsor

Introduzindo-se um absorsor em um sistema de um grau de liberdade busca-se, obviamente, reduzir as amplitudes dos deslocamentos do sistema principal.

Assim, em um sistema massa-mola sob excitação harmônica, Den Hartog (1956), apud Pinheiro (1997), indica que a freqüência do absorsor deve ser escolhida de forma a igualar-se com a freqüência da perturbação. Nessa condição, e na ausência de amortecimento, a massa principal não vibra, pois o sistema de absorção oscila de forma que a força criada por sua presença é igual e oposta, a todo instante, à força de excitação. Com base nesses conceitos, pretende-se obter relações semelhantes para o absorsor pendular.

É necessário que as equações de movimento (4.12) sejam linearizadas, sendo que, para facilitar a análise, tomou-se a rigidez do pêndulo nula. As equações de movimento linearizadas são:

$$\begin{cases} \left(0.25ML + m\right)\ddot{w} + C\dot{w} + \left(\dfrac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right)w + ml\ddot{\theta} = F_0\mathrm{sen}(\omega_e \mathrm{t}) & (4.15a) \\ ml^2\ddot{\theta} + C_p\dot{\theta} + mgl\theta + ml\ddot{w} = 0 & (4.15b) \end{cases}$$

Adotando como solução $w = \overline{w}e^{i\omega_e t}$ e $\theta = \overline{\theta}e^{i\omega_e t}$, chega-se às equações algébricas:

$$\begin{cases} \left[\left(\dfrac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right) - C\omega_e - (m + 0.25ML)\omega_e^{\,2}\right]\overline{w} - ml\omega_e^{\,2}\overline{\theta} = F_0 & (4.16a) \\ -ml\omega_e^{\,2}\overline{w} + \left[ml(g - l\omega_e^{\,2}) + C_P\omega_e i\right]\overline{\theta} = 0 & (4.16b) \end{cases}$$

Para facilitar o desenvolvimento adotou-se:

$$Q_1 = \left(\frac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right) - C\omega_e - (m + 0.25ML)\omega_e^{\,2} \tag{4.17a}$$

$$Q_2 = -ml\omega_e^{\,2} \tag{4.17b}$$

$$Q_3 = ml(g - l\omega_e^{\,2}) \tag{4.17c}$$

Com isso tem-se as amplitudes do deslocamento horizontal da coluna e do deslocamento angular do pêndulo, que são:

$$\overline{w} = \frac{F_o(Q_3 + C_P\omega_e i)}{Q_1Q_3 - Q_2{}^2 + Q_1C_P\omega_e i} \tag{4.18a}$$

$$\overline{\theta} = \frac{-F_oQ_2}{Q_1Q_3 - Q_2{}^2 + Q_1C_P\omega_e i} \tag{4.18b}$$

Aplicando algumas operações de números complexos na equação referente ao deslocamento horizontal (4.18a), tem-se que a sua magnitude no domínio dos reais é dada por:

$$\left(\frac{\overline{w}}{w_{es}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right)^2\left(Q_3{}^2 + (C_P\omega_e i)^2\right)}{\left(Q_1Q_3 - Q_2{}^2\right)^2 + (Q_1C_P\omega_e i)^2} \tag{4.19}$$

sendo, $w_{es} = \dfrac{F_o}{\left(\dfrac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right)}$.

Da expressão (4.19) obtêm-se o fator de amplificação de deslocamento da coluna, que é dado, em sua forma adimensional, por:

$$FA_\zeta = \sqrt{\frac{\left(\mu\vartheta^2 - \mu\varpi^2\right)^2 + \left(2\mu\xi_p\vartheta\varpi\right)^2}{\left((\mu\vartheta^2 - \mu\varpi^2)(1 - 2\xi_c\varpi - \varpi^2 - \mu\varpi^2) - \mu^2\varpi^4\right)^2 + \left(2(1 - 2\xi_c\varpi - \varpi^2 - \mu\varpi^2)\mu\xi_p\vartheta\varpi\right)^2}} \tag{4.20}$$

onde ϑ é a relação entre a freqüência natural do absorsor pendular e a freqüência natural da coluna; μ a razão entre as massa do pêndulo e a massa modal da coluna e ϖ a relação entre a freqüência de excitação e a freqüência natural da coluna.

Nas Figuras 4.4 e 4.5 mostram-se a variação do fator de amplificação de deslocamento e rotação no topo da coluna, respectivamente, com a relação entre a freqüência de excitação e a freqüência natural da coluna, ϖ, para níveis crescentes de amortecimento do pêndulo absorsor.

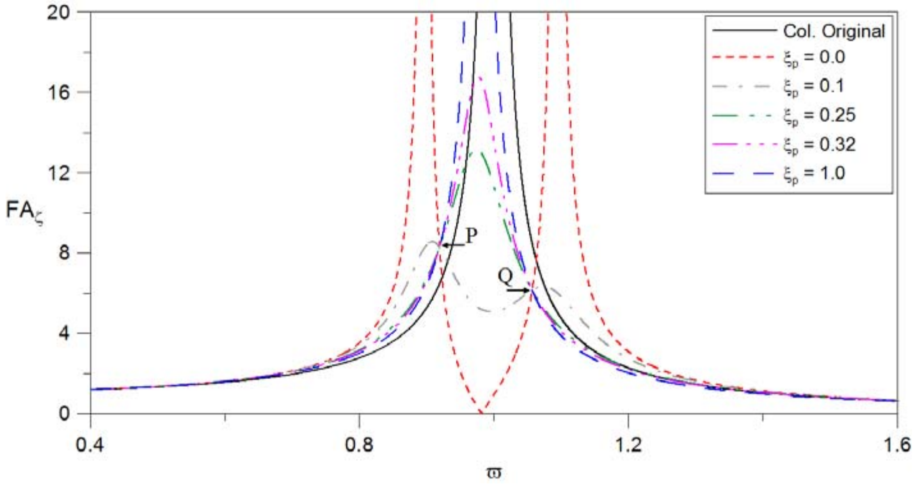


Figura 4.4: Comportamento do fator de amplificação de deslocamento da coluna.

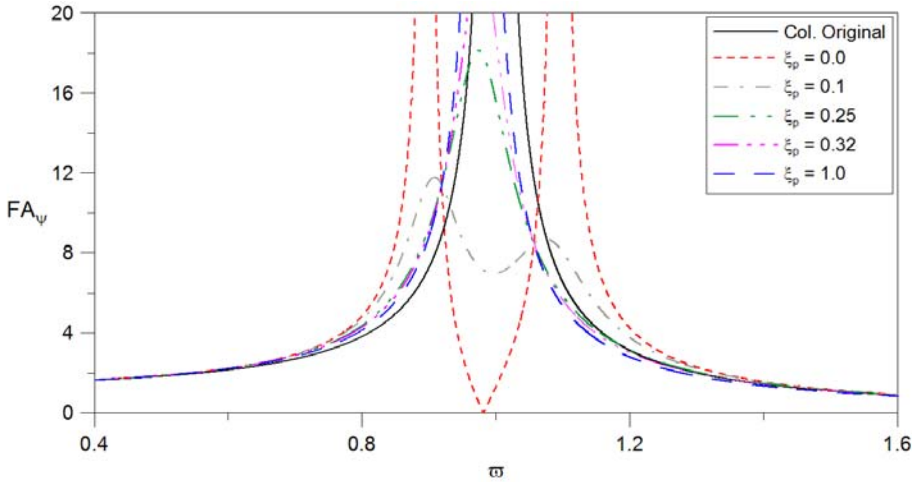


Figura 4.5: Comportamento do fator de amplificação da rotação no topo da coluna.

Observa-se que as amplitudes de deslocamento e rotação da coluna são proporcionais. Nota-se na Figura 4.4 que, comparando o comportamento da coluna com e sem absorsor, têm-se que o pêndulo não-amortecido causa a maior redução das amplitudes da coluna na região de ressonância, mas gera duas regiões próximas onde se faz sentir o efeito da ressonância relativas aos dois primeiros modos de vibração. À medida que se aumenta o amortecimento do pêndulo esses picos decrescem até atingir um valor ótimo. Se o amortecimento for aumentado além desse limite a amplitude máxima de vibração volta a crescer, e a eficiência do pêndulo absorsor vai decrescendo até que praticamente desaparece, como se observa na resposta para $\xi_p = 1.0$.

Nota-se, ainda, que as cinco curvas para os diferentes valores de amortecimento do pêndulo absorsor passam pelos pontos P e Q.

O projeto ótimo dos absorsores passivos, tal como proposto por Den Hartog (1956), é baseado na determinação dos valores de ϑ e ξ_p que fazem com que os pontos invariantes P e Q estejam a uma mesma altura e que o mais alto pico de amplitude passe por um deles. Ainda, esse critério assegura que a curva de resposta em freqüência da massa primária será a mais plana possível, tornando o absorsor eficiente em uma maior faixa de freqüências.

Então, inicialmente, é necessário encontrar os valores de ϖ para os pontos invariantes, onde FA_ζ seja independente do fator de amortecimento ξ_p. Reescrevendo a expressão (4.19) na forma:

$$\left(\frac{\overline{w}}{w_{es}}\right)^2 = \frac{D_1(C_P)^2 + D_2}{D_3(C_P)^2 + D_4} \tag{4.21}$$

onde,

$$D_1 = \left(\frac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right)^2 \omega_e^{\,2} \tag{4.22a}$$

$$D_2 = \left(\frac{3.09EI}{L^3} - 0.78Mg\right)^2 Q_3^{\,2} \tag{4.22b}$$

$$D_3 = Q_1^{\,2}\omega_e^{\,2} \tag{4.22c}$$

$$D_4 = \left(Q_1 Q_3 - Q_2^{\,2}\right)^2 \tag{4.22d}$$

pode-se visualizar, na expressão (4.22), que D_1 e D_3 independem de C_p, e que D_2 e D_4 são proporcionais a C_p. A resposta será independente de C_p se $D_1 / D_3 = D_2 / D_4$, o que ocorre nos pontos P e Q.

Resolvendo essas equações, obtém-se uma equação a ser resolvida em ω_e, cujos valores são os dois pontos independentes do amortecimento do absorsor.

$$Q_2^{\,4} - 2Q_1Q_3Q_2^{\,2} = 0 \tag{4.23}$$

Substituindo os valores de Q_1, Q_2 e Q_3 em (4.23), obtém-se a expressão (4.24), que representa a solução da expressão (4.23). Além das soluções triviais, a equação fornece os valores de ω_e nos pontos P e Q. São estas:

$$\omega_{eP-Q} = \sqrt{\frac{\omega_c^{\,2} + \omega_p^{\,2}(1+\mu) \pm \sqrt{\omega_c^{\,4} - 2\omega_c^{\,2}\omega_p^{\,2} + \omega_p^{\,4}(1+\mu)^2}}{(\mu+2)}} \tag{4.24}$$

Com os valores de ω_e obtidos nos pontos P e Q, é necessário ajustar a relação de freqüências ϑ para que esses pontos tenham a mesma ordenada. Para isso, deve-se substituir ω_{eP} na expressão (4.19), obtendo uma ordenada para a amplitude de deslocamento. Fazendo o mesmo para ω_{eQ}, tem-se a ordenada desse outro ponto. Igualando as duas, chega-se à equação que determina a calibração ótima do pêndulo com a estrutura:

$$\left[\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^2 (1+\mu)^2 - 1\right]\left[1 - 2\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^4 (1+\mu)^2\right]^{1/2} = 0 \tag{4.25}$$

Tomando-se o primeiro termo da expressão (4.25), tem-se que a razão de sintonia ótima é:

$$\vartheta_{ótimo} = \frac{\omega_p}{\omega_c} = \frac{1}{1+\mu} \tag{4.26}$$

O segundo termo da expressão (4.25) fornece as outras soluções, mas como essas possuem forma complexa, não têm significado físico.

Com a expressão (4.26), fica garantido que os pontos P e Q possuem a mesma ordenada. Para determinar o valor dessa ordenada é necessário substituir uma das raízes de (4.24) em (4.21), adotando a relação (4.26). Assim obtém-se:

$$FA_{\zeta\_ótimo} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \tag{4.27}$$

Se a inclinação da curva de resposta for igualada a zero em cada um dos pontos invariantes, obtêm-se para o amortecimento do absorsor pendular:

$$\xi_p^{\ 2} = \frac{\mu\left[3 \pm \sqrt{\dfrac{\mu}{\mu+2}}\right]}{8(1+\mu)} \tag{4.28}$$

Segundo Den Hartog (1956), uma boa estimativa para ξ_p ótimo é o valor médio da expressão (4.28).

$$\xi_{p\acute{o}timo} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} \tag{4.29}$$

Na Figura 4.6 comparam-se algumas curvas para diferentes valores de ξ_p com a curva obtida com a calibração ótima, dada por $\xi_{p\acute{o}timo} = 0.1201$.

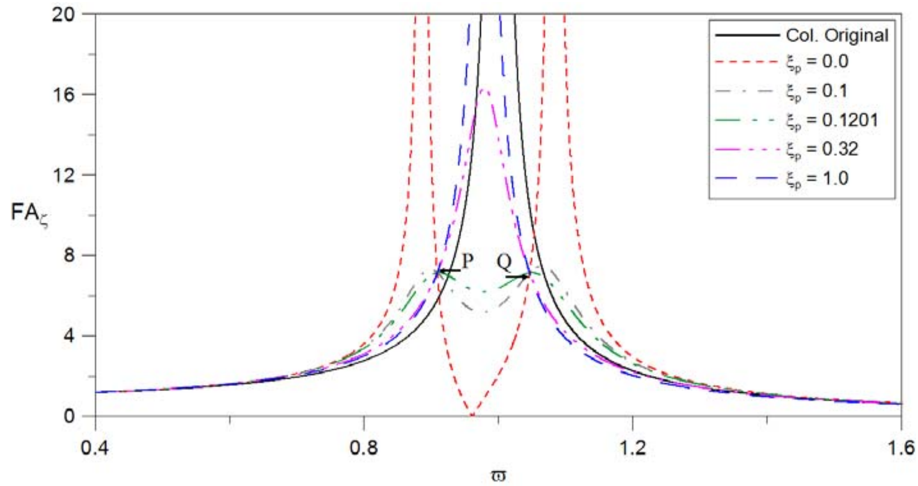


Figura 4.6: Comportamento do fator de amplificação de deslocamento da coluna para o ajuste ótimo.

Nota-se na Figura 4.6 que, para um $\mu = 0.04$ e $\xi_p = 0.0$, a resposta é bastante sensível a alterações em ϖ, pois qualquer mudança da magnitude de ϖ ótimo na região de ressonância leva a um alto valor de amplitude. Isso pode ser provocado, por exemplo, por variações na freqüência de excitação. Segundo

Franchek (1995), para reduzir a sensibilidade de ϖ pode-se aumentar a magnitude da relação de massas μ, aumentando, assim, a largura da faixa entre os picos de ressonância. Apresenta-se na Figura 4.7 o comportamento das amplitudes para diferentes magnitudes de μ e $\xi_p = 0.0$. Observa-se que, quanto maior a relação de massas, μ, maior é a largura da faixa entre os picos de ressonância, diminuindo assim a sensibilidade do sistema e conseqüentemente de variações na excitação e na freqüência da própria estrutura.

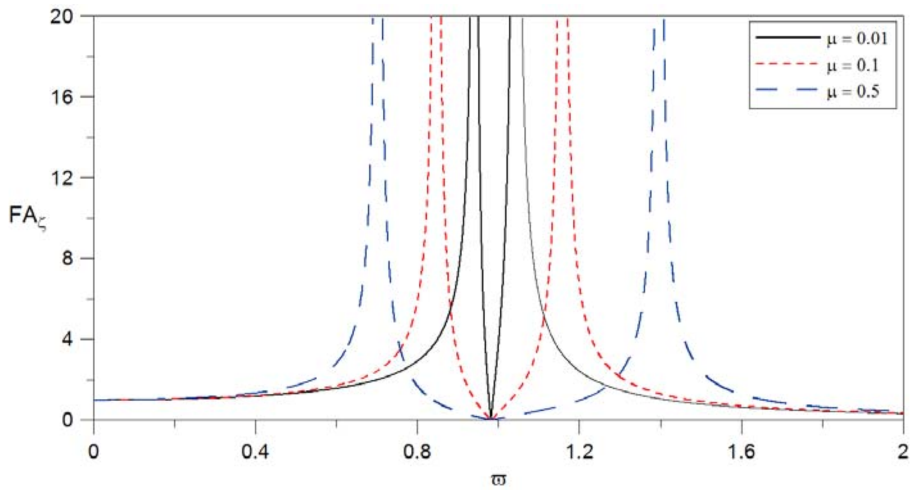


Figura 4.7: Comportamento do fator de amplificação de deslocamento da coluna para diferentes relações de μ.