

1

Introdução

No início do século XX, Einstein e outros desenvolveram a teoria da relatividade geral (abreviada aqui como “GR”). Nesta teoria, o espaço-tempo é uma 4-variedade V com estruturas topológica e diferencial fixas, cuja métrica em cada ponto, $g^{\mu\nu}(p)$, é dependente da presença de outros campos ou partículas (genericamente, “matéria”): as deformações da geometria causadas pela matéria correspondem precisamente ao que anteriormente era pensado como “força gravitacional”. (Em termos simples, a presença de corpos com massa faz o espaço-tempo se curvar, mudando a trajetória que outros corpos seguem.) Esta interação entre geometria e matéria pode ser descrita em termos muito semelhantes aos de um sistema mecânico clássico – por conta disso, é dito que a GR é uma teoria da “geometrodinâmica” (literalmente, dinâmica da geometria).

Na mesma época foi criada a mecânica quântica (“QM”). Até então, toda teoria física tratava de sistemas dotados de *observáveis* assumindo sempre valores bem-definidos. A QM abandona esta concepção (dita “clássica”), postulando que só é possível obter *propriedades estatísticas* destes observáveis, e de que este indeterminismo é fundamental. A saber: os estados do sistema são representados por elementos $|\psi\rangle$ (chamados “kets”) de um espaço de Hilbert H (onde o produto interno entre $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ é denotado $\langle\psi|\phi\rangle$), e os observáveis correspondem a operadores auto-adjuntos \hat{A} definidos sobre (um subespaço denso de) H ; a idéia é que o valor esperado do operador \hat{A} no estado $|\psi\rangle$ seja o número $\frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$. (Note que, nesta definição, está embutida a idéia de que dois “kets” que diferem um do outro por uma constante multiplicativa de fato representam o mesmo estado.)

A QM descreve com bastante sucesso o comportamento do mundo microscópico – experimentos comprovam o caráter probabilístico de diversos sistemas no mundo real. Por outro lado, ao desenvolver uma teoria quântica correspondente a um sistema macroscópico, com uma teoria clássica já bem-formulada, é evidente que a primeira deve ser uma extensão genuína da segunda: quando se consideram escalas macroscópicas (ou seja, “muito grandes” do ponto de vista quântico), o limite das previsões quânticas deve corresponder

precisamente às previsões da teoria clássica.

A partir da década de 40, os postulados da QM começaram a ser aplicados à descrição dos campos materiais sobre o espaço-tempo, dando à luz a teoria quântica dos campos (“quantum field theory”, ou QFT), que foi aplicada, por exemplo, para descrever com sucesso o comportamento da força eletromagnética.

Desde a década de 30, se busca uma maneira de obter uma teoria quântica da gravitação. Infelizmente, as tentativas de aplicar as técnicas usuais de quantização (a assim chamada “quantização canônica”), e chegar a uma teoria tratável, falharam. Devido a esta enorme dificuldade, a abordagem mais comum nas últimas décadas tem envolvido tentativas de circundar a abordagem “direta” da quantização, criando modelos supostamente mais fundamentais que abarcariam de uma só vez todas as forças. O mais popular destes modelos, atualmente, é a teoria das supercordas ou teoria-M. Entretanto, há uma grande dificuldade em obter desta teoria previsões que possam ser verificadas experimentalmente, e muitos consideram a matemática por trás dela um tanto obscura.

Em contraste, certos pesquisadores têm estudado uma forma alternativa de aplicar o processo de quantização canônica à gravidade, de forma a obter uma teoria consistente e com previsões bastante peculiares. Esta teoria se chama gravidade quântica em laços (“Loop Quantum Gravity”, ou LQG), e tem a vantagem de ser bem-definida matematicamente, em termos relativamente simples e bastante tratáveis.

No entanto, esta teoria envolve estados que *não são* compatíveis de forma evidente com os estados obtidos nas teorias de campos quânticos usuais. Por exemplo, a teoria quântica do campo eletromagnético tem, como estados (ou “excitações”) fundamentais, ondas planas em três dimensões – precisamente as ondas eletromagnéticas do eletromagnetismo clássico de Maxwell. Neste caso, está claro que a teoria quântica obtém o limite clássico correto. Em contraste, os estados fundamentais previstos pela LQG não são definidos no espaço inteiro, mas apenas em cima de grafos arbitrários. Ou seja, a teoria prevê que a geometria do espaço-tempo é constituída fundamentalmente de excitações unidimensionais, “poliméricas” – que faz sentido falar da métrica apenas em pontos contidos nestes grafos. Resta, portanto, a questão de verificar se existem, afinal, estados da LQG que *representem* (em algum sentido razoável) os estados previstos pela teoria da GR – estados *semiclássicos*.

Mais geralmente, certos sistemas clássicos admitem uma “*quantização polimérica*”, dotada de certas propriedades matemáticas que a distinguem das quantizações obtidas pelos métodos “tradicionais” (quantizações canônicas)

– em particular, com espaços de estados desprovidos de um produto interno físico *a priori*, e portanto, desprovidos de noções *a priori* de valor esperado e variância. Quando estamos lidando com um sistema clássico \mathcal{S} que admite uma quantização canônica, frequentemente há um estado privilegiado (estado coerente) $\psi_{\mathbf{s}}$ associado a cada estado clássico específico \mathbf{s} . A idéia, então, é primeiramente estudar sistemas admitindo os dois tipos de quantização. Se, nestes casos, formos capazes de descrever uma relação pela qual possamos dizer razoavelmente que certo estado “polimérico” σ representa $\psi_{\mathbf{s}}$, então por extensão podemos associar σ ao estado clássico \mathbf{s} de forma direta e sistemática. Só então poderíamos, finalmente, estender esta heurística de associação a sistemas que, como a LQG, não parecem admitir quantizações canônicas (e portanto desprovidos de estados coerentes).

Começamos, no capítulo 2, com um panorama geral da LQG. Mostramos como se constrói esta teoria de um ponto de vista abstrato, partindo da formulação da GR como teoria de gauge dum fibrado principal de $SU(2)$ (descrita no apêndice A); apresentamos as redes de spin como base natural, e construímos certos operadores de interesse. Concluimos descrevendo a interpretação física desta formulação, apresentando o operador área, e a previsão notável de que, na LQG, os valores admitidos para as áreas de superfície formam um conjunto discreto. Este capítulo pretende apenas dar um embasamento físico para aquilo que será desenvolvido no resto da dissertação; como tal, é propositadamente menos rigoroso e, em vários pontos, apenas esquemático.

A idéia de uma quantização polimérica, desenvolvida esquematicamente no capítulo 2, é retomada de forma rigorosa no capítulo 3, num contexto simplificado. Neste capítulo, lidamos com um “toy model”, um sistema físico extremamente simples: a partícula pontual em uma dimensão, cuja teoria quântica canônica (a representação de Schrödinger) é simples e muito bem compreendida. Formulamos rigorosamente a teoria “polimérica” para este sistema, cujos estados são elementos de Cyl^* , o dual a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$ gerado por ondas planas. Nesta representação, definimos uma imersão “natural” dos estados coerentes da representação de Schrödinger em Cyl^* , obtendo uma classe de “estados candidatos”. Finalmente, implementamos a proposta descrita acima, por meio de uma técnica chamada *shadow states*. A idéia desta técnica é que a informação estatística contida em um estado-candidato σ pode ser totalmente descrita por uma *família enumerável* de elementos de $\mathcal{H}_{\text{Poly}}$, chamados *sombras* de σ . Podemos então definir o “valor esperado” e “variância” de operadores com relação a cada sombra, e portanto afirmar que um estado é semiclássico (para certa família) se satisfaz certas

propriedades estatísticas para todas as sombras.

No capítulo 4, consideramos outro modelo simplificado admitindo quantizações de ambos os tipos: a teoria do campo eletromagnético em \mathbf{R}^3 . A quantização polimérica desta teoria é muito mais tratável do que a LQG por ser abeliana (o grupo de gauge envolvido é $U(1)$ ao invés de $SU(2)$) e envolver um espaço dotado de métrica de fundo. Neste contexto, somos capazes de repetir quase que literalmente a construção de estados-candidatos feita no capítulo 3 – por simplicidade, fazemos apenas o caso de um candidato específico, o vácuo da representação canônica. Finalmente, formulamos novamente a estrutura de “shadow states”, e terminamos fazendo algumas estimativas que indicam que este estado-candidato tem, de fato, as propriedades desejadas. Adicionalmente, apresentamos uma construção que permite obter um estado análogo ao vácuo para a LQG, mas as propriedades deste estado não estão claras.

O capítulo 2 utiliza conhecimentos elementares da teoria da GR e da técnica de quantização canônica. O capítulo 3, alguns fatos de análise funcional. Por fim, no capítulo 4, fazemos uso de certos conceitos da teoria da medida e da teoria de C^* -álgebras.