

3

Apreçamento de Opções

O capítulo a seguir tem como objetivo fazer uma breve resumo da evolução do mercado de opções até os dias de hoje e dos modelos propostos até então, mas especificamente o modelos desenvolvidos para opções sobre de taxa de juros e futuros.

3.1

História

No início dos anos 70, Black e Scholes [1] fizeram uma grande descoberta ao derivar uma equação diferencial (ver Apêndice A1) que deve ser satisfeita pelo preço de qualquer derivativo dependente de uma ação sem dividendos. Surgia assim, a mais famosa teoria sobre o valor de uma opção, que ficou conhecida como o Modelo de Black & Scholes (B&S). A análise feita por Black e Scholes é análoga à de não arbitragem, que nos diz que na ausência de oportunidade de arbitragem, o retorno da carteira deve ser a taxa de juros livre de risco. O modelo foi desenvolvido logo após o início das atividades do *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) e parte do pressuposto de que o ativo objeto tem um comportamento estocástico contínuo, na forma de Movimento Geométrico Browniano (MGB). O fato do ativo objeto seguir o MGB implica que a distribuição probabilística dos preços do ativo objeto, em uma data futura, é log-normal e, por conseqüência, a distribuição probabilística das taxas de retorno, calculadas de forma contínua e composta entre duas datas, é normal (ver Apêndice A2). O modelo admite, também, que a taxa de juros é constante durante a vida da opção, que o ativo objeto não paga dividendos durante a maturidade da opção e que a volatilidade do preço do ativo objeto é constante.

Algumas características contribuíram para que o modelo de Black e Scholes se tornasse um padrão de mercado, ou seja, um dos modelos mais utilizados em todo mundo no que tange apreçamento de opções. São eles:

- i) Implementação – facilmente implementado, não requer grandes esforços computacionais;
- ii) Resultados – os resultados são facilmente analisados e não exigem uma base teórica avançada do usuário;
- iii) Rigor teórico – todas as premissas adotadas pelo modelo são bem fundamentadas pela teoria moderna de finanças.

Entretanto, ele é mais bem aplicado aos ativos de renda variável (opções de ações negociadas em bolsas de valores, por exemplo), o que não é o escopo desse trabalho.

Os principais motivos que fizeram rejeitar o modelo B&S para o apreamento de opções sobre títulos de renda fixa (derivativo de taxa de juros) foram:

- i) a distribuição de probabilidade dos preços assumida pelo modelo considera que estes preços possam tomar qualquer valor positivo (entretanto, os títulos prefixados têm um valor preestabelecido de vencimento, ou seja, este é seu valor limite de negociação);
- ii) a pressuposição da constância da taxa de juros ao longo da vida da opção;
- iii) a volatilidade constante ao longo da vida da opção (para títulos de renda fixa, a volatilidade declina à medida que o título se aproxima da data de seu vencimento).

Devido ao sucesso do modelo B&S e da conseqüente familiaridade com a suposição lognormal deste modelo, bem como o uso da volatilidade como medida de incerteza, surgiram tentativas de estender esta metodologia a derivativos de taxa de juros.

Os derivativos de taxa de juros são aqueles cujo retorno depende, de alguma forma, do nível das taxas de juros. Nos anos 80 e início da década de 90, seu volume de negociação em bolsa e balcão cresceu vertiginosamente. Muitos produtos foram desenvolvidos para atender às necessidades dos investidores, o que gerou um grande desafio para os profissionais da área que foi desenvolver procedimentos robustos para apreçar e *hedgear* estes instrumentos.

A primeira extensão do modelo de B&S na área de taxa de juros foi o modelo de Black [2], publicado em 1976, e originalmente desenvolvido para avaliar opções sobre futuros de *commodities* e, posteriormente, aplicado para opções de títulos de renda fixa.

Contudo, as desvantagens do modelo de B&S para apreçar opções sobre títulos de renda fixa continuavam com o modelo de Black, como a pressuposição de taxas de juros não estocásticas e volatilidade constante. Com o intuito de superar tais limitações, surgiram os modelos de curva de rendimento ou modelos da estrutura a termo das taxas de juros que descrevem o processo estocástico para a taxa livre de risco de curto prazo r , num ambiente de neutralidade ao risco. Estes modelos são mais complexos do que os utilizados para descrever o preço de uma ação ou de uma taxa de câmbio, por atuarem em toda a extensão da curva, e não em mudanças numa única variável. Conforme o tempo passa, mudam as taxas de juros individuais na estrutura, podendo modificar o formato da própria curva. Em outras palavras, a estrutura a termo das taxas de juros é um resultado do modelo de equilíbrio (ver Apêndice A3) e um dado do modelo de não-arbitragem.

Inicialmente, os modelos de apreçamento de ativos foram aplicados aos estudos das taxas de juros em uma tentativa de modelar uma estrutura a termo pressupondo incerteza estocástica e ficaram conhecidos como *modelos de um fator*, já que o processo para r envolve apenas uma fonte de incerteza. Desta forma, a taxa de juros de curto prazo foi definida como a geradora do movimento de toda a estrutura a termo.

Em geral, a taxa de curto prazo é descrita, num mundo neutro ao risco, pelo processo de Itô, da forma:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \quad (1)$$

Assume-se que o desvio instantâneo, m , e que o desvio padrão instantâneo, s , sejam funções determinísticas de r , mas independentes do tempo, e dz é a variação infinitesimal do ativo, que segue o processo de Wiener. A assunção de um único fator não é tão restritiva quanto possa parecer. O modelo de um fator implica que todas as taxas se movem na mesma direção durante qualquer intervalo pequeno de tempo, mas não na mesma proporção. Isso não implica, como as vezes se pensa, que a estrutura a termo das taxas de juros possua sempre a mesma forma.

Um dos modelos pioneiros na área foi o proposto por Rendleman e Barter [19], 1980, que trata as taxas de juros de modo similar a uma ação, ou seja, que r segue o movimento geométrico browniano. No modelo de Rendleman e Barter, o processo para r é :

$$dr(t) = \mu.r.dr + \sigma.r.dz \quad (2)$$

onde μ é a taxa de crescimento (constante) e σ é a volatilidade (também constante). No entanto, considerar que a taxa de juro de curto prazo se comporte como o preço de uma ação não é uma suposição ideal. Uma diferença importante entre eles é que as taxas de juros, diferentemente dos preços das ações, parecem retroceder para certo nível médio de longo prazo no decorrer do tempo. Esse fenômeno, conhecido como tendência de reversão à média, não é captado pelo modelo de Rendleman e Barter.

Existem fortes argumentos econômicos que favorecem o modelo com reversão à média. Quando as taxas são altas, a economia tende a desacelerar, havendo menos demanda por recursos por parte do mercado, e conseqüentemente, fazendo com que as taxas caiam. Quando as taxas são baixas, tende a haver uma forte demanda por recursos por parte dos tomadores de empréstimos. Como conseqüência, as taxas sobem.

Outro modelo proposto foi o sugerido por Vasicek [21] em 1977, que incorpora a tendência de reversão à média, e tem a seguinte formulação:

$$dr(t) = \eta(R - r)dt + \sigma.dz \quad (3)$$

onde a taxa de curto prazo, r , reverte a uma taxa de longo prazo R , com velocidade de reversão η . Um termo estocástico $\sigma \cdot dz$, distribuído normalmente, está sobreposto a essa tendência. Contudo, este modelo permite que as taxas de juros sejam negativas, fato bastante criticado neste modelo.

Em 1985, Cox, Ingersoll e Ross [6] propuseram um modelo alternativo ao proposto por Vasicek, em que as taxas são sempre não-negativas. O processo neutro ao risco para r em seu modelo é:

$$dr(t) = \eta(R - r)dt + \sigma \cdot \sqrt{r} \cdot dz \quad (4)$$

A proposição de Cox, Ingersoll e Ross possui o mesmo desvio de tendência de retorno à média do modelo de Vasicek, mas o termo estocástico possui desvio padrão proporcional a \sqrt{r} , o que significa dizer que, conforme aumenta a taxa de juro de curto prazo, o mesmo ocorre com seu desvio padrão. Propuseram a raiz quadrada para a taxa de juros de curto prazo no termo estocástico, de modo a garantir a existência de taxas de juros não negativas, sob a restrição $2\eta R \geq \sigma^2$.

Em 1989, Jamshidian [14] mostrou que as opções de títulos livres de risco sem cupons podem ser avaliadas com o modelo de Vasicek. A partir do método analítico proposto por Vasicek, o autor desenvolveu uma fórmula fechada para o preço de uma opção europeia de compra, com vencimento em T :

$$c = LP(t, s) \cdot N(h) - KP(t, T) \cdot N(h - \sigma_p) \quad (5)$$

Além dos modelos de equilíbrio de um fator, alguns pesquisadores começaram a investigar as propriedades dos modelos de equilíbrio de dois fatores. Por exemplo, Brennan e Schwartz [5], em 1982, desenvolveram um modelo em que o processo para a taxa de juros de curto prazo reverte para uma taxa de longo prazo, que por sua vez, segue um processo estocástico. A taxa de longo prazo é escolhida como o rendimento de um título perpétuo que paga US\$1 por ano. Como o retorno desse título é o recíproco de seu preço, o lema de Itô pode ser usado para calcular o processo seguido pelo rendimento a partir do processo seguido pelo preço do título. O fato de o título ser negociado simplifica

a análise, já que sabemos que a taxa de crescimento de seu preço, num mundo neutro ao risco, deve ser a taxa livre de risco menos o seu rendimento.

Outro modelo de dois fatores foi o proposto por Longstaff e Schwartz [16] em 1992, onde o processo é iniciado como um modelo de equilíbrio geral para a economia e se deriva um modelo para a estrutura a termo de taxas de juros em que existe volatilidade estocástica. Uma das vantagens deste modelo é o fato de ser analiticamente implementável.

Os modelos de equilíbrio citados até agora apresentam a desvantagem de não se adequarem, automaticamente, à estrutura a termo corrente das taxas de juros (ETTJ). Para serem consistentes com a ETTJ de mercado, começaram a ser desenvolvidos modelos de não-arbitragem, que utilizam a estrutura inicial dos juros como um dado exógeno, derivando um processo para seu comportamento.

Nesta forma de abordagem, o modelo pioneiro foi o de Ho e Lee [11], 1986, apresentado na forma de uma árvore binomial de preços de títulos, conforme a equação a seguir:

$$dr(t) = \theta(t).dt + \sigma.dz \quad (6)$$

onde σ , que é o desvio padrão instantâneo da taxa de curto prazo, é contante e $\theta(t)$ é uma função do tempo escolhida para garantir que o modelo se encaixe na estrutura a termo inicial das taxas de juros. A variável $\theta(t)$ define a direção média para a qual r se move no instante t , que é independente do nível de r . Como uma aproximação, temos:

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t$$

onde o subscripto denota diferenciação com relação a t . Como aproximação, $\theta(t)$ é igual $F_t(0, t)$, o que significa dizer que a direção média para a qual a taxa de curto prazo estará se movendo no futuro é aproximadamente igual à inclinação da curva a termo instantânea.

Uma das vantagens dessa abordagem é o fato de ser um modelo markoviano analiticamente tratável, ou seja, é simples de aplicar e se encaixa

com precisão na estrutura corrente das taxas de juros no tempo. As desvantagens são a pouca flexibilidade na escolha da estrutura da volatilidade e o fato de não possuir tendência de retorno à média.

Hull e White [12], 1990, desenvolveram um modelo estendido de Vasicek para incorporar a tendência de reversão à média da taxa de juros, conceito este ausente no modelo de Ho e Lee. A maioria dos modelos discutidos na literatura, até então, envolvia apenas uma função do tempo, $\theta(t)$. Alguns pesquisadores, como Hull e White, sugeriram estender os modelos, tornando a taxa de retorno à média, η , ou a volatilidade da taxa, σ , ou ambas, uma função do tempo. Abaixo, a equação do modelo:

$$dr = \eta \left| \frac{\theta(t)}{\eta} - r \right| dt + \sigma dz \quad (7)$$

onde a contante η representa a taxa de reversão à média. O modelo é tão tratável analiticamente quanto o modelo de Ho e Lee.

Posteriormente surgiram outros modelos mais elaborados, como o modelo não-estacionário proposto por Black, Derman & Toy [3], também em 1990, nos quais a velocidade de reversão à média, ou a volatilidade, ou ambos, são funções do tempo. O modelo proposto pelos autores é um modelo lognormal com reversão à média, em que a reversão à média é endógena ao modelo, ou seja, é determinada a partir dos parâmetros de entrada, o que resulta na vantagem de que as taxas de juro não podem tornar-se negativas.

A equação de difusão tem a forma:

$$d \ln(r(t)) = \left| \theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} - \ln((t))r \right| dt + \sigma(t).dz \quad (8)$$

que é obtida aplicando-se o lema de Itô no logaritmo da função de t e $z(t)$, que descreve a evolução das taxas de juros:

$$r(t) = e^{\mu \cdot (t) + \sigma(t) \cdot z(t)} \quad (9)$$

onde $\mu(t)$ é a média da taxa de crescimento da taxa de juros *spot* entre dois vértices, $\sigma(t)$ é a volatilidade desta taxa de crescimento e $z(t)$ é o processo de Wiener padrão.

O modelo também incorpora duas funções dependentes do tempo – $\theta(t)$ e $\sigma(t)$, escolhidas de forma que o modelo reproduza a estrutura a termo de taxas de juros *spot* e a estrutura a termo de volatilidade das taxas de juros *spot*.

Em 1992, Heath, Jarrow e Morton [10] propuseram um modelo lognormal de dois fatores para as taxas a termo. Trata-se de um modelo não-markoviano, ou seja, para se conhecer o comportamento estocástico de r ao longo de um período curto de tempo no futuro, é preciso conhecer o valor de r no início do período e sua trajetória para atingi-lo.

3.2

Modelo de Black

Em 1976, Fisher Black publicou um artigo em que modela os preços futuros como ativo objeto no lugar dos preços *spot* modelados pela equação de Black & Scholes. O modelo é largamente utilizado para o apreçamento de opções europeias sobre *commodities*, *forwards* e futuros.

O modelo de Black [2] será utilizado como um modelo de referência para a determinação dos preços e deltas das opções, assumindo-se que o mercado utiliza esse modelo para a determinação dos preços das opções europeias no Brasil.

Neste modelo o preço para uma opção europeia de compra é dado por:

$$c(t, T, s) = P(t, T) [P(T, s) \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)] \quad (10)$$

E para uma opção europeia de venda:

$$p(t, T, s) = P(t, T) [K \cdot N(-d_1) - P(T, s) \cdot N(-d_2)] \quad (11)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P(T, s)}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (12)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

T: Vencimento da opção

s: Vencimento do título

$P(T, s)$: Preço Forward do título entre T e s

σ : Volatilidade do Preço Forward do Título

K: Preço de Exercício

As equações (10) e (11) podem ser utilizadas para avaliar opções européias supondo que as taxas de juros não sejam estocásticas e que a variável objeto seja lognormal no vencimento da opção. A variável F das equações pode ser definida como o preço a termo da variável objeto, para um contrato com vencimento em T.

O modelo de apreçamento de opções de Black pressupõe a lognormalidade da distribuição de probabilidade de uma taxa de juros ou do preço de um título em algum ponto no futuro, e é amplamente utilizado para avaliação de instrumentos como opções européias sobre títulos, caps e floors. Entretanto, a utilização do modelo de Black possui algumas limitações por não fornecer uma descrição da forma como as taxas de juros se desenvolvem ao longo do tempo e, com isso, não pode ser utilizado para a avaliação de derivativos tais como opções americanas de taxa de juros, títulos resgatáveis e notas estruturadas.