Referências Bibliográficas

[1] H. Nicolai, K. Peeters, M. Zamaklar. "Loop quantum gravity: an outside view", hep-th/0501114. 2.1

[2] Eric W. Weisstein et al. "Haar Measure." From MathWorld – A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/HaarMeasure.html. 2.2

[3] R. De Pietri, C. Rovelli. "Geometry eigenvalues and the scalar product from recoupling theory in loop quantum gravity", Phys Rev D54 (1996) 2664. 2.4

[4] C. Rovelli. *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004). 2.5, 2.6, 4.6

[5] C. Rovell, P. Upadhya. "Loop quantum gravity and quanta of space: a primer", gr-qc/9806079. 2.6

[6] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds, and Physics, volume I* (North Holland, Amsterdam, 1982). 3.3

[7] J. Glimm, A. Jaffe. *Quantum Physics: a functional integral point of view* (Springer, New York, 1987). 4.1

[8] K. Hoffman, *Fundamentals of Banach Algebras* (Instituto de Matemática da Universidade do Paraná, Curitiba, 1962). 4.1

[9] A. Ashtekar, J. Lewandowski. "Representation theory of analytic holonomy C* algebras", gr-qc/9311010. 4.2

[10] A. Ashtekar, C. J. Isham. "Representations of the holonomy algebras of gravity and non-Abelian gauge theories", hep-th/9202053. 4.2

[11] D. Marolf, J. M. Mourão. "On the support of the Ashtekar-Lewandowski measure", Commun Math Phys 170 (1995) 583-606. 4.2

[12] M. Varadarajan. "Fock representations from $U(1)$ holonomy algebras", Phys Rev D61 (2000) 104001. 4.3, 4.6

[13] M. Varadarajan. "Photons from quantized electric flux representations", Phys Rev D64 (2001) 104003. 4.5, 4.6

[14] A. Ashtekar, J. Lewandowski. "Relation between polymer and Fock excitations", gr-qc/0107043. 4.6

A
A mecânica clássica da conexão

Começamos considerando o fibrado principal trivial de $SU(2)$ sobre uma variedade suave[1] M, ou seja, $SU(2)\times M$. Uma conexão invariante neste fibrado se reduz a uma secção A de $su(2)\otimes T^\star M$, e portanto, em coordenadas locais x^a sobre M, podemos escrevê-la como $\sum_a\sum_i A^i_a(x)\,\tau_i\,dx^a$, com $\{\tau_i\}$ uma base para $su(2)$. (No que se segue, vamos suprimir os somatórios de acordo com a convenção descrita no capítulo 2.)

Seja $\mathcal{A}=\Gamma(su(2)\otimes T^\star M)$ o espaço de secções suaves; este será nosso espaço de configuração, e seu fibrado tangente será $T\mathcal{A}\approx\mathcal{A}\times\mathcal{A}$. Na mecânica clássica usual, o espaço de fase é o fibrado cotangente $T^\star\mathcal{A}\approx\mathcal{A}'\times\mathcal{A}$. onde a definição do dual $\mathcal{A}'$ depende de uma escolha de topologia. Podemos, por exemplo, tomar a topologia de convergência uniforme dos $A^i_a(x)$, e de todas as suas derivadas parciais, em compactos dentro de cartas de um atlas fixo. Neste caso, $T^\star\mathcal{A}$ contém $\mathcal{E}\times\mathcal{A}$, onde $\mathcal{E}=su(2)^\star\otimes TM\otimes\mathcal{V}$. Aqui $\mathcal{V}$ é o fibrado de densidades escalares de peso 1 [2]. Em coordenadas locais x^a, um elemento E de $\mathcal{E}$ pode ser escrito como $E^a_i(x)\,\tau^i\,\frac{\partial}{\partial x^a}$. Se efetuamos uma troca de cartas $x\mapsto\tilde{x}$, temos

$$\tilde{E}^a_i(\tilde{x})=E^b_i(x)\,\frac{\partial\tilde{x}^a}{\partial x^b}\left(\det\frac{\partial x}{\partial\tilde{x}}\right)$$

Como E é densitizado, podemos calcular a integral

$$\langle E,A\rangle\overset{\text{def}}{=}\int_M A^i_a(x)\,E^a_i(x)\,dx$$

(a integral sobre M é obtida através das integrais sobre abertos, utilizando a construção usual por partições da identidade). Neste sentido, consideramos $\mathcal{E}$ conjugado a $\mathcal{A}$. Utilizaremos $\mathcal{E}\times\mathcal{A}$ como o espaço cotangente nas construções que se seguem; está subentendido que podemos generalizá-las a seções distribucionais quando for bem-definido.

[1]Supômo-la compacta para facilitar a construção, embora a teoria quântica não o exija.

[2]Uma densidade escalar de peso p é um objeto representado, em coordenadas locais x^a num aberto U, como uma função $s:U\to\mathbf{R}$, que, sob uma troca de coordenadas $x\mapsto\tilde{x}$, obedece à propriedade $\tilde{s}(\tilde{x})=\left(\det\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}\right)^p\,s(x)$. Desta propriedade decorre que a integral de uma densidade de peso 1 é bem-definida e independente de mudanças de cartas.

Podemos definir então a 2-*forma simplética* Ω sobre $\mathcal{E} \times \mathcal{A}$. Como $\mathcal{E}$ e $\mathcal{A}$ são espaços vetoriais, cada espaço tangente $T_{(E_0,A_0)}(\mathcal{E} \times \mathcal{A})$ é ele próprio isomorfo a $\mathcal{E} \times \mathcal{A}$, e logo os vetores são da forma $X = (V, W)$. A 2-forma simplética é então definida por

$$\Omega(X_1, X_2) \stackrel{\text{def}}{=} \langle V_1, W_2 \rangle - \langle V_2, W_1 \rangle$$

Tome agora um observável, ou seja, uma função $f : \mathcal{E} \times \mathcal{A} \to \mathbf{R}$. A *derivada direcional* de f é definida por

$$\left(D_{(V,W)} f\right)(E, A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(E + t\,V, A + t\,W)\bigg|_{t=0}$$

Este é um funcional linear, e portanto podemos escrevê-lo formalmente em termos de "derivadas funcionais" $\frac{\delta f}{\delta E_i^a(x)}, \frac{\delta f}{\delta A_a^i(x)}$:

$$\begin{aligned} \left(D_{(V,W)} f\right)(E, A) &= \int_M \frac{\delta f}{\delta E_i^a(x)} V_a^i(x)\, dx + \int_M W_i^a(x) \frac{\delta f}{\delta A_a^i(x)}\, dx \\ &= \left\langle V, \frac{\delta f}{\delta E} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta f}{\delta A}, W \right\rangle \end{aligned}$$

e, assim, definimos (formalmente) a 1-forma df por

$$df(E, A) \cdot (V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \left(D_{(V,W)} f\right)(E, A)$$

Logo, podemos identificar $df(E, A)$ com o par $\left(\frac{\delta f}{\delta E}, \frac{\delta f}{\delta A}\right)$, supondo o "produto interno" formal definido acima. (Note que este não é um vetor "de fato"...)

Definimos agora o *campo hamiltoniano* de f como o campo vetorial (formal) X_f satisfazendo $\Omega(X_f, Y) = df \cdot Y$ para todo Y, ou seja,

$$\langle X_{f,E}, W \rangle - \langle V, X_{f,A} \rangle = \left\langle V, \frac{\delta f}{\delta E} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta f}{\delta A}, W \right\rangle$$

donde $X_f = \left(\frac{\delta f}{\delta A}, -\frac{\delta f}{\delta E}\right)$. Enfim, podemos definir o *colchete de Poisson* entre observáveis f, g por

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= dg \cdot X_f \\ &= \left\langle \frac{\delta f}{\delta A}, \frac{\delta g}{\delta E} \right\rangle - \left\langle \frac{\delta g}{\delta A}, \frac{\delta f}{\delta E} \right\rangle \end{aligned}$$

(Esta expressão está bem-definida, por exemplo, se f, g são polinômios em $\langle E, A\rangle$'s.) Este colchete define o sistema mecânico que nos interessa quantizar no capítulo 2. Note que, se f e g são ambas funções apenas de A ou E, então $\{f, g\} = 0$. Mais ainda: tomando $f(E, A) = \int_M A^i_a(x)\, \epsilon^a_i(x)\, dx$ e $g(E, A) = \int_M \lambda^j_b(y)\, E^b_j(y)\, dy$, obtemos

$$\{f, g\} = \langle \epsilon, \lambda \rangle$$

que, por linearidade, podemos reescrever formalmente como

$$\begin{aligned} & \int_M \int_M \epsilon^a_i(x)\, \lambda^j_b(y)\, \left\{A^i_a(x), E^b_j(y)\right\}\, dx\, dy \\ = \; & \int_M \int_M \epsilon^a_i(x)\, \lambda^j_b(x)\, \delta^b_a\, \delta^i_j\, \delta^{(3)}(x, y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

recuperando assim a expressão heurística do colchete de Poisson dada no capítulo 2.

B
Expressões auxiliares

Começamos recordando uma fórmula extremamente útil da análise de Fourier:

Lema 1 (Fórmula de somatório de Poisson) *Se f é uma função satisfazendo as condições de Schwartz*[1]*, então*

$$\sum_n f(x+n) = \sum_m e^{-2\pi imx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{2\pi imy}\, dy$$

Dem. $F(x) = \sum_n f(x+n)$ é bem-definido para todo x; se trata de uma função contínua e periódica com período 1. Logo, pode ser expandida em série de Fourier, $F(x) = \sum_m a_m\, e^{-2\pi imx}$; usando o Teorema de Fubini, os coeficientes da série são

$$\begin{aligned}
a_m &= \int_0^1 F(x)\, e^{2\pi imx}\, dx \\
&= \sum_n \int_0^1 f(x+n)\, e^{2\pi imx}\, dx \\
&= \sum_n \int_0^1 f(x+n)\, e^{2\pi im(x+n)}\, dx \\
&= \sum_n \int_n^{n+1} f(y)\, e^{2\pi imy}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{2\pi imy}\, dy
\end{aligned}$$

Em particular, com $x = 0$, obtemos $\sum_n f(n) = \sum_m \hat{f}(2\pi m)$, onde $\hat{f}$ é a transformada de Fourier de f.

Recordamos também as seguintes propriedades de integrais gaussianas (cuja demonstração é elementar e pode ser obtida em qualquer livro de análise).

[1] De fato, esta fórmula vale sob condições bem mais fracas, mas as condições de Schwartz nos bastam.

Lema 2 (Integral gaussiana) *Se $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbf{C}$, valem*

$$\int e^{-\alpha y^2+\beta y} dy = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

e, por consequência,

$$\int y^n e^{-\alpha y^2+\beta y} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{d^n}{d\beta^n} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

e

$$\int y^{2n} e^{-\alpha y^2+\beta y} dy = \frac{d^n}{d\alpha^n} \left(e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right)$$

(Note que $\frac{d^n}{d\beta^n} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} = p_n(\beta)\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$, onde os polinômios p_n satisfazem a recorrência

$$p_{n+1} = p_n' + \frac{\beta}{2\alpha} p_n,\ p_1 = \frac{\beta}{2\alpha}$$

É possível determinar uma recorrência para cada coeficiente polinomial, mas não faremos isto aqui.)

Podemos agora combinar estas expressões e obter a seguinte fórmula e suas duas consequências imediatas, usadas extensivamente ao longo do capítulo 3:

Fórmula 1

$$\begin{aligned}
\sum_n e^{-\alpha n^2+\lambda n} &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} \sum_m e^{-\frac{\pi i m\lambda - \pi^2 m^2}{\alpha}} \\
\sum_n n\, e^{-\alpha n^2+\lambda n} &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} \sum_m \left(\frac{\lambda + 2\pi i m}{2\alpha} \right) e^{-\frac{\pi i m\lambda - \pi^2 m^2}{\alpha}} \\
\sum_n n^2\, e^{-\alpha n^2+\lambda n} &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}} \sum_m \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{\lambda^2 + 4\pi i m\lambda - 4\pi^2 m^2}{4\alpha^2} \right) e^{-\frac{\pi i m\lambda - \pi^2 m^2}{\alpha}}
\end{aligned}$$

A utilidade destas fórmulas reside no fato de que, quando α é pequeno, o somatório da esquerda converge lentamente, enquanto que o da direita converge rapidamente e portanto podemos truncá-lo tomando apenas os termos $m = -1, 0, 1$.