

## CAPÍTULO 3

# MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS NA SIMULAÇÃO DE CORRIDAS DE DETRITOS

### 3.1. Filosofia da Modelagem

A modelagem é a representação matemática de um sistema real, mas esta não é perfeita, fora do caso de um sistema linear simples. Uma modelagem deve, dentro do possível, ser validada com experiências práticas ou calibrada com observações no campo ou laboratório.

Por outro lado, um conceito de grande confusão com a definição anterior é a *simulação* que é a programação, manipulação e análise de resultados do modelo num computador. Isto permite fazer avaliações dos parâmetros do modelo sem maiores perdas de tempo, além do que o estado do sistema pode ser conhecido em qualquer momento e até pode-se observar processos impossíveis de visualizar na vida real. Então, falar-se-á agora sobre os enfoques mais usados na modelagem de corridas de detritos. Em geral, o enfoque da modelagem destes fenômenos pode-se dividir em três grandes grupos: enfoques estatísticos, determinísticos e modelos a escala [23], [24].

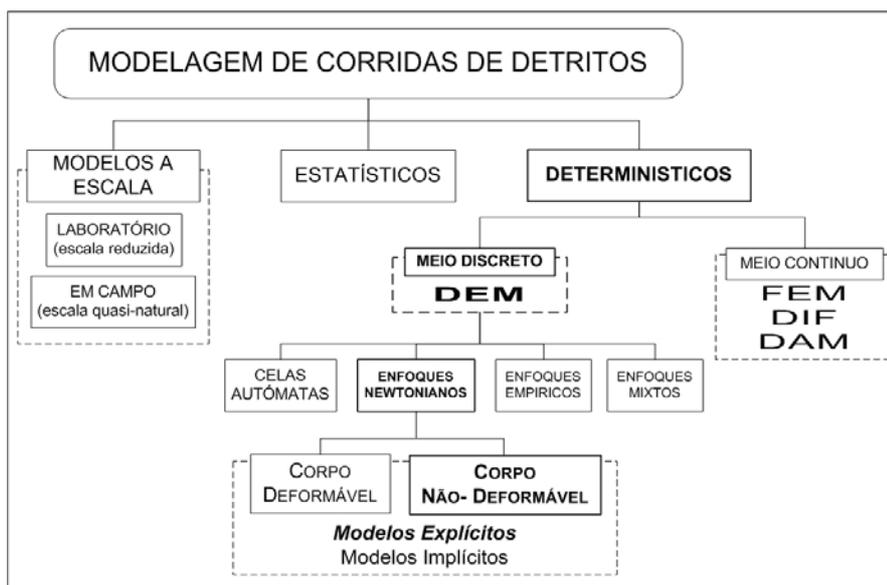


FIGURA 3.1- Métodos numéricos comumente usados na modelagem de corridas de detritos.

### 3.1.1.

#### **Modelos Estatísticos**

Estes modelos são usados principalmente na avaliação potencial da ameaça por corridas, pois são métodos semiquantitativos. Um bom modelo empírico deve tentar ser rápido, objetivo e reproduzível, que possa ser usado quando o tempo, dados, orçamento o pessoal são inadequados para poder aplicar métodos sofisticados <sup>[10]</sup>. Rickenmann (1999) debate que as corridas de detritos e fenômenos similares são tão complexos que os métodos numéricos por mais avançados que forem são limitados para as aplicações práticas. Este autor não considerou que as simulações podem melhorar o entendimento do fenômeno e mecanismos de ocorrência para produzir medidas preventivas eficazes ante este tipo de ameaça.

Nestes modelos, os autores tentam correlacionar algumas características básicas das corridas como a máxima distância percorrida, vazão pico, velocidade máxima ou volume com as observações de campo ou laboratório. Contudo, ditas correlações são difíceis de obter, pois as observações diretas no campo ou provas a escala são muito limitadas. A disponibilidade de um acervo estatístico de eventos bem descrito ou de experiências de laboratório realista em muitos países é inexistente, mas em outros é de uma cronologia muito recente. Assim, são poucos os países que dispõem deste acervo. Cabe mencionar que as bases de dados do Canadá, Estado Unidos, Japão e Comunidade Européia são invejáveis. Em especial, a base de dados integrada dos países da Comunidade Européia (DOMODIS, DOcumentation of MOuntain DISasters) <sup>[25]</sup>, talvez seja a mais completa atualmente, pois tem registrado eventos nos mais diversos ambientes e condições geológicas possíveis, desde fluxos no fundo do Mar do Norte até nos Alpes para os últimos 20 anos.

Rickenmann (1995) propôs que primeiro deve ser avaliada a probabilidade de ocorrência de corridas e depois se deve estimar quantitativamente os parâmetros mais importantes mencionados anteriormente. São indispensáveis as bases de dados de eventos passados assim como descrições sedimentológicas e litológicas.

Os parâmetros mais usados são: a área da bacia hidrográfica, o gradiente, o índice geológico entre outros, correlacionados com o volume da massa.

Especificamente sob este enfoque, a escola suíça é a mais destacada dentre as outras principalmente no uso das análises regressivas [19]. Zimmermann e colaboradores (1997) acharam que a variável mais significativa na determinação da distância de percurso da corrida era a área da bacia, A (em Km<sup>2</sup>):

$$\chi = 0.2 \cdot A^{-0.26} \quad (3.1)$$

Estes autores determinaram que esta equação é diferente para aquela que descreve avalanches de detritos, pois esta última depende da grandeza do gradiente da trajetória seguida. Este foi o indício para que Rickenmann propusesse uma relação onde demonstra a dependência com o volume de sedimentos (Vol, m<sup>3</sup>) com a vazão pico (Q<sub>p</sub>) entre dois eventos similares:

$$Q_2 = 0,1 \cdot Vol_2^{5/6} = 0,1 \cdot \left( \frac{Vol_2}{Vol_1} \right)^{5/6} = \frac{Q_{P2}}{Q_{P1}} \quad (3.2)$$

Rickenmann (2000) propôs equações similares às usadas na hidráulica na determinação da vazão máxima. Ainda que o fenômeno físico das corridas de detritos não seja comparável com as equações para um fluido puro, as leis do regime turbulento permitem algumas similitudes. Assim por exemplo, a típica equação de resistência de Manning ou Chezy usada na hidráulica pode ser usada com as seguintes mudanças:

$$\bar{v} = C_r H^\alpha S^\beta \quad (3.3.a)$$

Onde:

Tipo de Fluxo	C <sub>r</sub>	α	β	Relação Q*
Fluxo laminar newtoniano	$\frac{\rho g}{3\mu}$	2	1	$\mu^* = 20 Q^{*3/5}$
Fluxo Dilatante	ξ	1,5	0,5	$\xi^* = 150 Q^{*-2/5}$
Fluxo turbulento newtoniano: Manning	n <sup>-1</sup>	0,67	0,5	$n^* = 0,077 Q^{*-1/15}$
Fluxo turbulento newtoniano: Chezy	C*	0,5	0,5	C* = 22
Fluxos de detritos transientes	C <sub>1</sub>	0,3	0,5	C <sub>1</sub> * = 10 Q <sup>*2/25</sup>

Tabela 3.1- Valores de coeficientes e expoentes da equação (3.3.a) para corridas de detritos [19].

Alguns autores russos, chineses e japoneses propõem variações da equação (3.3.a) com os seguintes valores: 0,5 < α < 0,67 e 0,25 < β < 0,5. Uma outra relação para a velocidade média do fluxo de detritos é [10]:

$$\bar{v} = 2,1 \cdot Q^{0,33} S^{0,33} \quad (3.3.b)$$

Uma vez conhecida a largura aproximada do canal pelo qual ocorre o fluxo, com a equação (3.3.a) ou (3.3.b) pode-se determinar a vazão máxima do fluxo. Contudo isto, este autor propôs uma relação diferente entre a vazão máxima  $Q_p$  ( $m^3/s$ ) e o volume ( $m^3$ ) para fluxos detríticos de lodo:

$$Q_p = 0,0225 \cdot Vol^{0,8} \quad (3.4)$$

Enquanto que Misuyama (1992) estimara a vazão como:

$$Q_p = 0,135 \cdot Vol^{0,78} \quad \text{para o fluxo detrítico granular} \quad (3.5.a)$$

$$Q_p = 0,0188 \cdot Vol^{0,79} \quad \text{para o fluxo detrítico de lama} \quad (3.5.b)$$

E como se pode apreciar nas equações anteriores, a vazão é maior nos fluxos detríticos granulares do que nos de lama.

Por outro lado, Rickenmann também estudou a distância de percurso da corrida:

$$L = 350 \cdot Vol^{0,25} \quad (3.6.a)$$

Para materiais aluvionares, esta distância  $L_f$  é dado por:

$$L_f = 15 \cdot Vol.^{1/3} \quad (3.6.b)$$

Mas, na Itália, este autor determinou a seguinte relação:

$$L_f = 7 \cdot Vol.^{0,275} \quad (3.6.c)$$

Por outro lado, também têm sido caso de estudo as condições de ocorrência destes eventos, principalmente originados por chuvas intensas. Neste caso, a *escuela italiana* recentemente apresentou trabalhos considerando propriedades da curva característica para solos parcialmente saturados piroclásticos e a precipitação na região sul da Itália <sup>[26]</sup>. Neste trabalho, os autores propõem duas relações para a determinação de precipitações que poderiam iniciar a ocorrência de uma corrida de detritos: a primeira só é feita por análise estatística das precipitações que ocasionaram uma corrida de detritos, enquanto que a segunda é formulada considerando a saturação do solo durante as precipitações até produzir a corrida:

$$i = 14,82 \cdot d_t^{-0,39} \quad (3.7.a)$$

$$i = \frac{Z_t}{d_t} + 0,48 \cdot K_d \cdot Z_t \quad (3.7.b)$$

No Brasil, Kanji e Massad (2002) propuseram uma relação similar para os eventos ocorridos na Serra do Mar no Estado de São Paulo [21]. Esta relação considera precipitações de larga duração (vários dias ou semanas) nas quais aconteceram corridas de detritos principalmente para intensidades altas durante curtos períodos de duração.

$$i = 22,4 \cdot d_t^{0,41} \quad (3.7.c)$$

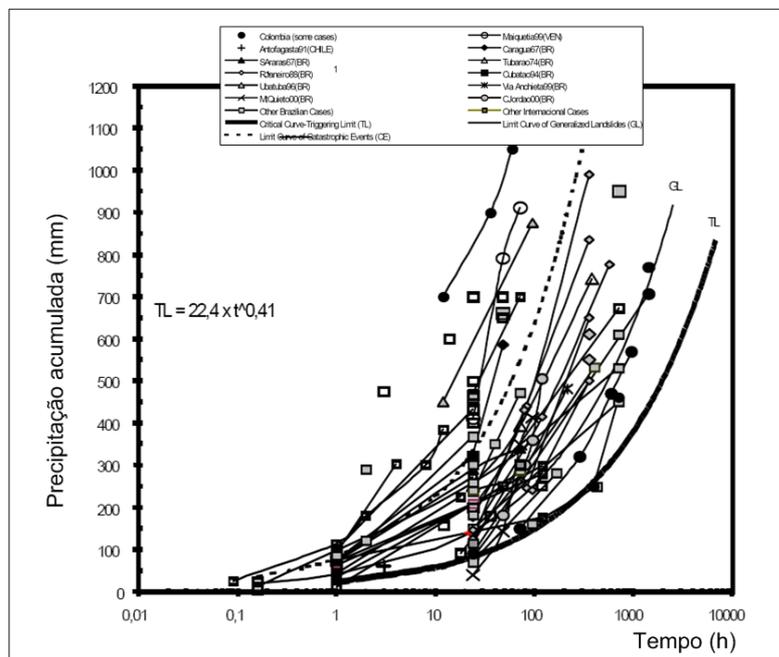


FIGURA 3.2- Precipitação acumulada versus duração de tormenta relacionada à ocorrência de corridas de detritos e grandes deslizamentos [21].

Existem estudos mais detalhados sobre este aspecto com considerações teóricas mais fortes [27]. Um outro fator de estudo estatístico tem sido a relação do coeficiente de resistência e o volume da corrida como foi visto na secção 2.2.5.1 do capítulo anterior.

Em geral, estes métodos enfocam-se sobre a taxa de perda do volume no fluxo (vazão), geometria do canal por onde escoo o fluxo e geometria física do processo [23].

### 3.1.2.

#### **Modelos Determinísticos**

Sob este enfoque, os autores determinam relações físicas que caracterizam a natureza da corrida. Assim, existem modelos muito simples aplicáveis a certos experimentos sob condições muito controladas até os modelos que consideram a natureza dinâmica não-linear do fenômeno das corridas.

Com isto, uma corrida de detritos é considerada um meio não-linear viscoelastoplástico compressível que precisa de algumas simplificações para poder ser modelado matematicamente <sup>[9]</sup>. De aí que algumas modelagens seguem uma das seguintes suposições:

- O fluxo de detritos é um fluido contínuo isotrópico.
- O fluxo de detritos é um fluido incompressível.
- As tensões isotrópicas e deformações volumétricas são desprezíveis, só são consideradas as deformações causadas por tensões desviadoras.
- A aceleração vertical é desprezível.

Segundo a natureza do sistema, o enfoque determinístico tem dois grandes grupos. O primeiro considera o fluxo como um meio contínuo caracterizado pelas velocidades (Enfoque Euleriano) ou pelas posições dos nós em estudo (Enfoque Lagrangiano), no qual podem ser aplicadas as leis de continuidade física e o segundo grupo considera o fluxo como uma composição de elementos unitários com geometria definida. As partículas agem entre si mediante leis físicas ou por simples imitação do movimento natural do fluxo.

No primeiro grupo a técnica numérica de maior sucesso tem sido o Método dos Elementos Finitos (FEM), com o qual o fluxo é considerado como um só elemento pelo que sua caracterização é dada para a massa toda envolvida no movimento, desprezando as particularidades internas desta. Assim por exemplo, o fenômeno de segregação direta ou inversa não pode ser modelado dentro deste enfoque. Em geral, neste grupo as técnicas de solução podem ser analíticas ou numéricas, sendo as primeiras o grupo mais limitado nas aplicações práticas <sup>[23]</sup>.

Por outro lado, a técnica numérica mais usada do segundo grupo é o Método dos Elementos Discretos (DEM). Sob este enfoque o fluxo é visto como um meio de unidades geométricas definidas que agem entre si de tal forma que o comportamento global é visto como o somatório destes comportamentos. O principal problema deste método é a grandeza dos tempos nas simulações quando se trata de muitas partículas tentando se aproximar ao caso real.

### 3.1.2.1. Método dos Elementos Finitos (FEM)

Neste método geralmente são usadas as equações de Navier-Stokes de conservação de massa e as de conservação de momentum. Estas equações podem ser tomadas sob distintos supostos, dos quais os mais utilizados são aqueles relativos ao sistema em estudo: volume de controle integral ou diferencial.

Com o enfoque do volume integral não se requer muita informação sobre a variação das pressões e velocidades no contorno pelo que o enfoque é muito prático e útil na solução de problemas de mecânica de fluxos. Porém as condições de fronteira no volume de controle no problema de corridas de detritos é importante, pois o comportamento deste varia segundo o gradiente de velocidades. Neste caso, usa-se o enfoque do volume diferencial o qual estuda o equilíbrio num ponto do volume e com técnicas de integração pode-se determinar as variações no contorno de dito volume.

Ainda que este enfoque não seja o interesse principal deste trabalho, ao menos se descreverão as equações básicas e se comentarão alguns casos de estudo, pois estes métodos são os mais predominantes na literatura consultada e em alguns casos os autores concluem no fato de considerar o DEM como um método alternativo no estudo das corridas de detritos na simulação de certos processos que não podem ser simulados com o FEM.

#### 1. Equação de Continuidade (Conservação de massa)

Considerando um volume infinitesimal  $\rho_m$  com velocidade  $\vec{V} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$ . Então, por conservação de massa no volume <sup>[28], [29]</sup>:

$$\partial(m_{\text{entrando}} - m_{\text{saindo}}) = \frac{\partial}{\partial t} m_{\text{elemento}} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \rho_m u - \frac{\partial(\rho_m u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz - \left[ \rho_m u + \frac{\partial(\rho_m u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz + \left[ \rho_m v - \frac{\partial(\rho_m v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz - \\ & \left[ \rho_m v + \frac{\partial(\rho_m v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz + \left[ \rho_m w + \frac{\partial(\rho_m w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dz + \left[ \rho_m w - \frac{\partial(\rho_m w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy = \\ & \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m dx dy dz) \quad (3.9) \end{aligned}$$

Simplificando (3.9):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_m u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_m v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_m w) = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m) \quad (3.10.a)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \rho_m \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.10.b)$$

A equação (3.11) é formalmente apresentada como:

$$\frac{D\rho_m}{Dt} + \rho_m (\nabla \cdot V) = 0 \quad (3.11.a)$$

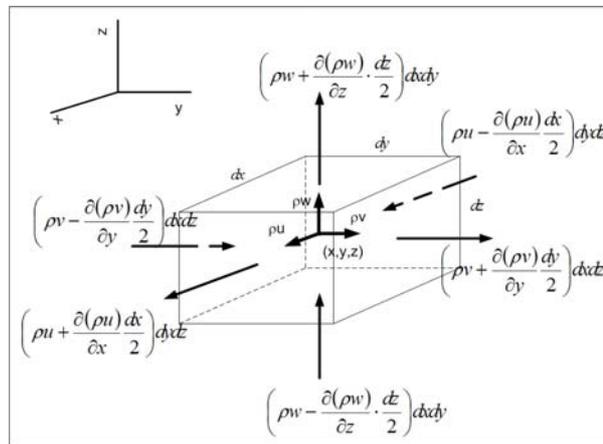


FIGURA 3.3- Volume de controle infinitesimal da massa.

Onde o diferencial do material é:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.11.b)$$

2. Equação de Conservação de momentum (Equações Navier-Stokes)

Dada uma massa infinitesimal  $\delta m$ , sob o campo gravitacional  $g$  e aplicando a segunda Lei de Newton, tem-se que [28], [29]:

$$\sum \delta F = \delta F_{SUPERFICIE} + \delta F_{CORPO} = \delta m \cdot a \quad (3.12)$$

Seguindo a FIGURA 3.4 o equilíbrio de forças na direção x vem dado por:

$$\sum \delta F_x = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz + (\rho_m dx dy dz) g_x \quad (3.13.a)$$

Similarmente, nas outras direções tem-se:

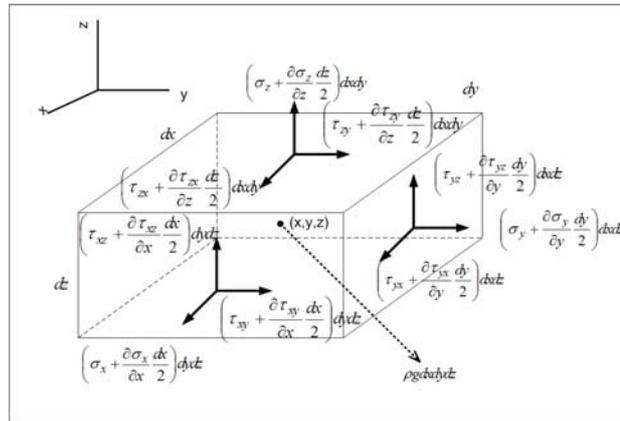


FIGURA 3.4- Volume de controle infinitesimal da massa.

$$\sum \delta F_y = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz + (\rho_m dx dy dz) g_y \quad (3.13.b)$$

$$\sum \delta F_z = \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dx dy dz + (\rho_m dx dy dz) g_z \quad (3.13.c)$$

Usando as equações (3.13) em (3.12), obtém-se:

$$\left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz + (\rho_m dx dy dz) g_x = (\rho_m dx dy dz) \frac{Du}{Dt} \quad (3.14.a)$$

$$\left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz + (\rho_m dx dy dz) g_y = (\rho_m dx dy dz) \frac{Dv}{Dt} \quad (3.14.b)$$

$$\left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dx dy dz + (\rho_m dx dy dz) g_z = (\rho_m dx dy dz) \frac{Dw}{Dt} \quad (3.14.c)$$

Sabendo que por simetria:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (3.15)$$

Então, finalmente obtém-se a equação de conservação de momentum na sua forma mais geral:

$$\rho_m \frac{DV_j}{Dt} = \rho_m g_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \quad (3.16)$$

Com as equações (3.11.a) e (3.16), e fazendo uso das características reológicas vistas na secção 2.2.5, alguns autores têm desenvolvido simulações de corridas de detritos usando técnicas de integração numéricas especiais que são até referência nesta área de pesquisa. A avaliação conjunta destas duas equações tem sido resolvida levando em conta a natureza das condições iniciais (enfoque euleriano ou lagrangiano) e a dimensão da análise. As análises unidimensionais são muito reducionistas, as análises bidimensionais ficam reservadas a certas condições ou suposições simplificadores dos casos reais. Mas uma análise tridimensional integral não tem sido alcançada a causa das limitações dos modelos reológicos nesta dimensão. Aliás, a técnica mais usada considera o fluxo quase-tridimensional, pois o volume de controle é suficientemente pequeno para supor que as variações verticais são constantes.

O Método da Integração de Espessura Média (Depth Averaged Method, DAM) <sup>[30], [31]</sup> tem sido a técnica numérica mais usada na solução das equações (3.11.a) e (3.16), pois supõe variações nulas da velocidade na vertical o que permite simplificar em um grau as equações anteriores. Geralmente a integração realiza-se mediante o algoritmo de Garlekin <sup>[32]</sup>.

Savage e Hutter (1989) <sup>[9]</sup> propõem a teoria das avalanches de detritos com a aplicação deste método, descrevendo principalmente massas granulares contínuas com comportamento friccionar de Coulomb, usando tanto o esquema de diferenças finitas euleriano e lagrangiano. Mais tarde o último autor trataria o fluxo sobre superfícies curvas <sup>[33]</sup>.

O'Brien e Julien (1993) <sup>[9]</sup> comparam resultados da simulação numérica com resultados produzidos no programa FLO-2D principalmente usado para análise de

ameaça de fluxos de lodos. Estes autores determinam o inflexível do FLO-2D para simular segregação, salto hidráulico ou ondas de choques.

Hunt (1994) <sup>[9]</sup> analisa o fluxo de detritos como se fosse um fluido newtoniano laminar. A principal contribuição deste autor está em tentar simular o fluxo como laminar viscoso.

Wang e Shen (1999) <sup>[34]</sup> são os primeiros em apresentar uma simulação unidimensional sob o enfoque lagrangiano para o fluxo resultante na ruptura de uma barragem. Ao mesmo tempo introduzem o método Hidrodinâmico de Partículas Suaves (SPH) ao análise de corridas de detritos.

Por outro lado, Hungr (2003) <sup>[35], [36], [37]</sup> propôs um método FEM lagrangiano bi e tridimensional utilizando critérios do SPH para garantir continuidade na integração para simular alguns eventos no Canadá. Tal vez este seja o modelo mais completo deste gênero. Os resultados foram aplicados a simulações controladas de laboratório e um caso real de avalanche de detritos com resultados promissórios.

Este, sem dúvida, é um dos autores mais destacados sobre o tema. Ele propõe os objetivos a serem seguidos em qualquer ação para desenvolver uma modelagem de corridas de detritos, os quais têm tido grande aceitação entre a comunidade internacional. Eles são <sup>[35]</sup>:

- O modelo deveria permitir determinar tensões internas anisotrópicas, não-hidrostáticas as quais podem ser controladas por uma reologia interna diferente da reologia basal.
- Deve permitir a simulação de entrada e saída de material durante o fluxo.
- Deve permitir a utilização de mais de um modelo reológico que varie na trajetória do fluxo ou dentro da massa do mesmo.
- Deve permitir grandes deslocamentos assim como ramificações da massa sem problemas de distorção na malha dos elementos.
- Deve ser amigável para o usuário e eficiente para facilitar retroanálise e calibrações com casos reais.

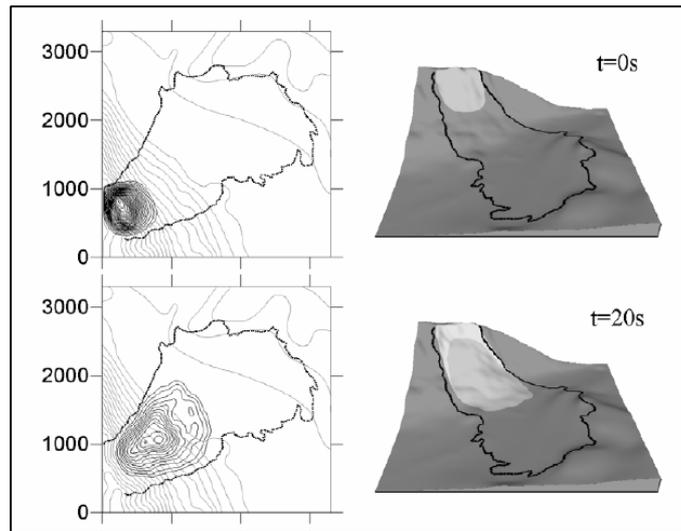


FIGURA 3.5- Saída da simulação da corrida de detritos Frank de 1917 [37].

Também, Chen e Lee (2000) [38] descrevem uma formulação tridimensional para a solução das equações de conservação de massa e momentum usando o esquema de Galerkin e a quadratura Gaussiana do ponto intermédio para simulações de eventos em Hong Kong. Este é a análises em FEM tridimensional sob o enfoque euleriano mais completa até agora desenvolvida. Este trabalho remarca a importância na representação do terreno, pois desta dependem as forças de gravidade e atrito que agem sobre a massa em movimento. A integração é feita com algoritmos eulerianos, mas a malha faz uso das metodologias espaciais lagrangianas para grandes deslocamentos.

### 3.1.2.2. Métodos de Elementos Discretos (DEM)

Sob este enfoque, a massa do fluxo é vista como composta de unidades uniformes geométricas descontínuas, cujo comportamento individual estatisticamente determina o comportamento global. Podem-se distinguir quatro etapas fundamentais na construção da lógica do DEM [24], [39]. Primeiro, a seleção da geometria das partículas (partículas bi ou tridimensionais; polígonos ou discos, poliedros ou esferas). Neste caso são partículas tipo disco.

Segundo, o desenvolvimento de um algoritmo eficiente permanente na detecção dos contatos. Esta é a etapa que consome mais tempo de cálculo. O

número de operações depende à vez do número de partículas e da forma destas. Este ponto é o de maior interesse deste trabalho, onde é aplicado um algoritmo unário de procura de contatos e um algoritmo de representação de paramentos curvas linearizados.

Terceiro, a programação das leis físicas às quais obedecem as partículas para a determinação dos seus deslocamentos. Podem ser as leis da mecânica clássica ou leis adaptadas. O presente trabalho segue as leis físicas newtonianas. Finalmente, a visualização da simulação propriamente dita e resultados.

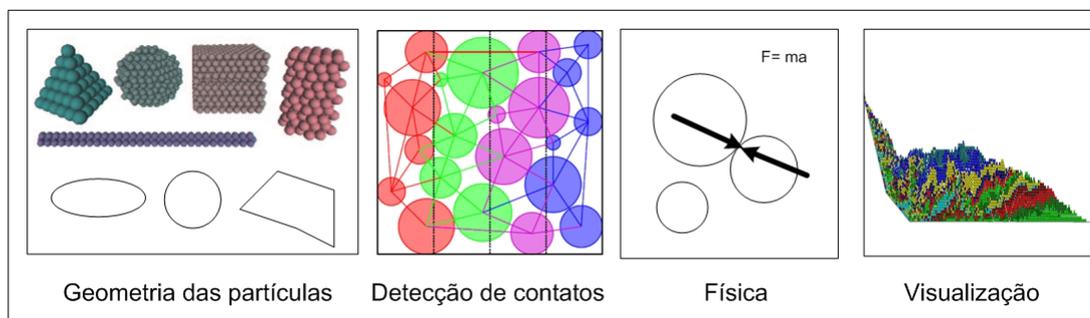


FIGURA 3.6- Etapas da lógica dos Métodos de Elementos Discretos.

Uma descrição dos principais métodos deste grupo apresenta-se a continuação:

#### A. Celas Autômatas

Uma cela autômata é um espaço geométrico que pode estar preenchido ou em branco. Uma partícula, neste caso, é representada por uma cela preenchida. A configuração das celas (estado autômata) evolui através do tempo e espaço sob determinadas regras. Neste método o espaço e tempo são descontínuos.

O método foi descrito pela primeira vez por John Conway (1970) e uma das suas principais características é que não precisa de leis físicas puras senão de relações empíricas simples que reproduzem o comportamento natural do fenómeno. Este é um método qualitativo com ênfase na reprodução visual de fenómenos.

A escola italiana é quem mais experiência tem no uso deste método, principalmente na região sul da Itália <sup>[40]</sup>. Esta escola desenvolveu um modelo sobre celas hexagonais bidimensionais.

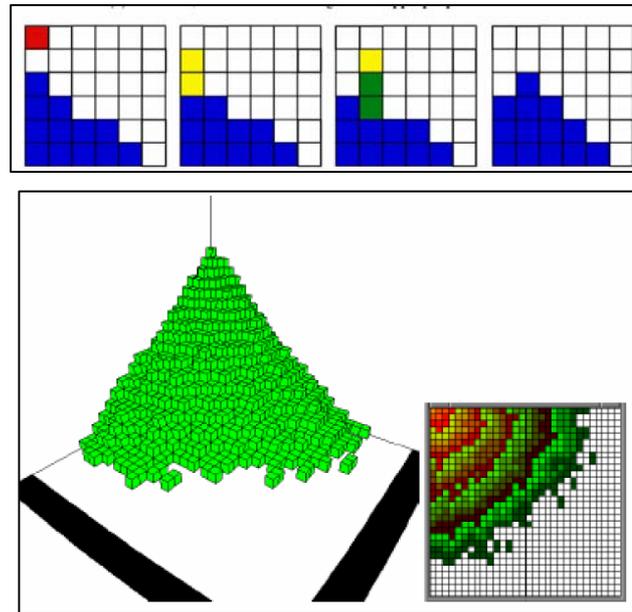


FIGURA 3.7- Simulações usando celas autômatas uni e bidimensionais [24].

### B. Enfoques Empíricos

Sob este enfoque estão aqueles métodos que não usam as leis da física newtoniana, mas são definidas geralmente por relações estatísticas. O método de Monte Carlo é o mais famoso e utilizado na mecânica estatística. A idéia é não calcular as trajetórias das partículas senão usar feições aleatórias estatísticas que reflitam a realidade do fenômeno. Assim, em vez de leis físicas usam-se leis probabilísticas pelo qual é um método muito eficiente para simulações com um número grande de partículas. Sua desvantagem radica no fato de desprezar os efeitos de borda das partículas e sua pouca flexibilidade na visualização.

### C. Enfoques Mistos

Estes enfoques misturam a rapidez dos métodos empíricos com a flexibilidade dos enfoques newtonianos.

### D. Enfoques Newtonianos

Sob esta perspectiva, o deslocamento e contatos são determinados pelas leis da mecânica clássica. Neste enfoque estão agrupadas duas escolas: *corpos deformáveis* e *não-deformáveis*. Nestes enfoques, o tempo de cálculo é muito importante no desempenho do método.

### Escola de Corpos deformáveis

Fundada por Cundall em 1971, mas foi dada a conhecer em 1979 quando Cundall e Strack publicaram o modelo de elementos distintos ou discretos <sup>[41]</sup>. Neste enfoque, o contacto das partículas é modelado como uma composição de amolas e amortecedores simulando o efeito de atrito e dissipação de energia pela colisão entre partículas seguindo as leis de repulsão de Newton. Para determinar a variação temporal do sistema precisa-se integrar um sistema de equações de segunda ordem. Este modelo já tem avançado á enfoques tridimensionais com maior facilidade do que os métodos desenvolvidos com FEM.

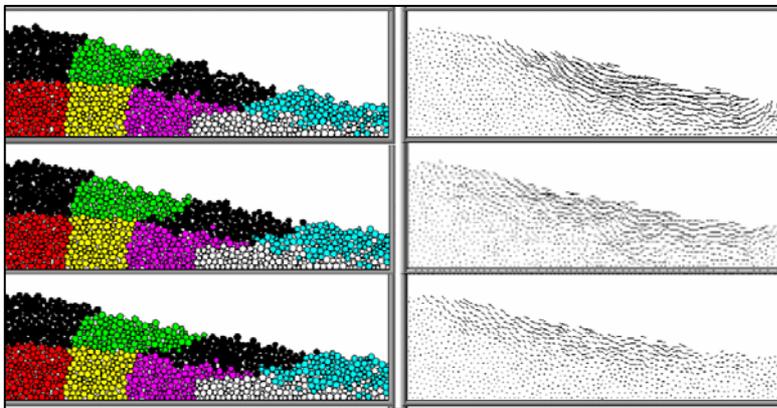


FIGURA 3.8- Simulação sob o enfoque newtoniano de DEM <sup>[33]</sup>.

### Escola de Corpos Não-Deformáveis

Sob esta escola, os contatos são pontuais e as partículas têm coeficientes de atrito e de restituição mediante os quais são feitos os cálculos das velocidades destas depois do choque. A probabilidade de que duas partículas vizinhas estejam em contato é nula, caso contrário à da escola anterior. Por este motivo a primeira escola se adapta à natureza real das massas densas quase estáticas, enquanto esta segunda é ideal para as massas não muito densas e dinâmicas.

Trabalhos feitos sob este enfoque serão descritos na seguinte secção. É importante considerar que a evolução deste modelo na simulação de corridas de detritos é muito recente. O método tem sido muito usado na simulação de misturas granulares de processos industriais e na área da suspensão de partículas.

### 3.1.2.3. *Algumas características comparativas dos métodos*

Johansen e Laux (1998) <sup>[42]</sup>, segundo a experiência norueguesa na simulação de fluxos de materiais granulares, fazem uma comparação entre os modelos lagrangiano (representado por DEM) e euleriano (representado por FEM). A experiência deste país na simulação deste tipo de fluxo é similar quanto nos outros países do mundo, pelo qual suas observações podem ser generalizadas.

Partindo do que os modelos lagrangianos determinam as trajetórias individuais das partículas, estes permitem descrever uma grande variedade de efeitos físicos do jeito mais fundamental. Em princípio pode ser modelado para qualquer tamanho e forma de partícula, sendo forte principalmente na simulação de segregação, fragmentação e aglomeração de partículas.

Para simulações com grande número de partículas não-esféricas que incluam as forças viscosas nos contatos, o método vira nada prático. Contudo, este defeito pode ser resolvido modelando as partículas como grumos, perdendo o enfoque fundamental do fenômeno obtendo-se comportamentos aproximados segundo as reologias utilizadas. A sua maior desvantagem está nos tempos de cálculo.

Por outro lado, quando na modelagem usa-se as equações de conservação (massa, momentum ou energia) ou enfoque euleriano, as fases sólidas e líquidas são consideradas interpenetráveis e o comportamento é uma representação física meia do fluxo. O método é usado para sistemas que precisam de boas simulações quantitativas, dependendo a sua qualidade do modelo físico e das experiências de laboratório das quais foi gerado o modelo reológico.

A sua maior desvantagem, citada pelos autores, é a sua rigidez lógica, pois o método considera comportamentos meios, eliminando as particularidades do fenômeno das equações. Assim, por exemplo, o método tem problemas nas interações partícula-parede. Especificamente, este método tem problemas na simulação nos processos de erosão e deposição. Contudo, este problema pode ser resolvido criando rotinas mais consistentes e robustas, aumentando grandemente sua

carga numérica e extensão. Isto faz do método euleriano ser vantajoso a respeito dos métodos lagrangianos em muitos poucos casos.

Ambos os métodos podem a ser comparados desvantajosos para grandes simulações considerando modelos complexos a causa do consumo de tempo ou memória na hora de execução das rotinas. Mas, algumas experiências simuladas parecem apontar aos métodos lagrangianos como os mais eficientes em aspectos de representação fundamental dos fenômenos <sup>[42]</sup>, <sup>[43]</sup>. Tanto assim que os métodos eulerianos complexos se baseiam em malhas eulerianos para aumentar sua eficiência.

### 3.2. Modelo de Elementos Discretos de Cundall

Este método foi desenvolvido por Cundall (1971) para problemas bidimensionais em Mecânica das Rochas, mas publicado em 1979 <sup>[41]</sup>. A popularidade do método está não sua flexibilidade para sua extensão à terceira dimensão e a sua versatilidade para qualquer forma e tamanho de partículas. Aqui se descreverão as equações para o caso específico de discos ou esferas para a análise bidimensional.

Este autor trata o problema das iterações partícula-partícula como um problema transiente em estado de equilíbrio com as forças internas. Sob esta hipótese, o sistema é resolvido usando um esquema explícito de diferenças centrais para análise de transiente. Uma outra suposição é que o passo de tempo de cálculo é tão pequeno que os distúrbios não se propagam para outras partículas que estejam além da vizinhança da partícula em estudo. Deste jeito só são consideradas as forças de contacto geradas com as partículas imediatas.

Por outro lado, a deformação individual das partículas é muito pequena em comparação a deformação total da massa. Esta deformação é modelada como uma interposição de partículas relacionada com as forças geradas no contato. Assim o ciclo básico do método se descreve na seguinte figura.

O esquema numérico de integração descrito anteriormente é chamado de **Método de Relaxação Dinâmica (MRD)** <sup>[4]</sup>, <sup>[46]</sup>, que foi desenvolvida a meados da

década dos sessenta quando alguns pesquisadores tentaram simplificar a análise dinâmica transiente como uma sucessão discreta no tempo de soluções em regime permanente. A sugestão desta possibilidade foi fundamentada no fato de que um sistema oscilante excitado por uma perturbação constante no tempo com amortecimento tende à posição final de equilíbrio sob ação da mesma.

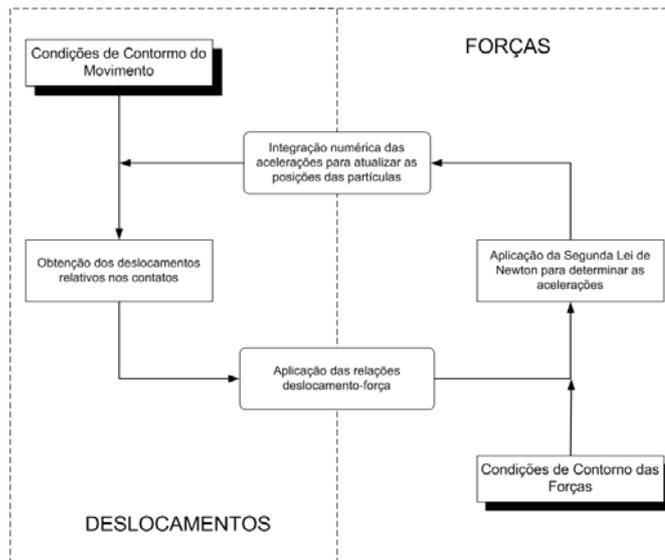


FIGURA 3.9- Ciclo de cálculos segundo a metodologia DEM.

Figueiredo (1991) <sup>[4]</sup> fez uma descrição detalhada do método, da qual aqui só serão tratados os aspectos teóricos básicos do método. O ciclo do MRD é similar ao da FIGURA 3.9. Neste caso o ciclo inicia-se com as forças aplicadas no início da análise, que sendo traduzidas a termos de deslocamentos e fazendo uso das relações constitutivas obtêm-se as forças resultantes geradas nos contatos de cada partícula. Estas forças resultantes são descontadas das forças iniciais, dando como resultado a uma força desequilibrada com a qual inicia-se o novo ciclo. O ciclo termina quando estas forças desequilibradas sejam nulas ou tenham sido transferidas aos contatos. Dada a sua natureza explícita de solução, este método deve garantir a estabilidade e convergência da solução.

A estabilidade pode ser garantida com a seleção adequada do passo de tempo na realização das integrações. Enquanto à convergência, esta é garantida com a utilização apropriada de parâmetros de amortecimento.

Seguindo os lineamentos da mecânica clássica newtoniana sob o enfoque lagrangiano, o ciclo detalhado dos cálculos se descreve como segue.

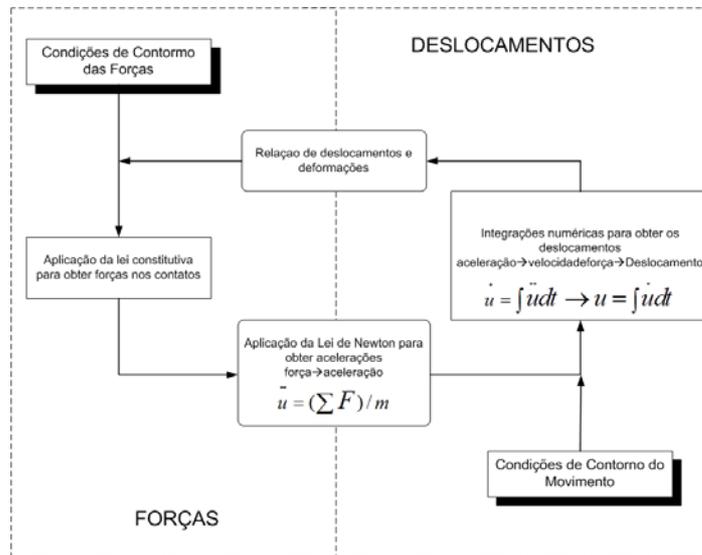


FIGURA 3.10- Ciclo de cálculos seguindo a metodologia de MRD.

Primeiramente, o contato é modelado como um sistema paralelo de uma massa  $m$ , com uma amola de rigidez  $K$  [ $F/L^2$ ] e um amortecedor  $C$  [ $M/L$ ], tanto no sentido normal e tangencial ao ponto de contato. A força tangencial tem um limite dado por a força de cisalhamento por descrita pelo coeficiente de atrito de Coulomb,  $\mu$ . As forças amortecedoras em ambas as direções são ativadas pelas velocidades relativas do ponto de contato. Por outra parte, o movimento global da partícula tem dissipação de energia mediante um amortecedor para o movimento rotacional e outro para a translação. Mas, este é um dos modelos de contato mais simples <sup>[45], [47]</sup>.

Agora, supondo um suposto contato entre duas partículas circulares com as características mostradas na FIGURA 3.12, e considerando o sistema local de coordenadas dado por os vetores  $\bar{n}$  e  $\bar{t}$ , define-se o contato como:

$$L^* < R_1 + R_2 \quad (3.17)$$

O ponto de contato considera-se localizado na metade dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  segundo a FIGURA 3.12. Assim, a velocidade relativa no ponto de contato é:

$$V_{P_1-P_2} = V_{P_1} - V_{P_2} = (V_1 + \omega_1 R_1) - (V_2 + \omega_2 R_2) \quad (3.18)$$

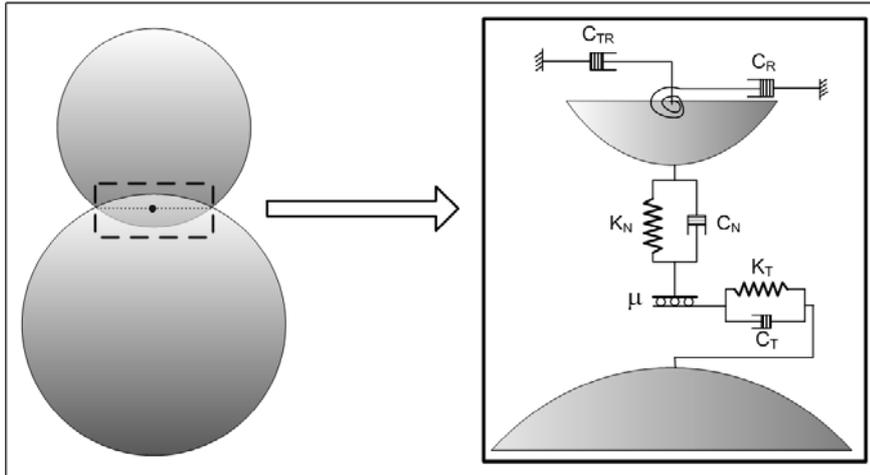


FIGURA 3.11- Modelo usado para os contatos entre partículas.

Considerando os vetores unitários globais e os locais, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \bar{n} \\ \bar{t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi \\ \text{sen} \varphi & -\cos \varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{n} = (\cos \varphi, \text{sen} \varphi) \text{ e } \bar{t} = (\text{sen} \varphi, -\cos \varphi) \quad (3.19)$$

Determinando as componentes normal e tangencial da velocidade relativa do ponto de contato, temos que:

$$V_N = (V_1 - V_2) \cdot \bar{n} - (\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2) \bar{t} \cdot \bar{n} \quad (3.20.a)$$

$$V_N = (V_1 - V_2) \cdot \bar{n}$$

$$V_T = (V_1 - V_2) \cdot \bar{t} - (\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2) \bar{t} \cdot \bar{t} \quad (3.20.b)$$

$$V_T = (V_1 - V_2) \cdot \bar{t} - (\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)$$

Que integrando por diferenças finitas, os deslocamentos relativos nas direções normal e tangencial vêm dados por:

$$\delta_N = V_N \cdot dt \quad (3.21.a)$$

$$\delta_T = V_T \cdot dt \quad (3.21.b)$$

Assim, a força induzida por deslocamento e efeito do amortecedor viscoso no ponto de contato (amortecimento local) e descrita por:

$$\delta F_N = F_N^K + D_N = K_N \delta_N + C_N V_N \quad (3.22.a)$$

$$\delta F_T = F_T^K + D_T = K_T \delta_T + C_T V_T \quad (3.22.b)$$

Então, as forças totais no ponto são para o novo ciclo de cálculo são:

$$F_N^t = F_N^{t-1} + \delta F_N \quad (3.23.a)$$

$$F_T^t = F_T^{t-1} + \delta F_T \quad (3.23.b)$$

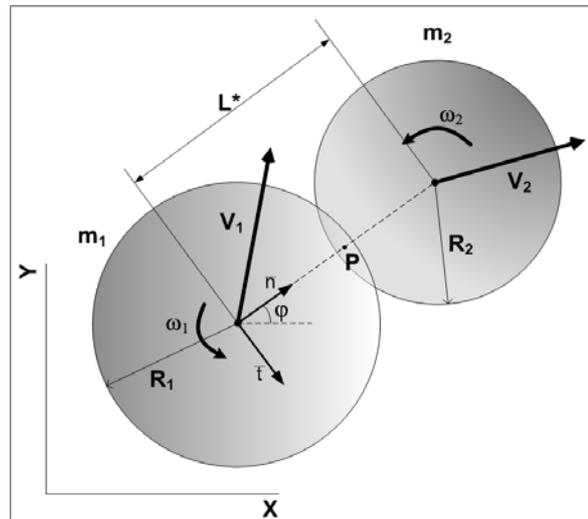


FIGURA 3.12- Notação usada na dedução das equações de movimento.

Estas forças são positivas no sentido contrario aos dos vetores  $\bar{n}$  e  $\bar{t}$  da FIGURA 3.12.

Por outro lado, a força de cisalhamento está limitada pela força de atrito de Coulomb, a saber:

$$|F_T| \leq \mu |F_N| = |F_N| \tan \phi_u + c \cdot A_c \quad (3.24.a)$$

A equação (3.24.a) é generalizada para materiais geológicos. Mas esta força é limitada sob algumas hipóteses que seguem estes critérios:

Se  $F_N < 0$ , então  $F_T = 0$  e  $F_N = 0$ , pois não são válidas forças de tração.

$|F_T| > \mu |F_N|$ , então  $F_T = F_N \cdot \tan \phi_u + c \cdot A_c$  e a força viscosa  $D_T$  é constante ( $c \cdot A_c = 0$ , geralmente).

O momento no sentido anti-horário ocasionado por estas forças no centro geométrico de da partícula i, é dado por:

$$\sum M_i = R_i \cdot \sum (F_T)_i \quad (3.25)$$

Agora, considerando todas as forças induzidas nos pontos de contato de uma partícula, se determinarão pela segunda Lei de Newton os novos valores de acelerações. Deste jeito, considerando um efeito amortecedor no movimento geral da

partícula (amortecimento global) devido ao meio fluido, se considera os coeficientes de amortecimento para a translação  $C_{TR}$  e outro para o efeito rotacional  $C_R$ , no somatório de forças. Assim, considerando a variável bidimensional  $r(x,y)$  de deslocamento e pela segunda Lei de Newton para uma partícula de massa  $m$ , tem-se:

$$m \cdot \ddot{r} + C_{TR} \dot{r} = mg + \sum_i F_i \quad (3.26)$$

$$I \cdot \ddot{\omega} + C_R \dot{\omega} = \sum_i M_i \quad (3.27)$$

Onde a inércia pode ser a de um disco ( $mR^2/2$ ) ou esfera ( $2mR^2/5$ ). Usando o algoritmo de diferenças centrais, as velocidades das equações anteriores podem ser expressas em termo das velocidades nos tempos  $t - \frac{1}{2}dt$  e  $t + \frac{1}{2}dt$  como:

$$\dot{r}_t = \frac{1}{2} \left( \dot{r}_{t-\frac{1}{2}dt} + \dot{r}_{t+\frac{1}{2}dt} \right) \quad (3.28)$$

$$\dot{\omega}_t = \frac{1}{2} \left( \dot{\omega}_{t-\frac{1}{2}dt} + \dot{\omega}_{t+\frac{1}{2}dt} \right) \quad (3.30)$$

Por tanto, as acelerações são descritas como:

$$\ddot{r}_t = \frac{1}{dt} \left( \dot{r}_{t-\frac{1}{2}dt} - \dot{r}_{t+\frac{1}{2}dt} \right) \quad (3.31)$$

$$\ddot{\omega}_t = \frac{1}{dt} \left( \dot{\omega}_{t-\frac{1}{2}dt} - \dot{\omega}_{t+\frac{1}{2}dt} \right) \quad (3.32)$$

Substituindo as equações (3.31) e (3.32) nas equações (3.26) e (3.27), e logo obtendo uma expressão para as velocidades no tempo  $t + \frac{1}{2}dt$ , fica:

$$\dot{r}_{t+\frac{1}{2}dt} = \left( \frac{\dot{r}_{t-\frac{1}{2}dt} \left[ 1 - \frac{C_{TR} dt}{2m} \right] + \sum_i [F_i]_t \frac{dt}{m} + g dt}{1 + \frac{C_{TR} dt}{2m}} \right) \quad (3.33)$$

$$\dot{\omega}_{t+\frac{1}{2}dt} = \left( \frac{\dot{\omega}_{t-\frac{1}{2}dt} \left[ 1 - \frac{C_R dt}{2I} \right] + \sum_i [M_i]_t \frac{dt}{I}}{1 + \frac{C_R dt}{2I}} \right) \quad (3.34)$$

Desta forma, estas velocidades podem ser integradas para obter os deslocamentos no tempo  $t+dt$  como:

$$\delta r_{t+dt} = \delta r_t + r_{t+\frac{1}{2}dt} \cdot dt \quad (3.35)$$

$$\delta \theta_{t+dt} = \delta \theta_t + \omega_{t+\frac{1}{2}dt} \cdot dt \quad (3.36)$$

Sob este esquema, Cundall determinou a introdução de um pequeno erro de médio tempo na determinação nas componentes das forças amortecedoras D, mas considerou-o desprezível. De fato:

$$(D_N)_t = C_N \cdot V_N = C_N [r_1 - r_2]_{t+\frac{1}{2}dt} \cdot \bar{n} \quad (3.37.a)$$

$$(D_T)_t = C_T \cdot V_T = C_T [(r_1 - r_2) \cdot \bar{t} - (\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)]_{t+\frac{1}{2}dt} \quad (3.37.b)$$

Note-se que a energia no sistema, segundo as equações (3.33) e (3.34), é dissipada através do atrito e o amortecimento: local e global. Se estes amortecimentos fossem nulos, o sistema nunca estaria em equilíbrio.

Uma correção deve ser feita no ângulo entre os sistemas globais e locais de coordenadas, pois este último incrementa seu ângulo cada passo de tempo como se descreve na equação (3.36).

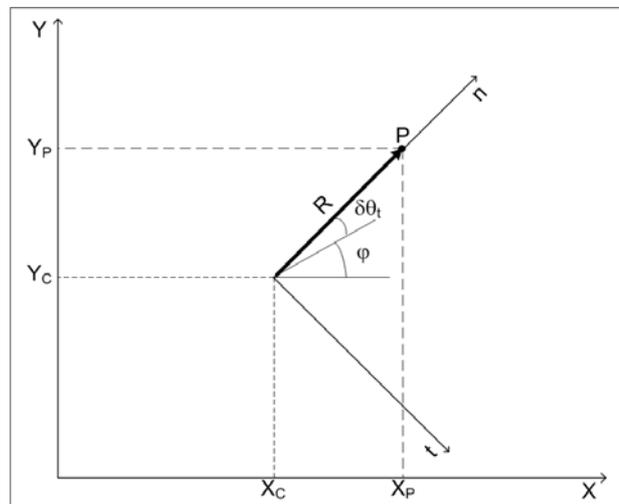


FIGURA 3.13- Correção do ângulo entre sistemas de coordenadas.

O ponto P (contato) tem coordenada global, segundo a Figura 3.13 dadas por:

$$X_P = X_C + R \cdot \cos \varphi \quad (3.38.a)$$

$$Y_P = Y_C + R \cdot \text{sen} \varphi \quad (3.38.b)$$

O ângulo  $\varphi$  aumenta  $\delta\theta_t$ , considerado uma porção muito pequena ( $< 0,01$  rad), então:

$$\cos(\varphi + \delta\theta_t) = \cos \varphi \cdot \cos \delta\theta_t - \text{sen} \varphi \cdot \text{sen} \delta\theta_t = \cos \varphi - \text{sen} \varphi \cdot \delta\theta_t \quad (3.39.a)$$

$$\text{sen}(\varphi + \delta\theta_t) = \text{sen} \varphi \cdot \cos \delta\theta_t + \cos \varphi \cdot \text{sen} \delta\theta_t = \text{sen} \varphi + \cos \varphi \cdot \delta\theta_t \quad (3.39.b)$$

Note-se que o ângulo  $\varphi + \delta\theta_t$  é o novo ângulo, pelo que as equações anteriores são as formas recursivas de atualização do ângulo entre os sistemas cada passo de tempo.

### 3.2.1.

#### **Escolha dos parâmetros do modelo**

Um dos problemas deste modelo é determinar o valor dos parâmetros que representem corretamente o material. Assim, Cundall (1979) <sup>[41]</sup> deu algumas recomendações na escolha destes parâmetros, mas através do tempo cada autor utiliza valores diferentes para calibrar o modelo. Alguns pesquisadores seguem a teoria da elasticidade, mas a Teoria Hertziana <sup>[48]</sup> proporciona valores mais apropriados quando a geometria das partículas é mais próxima à geometria real dos grãos. Contudo isto, os parâmetros das rigidezes e coeficientes de amortecedores são os mais importantes para garantir a convergência do método, como já se mencionou. Enquanto o passo de tempo é importante para garantir a estabilidade numérica.

#### 3.2.1.1. Convergência Numérica

Para materiais elásticos, a rigidez e coeficiente de amortecimento <sup>[24]</sup> são:

$$K_N = \frac{E\delta_N}{2R_{Eq}} \quad (3.40)$$

$$R_{Eq} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (3.41)$$

$$[C_N]_{CRITICO} = 2\sqrt{K_N \cdot m} \quad (3.42)$$

Mas, a partir da equação (3.42), alguns outros autores tomam  $K_N$  como:

$$K_N = \frac{[C_N]_{CRITICO}}{dt} \quad (3.43)$$

Cundall propôs relações com os parâmetros anteriores para os parâmetros tangenciais usando qualquer tipo de material:

$$\frac{K_N}{K_T} = 1 \text{ ou } \frac{2}{3} \quad (3.44.a)$$

$$C_T = C_N \quad (3.44.b)$$

Mas, no caso que as partículas em contato tenham parâmetros diferentes, use-se as relações:

$$\frac{1}{K_N^{Eq}} = \frac{1}{K_N^1} + \frac{1}{K_N^2} \quad (3.45.a)$$

$$\frac{1}{C_N^{Eq}} = \frac{1}{C_N^1} + \frac{1}{C_N^2} \quad (3.45.b)$$

Relações similares podem ser aplicadas às componentes tangenciais. As magnitudes de rigidez podem variar de  $10^6$  até  $10^9$  N/m. Com as relações anteriores, garantindo a existência do efeito dos amortecedores, o modelo terá a sua convergência numérica, pois o equilíbrio do sistema estará garantido também.

Contudo, a iteração recursiva das equações (3.33) e (3.34) é complexa, mas pode ser simplificada considerando o Teorema de Rayleigh para o amortecimento. Esta é uma aplicação da RD na área de estruturas onde os coeficientes das forças amortecedoras são descritos pela massa inercial e a rigidez do sistema. Estes dois fatores caracterizam a relação do amortecimento com a frequência do sistema. Assim:

$$\bar{C} = \alpha \cdot \bar{M} + \beta \cdot \bar{K} \quad (3.46)$$

As constantes  $\alpha$  [ $L^{-1}T^{-1}$ ] e  $\beta$  [T] são escolhidas como constantes de calibração do modelo.  $\bar{M}$  é a matriz de massas inerciais e  $\bar{K}$  é a matriz de rigidez. Assim, para o caso dos contatos internos, usa-se as relações:

$$C_N = \beta \cdot K_N \quad (3.47.a)$$

$$C_T = \beta \cdot K_T \quad (3.47.b)$$

Ou a dada por (3.42) e (3.44.b). E para o caso do movimento de cada partícula, usa-se a relação:

$$C_{TR} = \alpha \cdot m \quad (3.48.a)$$

$$C_R = \alpha \cdot I \quad (3.48.b)$$

Assim, para o primeiro caso as equações (3.22.a) e (3.22.b) simplificam-se a:

$$\delta F_N = F_N^K + D_N = K_N \delta_N \left( 1 + \frac{\beta}{dt} \right) \quad (3.49.a)$$

$$\delta F_T = F_T^K + D_T = K_T \delta_T \left( 1 + \frac{\beta}{dt} \right) \quad (3.49.b)$$

#### Amortecimento e Dissipação de Energia

Cundall (1982) introduz dois tipos de mecanismos de dissipação da energia para o sistema. Um deles, a nível local (amortecimento autolocal) para quando existe muita variação na direção das velocidades das partículas o que é descrito por:

$$mr = \left( \sum [F_i] + mg \right) \cdot \left( 1 + \text{sig} \left( \left( \sum [F_i] + mg \right), r \right) \cdot \alpha_c \right) \quad (3.50.a)$$

$$r_{t+\frac{1}{2}dt} = r_{t-\frac{1}{2}dt} + \left\{ \left( \sum \left[ \frac{F_i}{m} \right] + g \right) \cdot \left( 1 + \text{sig} \left( \sum [F_i + mg], r \right) \cdot \alpha_c \right) \right\} \cdot dt \quad (3.50.b)$$

$$I\dot{\omega} = \sum M_i \cdot \left( 1 + \text{sig} \left( \sum [M_i], \omega \right) \cdot \alpha_c \right) \quad (3.51.a)$$

$$\omega_{t+\frac{1}{2}dt} = \omega_{t-\frac{1}{2}dt} + \left( \sum M_i \cdot \left( 1 + \text{sig} \left( \sum [M_i], \omega \right) \cdot \alpha_c \right) \right) \frac{dt}{I} \quad (3.51.b)$$

O parâmetro  $\alpha_c$  ( $\approx 0.7$ ) no programa SAND é chamado por “cadl”. Por outro lado, a nível global (amortecimento autoglobal) relacionado com os parâmetros das equações (3.48.a) e (3.48.b) substituídas nas equações (3.33) e (3.34):

$$r_{t+\frac{1}{2}dt} = \left( \frac{r_{t-\frac{1}{2}dt} \left[ 1 - \frac{\alpha dt}{2} \right] + \sum_i [F_i] \frac{dt}{m} + g dt}{1 + \frac{\alpha dt}{2}} \right) \quad (3.53)$$

$$\omega_{t+\frac{1}{2}dt} = \left( \frac{\omega_{t-\frac{1}{2}dt} \left[ 1 - \frac{\alpha dt}{2} \right] + \sum_i [M_i] \frac{dt}{I}}{1 + \frac{\alpha dt}{2}} \right) \quad (3.54)$$

Em geral, os valores dos coeficientes de amortecimento obtêm-se considerando análises dinâmicas matriciais <sup>[49]</sup>. Assim, o sistema matricial a resolver é dado por:

$$[M]\{\dot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F^{Ext}\} \quad (3.55)$$

Que fazendo uso de transformações ortogonais de matrizes, obtêm-se:

$$\{\Phi\}^T [M] \{\Phi\} \{\dot{U}\} + \{\Phi\}^T [C] \{\Phi\} \{\dot{U}\} + \{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} \{U\} = \{\Phi\}^T \{F^{EXT}\} \quad (3.56)$$

O que se reduz a um sistema de n equações não-acopladas da forma, considerando (3.46):

$$\{\dot{U}\}_i + 2\zeta_i \omega_{ang_i} \{U\}_i + \omega_{ang_i}^2 \{U\}_i = \{F(t)\}_i \quad (3.57)$$

$$\omega_{ang_i}^2 = \frac{K_i}{m_i} \quad (3.58.a)$$

$$2\zeta_i \omega_{ang_i} = \alpha + \beta \omega_{ang_i}^2 \quad (3.58.b)$$

O que permite deduzir uma relação para os coeficientes de amortecimento:

$$\alpha = 2\omega_{ang} \zeta \quad (3.59)$$

$$\beta = \frac{2\zeta}{\omega_{ang}} \quad (3.60)$$

$$f_T = \frac{\omega_{ang}}{2\pi} \quad (3.61)$$

Onde  $\zeta$  [adimensional] y  $f_T$  [Hz] são parâmetros de entrada no programa SAND, representados pelas variáveis `_frac` e `_freq` respectivamente.

Contudo isto é necessário garantir a convergência da solução mediante a medição da razão entre a potência dissipada pelos amortecedores viscosos e a taxa de variação da energia cinética, pois isto é uma medida indireta para saber se o trabalho dos amortecedores está adsorvendo a energia cinética momentânea do sistema.

$$\Delta_{RAT} = \frac{2\alpha \cdot E_t}{\Delta E} > A_{FAC} \quad (3.62)$$

Esta razão  $\Delta_{RAT}$  deve manter um valor  $A_{FAC}$  para todos os passos de tempo e tipicamente  $A_{FAC} \cong 1,0$ . Figueiredo (1991) <sup>[4]</sup> encontra um valor ótimo de  $A_{FAC} = 0,95$  para aplicações na Mecânica de Rochas. Se a relação (3.57) se mantiver, o valor do fator global de amortecimento deve ser corrigido em:

$$\alpha_{\text{corrigido}} = \frac{\alpha}{A_{MUL}} \quad (3.63.a)$$

Caso contrário:

$$\alpha_{\text{corrigido}} = \alpha \cdot A_{MUL} \quad (3.63.b)$$

Onde  $A_{MUL}$  é uma constante para promover os ajustes de  $\alpha$ . Comumente  $A_{MUL} \cong 1,1$ .

### 3.2.1.2. Estabilidade Numérica

Figueiredo (1991) <sup>[4]</sup> faz um estudo detalhado sobre as condições de estabilidade numérica do MRD, demonstrando as mesmas limitantes que garantem a estabilidade numérica feitas por Cundall em 1979.

Considerando o sistema amola-amortecedor com um só grau de liberdade, Cundall <sup>[41]</sup> determina que o valor de passo de tempo crítico é:

$$dt_{\text{CRITICO}} = 2 \sqrt{\frac{\{m_1, m_2\}_{\text{MIN}}}{\{K_N, K_T\}_{\text{MAX}}}} \quad (3.64)$$

Mas sabe-se que o sistema possui mais graus de liberdade (são vários pontos de contato com sistema amola - amortecedor por cada contato). Por cada ponto de contato deste tipo é lógico pensar que o sistema tende a enrijecer-se, pelo que o passo de tempo tende a ser ainda menor ao dado pela equação (3.59). Para isso, alguns pesquisadores propõem um valor limite para o passo do tempo considerando a equação anterior:

$$dt_{\text{ADOTADO}} \leq t_{\text{FRAC}} \cdot dt_{\text{CRITICO}} \quad (3.65)$$

Cundall <sup>[45]</sup> recomendou que fossem adotados valores de  $t_{\text{FRAC}}$  não maiores a 0,1. Na verdade, para um sistema dinâmico linear com amortecedor, o tempo crítico vem dado por <sup>[50]</sup>:

$$dt_{critico}^* \leq 2 \sqrt{\frac{m}{K}} \cdot (\sqrt{1 + \varepsilon^2} - \varepsilon) \quad (3.66)$$

$$\varepsilon = \frac{|C_{critico}|_{N/T}}{2 \cdot |K|_{N/T} \cdot \Delta t_0} \quad (3.67)$$

$$\therefore t_{FRAC} \propto (\sqrt{1 + \varepsilon^2} - \varepsilon) \quad (3.68)$$

Uma extensão tridimensional deste método foi apresentada por Cundall em 1988 <sup>[44], [45]</sup> para uma aplicação em maciços rochosos. Uma adaptação deste método para partículas esféricas é apresentada no Anexo IV.

Esta versatilidade dimensional é uma das principais vantagens do DEM respeito a outros métodos numéricos, pois suas leis físicas são de fácil extensão de dois a três dimensões sem precisar de ferramentas ou métodos de integração numéricos especiais. Uma outra característica do método é que sua lógica computacional é simples comparada ao Método de Elementos Finitos, o que permite que o Método de Elementos Discretos para simulações com grande número de partículas seja modelado com a técnica de paralelização de ordenadores. Esta técnica permite que um processo de fluxo granular seja simulado por dois ou mais computadores simultaneamente, o que diminui o tempo de execução e a sobrecarga de memória. Estas simulações são relativamente custosas, mas são baratas em comparação às simulações deste tipo com FEM ou elementos de contorno.

A aplicação do Método de Elementos Discretos em Geotecnia é relativamente recente, mas parece ser promissório no avanço do entendimento fundamental do comportamento dos materiais porosos.