4
Os Modelos

Serão descritos nesta seção os modelos relevantes para esta dissertação. Inicialmente será abordado o modelo original de Mehra e Prescott (1985) com processo de dotação seguindo a cadeia de Markov, bem como uma variação do modelo desenvolvido por Mehra (2003). Será abordado também o modelo desenvolvido por Weil (1989) em que o processo de dotação foi mantido como uma cadeia de Markov e não como um Markov Switching utilizado por outros autores no Brasil.

4.1. O Modelo Original de Mehra e Prescott

O modelo desenvolvido por Mehra e Prescott (1985) tenta explicar o alto valor do prêmio de risco verificado para os dados históricos norte americano. O modelo supõe que o numero de agentes idênticos e imortais na economia é muito grande e que maximizam suas utilidades intertemporais, bem como a existência de um bem de consumo perecível e recebido a cada período.

Neste modelo, um agente representativo resolve um problema de alocação maximizando a função de utilidade aditiva e separável no tempo:

$$Max \quad E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{j} U(C_{t+j}) \qquad (4.1.1)$$

Onde E_t representa a esperança condicionada ao conjunto de informações disponíveis no tempo t, β é o fator de desconto intertemporal que é igual à $1/(1+i)$, i é a taxa de desconto intertemporal, C_{t+j} representa o consumo per capita e $U(C_{t+j})$ é a função utilidade.

Supõe-se que uma existe unidade de produção produzindo bens de consumo perecíveis. Há somente um tipo de título e existe um mercado perfeitamente competitivo onde esses títulos são negociados. Como só existe uma unidade produtiva o retorno de suas ações é também o retorno de mercado. O bem de consumo produzido pela unidade de produção esta restrito a ser menor ou igual a produção total.

Adicionalmente, o investidor está sujeito à restrição orçamentária, que lhe permite consumir de acordo com a sua renda e o retorno que é proporcionado pelas ações, nas formas de ganhos de capital e recebimento de dividendos.

Considere o problema de escolha intertemporal de um investidor típico no tempo t. Ele iguala a perda de utilidade, decorrente da compra de uma unidade adicional do ativo existente, à utilidade esperada descontada resultante do consumo adicional no próximo período. Para carregar uma unidade adicional do ativo, p_t unidades de bens de consumo devem ser sacrificadas e o resultado na perda de utilidade é $p_t U^{'}(c_t)$. Pela venda dessa unidade adicional do ativo no próximo período, $p_{t+1}^e + y_{t+1}$ unidades adicionais de bens de consumo podem ser adquiridas e $\beta E_t[(p_{t+1}^e + y_{t+1})U^{'}(c_{t+1})]$ é o valor esperado da utilidade incremental no próximo período. No ótimo estas quantidades devem ser iguais e o resultado é a relação fundamental a seguir:

$$p_t^e U^{'}(c_t) = \beta E_t[(p_{t+1}^e + y_{t+1})U^{'}(c_{t+1})] \text{ ou}$$

$$P_t^e U^{'}(C_t) = \beta E_t[(P_{t+1}^e + D_{t+1})U^{'}(C_{t+1})] \qquad (4.1.2)$$

onde P_t^e, é o preço da ação no instante t. D_t são os dividendos pagos pela ação no tempo t, que como suposto é igual ao consumo(C) e ao produto(y), e $U^{'}$ é a primeira derivada da função utilidade.

Podemos reescrever essa equação na forma de retornos, que é a mais usual:

$$U^{'}(C_t) = \beta E_t[(1 + R_{t+1}^e)U^{'}(C_{t+1})] \qquad (4.1.3)$$

O lado esquerdo da equação representa a utilidade marginal de se consumir uma unidade monetária a menos no período t. Já o lado direito, representa a utilidade marginal esperada de investir essa unidade monetária em um ativo em t, vendê-lo em $t+1$ e consumir o rendimento $1 + R_{t+1}^e$.

O retorno bruto da ação é dado por:

$$1+R_{t+1}^{e} = \frac{P_{t+1}^{e}+D_{t+1}}{P_{t}^{e}} \qquad (4.1.4)$$

Para garantir que o equilíbrio no processo de retorno é estacionário a função utilidade está restrita a ser da classe de funções com aversão relativa ao risco constante, ou seja:

$$U(C)=\frac{C_t^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \text{ onde } 0<\alpha<\infty \qquad (4.1.5)$$

onde α é o coeficiente de aversão relativa ao risco, que mede a curvatura da função de utilidade. Quando α é igual a um, a função utilidade torna-se logarítmica.

Seja a produção na economia igual a Y_t, e a taxa de crescimento x_t estando sujeita a uma cadeia de Markov, assim:

$$Y_{t+1}=x_{t+1}.Y_t \qquad \text{onde } x_{t+1}\in\{\lambda_1,......,\lambda_n\} \text{ e } \Pr\{x_{t+1}=\lambda_j; x_t=\lambda_i\}=\phi_{ij}$$

Assume-se que a cadeia de Markov é ergódiga, ou seja, todos os estados são recorrentes e aperiódicos. Os λ_i são todos positivos e $y_0>0$. Esta representação modela a influência dos ciclos econômicos na taxa de crescimento do produto.

Para qualquer ativo com processo de pagamento $\{\ d_s\ \}$, considerando que todos ativos são ex-dividendos e ex-juros, o seu preço de equilíbrio pode ser formulado da seguinte forma no período t:

$$P_t^e = E_t[\sum_{s=t+1}^{\infty}\beta^{s-t}U^{'}(y_s)d_s / U^{'}(y_t)] \qquad (4.1.6)$$

O processo de pagamento de dividendos para a ação nesta economia é$\{\ y_s\ \}$. Conseqüentemente, usando o fato de que $U^{'}(C)=C^{-\alpha}$ temos:

$$P_t^e = P_t^e(x_t,y_t) = E[\sum_{s=t+1}^{\infty}\beta^{s-t}\frac{y_t^{\alpha}}{y_s^{\alpha}}y_s|x_t,y_t] \qquad (4.1.7)$$

No equilíbrio, o consumo total é igual aos dividendos e produção totais, então podemos fazer $C_t=D_t$. Além disso, como os valores de equilíbrio das economias estudadas são funções invariantes no tempo e do estado (x_t,y_t), o t

pode ser omitido. Com isso podemos redefinir os estados como sendo (c,i), onde $c = y_t$ e $x_t = \lambda_i$, assim o preço da ação em (4.1.7) satisfaz:

$$P^e(c,i) = \beta \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} (\lambda_j c)^{-\alpha} [P^e(\lambda_j c, j) + c\lambda_j] c^{\alpha} \tag{4.1.8}$$

Usando do fato de que o preço da ação $P^e(c,i)$ é homogêneo de grau um em e c, podemos escrever a função acima como:

$$P^e(c,i) = w_i c \tag{4.1.9}$$

onde w_i é uma constante. Substituindo (4.1.9) em (4.1.8) e dividindo por c temos:

$$w_i = \beta \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} \lambda_j^{(1-\alpha)} (w_j + 1) \quad \text{para } i = 1,....,n \tag{4.1.10}$$

Este é um sistema com n equações lineares e n variáveis. Assumindo que a existência do equilíbrio garante que existe uma única solução positiva para o sistema.

Se o estado corrente é (c,i), e o próximo é $(\lambda_j c, j)$, então o retorno da ação será:

$$r_{ij}^e = \frac{P^e(\lambda_j c, j) + \lambda_j c - P^e(c,i)}{P^e(c,i)} = \frac{\lambda_j (w_j + 1)}{w_i} - 1 \tag{4.1.11}$$

Logo, quando o estado corrente é i, o retorno esperado das ações é:

$$R_i^e = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} r_{ij}^e \tag{4.1.12}$$

Para o ativo livre de risco obtemos pela equação (4.1.7) o seguinte:

$$P_i^f = P^f(c,i) = \beta \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} U'(\lambda_j c) / U'(c) = \beta \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} \lambda_j^{-\alpha} \tag{4.1.13}$$

O retorno esperado será:

$$R_t^f = \frac{1}{P_t^f} - 1 \tag{4.1.14}$$

Como mencionado antes no modelo, as estatísticas que são provavelmente mais robustas para as especificações do modelo são as médias ao longo do tempo. Considerando $\pi \in R^n$ o vetor das probabilidades estacionárias em i. Isto ocorre já que a cadeia de Markov em i foi suposta ergódiga. O vetor π é a solução do sistema de equações.

$$\pi = \phi^T \pi$$

$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ e $\phi^T = \{\phi_{ji}\}$, a matriz transposta de ϕ, que possui como elementos ϕ_{ij}.

Os retornos esperados das ações e dos ativos livres de risco serão respectivamente:

$$R^e = \sum_{i=1}^{n} \pi_i R_i^e \quad \text{e } R^f = \sum_{i=1}^{n} \pi_i R_i^f \tag{4.1.15}$$

Assim o prêmio de risco em ações pelo modelo é dado por $R^e - R^f$.

Os parâmetros que definem as preferências são α e β, e os parâmetros que definem a tecnologia são os elementos de $\lfloor \phi_{ij} \rfloor$ e $\lfloor \lambda_{ij} \rfloor$. Os autores restringem a cadeia de Markov a dois estados onde:

$$\lambda_1 = 1 + \mu + \delta; \qquad \lambda_2 = 1 + \mu - \delta;$$

$$\phi_{11} = \phi_{22} = \phi; \qquad \phi_{12} = \phi_{21} = (1 - \phi).$$

Os parâmetros μ, ϕ e δ, onde $\delta > 0$ e $0 < \phi < 1$, agora definem tecnologia. Esta particular parametrização foi selecionada porque permite de forma independente variar: a taxa média de crescimento do produto alterando μ, variar o consumo alterando δ e variar o coeficiente de autocorrelação de primeira ordem, alterando ϕ. Tais parâmetros foram selecionados para que a média da taxa de crescimento do consumo per capita, o desvio padrão da taxa de crescimento do consumo per capita e o coeficiente de autocorrelação de primeira ordem igualasse os dados estimados com os dados históricos.

Encontrados então os valores dos parâmetros mencionados acima, o modelo visa encontrar valores para α e β que possibilitem o modelo equiparar as médias do prêmio de risco das ações e da taxa de juros observadas na economia americana durante o período de 1889-1978.

α é o parâmetro de aversão relativa ao risco que mede o desejo de que o consumo seja constante em diferentes estados e períodos. Baseado nas diversas teorias sobre o valor de α, Mehra e Prescott assumem que α poderia variar de zero a dez.

O fator de desconto intertemporal β denota o grau de “paciência” dos agentes. Quanto maior o seu valor, maior a importância do consumo futuro na utilidade. Ou seja, quanto mais pacientes são os indivíduos, mais eles abrem mão do consumo presente por consumo futuro. No modelo foi permitida a variação do β entre zero e um.

Os autores não conseguiram reproduzir a média histórica do prêmio no mercado acionário de 6,18% ao ano, sobre a média da taxa de juros de 0,8% ao ano. O valor obtido para o prêmio (0,35%) não está nada perto do valor verificado. O fato de Mehra e Prescott não conseguirem explicar tal valor do prêmio de risco através de teorias do ciclo econômico, como o consumo intertemporal, é o motivo pelo qual passa a existir o chamado *puzzle*.

Os dados utilizados por Mehra e Prescott compõem-se de cinco séries no período de 1889-1978. As séries são descritas abaixo:

1. Retorno médio anual do índice Standard e Poors 500 dividido pelo deflator de consumo;
2. Dividendos reais anuais para a série do índice Standard e Poors;
3. Consumo real per capita de bens não-duráveis e serviços;
4. Série do deflator de consumo;
5. Taxas nominais em ativos livres de risco de curto prazo, títulos soberanos do governo norte americano de 90 dias para o período de 1931-1978, *treasury certificates* para o período de 1920-1930 e papéis comerciais de 60 a 90 dias para o período antes de 1920.

A taxa média de retorno do ativo livre de risco verificada no período foi de 0,80%. A média do retorno do S&P 500 no período considerado foi de 6,98%. Isso gerou um prêmio de risco médio de 6,18%.

Através das séries utilizadas, descritas acima, encontraram-se os seguintes valores para os parâmetros tecnológicos: $\mu = 0{,}018$, $\delta = 0{,}036$ e $\phi = -0{,}14$. O objetivo é encontrar valores de α e β que resultem no prêmio de risco observado no período.

Na figura 4 podemos perceber que quando o β é fixado no nível tido como ideal em termos anuais, o prêmio de risco gerado pelo modelo é igualado ao prêmio empírico com o α igual a 17,6. Entretanto os níveis de R^e e R^f do modelo são $R^e = 0,22$ e $R^f = 0,158$, ou seja, bem maiores que os valores $R_a^e = 0,070$ e $R_a^f = 0,008$ da amostra. No intervalo de α tido como aceitável por Mehra e Prescott, ou seja, de 0 a 10, o prêmio gerado pelo modelo é bem menor que o prêmio empírico, indo de 0 até 0,027 de acordo com o α.

Nas equações (4.2.5) e (4.2.7) que serão vistas seção 4.2, temos a noção de como α e o β influenciam os retornos. Variáveis que aumentam o desejo por poupança como o fator de desconto intertemporal e a poupança precaucionária variam negativamente com os retornos, ou seja, com o seu aumento os valores de R^e e R^f são reduzidos. A influência de α contudo é duplamente verificada. Valores pequenos de α tendem a causar elevação nos retornos e a medida que seu valor cresce o termo quadrático passa a dominar reduzindo os retornos.

Para a economia americana o α passa a dominar a partir de 16. Com o α igual a 17 o R^f passa de 16% para 15,9% e R^e de 21,4% para 21,8%. O prêmio de risco é igualado com o α igual a 17,6; $R^e = 0,22$ e $R^f = 0,158$, contra $R_a^e = 0,070$ e $R_a^f = 0,008$ da amostra. Apesar do aumento de α e redução de R^f, os retornos continuam longe do correto. Para β igual a 0,98 e α indo 17,6 até 35 o prêmio é aumentado de 0,062 para 0,133 e o R^f é reduzido de 0,158 para 0,011. Com α maior que 35 R^f fica negativo mostrando que o ajuste deve ser feito pelo aumento de β que aumenta o desejo de consumo futuro e causa a conseqüente queda de R^f.

Para a economia americana o valor de α e β que igualou o prêmio de risco e o retorno dos ativos foi α igual a 18,3 e β igual a 1,12. Com este valor de β Weil (1989) chamou atenção para o que ficou conhecido *Risk Free Puzzle* (RFP).

Quando o valor de α é alto os agentes têm maior propensão à suavização do consumo, buscando passar recursos em tempo de bonança para períodos de escassez. O aumento da poupança precaucionária eleva o preço do ativo sem risco reduzindo a sua rentabilidade. Como no mercado americano a taxa de crescimento do consumo é relativamente alta e a restrição ao crédito pode ser considerada pequena em relação ao Brasil, os consumidores não têm expectativa de consumo baixo no futuro causando menor incentivo a poupança e maior consumo no presente. A menor demanda por títulos reduz seu preço aumentando a sua rentabilidade e o ajuste no modelo deve ser feito pela elevação de β e conseqüente aumento do peso do consumo futuro na utilidade do agente permitindo a redução de R^f.

Na tabela 2 verificamos o aumento de β, para um determinado α, reduzindo os valores de R^e e R^f sem modificar muito o prêmio de risco. O prêmio e os retornos são encontrados com α igual a 18,3 e β igual a 1,12 como pode ser verificado na figura 5.

α	β	Re	Rf	Prêmio
17,6	0,98	0,220	0,158	0,062
	1,12	0,068	0,010	0,058
18,3	0,98	0,221	0,156	0,065
	1,12	0,070	0,008	0,062

Tabela 2-Resultados Gerados pela Variação dos Parâmetros

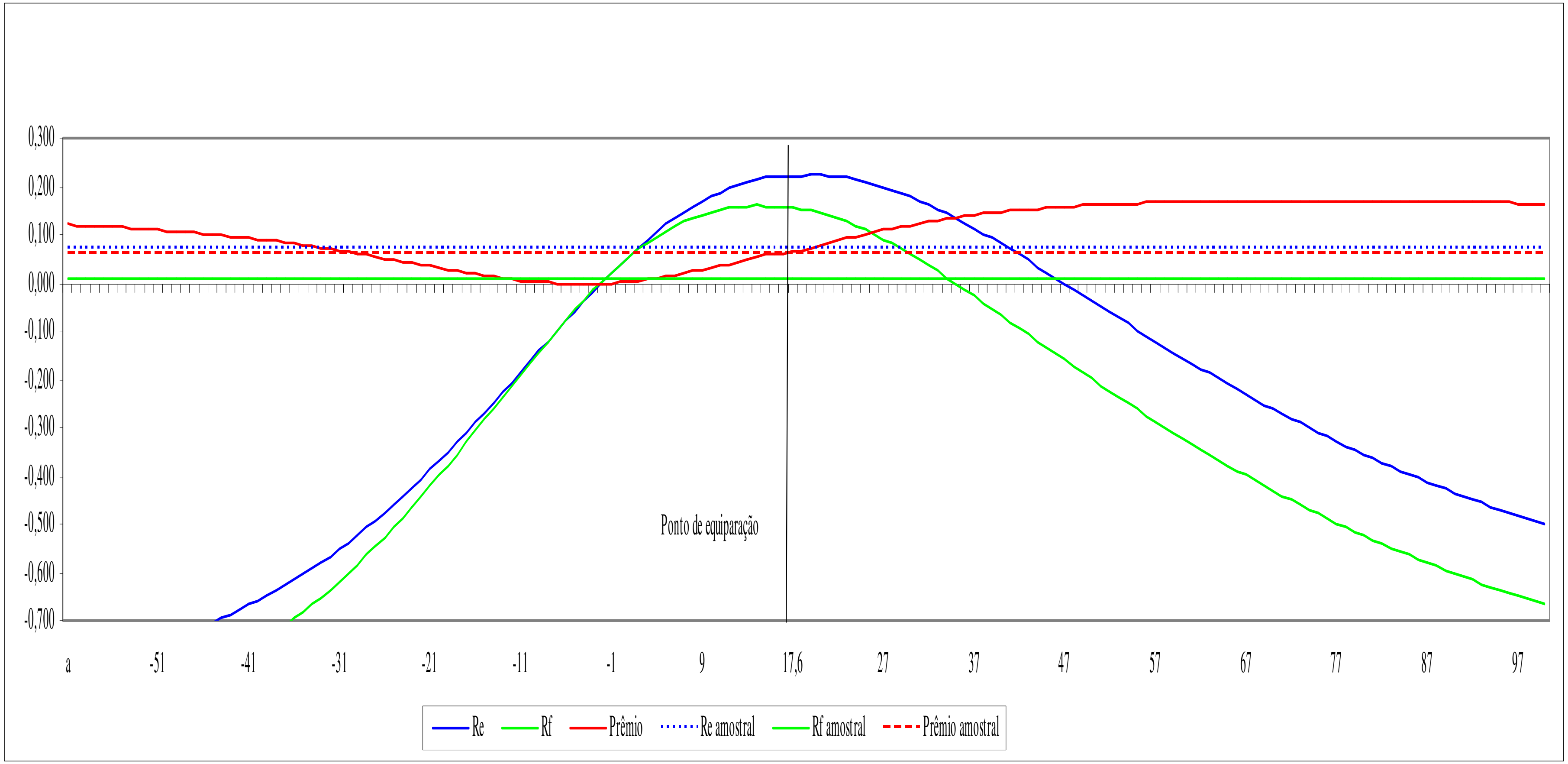

Figura 4-Modelo Mehra e Prescott com α=17,6 e β=0,98

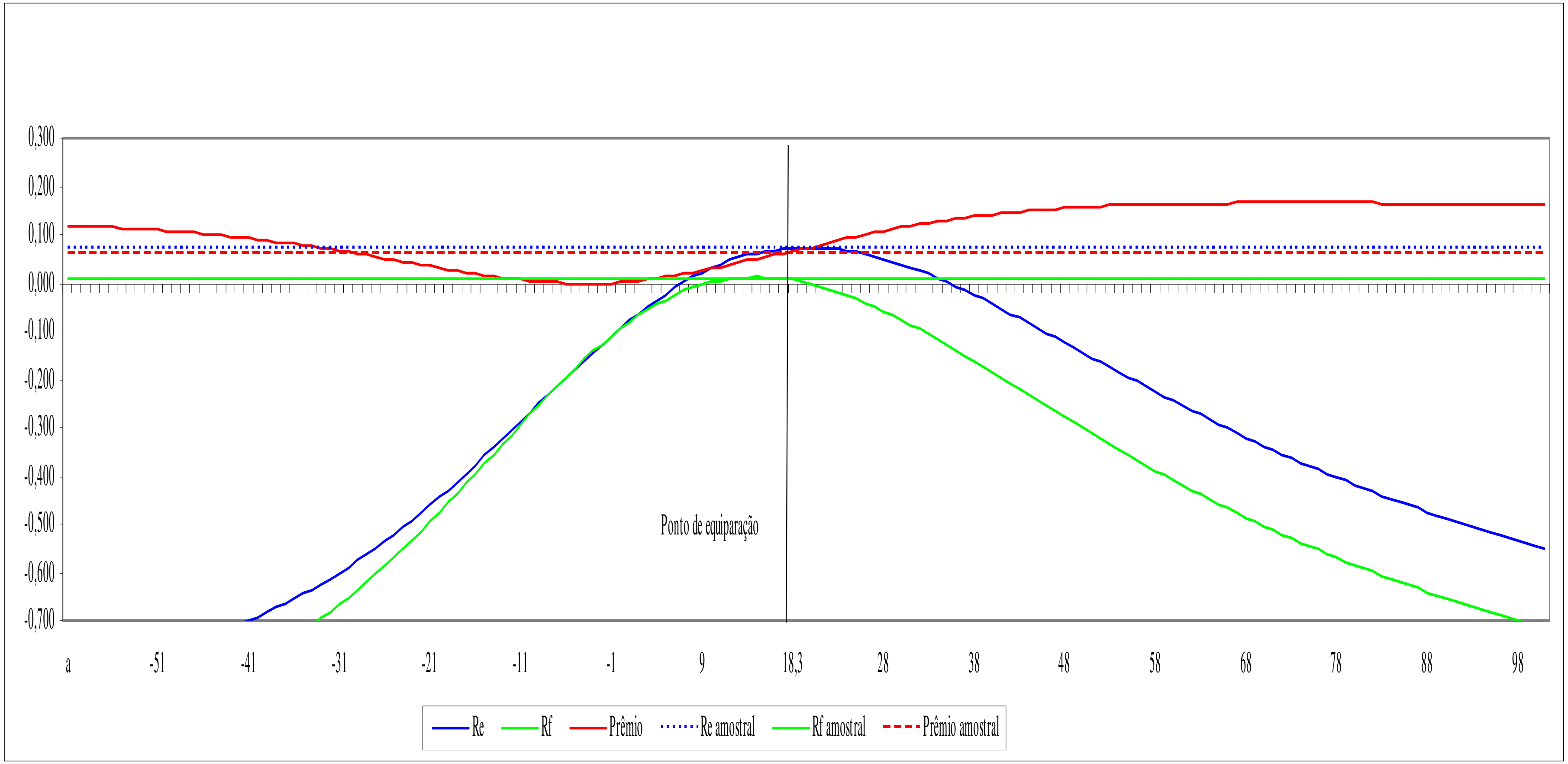

Figura 5-Modelo de Mehra e Prescott com α=18,3 e β=1,12

4.1.1. Resultados do Modelo no Período Completo

Na figura 6 podemos perceber que quando o β é igual a 0,995 e o α é igual a 5,23 o prêmio de risco gerado pelo modelo é igualado ao prêmio empírico. Entretanto os níveis de R^e e R^f do modelo são $R^e = 0,021$ e $R^f = -0,018$, ou seja, bem menores que os valores $R^e_a = 0,072$ e $R^f_a = 0,032$ da amostra verificados na Tabela 1. No intervalo de α tido como aceitável por Mehra e Prescott o prêmio gerado pelo modelo é menor no intervalo de 0 a 5, 22, indo de 0 a 0,0394 e maior no intervalo de 5,24 ate 10, indo de 0,0396 a 0,0980.

Para os valores da economia Brasileira o α passa a dominar a partir de 2. Quando o α é igual a 3 o R^f do modelo passa de 0,009 para 0,005 e R^e do modelo passa de 0,02 para 0, 023. Logo aumentos em α reduziram o R^f e o que é buscado é o seu aumento. O ajuste brasileiro é o oposto ao caso americano, pois devemos aumentar os valores de R^e e R^f reduzindo o valor de β e conseqüentemente reduzindo o desejo de consumo futuro aumentando assim o R^f. A figura 7 mostra que o prêmio de risco e o retorno dos ativos da amostra são obtidos pelo modelo quando α é igual a 5,12 e β igual a 0,9476. Também ao contrário dos dados americanos, não surgiu o *Risk Free Puzzle* (RFP).

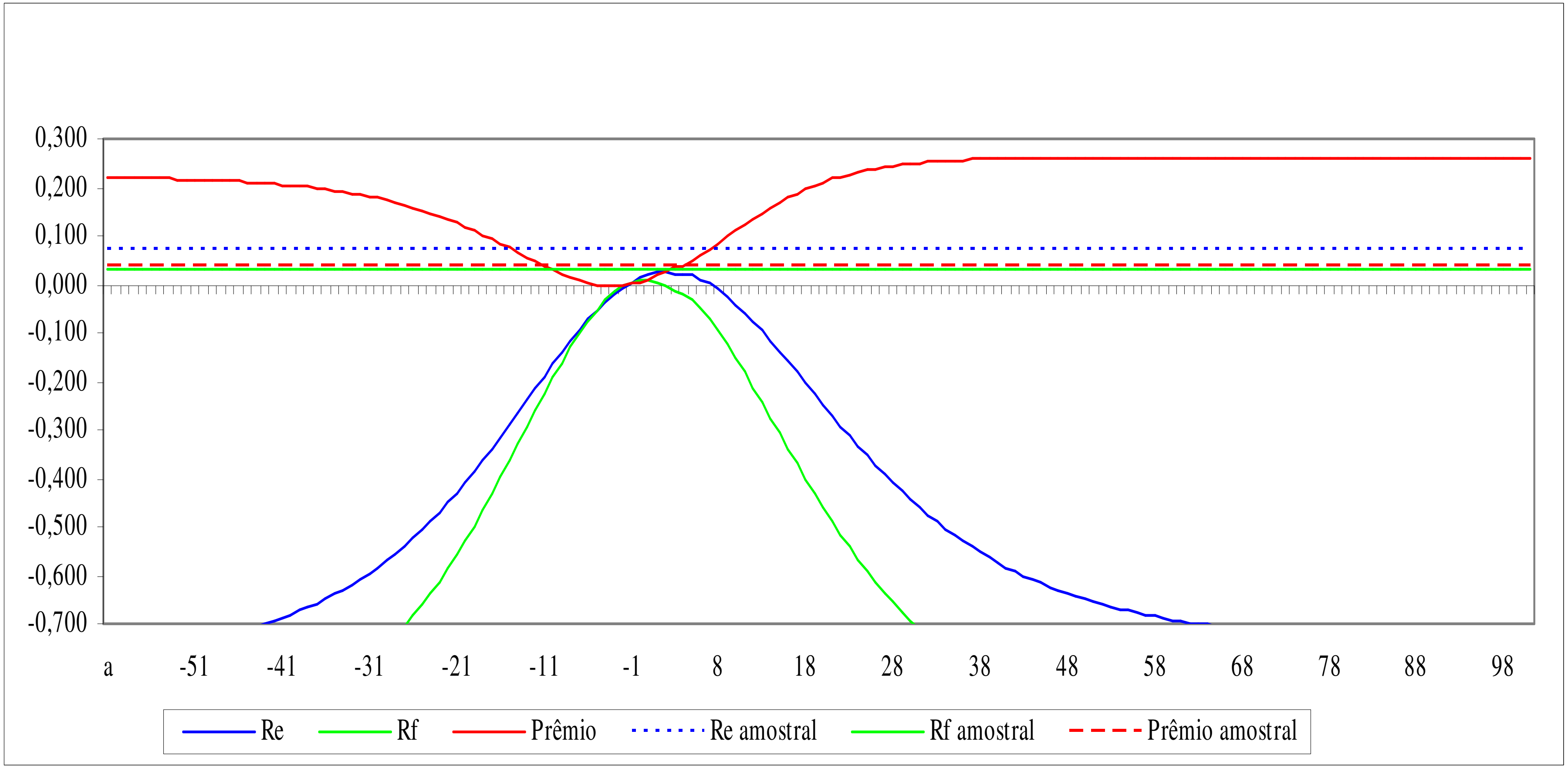

Figura 6-Modelo de Mehra e Prescott com α=5,23 e β=0,995

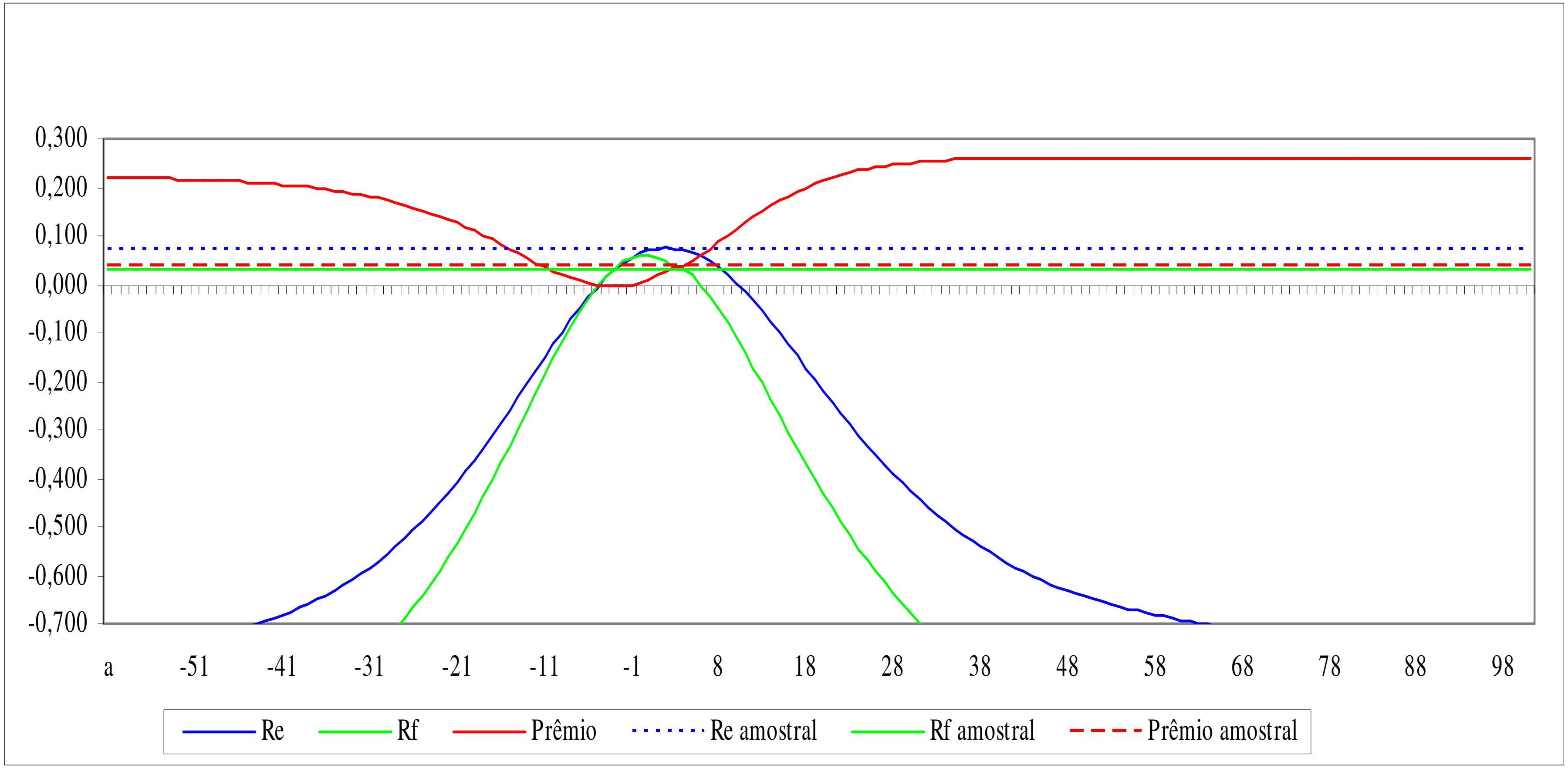

Figura 7-Modelo de Mehra e Prescott com α=5,12 e β=0,9476

α	β	R^e	R^f	**Prêmio de risco**
1,5	0,995	0,017	0,010	0,0073
2,5	0,975	0,022	0,028	0,0143
3,5	0,965	0,056	0,033	0,0228
5,12	**0,9476**	**0,072**	**0,032**	**0,0395**

Tabela 3-Resultados Gerados pelo Modelo

A Tabela 3 mostra como o prêmio de risco e os retornos são sensíveis aos parâmetros α e β . O prêmio varia positivamente com α e negativamente com β . Quando α = 5,12 e β = 0,9476 os retornos são reproduzidos pelo modelo. Como o β (fator de desconto intertemporal) e o α (coeficiente de aversão a risco) estão dentro dos limites considerados satisfatórios podemos concluir pela inexistência do *Equity Premium Puzzle* no caso brasileiro no período 1990-2005.

O resultado do trabalho de Sampaio (1999) realizado com dados de 1980 a 1998 obteve β igual a 0,91 e α igual a 6,1. O valor do β quando anualizado é equivalente a 0,68 sendo considerado demasiadamente baixo se comparado ao valor considerado ideal na literatura (β=0,98). O autor concluiu pela existência de um *puzzle brasileiro,* e tal valor só se justificaria se o Brasil tivesse uma população com idade bastante avançada e despreocupada com o futuro de seus descendentes.

Um outro motivo e mais aceitável pelo autor foi a presença de grande instabilidade econômica no período de 1980 a 1994. Tal ambiente levou os agentes econômicos a requererem maior remuneração dos títulos públicos, que são encarados como ativos sem risco.

Nesta dissertação um β de 0, 9476 (equivalente a 0,80 a.a) é maior do que o valor de 0,64 encontrado por Sampaio (1999) e igual ao valor de 0,80 encontrado por Domingues (2000). A explicação para estes baixos valores de β pode estar ligada não a fatores como idade da população ou a consideração dos títulos públicos como ativos arriscados, mas sim a questões como a capacidade de consumo da maior parte da população que, segundo alguns trabalhos feitos no

Brasil, está sujeita a consumir a renda disponível ou corrente, como defendido por Keynes na Teoria Geral.

Existem algumas abordagens como a de Irving Fisher a respeito do consumo e da escolha intertemporal argumentando que as famílias decidem quanto consumir e poupar hoje, levando em conta o futuro. A idéia principal de maior consumo hoje e poupança menor significar um menor consumo amanhã está correta, porém é preciso verificar se existe o que poupar, ou melhor, se a renda disponível é suficiente para o consumo necessário e eventual poupança.

Na abordagem de Fisher existe a possibilidade de tomada de empréstimo podendo o consumo ser maior que a renda atual. Esta idéia também é correta, contudo no caso brasileiro sabemos por trabalhos como o de Reis (1988) da existência de um ciclo comum entre renda e consumo no Brasil, uma vez que cerca de 80% da renda está nas mãos de consumidores restritos à liquidez. Como em Campbell e Mankiw (1988) uma fração dos agentes consome segundo a TRP e outra parcela segue a regra de consumir a renda corrente devido a restrição ao crédito.

Poderíamos explicar o baixo valor de β e conseqüentemente o maior consumo presente fazendo uso da função Keynesiana em que bastaria a política econômica atingir a renda disponível das pessoas para o consumo agregado sofrer alterações. Se lembrarmos a explosão de consumo presente após o lançamento de um novo plano econômico, que tinha como causa o aumento da renda disponível real, poderíamos considerar neste trabalho o consumo dependendo basicamente da renda disponível o que é explicado em Reis (1988).

Se considerarmos o modelo de Friedman, somente políticas que atinjam a renda permanente alterariam o consumo. Nela o consumo depende da riqueza e pode explicar as diferenças entre as funções de consumo de curto e longo prazo. Como constatado por Simon Kuznets (1977) o consumo depende da riqueza no longo prazo, pois no curto prazo a riqueza do agente muda pouco e a renda disponível é o principal determinante do consumo. Como a série utilizada neste trabalho é relativamente curta, abrangendo um período de 15 anos, a consideração do consumo variando em função da renda disponível ou corrente e o fato da maioria dos consumidores (80%) serem restritos a liquidez é uma boa justificativa para os pequenos valores de β encontrados na maioria dos trabalhos feitos no Brasil.

Outra possível explicação pode ser a influência da instabilidade econômica refletida nos dados utilizados na maioria dos trabalhos feitos no Brasil e em pequena parte dos dados utilizados neste trabalho. Com a separação da série de dados em dois períodos será possível verificar o comportamento da taxa de desconto intertemporal (β) quando sujeita a contextos econômicos diferentes.

A análise mostrada na tabela 4 pode dar uma melhor idéia do que aconteceu na economia brasileira e seus reflexos nos dados utilizados em alguns trabalhos realizados no Brasil. A tabela 4 foi baseada no trabalho Cysne (2005).

Os dois maiores valores para a taxa de crescimento do consumo estão neste trabalho e no trabalho de Cysne, pois abordam períodos de altos déficits em conta corrente na maior parte das vezes provocado por taxas de câmbio sobre valorizadas que favoreceram as importações ocasionando redução no nível de preços e aumento do nível de consumo.

A razão desvio padrão e média da taxa de crescimento do consumo só é maior do que a encontrada em Cysne. A diferença é atribuída ao período de 1990 a 1992, não abordado pelo autor, onde a média da taxa de crescimento do consumo per capita foi negativa (-0,2%) como decorrência do seqüestro de liquidez que bloqueou todas as aplicações financeiras acima de US$ 1.200 ao câmbio da época.

Todos os trabalhos citados na tabela 4 abrangem o período do Plano Real, entretanto a maior parte dos dados abrange períodos de grandes desequilíbrios na economia, com vários planos econômicos ineficientes e altas taxas de inflação. Na figura 8 verificamos os citados desequilíbrios presentes no período de 1980 a 2005 e podemos verificar que os trabalhos de Sampaio (1999) e Domingues (2000) foram feitos com a maior parte dos dados influenciados por Planos econômicos ineficientes, com exceção do Plano Real, altas taxas de inflação, com exceção do período 1994:3 a 1997:4.

O prêmio de risco supera o valor encontrado por Cysne (2005) e tal diferença também é atribuída ao período de 1990 a 1992, onde o retorno médio dos ativos com risco foi de 77,88 % a.a.

A principal diferença desta dissertação para o trabalho de Cysne (2005) está no resultado encontrado, já que foi o oposto. O período utilizado foi parecido, contudo os anos 1990:1 a 1992:4 não foram abordados pelo autor. A diferença nos resultados pode estar ligada à ausência dos anos anteriormente citados ou a composição das séries da taxa SELIC e do IBOVESPA.

Autores	Período	Tx. cresc.consumo per capta(x)		R^e		R^f		Prêmio
		E(x)	$\sigma(x)$	$E(R^e)$	$\sigma(R^e)$	$E(R^f)$	$\sigma(R^f)$	
Sampaio	1980-98	2.02	7.2	29.13	29.30	7.82	9.70	21.31
Bonomo e Domingues	1986-98	0.80	6.80	24.21	31.12	13.96	6.28	10.25
Cysne	1992-04	3.12	4.80	31.33	24.89	15.41	4.82	15.92
Santos	**1990-05**	**3.48**	**6.85**	**36.07**	**27.83**	**13.48**	**5.11**	**22.59**

Tabela 4-Dados (%) da Tx. de Cresc. do Consumo per-capita e Retornos Reais

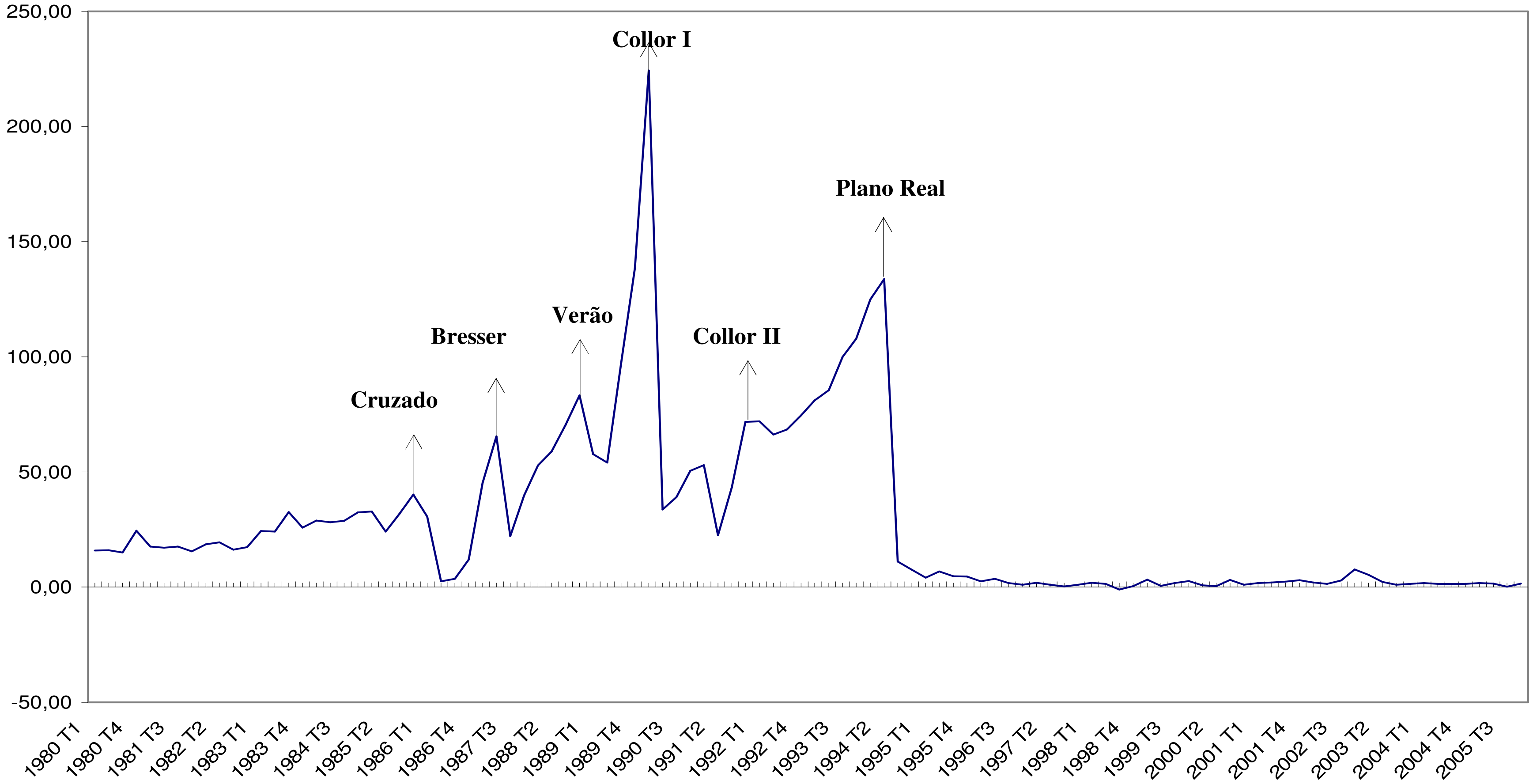

Figura 8-INPC e Planos Econômicos no Período de 1980 a 2005

4.1.2.
Resultados do Modelo no Primeiro Sub-Período

De 1990:1 a 1994:2 verificamos que com o β fixado no nível tido como ideal (0,995 a.t) o prêmio de risco gerado pelo modelo não é igualado ao empírico para valores α indo de -60 a 100. Na figura 9 verificamos que o prêmio é reproduzido pelo modelo quando β é igual a 0,51 e α igual a 18,8, ou seja, os dois valores estão muito diferentes dos aceitáveis pela literatura. Os níveis de R^e e R^f do modelo são $R^e = 0,044$ e $R^f = -0,0709$, logo bem menores que os valores $R_a^e = 0,1424$ e $R_a^f = 0,027$ da amostra.

O α passa a dominar a partir de zero. Com o α igual a 1, o R^f passa de 9,6% para 9,58%, logo não podemos utilizar variações em α para aumentar o R^f a partir do ponto $\alpha = 0$, pois deste ponto em diante aumentos de α causam redução em R^f. A opção é variar o β, contudo o valor de 0,51 quando anualizado é igual a 0,067. Este resultado não está dentro do aceitável sendo o aposto ao encontrado por Mehra e Prescott (1985) que encontraram β maior que a unidade (1,12). Com este valor surgiu o que ficou conhecido, após o trabalho de Weil (1989), como *Risk Free Puzzle* (RFP). Na figura 10 verificamos que o prêmio e os retornos são igualados com α igual a 19,5 e β igual a 0,44 (0,037 anualizado).

A busca pela redução do R^f gerado pelo modelo no caso americano gerou o *Risk Free Puzzle* (RFP), pois o β ficou maior que 1(um) e no nosso caso poderíamos dizer que gerou um *Risk Free Puzzle Invertido*, pois o β ficou bem perto de zero.

A análise feita com os dados do 1º sub-período gerou particularidade no modelo e o estudo feito com dados do período completo apresentou resultados considerados satisfatórios, porém com um β de 0, 9476 (0,80 a.a) considerado baixo. Há então a possibilidade do baixo valor de β no período completo ter sido influenciado pelos dados do 1º sub-período.

Segundo Reis (1988) a restrição à liquidez é uma característica presente na economia brasileira para a maior parte dos agentes econômicos, logo está presente em todos os períodos. Ao contrário do 2º sub-período, a principal característica do período inicial foi o descontrole inflacionário, assim se os valores de α e β encontrados na próxima análise forem próximo do ideal, poderemos considerar os desequilíbrios econômicos como os responsáveis pela anomalia encontrada no período inicial e o ambiente de estabilidade como responsável pela suposta melhora a dos resultados.

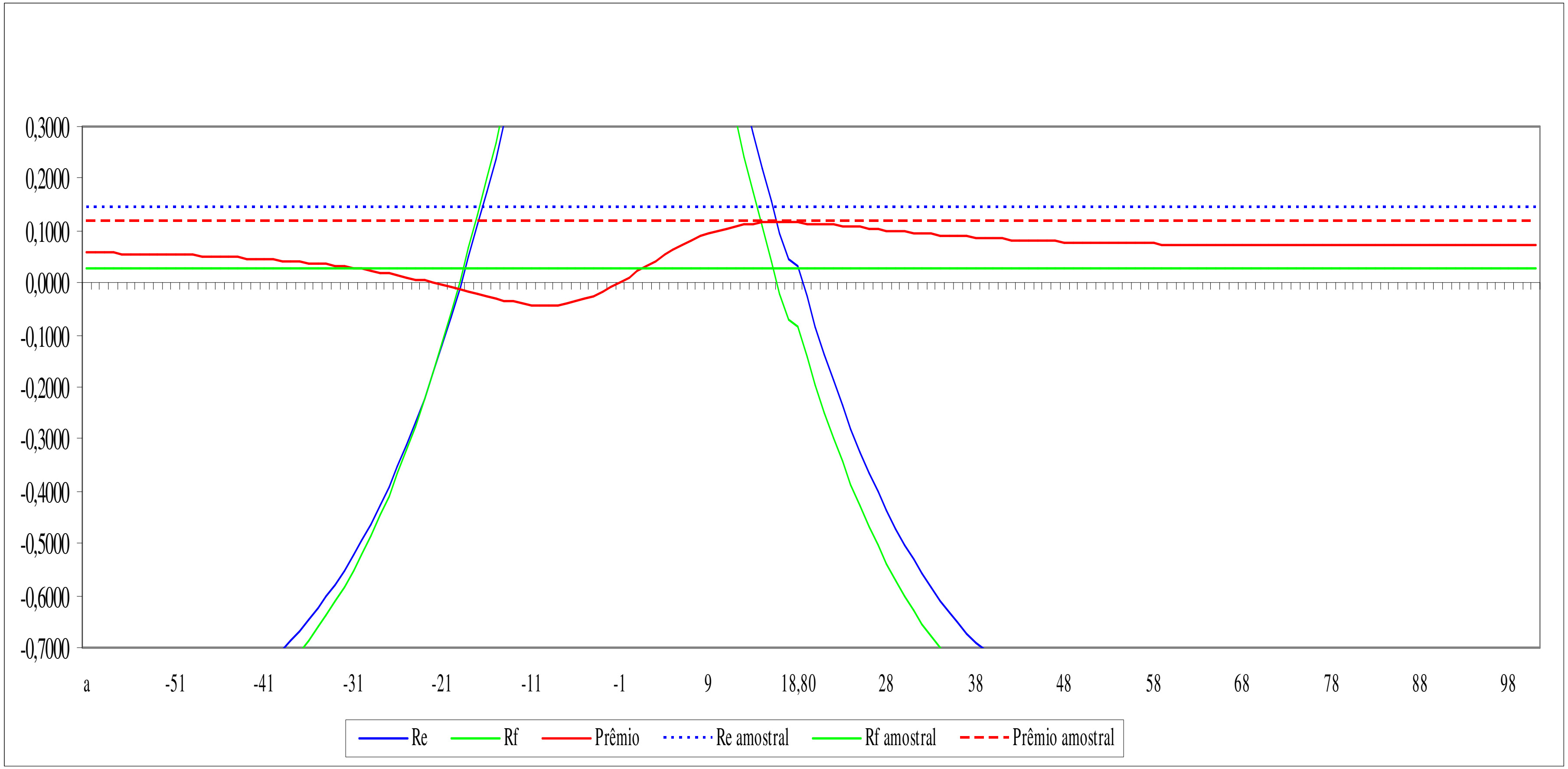

Figura 9-Modelo de Mehra e Prescott com α=18,8 e β=0,51

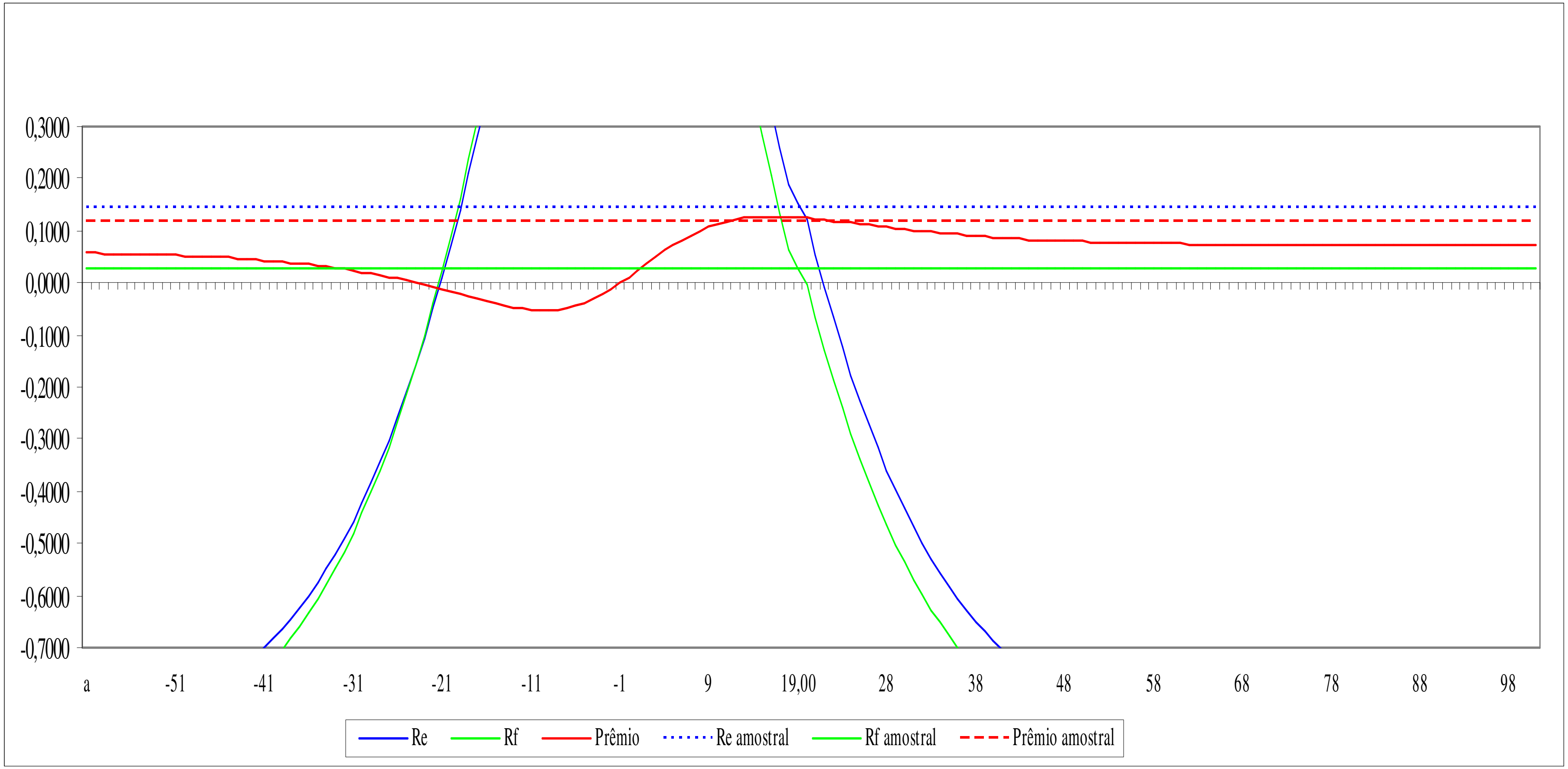

Figura 10-Modelo de Mehra e Prescott com α=19,5 e β=0,44

4.1.3.
Resultados do Modelo no Segundo Sub-Período

Verificamos no período de 1994:3 a 2005:4 que o β fixado no nível tido como ideal (0,995 a.t ou 0,98 a.a) o prêmio de risco gerado pelo modelo é igualado ao empírico com o α é igual a 1,95, como podemos verificar na figura 11. Entretanto os níveis de R^e e R^f do modelo são $R^e = 0,0256$ e $R^f = 0,0158$, ou seja, bem menores que os valores $R_a^e = 0,0444$ e $R_a^f = 0,0346$ da amostra.

O ajuste brasileiro neste período também é oposto do caso americano, pois devemos aumentar os valores de R^e e R^f .Podemos verificar na figura 12 que a igualdade do prêmio e dos retornos é alcançada com a redução de β para 0,9769 e do α para 1,93.

Como os valores acima estão dentro dos limites considerados satisfatórios podemos concluir pela inexistência do *Equity Premium Puzzle* no caso brasileiro no período 1994:3-2005:4. A diferença em relação ao resultado obtido no período completo (α = 5,12 e β = 0,9476) está no aumento do β anualizado de 0,80 para 0,904 e na redução do α de 5,12 para 1,93. O novo valor do β representa uma taxa de desconto intertemporal de 10,61% que é mais adequada do que a taxa de desconto intertemporal de 47% encontrado por Sampaio (1999) e 25% encontrado nesta dissertação, no período completo, e em Domingues (2000). O α que já apresentava um valor satisfatório e de acordo com a literatura (0 a 10), passou para uma faixa mais restrita e defendida por Kocherlakota (1996). O autor cita que o limite de 0 a 10 é teórico e qualquer solução que venha explicar o prêmio de risco deve ter α menor ou igual a 2,5.

Podemos concluir com base nos resultados acima que na presença de estabilidade econômica o modelo se comportou de maneira mais satisfatória. Comparando os resultados obtidos fica claro que a anomalia gerada pelo modelo no período inicial é a causa do baixo β no período completo, ou seja, a alta inflação e a instabilidade econômica presentes no primeiro sub-período pode ter sido a causa das baixas taxas de desconto intertemporais encontradas nos trabalhos realizados no Brasil.

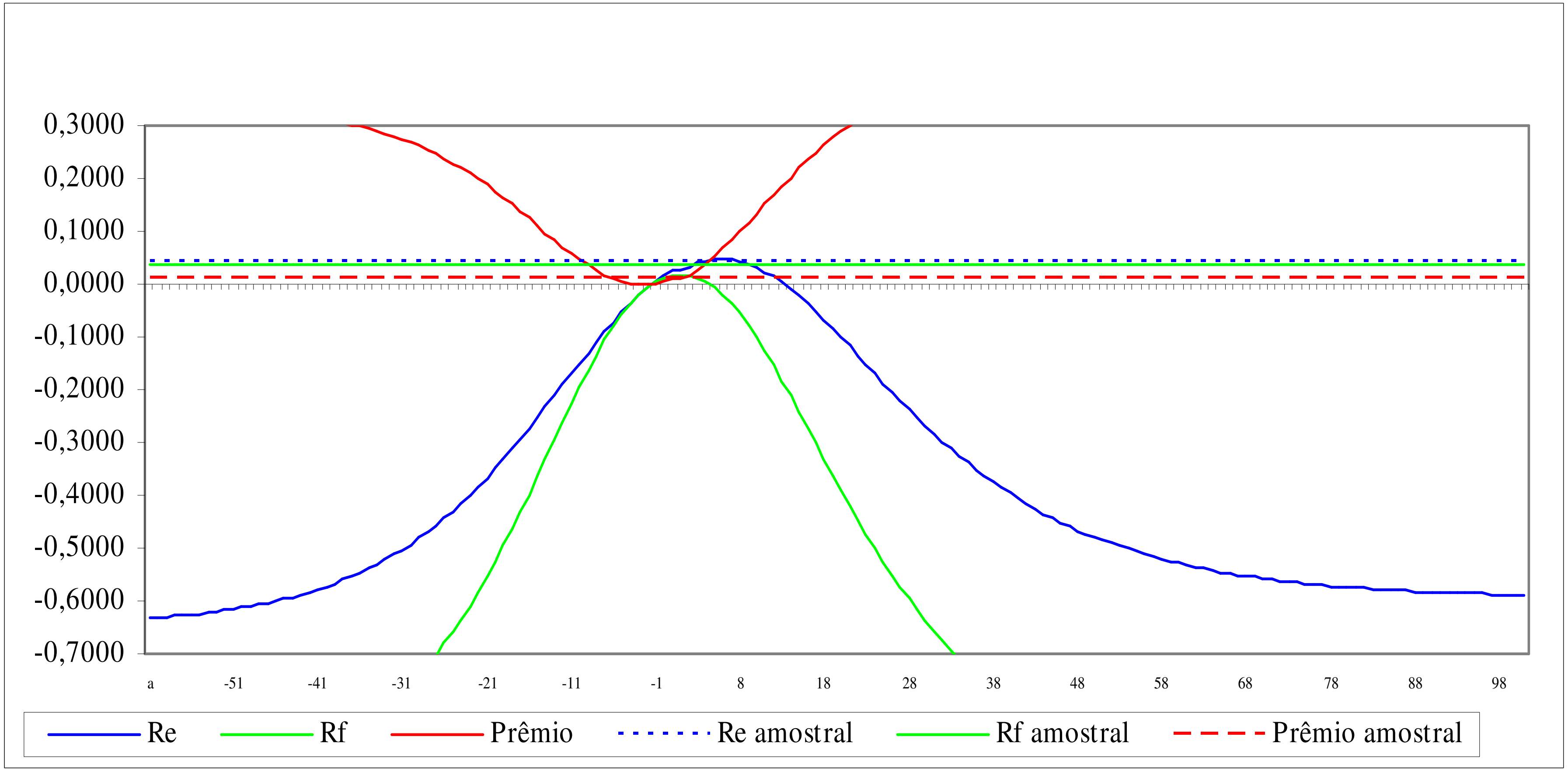

Figura 11-Modelo de Mehra e Prescott com α=1,95 e β=0,995

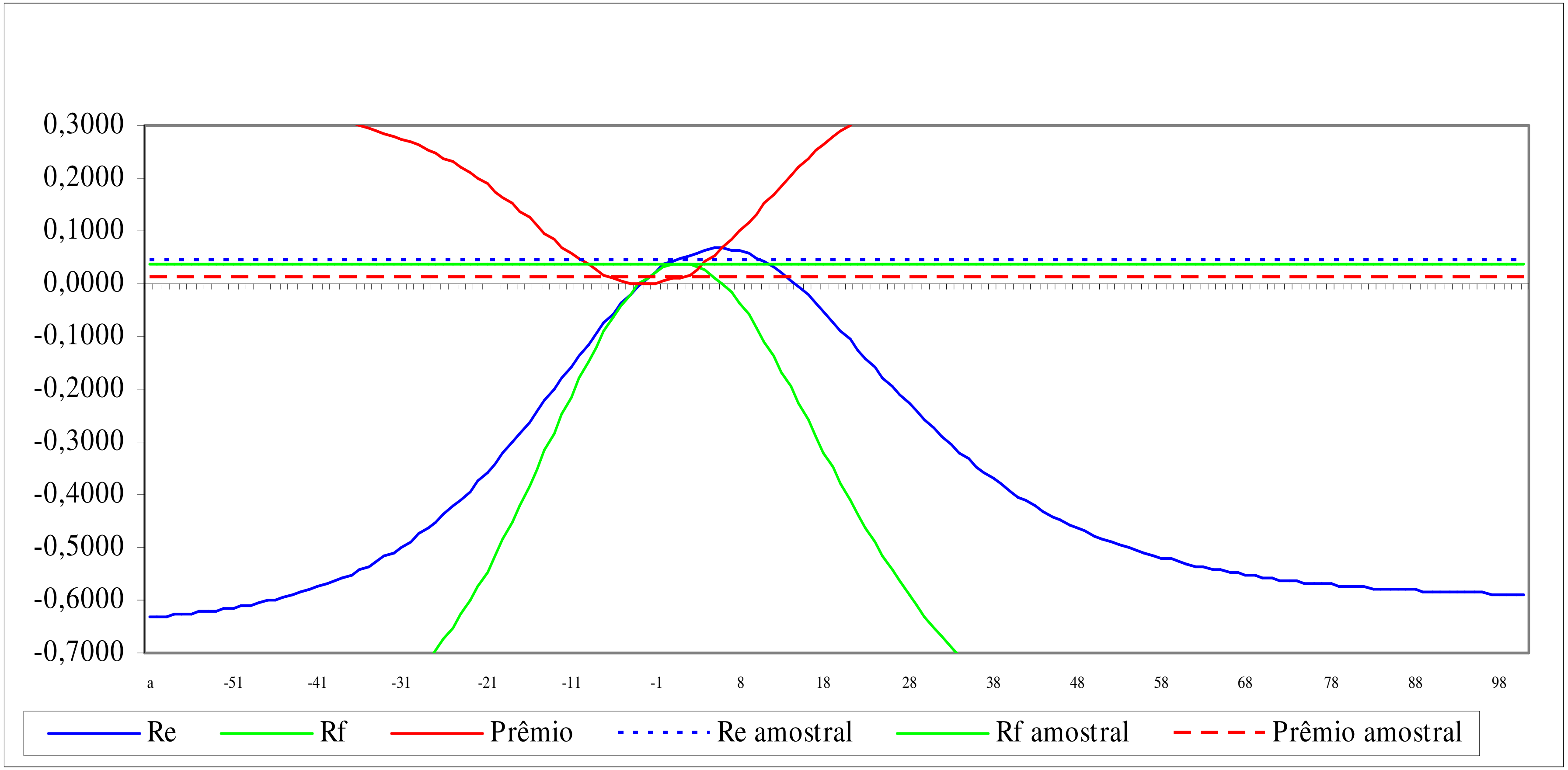

Figura 12-Modelo de Mehra e Prescott com α=1,93 e β=0,9769

4.2.
O Modelo Revisado por Mehra e seus Resultados

Mehra (2003), dezoito anos depois do trabalho original, escreveu um novo artigo a respeito do *Equity Premium Puzzle*. O destaque do artigo foi a tentativa de mostrar a evidente influência dos parâmetros comportamentais e tecnológicos sobre o retorno do ativo sem risco e sobre o prêmio de risco.

Para verificar tal questão fêz algumas suposições adicionais ao modelo original. As suposições são as seguintes:

1. a taxa de crescimento do consumo, $x_{t+1} \equiv c_{t+1}/c_t$ é idêntica e independentemente distribuída (iid),
2. a taxa de crescimento dos dividendos, $z_{t+1} \equiv y_{t+1}/y_t$ é idêntica e independentemente distribuída (iid),
3. (x_{t+1}, z_{t+1}) tem distribuição lognormal conjunta.

Como conseqüência destas hipóteses adicionais o retorno bruto acionário R_{t+1}^e é idêntica e independentemente distribuída (iid) e (x_t, R_{t+1}^e) tem distribuição lognormal conjunta.

Substituindo $U'(C_t) = C_t^{-\alpha}$ na equação (4.1.2) do modelo original,

$$p_t^e U'(c_t) = \beta E_t[(p_{t+1}^e + y_{t+1})U'(c_{t+1})] \text{ ou}$$

$$P_t^e U'(C_t) = \beta E_t[(P_{t+1}^e + D_{t+1})U'(C_{t+1})] \tag{4.1.2}$$

teremos a seguinte equação:

$$P_t^e = \beta E_t[(P_{t+1}^e + D_{t+1})x_{t+1}^{-\alpha}] \tag{4.2.1}$$

Como P_t^e é homogênea de grau 1 em y ou D_t podemos representar o preço como:

$P_t^e = \omega y_t = \beta E_t[(\omega y_{t+1} + y_{t+1})x_{t+1}^{-\alpha}]$, teremos:

$\omega = \beta E_t[(\omega + 1) z_{t+1} x_{t+1}^{-\alpha}]$ ou

$$\omega = \frac{\beta E_t[z_{t+1}x_{t+1}^{-\alpha}]}{1 - \beta E_t[z_{t+1}x_{t+1}^{-\alpha}]}.$$

Como por definição o retorno bruto do ativo com risco é $R_{t+1}^e = \dfrac{P_{t+1}^e + y_{t+1}}{P_t^e}$, podemos então abrir a expressão e chegarmos a:

$$R_{t+1}^e = \frac{P_{t+1}^e + y_{t+1}}{P_t^e} = \frac{(\omega+1)y_{t+1}}{\omega y_t} = \frac{(\omega+1)z_{t+1}}{\omega}.$$

Aplicando expectância podemos obter o valor esperado do retorno bruto do ativo com risco:

$$E_t(R_{t+1}^e) = \frac{\omega+1}{\omega} E_t(z_{t+1}).$$

Como $\dfrac{\omega+1}{\omega} = \dfrac{1}{\beta E_t(z_{t+1}x_{t+1}^{-\alpha})}$, temos que:

$$E_t(R_{t+1}^e) = \frac{E_t(z_{t+1})}{\beta E_t(z_{t+1}x_{t+1}^{-\alpha})} \quad . \tag{4.2.2}$$

Analogamente, o retorno bruto do ativo sem risco pode ser escrito como:

$$E_t(R_{t+1}^e) = \frac{1}{\beta E_t(x_{t+1}^{-\alpha})} \quad . \tag{4.2.3}$$

Como a taxa de crescimento do consumo e dividendos foi suposta lognormal, podemos escrever a esperança do retorno bruto do ativo sem risco como:

$$\mathrm{E}_t(R^e_{t+1}) = \frac{e^{\mu_z + \frac{1}{2}\alpha_z^2}}{\beta e^{\mu_z - \alpha\mu_x + \frac{1}{2}(\alpha_z^2 + \alpha^2\sigma_x^2 - 2\alpha\sigma_{x,z})}} \tag{4.2.4}$$

ou

$$Ln\mathrm{E}_t(R^e_{t+1}) = -Ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2 + \alpha\sigma_{x,z} \tag{4.2.5}$$

onde:

$\mu_x = \mathrm{E}(\ln x)$

$\sigma_x^2 = \mathrm{var}(\ln x)$

$\sigma_{x,z} = \mathrm{cov}(\ln x, \ln z)$

$\ln x =$ taxa de crescimento do consumo.

Como a taxa de crescimento do consumo é iid, temos que a esperança condicional e a incondicional são as mesmas.

Da mesma forma temos:

$$\mathrm{E}_t(R^f_{t+1}) = R^f_{t+1} = \frac{1}{\beta e^{-\alpha\mu_x + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2}} \tag{4.2.6}$$

e

$$LnR^f_{t+1} = -Ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2 \tag{4.2.7}$$

Assim, $\ln \mathrm{E}(R_e) - \ln R_f = \alpha\sigma_{x,z}$. (4.2.8)

Fica evidente a influência dos parâmetros comportamentais e tecnológicos sobre os retornos dos ativos observando as equações (4.2.5) e (4.2.7). O termo μ_x varia positivamente com a taxa de juros e variáveis que aumentam o desejo por poupança; o fator de desconto intertemporal e a poupança precaucionária variam negativamente com a taxa de juros livre de risco.

A poupança precaucionária mostra que os agentes avessos ao risco quando defrontados com alta volatilidade do consumo recebem incentivo a poupar de forma precaucionária com o intuito de reduzir as incertezas do futuro. A influencia de α é duplamente verificada. Valores pequenos de α tendem a elevar os retornos e a medida que seu valor cresce o termo quadrático passa a dominar reduzindo o valor dos retornos.

Neste modelo podemos também considerar que;

$$\ln \mathrm{E}(R_e) - \ln R_f = \alpha\sigma_{x,R_e} . \qquad (4.2.9)$$

onde $\sigma_{x,R_e} = \mathrm{cov}(\ln x, \ln R_e)$.

O *Equity Premium* é o produto do coeficiente de aversão ao risco e a covariância da taxa de crescimento do consumo com o retorno acionário ou com a taxa de crescimento dos dividendos. Se nas condições de equilíbrio do modelo $x = z$ teremos:

$$\ln \mathrm{E}(R_e) - \ln R_f = \alpha\sigma_x^2 \qquad (4.2.10)$$

Assim o *Equity Premium* é o produto do coeficiente de aversão ao risco e da variância da taxa de crescimento do consumo. Como será visto adiante esta variância, σ_x^2, é 0,00125 a não ser que α seja muito alto um prêmio de risco como o observado nos dados históricos americanos seria impossível.

A tabela 5 contém as estatísticas para a economia americana no período de 1889-1978 reportadas por Mehra e Prescott (1985).

Estatísticas (valores reais)	valores
Taxa de juros sem risco, R_f	1,008
Retorno médio acionário, $\mathrm{E}(R_e)$	1,0698
Média da taxa de crescimento do consumo, $\mathrm{E}(x)$	1,018
Desvio padrão da taxa de crescimento do consumo, $\sigma(x)$	0,0036
Média do prêmio de risco, $\mathrm{E}(R_e) - R_f$	0,0618

Tabela 5-Estatística da Economia Americana no Período de 1889 a 1978

Existe uma variedade de evidencias em vários estudos que o coeficiente de aversão ao risco (α), é um numero pequeno menor que 10, porém de acordo com Kocherlakota (1996) este limite é teórico e que qualquer solução que venha explicar o prêmio de risco deve ter α menor ou igual a 2,5. Assim se usarmos um α igual a 10 e um β igual a 0,98 quais seriam as taxas de retorno esperado e o prêmio de risco decorrente da aplicação do modelo modificado descrito acima?

Usando os dados da tabela 5, as expressões descritas acima e o Apêndice B teremos:

$$\sigma_x^2 = \ln\left\{1 + \frac{\mathrm{var}(x)}{[\mathrm{E}(x)]^2}\right\}, \text{ então } \sigma_x^2 = 0{,}00125$$

$$\mu_x = \ln \mathrm{E}(x) - \frac{1}{2}\sigma_x^2 = 0{,}0172$$

$$LnR_{t+1}^f = -Ln\beta + \alpha\mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2 = 0{,}186$$

ou

$R_f = 1{,}205$, que representa uma taxa real livre de risco de 20,455% a.a.

Como $\ln \mathrm{E}(R_e) = \ln R_f + \alpha\sigma_x^2 = 0{,}199$

Temos que $\mathrm{E}(R_e) = 1{,}220$, que representa um retorno de 21,97% a.a.

Com esses dados o *Equity Premium* é de 1,515%, logo bem menor que o observado. Se usássemos um α perto de 2,5 e um β menor teríamos um valor de R_f bem maior e um prêmio de risco bem menor. Com um α perto de 2,5 e β igual 0,98 teríamos o *Equity Premium* de 0,33%. Assim o prêmio de 1,52% é o maior possível de ser encontrado com o modelo utilizando os parâmetros tidos como aceitáveis para a economia americana.

Estatísticas (valores reais)	Valores
Taxa de juros sem risco, R_f .	1,0325
Retorno médio acionário, $\mathrm{E}(R_e)$.	1,0720
Média da taxa de crescimento do consumo, $\mathrm{E}(x)$.	1,0086
Desvio padrão da taxa de crescimento do consumo, $\sigma(x)$.	0,0685
Média do prêmio de risco, $\mathrm{E}(R_e) - R_f$.	0,0395

Tabela 6-Estatística da Economia Brasileira no Período de 1990 a 2005

Para aplicar o modelo revisado ao caso brasileiro foi feito uso dos dados da tabela 6, das expressões descritas acima e das propriedades da distribuição lognormal descritas no Apêndice B:

como $\sigma_x^2 = \ln\left\{1 + \dfrac{\mathrm{var}(x)}{[\mathrm{E}(x)]^2}\right\}$, então $\sigma_x^2 = 0{,}0046$

logo, $\mu_x = \ln \mathrm{E}(x) - \dfrac{1}{2}\sigma_x^2 = 0{,}00631$

$LnR_t^f = -Ln\beta + \alpha\mu_x - \dfrac{1}{2}\alpha^2\sigma_x^2 = 0{,}045$ ou $R_f = 1{,}046$, que representa uma taxa livre de risco de 4,612%.

Como $\ln \mathrm{E}(R_e) = \ln R_f + \alpha\sigma_x^2 = 0{,}091$,temos que:

$E(R_e) = 1,095$, que representa um retorno de 9,54%.

Com esses dados o E*quity Risk Premium* é de 4,93%, logo um pouco acima do prêmio observado que foi de 3,95%. Se usássemos um α perto de 2,5 e um β menor, teríamos um valor de R_f igual a 1,52%, R_e de 2,69% e um prêmio de risco, bem menor, igual a 1,17%. Assim o prêmio de 4,93% é o maior possível de ser encontrado com o modelo.

Foi verificado o α e o β que reproduzem os valores de R_e e R_f encontrados na amostra, como veremos a seguir:

$$\alpha = \frac{\ln E(R_e) - \ln R_f}{\sigma_x^2} = 8{,}16 \quad \text{e} \quad \ln \beta = -\ln R_{t+1}^f + \alpha \mu_x - \frac{1}{2}\alpha^2 \sigma_x^2 = -0{,}13368,$$ o

que implica em um β de 0,875.

Podemos observar que os parâmetros α e β acima encontrados são diferentes dos parâmetros que reproduzem o prêmio e os retornos no modelo original (α = 5,12 e β= 0,9486). Os valores, contudo, estão dentro do aceitável na literatura ficando evidenciada a não existência do EPP e do RFP. Não houve melhora nos parâmetros em comparação com o modelo original, assim a aplicação do modelo modificado, apesar de ser satisfatória no caso brasileiro, não pode ser usada para substituir o modelo original.

4.3. Modelo com utilidade tipo Kreps-Porteus

A motivação da linha de pesquisa modificando a estrutura tradicional da função utilidade separável no tempo foi baseada no fracasso das análises predecedentes em reproduzir o prêmio de risco observado entre 1889 e 1978 com valores aceitáveis do coeficiente de aversão relativa ao risco.

Com a preferência CRRA o coeficiente de aversão ao risco está rigidamente ligado à elasticidade intertemporal de substituição, um é o inverso do outro. O indivíduo avesso à variação no consumo em diferentes estados da natureza também será avesso a variações de consumo ao passar do tempo. É fácil observar a inexistência da razão para que seja dessa forma, pois o consumidor avesso ao risco em diferentes estados, dentro do mesmo período de tempo, não permanecerá avesso ao risco ao longo de toda sua vida.

Sampaio (1999) e Domingues (2000) seguindo sugestão contida nos trabalhos de Cecchetti, Lam e Mark (1990) e Bonomo e Garcia (1996), buscaram reproduzir o primeiro e o segundo momentos dos retornos com o modelo seguindo uma cadeia de Markov Switching desenvolvida por Hamilton (1989). Sampaio utilizou o Markov Switching com a função de utilidade do tipo CRRA e Domingues utilizou uma função de utilidade recursiva proposta por Epstein e Zin (1989). Sampaio não conseguiu reproduzir o segundo momento de nenhum dos ativos financeiros, porém Domingues reproduziu o segundo momento do ativo sem risco. A não reprodução de todos os momentos pode ter sido causada pelo processo de dotação que foi o mesmo utilizado pelos dois autores. Como o trabalho de Domingues reproduziu um dos dois momentos, é possível que mantendo a função utilidade e utilizando o processo de dotação como uma cadeia de Markov, como no trabalho original, seja possível reproduzir os dois momentos.

A inovação feita nesta dissertação para o caso brasileiro foi a alteração somente da função utilidade mantendo o processo de dotação e as demais proposições feitas no trabalho original de Mehra e Prescott (1985). Weil (1989) tentou a mesma alteração, porém não conseguiu reproduzir os retornos com parâmetros aceitáveis ficando evidente o RFP.

A idéia básica do modelo é a formação pelo agente representativo de um equivalente certo da utilidade futura usando sua preferência sobre o risco. A combinação do equivalente certo com o consumo corrente em t através de uma função agregadora (W(·)) gera uma função de utilidade intertemporal.

$$V(c_0, c_1, c_2, c_3, ...) = W[c_0, (V(c_1, c_2, ...)] \qquad (4.3.1)$$

Como o consumo futuro é estocástico a utilidade futura deve ser substituída na equação (4.3.1) pelo seu equivalente certo.

Define-se U_{t+1} como a utilidade futura do agente e $\mu_t = \mu(U_{t+1} | I_t)$ como o seu equivalente certo da utilidade futura U_{t+1}. Tem-se a função utilidade intertemporal:

$$U_t = W(C_t, \mu_t) = W[C_t, \mu(U_{t+1} | I_{t+1})] \qquad (4.3.2)$$

Epstein e Zin (1989) parametrizam a função agregadora como uma função de elasticidade de substituição constante (CES), onde a elasticidade de substituição intertemporal é dada por σ=1/ (1-ρ):

$$U_t = \left[C_t^{\rho} + \beta \mu_t^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{4.3.3}$$

com $o \neq \rho < 1$ e $0 < \beta < 1$.

Quando a função utilidade é do tipo Kreps-Porteus, o equivalente certo é calculado via:

$$\frac{\mu_{KP}^{\alpha}}{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{\alpha} \mathrm{dF(x)} \tag{4.3.4}$$

Substituindo a função do equivalente certo (4.3.4) em (4.3.3) é obtido um modelo que generaliza preferências do tipo utilidade esperada CCRA, quando $\alpha = \rho$ e tipo Kreps-Porteus quando $\alpha \neq \rho$.

A suposição do consumo total sendo igual à produção total ou a soma dos dividendos pagos não foi alterada. A simplificação é satisfatória, pois os resultados do modelo bi-variado são praticamente iguais ao do modelo uni-variado em consumo. No trabalho de Domingues (2000) podemos verificar tais resultados, bem como o grande esforço computacional e a dificuldade para a montagem da série de dividendos.

Como o problema de maximização é idêntico ao do modelo de Mehra e Prescott (1985), usaremos as equações de Euler derivadas por Epstein e Zin (1989) para obter o modelo modificado.

No modelo há N ativos, sendo um sem risco e os outros com risco. A resolução da maximização de (4.3.3) sujeita à seqüência de restrições derivadas em Epstein e Zin (1991), resulta nas seguintes N equações de Euler:

$$E_t\left[\beta^{\alpha/\rho}\left(\frac{\tilde{C}_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho}} \tilde{M}_{t+1}^{(\alpha/\rho)-1} \tilde{R}_{i,t+1}\right] = 1 \qquad i = 1,\ldots,N \tag{4.3.5}$$

Onde:

- β é a taxa de desconto intertemporal;
- $\tilde{M}_{t+1}$ é o retorno do portfólio de mercado que paga C_t em *t*; e
- $\tilde{R}_{t+1}$ pode representar o retorno de qualquer tipo de ativo, como ações, ativo sem risco e o portifólio de mercado.

Fazendo as mesmas suposições a respeito da taxa de crescimento do processo de dotação x_t estar seguindo uma cadeia de Markov temos:

$$Y_{t+1} = x_{t+1}.Y_t \qquad \text{onde } x_{t+1} \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \text{ e } \Pr\{x_{t+1} = \lambda_j ; x_t = \lambda_i\} = \phi_{ij}$$

Foi mantida também a suposição de que a cadeia de Markov é ergódiga e restrita a dois estados onde:

$$\lambda_1 = 1 + \mu + \delta ; \qquad \lambda_2 = 1 + \mu - \delta ;$$

$$\phi_{11} = \phi_{22} = \phi ; \qquad \phi_{12} = \phi_{21} = (1 - \phi) .$$

Como neste modelo o processo de dotação é uni-variado o retorno do portifólio de mercado e das ações se confundem, então teremos as seguintes equações de retorno:

$$\tilde{M}_{t+1} = R^e_{t+1} = \frac{P^e_{t+1} + C_{t+1}}{P^e_t} \qquad (4.3.6)$$

$$R^f_t = \frac{1}{P^f_t} - 1 \qquad (4.3.7).$$

Substituindo $\tilde{R}_{t+1}$ por $\tilde{M}_{t+1} = \frac{P^e_{t+1} + C_{t+1}}{P^e_t}$ em (4.3.5) temos:

$$E_t\left[\beta^{\alpha/\rho}\left(\frac{\tilde{C}_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho}} \tilde{M}_{t+1}^{(\alpha/\rho)-1}\tilde{M}_{t+1}\right] = 1 \qquad i = 1,...,N$$

Que podemos reescrever como:

$$E_t\left[\beta^{\alpha/\rho}\left(\frac{\tilde{C}_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho}}\tilde{M}_{t+1}^{(\alpha/\rho)}\right]=1 \qquad i=1,...,N \qquad (4.3.8)$$

O objetivo é encontrar P_t^e que pode ser obtido substituindo (4.3.6) em (4.3.8) como mostram a equações abaixo:

$$E_t\left[\beta^{\alpha/\rho}\left(\frac{\tilde{C}_{t+1}}{C_t}\right)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho}}\left(\frac{P_{t+1}^e+C_{t+1}}{P_t^e}\right)^{(\alpha/\rho)}\right]=1 \qquad i=1,...,N \qquad (4.3.8a)$$

$$\left(P_t^e\right)^{(\alpha/\rho)}=E_t\left[\beta^{\alpha/\rho}\left(\lambda_j\right)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho}}\left(P_{t+1}^e+C_{t+1}\right)^{(\alpha/\rho)}\right] \quad i=1,...,N \qquad (4.3.8b)$$

Usando do fato do preço da ação P_t^e ser homogêneo de grau um em c, assim como no modelo original, podemos escrever a função (4.3.8b) como:

$$\left(P_t^e\right)^{(\alpha/\rho)}=\left(w_i c\right)^{(\alpha/\rho)} \qquad (4.3.9)$$

ou seja:

$$\left(P_t^e\right)^{(\alpha/\rho)}=\left(w_i c\right)^{(\alpha/\rho)}=E_t\left[\beta^{\alpha/\rho}\left(\lambda_j\right)^{\frac{\alpha(\rho-1)}{\rho}}\left(P_{t+1}^e+C_{t+1}\right)^{(\alpha/\rho)}\right] \qquad i=1,...,N$$

onde w_i é uma constante. Igualando (4.3.9) com (4.3.8b) encontramos:

$$w_i=\beta\left[\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}\lambda_j^{\alpha}\left(w_j+1\right)^{(\alpha/\rho)}\right]^{\rho/\alpha} \quad \text{para } i=1,....,n \qquad (4.3.10)$$

Este é um sistema com n equações não lineares e n variáveis. A solução não é tão simples como no modelo original, contudo se o w_2 for posto em função de w_1, considerando apenas dois estados, e efetuarmos a substituição no sistema, ficamos com uma equação não linear estando o w_1 em função de variáveis conhecidas. Sua solução pode ser obtida pela aplicação de um software como o Maple que irá mostrar todas as soluções possíveis de serem encontradas variando os parâmetros α, β e ρ .Os valores reais de w_1 são usados para encontrar w_2 e então o modelo segue o padrão de dificuldade encontrado nos demais. A derivação de (4.3.10), (4.3.13) e de w_1 e w_2 pode ser consultada no Apêndice A.

Assim como no modelo original o retorno da ação será:

$$r_{ij}^e = \frac{P^e(\lambda_j c, j) + \lambda_j c - P^e(c,i)}{P^e(c,i)} = \frac{\lambda_j (w_j + 1)}{w_i} - 1 \qquad (4.3.11)$$

Logo, quando o estado corrente é i, o retorno esperado das ações é:

$$R_i^e = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} r_{ij}^e \qquad (4.3.12)$$

Para o ativo livre de risco obtemos P_i^f pela substituição da equação (4.3.7) em (4.3.5):

$$P_i^f = \beta^{\alpha/\rho} \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} \lambda_j^{\alpha-1} \left(\frac{w_j + 1}{w_i} \right)^{(\alpha/\rho)-1} \qquad (4.3.13)$$

O retorno esperado será:

$$R_i^f = \frac{1}{P_i^f} - 1 \qquad (4.3.14)$$

Considerando $\pi \in R^n$ o vetor das probabilidades estacionárias em i. Isto ocorre já que a cadeia de Markov em i foi suposta ergódiga. O vetor π é a solução do sistema de equações.

$$\pi = \phi^T \pi$$

$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ e $\phi^T = \{\phi_{ji}\}$, a matriz transposta de ϕ, que possui como elementos ϕ_{ij}.

O retorno esperado das ações e dos ativos livre de risco serão respectivamente:

$$R^e = \sum_{i=1}^{n} \pi_i R_i^e \quad \text{e} \quad R^f = \sum_{i=1}^{n} \pi_i R_i^f \tag{4.3.15}$$

Assim o prêmio de risco em ações pelo modelo é dado por $R^e - R^f$.

4.3.1. Resultados do Modelo com utilidade tipo Kreps-Porteus

Quando utilizamos a função de utilidade tipo Kreps – Porteus o prêmio e os retornos são reproduzidos para um coeficiente de aversão ao risco (α) igual a 5,12, uma taxa de desconto intertemporal (β) de 0,9493 e a elasticidade de substituição intertemporal de 0,22. No modelo original de Mehra e prescott os parâmetros foram α= 5,12; β= 0,9476 e elasticidade de substituição intertemporal de 0,20. A busca dos parâmetros foi feita a partir do resultado do modelo original aplicado ao software Maple. Como o resultado da equação (4.3.10) não foi um número real a busca dos novos parâmetros foi iniciada através da variação simultânea dos três parâmetros e análise dos resultados que inicialmente foram 3500 números reais.

Antes de abordar o ajuste, é necessário explicar como cada parâmetro atua nos resultados. O aumento em β reduz o R_e, o R_f e o prêmio de risco; aumentos em α implicam em redução de R_e e no prêmio, bem como aumentos em R_f. Aumentos em ρ implicam redução em nos três parâmetros.

A variação simultânea dos parâmetros foi feita de forma incremental com os parâmetros variando dentro de uma faixa de valores aceitos na literatura. Foi gerada uma quantidade muito grande de resultados para a equação (4.3.10) dado que os incrementos foram bem perto de zero. Os resultados foram aplicados ao modelo e então gerados novos prêmios e retornos. Os valores que mais se aproximaram do ideal foram α = 5,12; β = 0,9476 e ρ = -3,57 com R_e = 0,0725; R_f =0,0033 um prêmio de 0,038. É necessário então aumentar o prêmio e reduzir R_e e R_f .Mantendo apenas o α fixo e variando os outros dois parâmetros o prêmio e os retornos foram reproduzidos para α = 5,12; β = 0,9493 e ρ = -3,56, ou seja, houve um aumento em β e ρ.

Em relação à elasticidade de substituição intertemporal, sabemos que quando ela cai maior é a preferência por trajetórias suaves de consumo levando os agentes a poupar ou gastar para manter o consumo relativo constante. Este movimento torna o preço dos ativos mais voláteis e conseqüentemente aumenta ou reduz o seu retorno. Se os tempos forem bons e houver o que poupar, os agentes vão buscar alguma forma de realizar tal poupança. Se for o caso de compra de títulos públicos, o seu retorno será menor. Quando os tempos são ruins os agentes tendem a gastar para manter seu nível de consumo e só deixam de fazê-lo se conseguirem taxas maiores para carregar tais títulos.

Quando a elasticidade de substituição intertemporal é maior, a necessidade de suavização do consumo é menor, e como conseqüência o movimento de poupar e gastar também são menores. Quando os tempos são ruins e existe a necessidade de gastar os agentes aceitam um retorno um pouco menor do que desejariam se a elasticidade de substituição fosse menor para continuarem com os títulos, ou seja, o retorno é reduzido.

Comparando o resultado deste modelo com o de Mehra e Prescott (1985) houve melhora nos resultados com aumento na elasticidade de substituição intertemporal e na taxa de desconto intertemporal (β), o que representa uma redução no desconto de ano para ano. Dessa forma considerando o período de 1990 a 2005 o modelo que melhor se ajustou ao caso brasileiro foi o com utilidade Kreps - Porteus.

É importante ressaltar que este mesmo modelo quando utilizado por Weil (1989) foi incapaz de melhorar os resultados encontrados por Mehra e Prescott (1985). Os motivos de tal diferença podem ser buscados em pesquisas futuras abordando as características das séries brasileiras e americanas.