

5 Análise numérica

Resolvemos o sistema de equações diferenciais não-lineares sujeito às condições de contorno através do programa de computador Maple 9. O sistema foi resolvido para o caso particular de material Neo-Hookeano, cujas deformações eram grandes o suficiente para satisfazer essa condição.

Transformamos o sistema de duas equações diferenciais ordinárias não-lineares de segunda ordem em um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Isso foi possível através do uso de variáveis auxiliares, onde as variáveis auxiliares U e V correspondem às derivadas primeiras de r e z . Desse modo, temos que:

$$r' = U$$

$$z' = V$$

$$r'' = U' = \frac{(r'F + z'G)}{\lambda_1^2}$$

$$z'' = V' = \frac{(z'F - r'G)}{\lambda_1^2}$$

onde,

$$F = \frac{\lambda_1}{W_{11}} \left[\lambda_2' \left(\frac{W_1}{\lambda_2} - W_{12} \right) - \frac{r'}{r\lambda_1} (\lambda_1 W_1 - \lambda_2 W_2) \right]$$

$$G = \frac{\lambda_1^2}{W_1} \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2 P}{H} + \frac{z'}{r\lambda_1} \lambda_2 W_2 \right)$$

Como a membrana é fixa no bordo, $r = a$, as condições de contorno são:

$$r(0) = 0$$

$$z(0) = 0$$

$$z'(0) = 0$$

$$r(a) = a$$

onde, a = raio da membrana indeformada

O problema foi resolvido através do método numérico de Runge-Kutta, presente na biblioteca do programa Maple 9. Para a aplicação do método na solução do sistema de equações diferenciais, a variável independente é ρ e as variáveis dependentes são $r(\rho)$, $r'(\rho)$, $z(\rho)$, $z'(\rho)$.

Para a utilização do método de Runge-Kutta, é preciso saber as condições de contorno iniciais, em $\rho = 0$. Sabemos os valores de $r(0)$, $z(0)$, $z'(0)$, mas não conhecemos $r'(0)$. Então, estimamos valores de $r'(0)$ até que se atingisse a configuração deformada desejada, ou seja, $r(a) = a$. Essa técnica para encontrar a solução através desses ajustes é chamada de “Shooting Method”, vista em Krayterman (1990), sendo a convergência obtida pelo método de Newton-Raphson.

Para a solução desse sistema de equações diferenciais no Maple 9, utilizamos um valor bem próximo a 0, visto que o programa não obteve resultados satisfatórios no ponto 0. técnicas de otimização numérica para problemas de engenharia são apresentadas em Vanderplaats (1984), tendo uma abordagem mais ampla sobre o assunto.

5.1. Método de Newton-Raphson

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x)=0$. Transformamos esta equação em uma equação equivalente

$x = \varphi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0 geramos a seqüência $\{x_k\}$ de aproximações para ξ pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, pois a função $\varphi(x)$ é tal que $f(\xi) = 0$ se e somente se $\varphi(\xi) = \xi$.

O método de Newton-Raphson usa uma função de iteração $\varphi(x)$ em que $\varphi'(x) = 0$.

Então, dada a equação $f(x) = 0$ e partindo da forma geral para $\varphi(x)$, queremos obter a função $A(x)$ tal que $\varphi'(x) = 0$.

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x)$$

$$\rightarrow \varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

$$\rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi)$$

$$\rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)$$

Assim, $\varphi'(\xi) = 0 \leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0$, logo $A(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}$, donde

tomamos $A(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.

Então, dada $f(x)$, a função de iteração $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que

$\varphi'(\xi) = 0$, pois como podemos verificar:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

e como $f(\xi) = 0$, $\varphi'(\xi) = 0$ (desde que $f'(\xi) \neq 0$).

Para encontrarmos os valores de $r(0)$ a serem utilizados nas resoluções do sistema de equações, utilizamos o método de Newton-Raphson. Conhecemos $r(0)$, $z(0)$ e $z'(0)$, mas não sabemos o valor de $r'(0)$. Então utilizamos esse método com a condição de que $r(1) = 1$ fosse satisfeita, dentro de tolerâncias especificadas, no caso 10^{-3} .

Foi implementado no programa Maple 9, que está em anexo, o método para alcançarmos um resultado que se adequasse satisfatoriamente com a teoria.

Fazendo uma análise geométrica do método temos que dado o ponto $(x_k, f(x_k))$ traçamos a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:

$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

$L_k(x)$ é um modelo linear que aproxima a função $f(x)$ numa vizinhança de x_k .

Encontrando o zero deste modelo, obtemos:

$$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Fazemos então $x_{k+1} = x$

Graficamente:

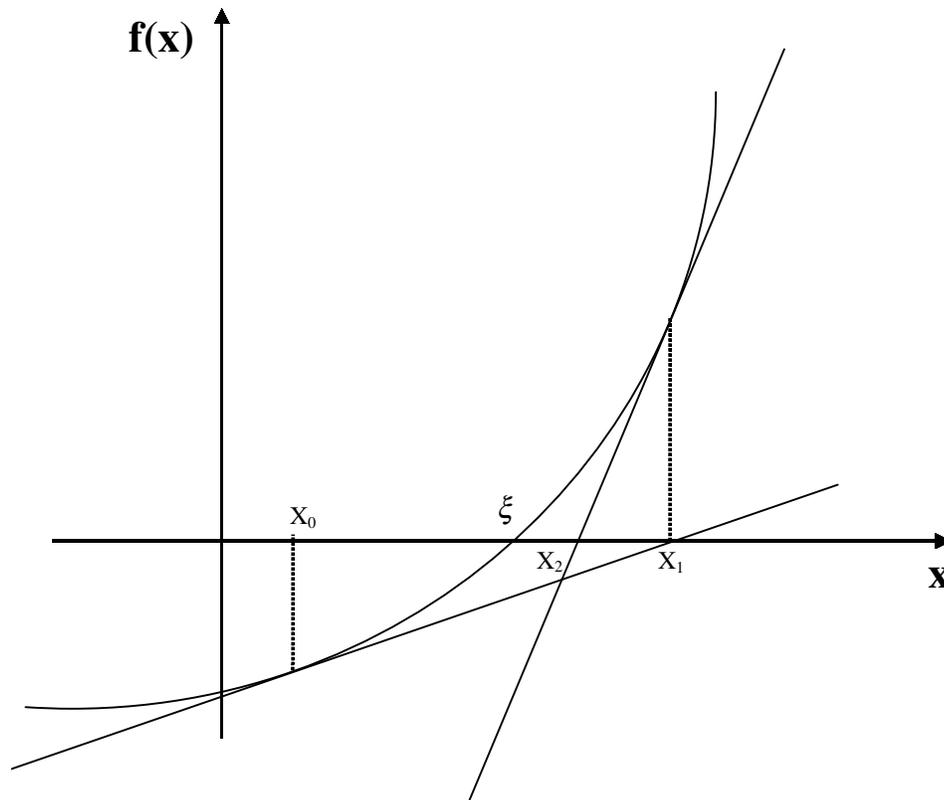


Figura 5.1 – Newton-Raphson

5.2. Verificação do modelo computacional

Para validarmos o modelo numérico implementado no Maple 9, realizamos a verificação que segue.

Na presente verificação, comparamos o volume obtido numericamente com o volume calculado pela fórmula da calota esférica, que pode ser observado na Figura 5.2.

$$\text{Volume da calota esférica} = \frac{\pi}{3} z^2 \left(\frac{3r^2}{2z} + \frac{z}{2} \right)$$

Onde, $r \rightarrow$ raio da membrana

$z \rightarrow$ altura da calota esférica

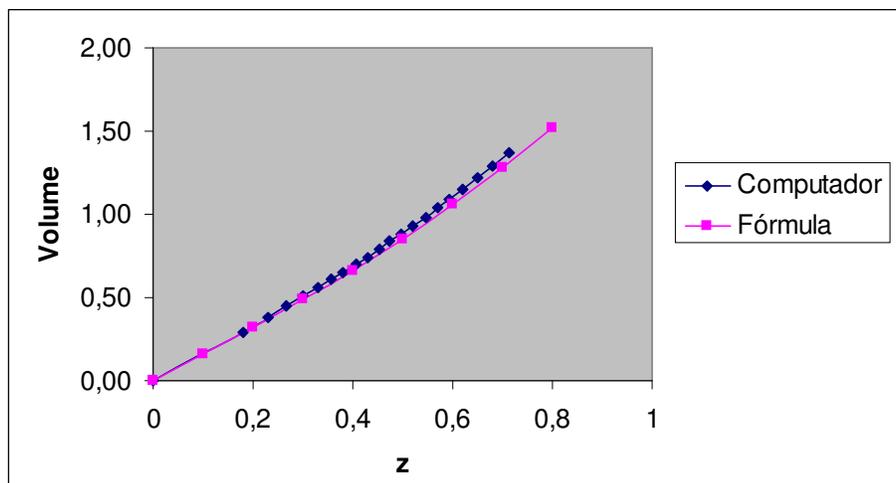


Figura 5.2 - Volume x Altura

Podemos verificar pela Figura 5.2 que o volume obtido pelo modelo numérico tem uma convergência satisfatória com o da fórmula da calota esférica, forma aproximada da expansão.

Na Figura 5.3 acompanhamos o processo de expansão da membrana. Os valores do raio e da altura estão adimensionalizados, divididos pelo comprimento inicial do raio, a , e o valor do volume é adimensional.

A cada incremento de volume podemos observar na Figura 5.3 como a membrana se deforma. Com isso podemos ver que a geometria fornecida pelo computador é semelhante à observada experimentalmente.

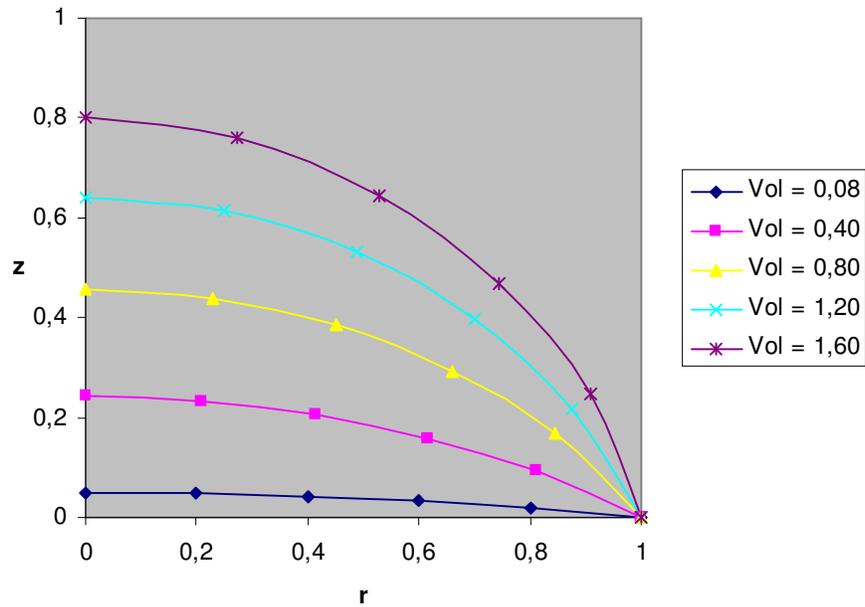


Figura 5.3 – Raio x Altura - base rígida

Na figura 5.4 podemos observar como se deformou o lençol de borracha no ensaio experimental em relação à geometria obtida através do modelo numérico.

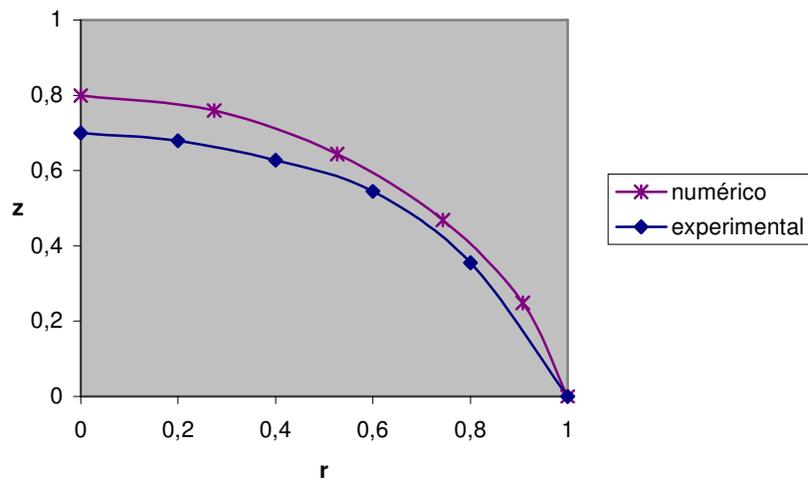


Figura 5.4 – Comparação da geometria do ensaio experimental e do modelo numérico

A figura 5.4 mostra as geometrias obtidas no final da expansão com uma aproximação satisfatória do modelo numérico com a experiência.