

2

Modelagem Matemática

2.1

Caracterização de portadoras Digitais

A modulação digital envolve a escolha de uma forma de onda $s(t)$, num conjunto finito de possíveis formas de onda (ou símbolos), baseada na informação dos bits aplicados no modulador. Considerando-se um total de M possíveis formas de ondas, este conjunto pode ser representado como

$$\mathbb{S} = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\} \quad (2-1)$$

Do ponto de vista geométrico, qualquer conjunto finito de formas de onda fisicamente realizáveis pode ser expresso como uma combinação linear de L ($L \leq M$) formas de onda ortonormais, as quais formam uma base do espaço de funções, ou seja,

$$s_\ell(t) = \sum_{j=1}^L s_{\ell j} \phi_j(t) \quad ; \quad \ell = 0, \dots, M-1 \quad (2-2)$$

onde a ortonormalidade das funções $\phi_j(t)$ da base garante que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_k(t) dt = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \quad j, k = 1, \dots, L \quad (2-3)$$

Note que a energia de cada uma das funções da base é unitária, ou seja,

$$E_{\phi_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j^2(t) dt = 1 \quad j = 1, \dots, L \quad (2-4)$$

Neste caso, os M vetores $\mathbf{s}_\ell = [s_{\ell 1} \ s_{\ell 2} \ \dots \ s_{\ell L}]^T$, $\ell = 0, \dots, M-1$, formados pelos coeficientes de (2-2) pertencem a $\mathbb{R}^L$, e definem um conjunto de vetores dados por

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{s}_\ell; \quad \ell = 0, \dots, M-1\} \quad \mathbf{s}_\ell \in \mathbb{R}^L \quad (2-5)$$

Note que a energia do sinal $s_\ell(t)$ se escreve

$$\begin{aligned} E_{s_\ell} &= \int_{-\infty}^{\infty} s_\ell^2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^L s_{\ell j} s_{\ell k} \phi_j(t) \phi_k(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^L s_{\ell j} s_{\ell k} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_k(t) dt \end{aligned} \quad (2-6)$$

considerando-se (2-3), (2-6), se reduz a

$$\begin{aligned} E_{s_\ell} &= \sum_{j=1}^L s_{\ell j}^2 \\ &= \mathbf{s}_\ell^T \mathbf{s}_\ell \end{aligned} \quad (2-7)$$

Observe que a energia média das formas de onda $s_\ell(t)$ se escreve,

$$\begin{aligned} E_s &= \mathbb{E}[E_{s_\ell}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{s}_\ell^T \mathbf{s}_\ell] \end{aligned} \quad (2-8)$$

No caso de $L = 2$, os vetores de $\mathbb{S}$ podem alternativamente ser representados no plano complexo, definindo um conjunto equivalente a $\mathbb{S}$, dado por

$$\mathcal{S} = \{s_\ell = s_{\ell_1} + j s_{\ell_2}, \quad \ell = 0, \dots, M-1\} \quad (2-9)$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} E_{s_\ell} &= |s_\ell|^2 \\ &= s_\ell s_\ell^* \end{aligned} \quad (2-10)$$

e conseqüentemente

$$E_s = \mathbb{E}[|s_\ell|^2] \quad (2-11)$$

Um sinal correspondente a uma modulação digital com constelação bi-dimensional pode ser expressa como

$$c(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} d_k p(t + \epsilon - kT) e^{j[2\pi f_c(t+\epsilon)+\theta]} \right\} \quad (2-12)$$

sendo sua envoltória complexa, em relação à frequência f_c , dada por

$$\tilde{c}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} d_k p(t + \epsilon - kT) e^{j\theta} \quad (2-13)$$

Em (2-12) e (2-13) d_k é uma variável aleatória complexa que toma valores em $\mathcal{S}$ e corresponde ao símbolo transmitido no k -ésimo intervalo, ϵ é uma variável aleatória uniforme em $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ e θ é uma variável aleatória uniforme em $[0, 2\pi)$. As variáveis aleatórias ϵ e θ caracterizam respectivamente o erro de relógio e a fase da portadora. Em (2-12) e (2-13) $p(t)$ é a forma do pulso formatador no tempo, normalizado para energia unitária, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt = 1 \quad (2-14)$$

Exemplos de modulações com constelação bi-dimensional são apresentadas nas seções seguintes

2.1.1 Modulação M-PSK

Na modulação PSK (*Phase Shift Keying*), a amplitude da portadora é constante e sua fase varia de acordo com a informação a ser transmitida. Neste caso d_k toma valores no conjunto

$$\mathcal{S} = \{s_\ell ; \quad \ell = 0, \dots, M - 1\} \quad (2-15)$$

onde

$$s_\ell = \sqrt{E_s} e^{j\frac{\pi}{M}(2\ell+1)} \quad (2-16)$$

A Figura 2.1 ilustra a constelação de sinais associada a uma modulação M-PSK onde a energia média dos sinais é igual a E_s

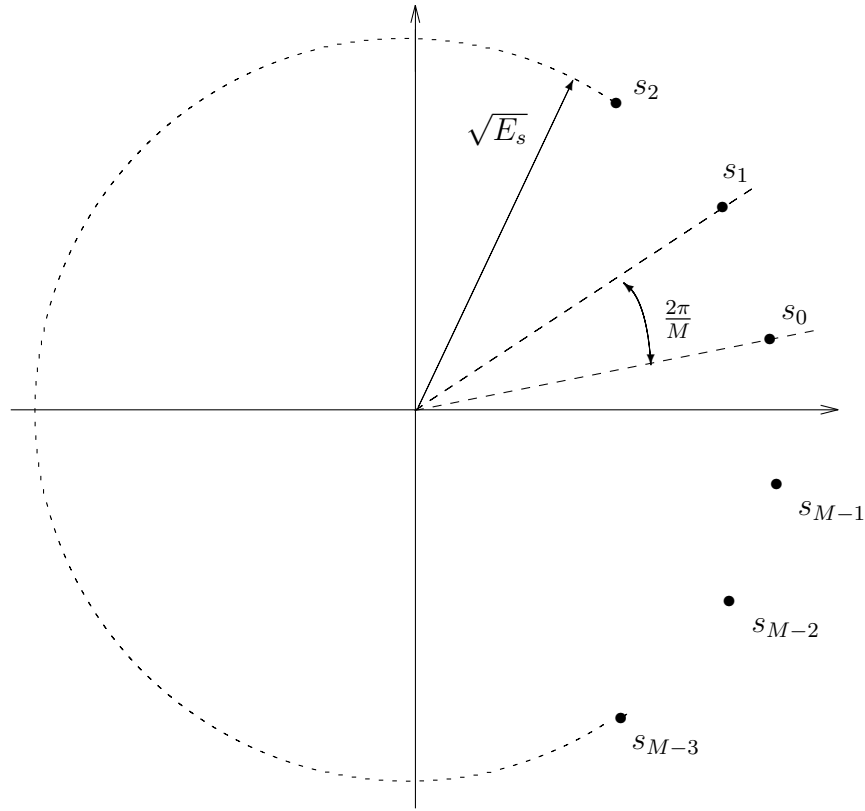


Figura 2.1: Constelação de sinais para a modulação M-PSK

2.1.2

Modulação M-QAM

Na modulação QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*), tanto a amplitude quanto a fase da portadora variam de acordo com a informação a ser transmitida. Neste caso d_k toma valores no conjunto

$$\mathcal{S} = \{s_\ell ; \quad \ell = 0, \dots, M - 1\} \quad (2-17)$$

onde

$$s_\ell = \left(2\ell + 1 - N - 2N \left\lfloor \frac{\ell}{N} \right\rfloor \right) \frac{\Delta}{2} + j \left(N - 1 - 2 \left\lfloor \frac{\ell}{N} \right\rfloor \right) \frac{\Delta}{2} ; \quad \ell = 0, \dots, M - 1 \quad (2-18)$$

e $N = \sqrt{M}$, $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a x , e

$$\Delta = \sqrt{\frac{6E_s}{M-1}} \quad (2-19)$$

A Figura 2.2 ilustra a constelação de sinais associada a uma modulação M-QAM onde a energia média dos sinais é igual a E_s

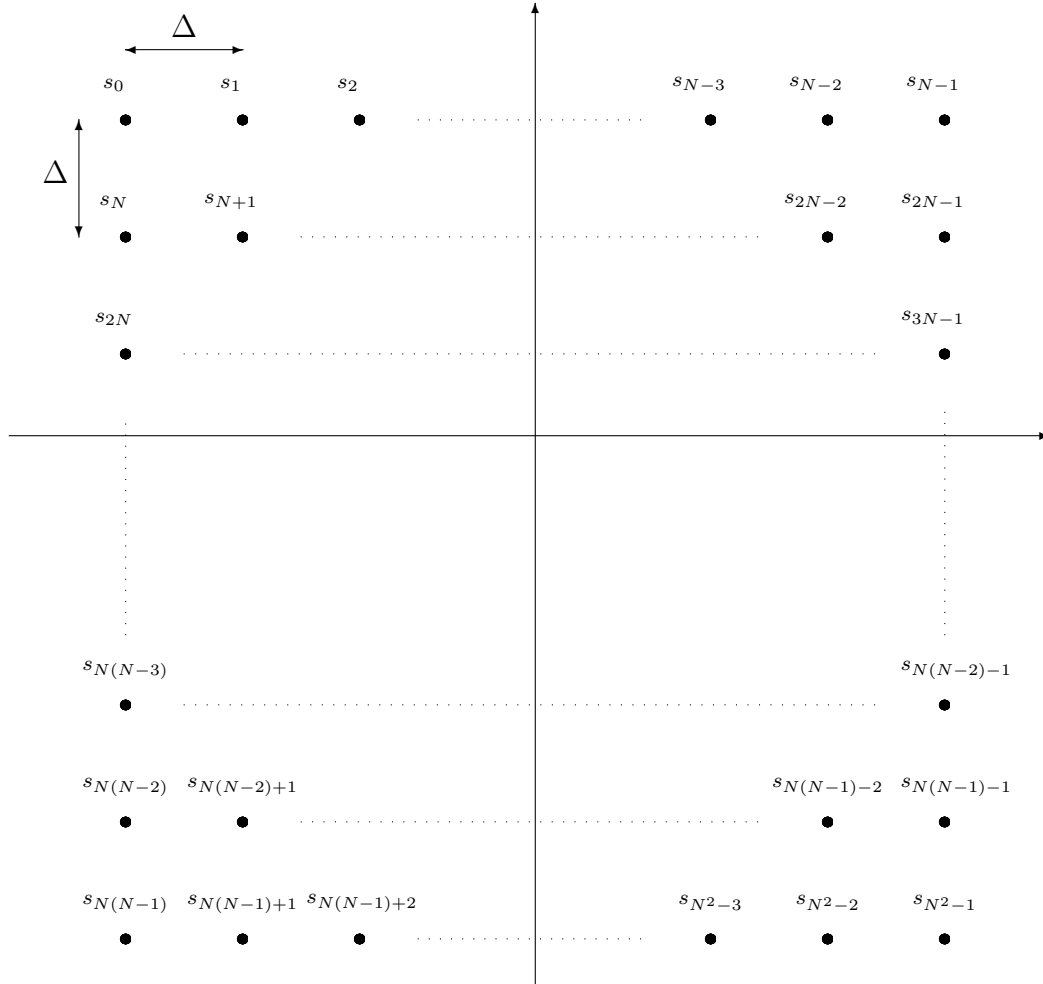


Figura 2.2: Constelação de sinais para a modulação M-QAM

2.2

Caracterização do sinal OFDM

OFDM é um sistema de modulação multiportadora. Consiste em um determinado número N de portadoras ortogonais, cada uma delas com uma taxa de transmissão de $1/T$ símbolos por segundos e espaçadas em frequência de $(1/T)$ Hz. O sinal OFDM pode ser escrito como

$$m(t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \quad (2-20)$$

onde as parcelas $c_i(t)$ correspondem a sinais digitais dadas por (2-12). Tem-se assim,

$$m(t) = \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} d_{ik} p(t + \epsilon - kT) e^{j[2\pi(f_c + \Delta f_i)(t + \epsilon) + \theta]} \right\} \quad (2-21)$$

onde d_{ik} é uma variável aleatória complexa que toma valores em $\mathcal{S}$ e corresponde ao sinal transmitido no k -ésimo intervalo da i -ésima portadora, $f_i = f_c + \Delta f_i$ é a frequência da i -ésima portadora, $p(t)$ é o pulso formatador com energia unitária (2-14) e é igual para todas as portadoras, T é a duração do símbolo, ϵ é uma variável aleatória uniforme em $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ e θ é uma variável aleatória uniforme em $[0, 2\pi)$.

A envoltória complexa do sinal OFDM, em (2-21) com relação à frequência f_c , se escreve

$$\tilde{m}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} d_{ik} p(t + \epsilon - kT) e^{j[\frac{2\pi i}{T}(t + \epsilon) + \theta]} \quad (2-22)$$

onde Δf_i foi feito igual a i/T . Alternativamente $\tilde{m}(t)$, pode ser escrito como

$$\tilde{m}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{m}_k(t) p(t + \epsilon - kT) \quad (2-23)$$

onde

$$\tilde{m}_k(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{2} d_{ik} e^{j[\frac{2\pi i}{T}(t+\epsilon)+\theta]} \quad (2-24)$$

$\tilde{m}_k(t)$ se refere à envoltória complexa do sinal transmitido no k -ésimo intervalo, aqui denominado símbolo OFDM. Note que o teorema do limite central permite dizer que, para valores suficientemente grandes de N , o processo $\tilde{m}_k(t)$ pode ser aproximado por um processo gaussiano complexo.

Nas secções que seguem, serão determinadas as estatísticas da envoltória complexa do símbolo OFDM ($\tilde{m}_k(t)$), e do sinal OFDM ($\tilde{m}(t)$)

2.2.1

Determinação das Médias

Média da envoltória complexa de $\tilde{m}_k(t)$

Pela definição de média de um processo estocástico [8] temos que a partir de (2-24) a média de $\tilde{m}_k(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{m}_k(t)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N \sqrt{2} d_{ik} e^{j[\frac{2\pi i}{T}(t+\epsilon)+\theta]}\right] \\ &= \sqrt{2} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[d_{ik} e^{j\frac{2\pi i}{T}\epsilon} e^{j\theta} e^{j\frac{2\pi i}{T}t}\right] \end{aligned} \quad (2-25)$$

sabendo que θ , ϵ , d_{ik} são variáveis aleatórias estatisticamente independentes, tem-se

$$\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t)] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[d_{ik}] \mathbb{E}\left[e^{j\frac{2\pi i}{T}\epsilon}\right] \mathbb{E}[e^{j\theta}] e^{j\frac{2\pi i}{T}t} \quad (2-26)$$

como θ é uma variável aleatória uniforme em $(0, 2\pi]$ tem-se que

$$\mathbb{E}[e^{j\theta}] = 0 \quad (2-27)$$

e conseqüentemente,

$$\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t)] = 0 \quad (2-28)$$

Média da envoltória complexa de $\tilde{m}(t)$

A partir de (2-23) tem-se que a média do sinal $\tilde{m}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{m}(t)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{m}_k(t) p(t + \epsilon - kT)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[\tilde{m}_k(t) p(t + \epsilon - kT)]\end{aligned}\quad (2-29)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t) p(t + \epsilon - kT)] &= \mathbb{E}_{\epsilon}\{\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t) p(t + E - kT) \mid \epsilon = E]\} \\ &= \mathbb{E}_{\epsilon}\{p(t + E - kT) \mathbb{E}[\tilde{m}_k(t) \mid \epsilon = E]\}\end{aligned}\quad (2-30)$$

note que a partir de (2-25)

$$\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t) \mid \epsilon = E] = \sqrt{2} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[d_{ik} e^{j\theta}] e^{j\frac{2\pi i}{T} E} e^{j\frac{2\pi i}{T} t} \quad (2-31)$$

considerando-se que θ , d_{ik} são variáveis aleatórias estatisticamente independentes, tem-se

$$\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t) \mid \epsilon = E] = \sqrt{2} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[d_{ik}] \mathbb{E}[e^{j\theta}] e^{j\frac{2\pi i}{T} E} e^{j\frac{2\pi i}{T} t} \quad (2-32)$$

Sabendo que θ é uma variável aleatória uniforme em $(0, 2\pi]$,

$$\mathbb{E}[e^{j\theta}] = 0 \quad (2-33)$$

conseqüentemente

$$\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t) \mid \epsilon = E] = 0 \quad (2-34)$$

A partir de (2-29) e (2-30) e o resultado em (2-34) obtém-se finalmente

$$\mathbb{E}[\tilde{m}(t)] = 0 \quad (2-35)$$

2.2.2

Determinação das Funções Autocorrelação

Função Autocorrelação da envoltória complexa de $\tilde{m}_k(t)$

A Função Autocorrelação do processo estocástico $\tilde{m}_k(t)$ é definida por:

$$R_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) = \mathbb{E} [\tilde{m}_k(t_1) \tilde{m}_k^*(t_2)] \quad (2-36)$$

considerando-se (2-24) tem-se

$$\begin{aligned} R_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^N \sqrt{2} d_{ik} e^{j[\frac{2\pi i}{T}(t_1+\epsilon)+\theta]} \right) \left(\sum_{\ell=1}^N \sqrt{2} d_{\ell k}^* e^{-j[\frac{2\pi \ell}{T}(t_2+\epsilon)+\theta]} \right) \right] \\ &= 2 \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N d_{ik} d_{\ell k}^* e^{j\frac{2\pi}{T}[it_1-\ell t_2+(i-\ell)\epsilon]} \right) \right] \end{aligned} \quad (2-37)$$

como já foi dito anteriormente as variáveis aleatórias ϵ e d_{ik} são estatisticamente independentes. Sendo assim, podemos escrever (2-37) como

$$R_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N \mathbb{E} [d_{ik} d_{\ell k}^*] \mathbb{E} \left[e^{j\frac{2\pi}{T}(i-\ell)\epsilon} \right] e^{j\frac{2\pi}{T}(it_1-\ell t_2)} \quad (2-38)$$

Note que, como ϵ é uniforme em $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$,

$$\mathbb{E} \left[e^{j\frac{2\pi}{T}(i-\ell)\epsilon} \right] = \begin{cases} 0, & i \neq \ell; \\ 1, & i = \ell. \end{cases} \quad (2-39)$$

Sendo assim, a Função Autocorrelação de $\tilde{m}_k(t)$ se escreve

$$R_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) = 2 \sum_{i=1}^N \mathbb{E} [|d_{ik}|^2] e^{j\frac{2\pi i}{T}(t_1-t_2)} \quad (2-40)$$

Considere que, de acordo com (2-11), $\mathbb{E} [|d_{ik}|^2] = E_s$. Tem-se

$$R_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) = 2 E_s \sum_{i=1}^N e^{j\frac{2\pi i}{T}(t_1-t_2)} \quad (2-41)$$

ou

$$R_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) = 2 E_s \sum_{i=1}^N \left\{ \cos \left[\frac{2\pi i}{T}(t_1 - t_2) \right] + j \sin \left[\frac{2\pi i}{T}(t_1 - t_2) \right] \right\} \quad (2-42)$$

Note que $R_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2)$ é função da diferença $\tau = t_1 - t_2$ e portanto o processo complexo $\tilde{m}_k(t)$ é estacionário no sentido amplo (ESA). Além disso $R_{\tilde{m}_k}(\tau)$ é periódica de período T . Alternativamente, considerando-se o somatório em (2-41), $R_{\tilde{m}_k}(\tau)$ se escreve

$$R_{\tilde{m}_k}(\tau) = 2 E_s \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi \tau N}{T} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi \tau}{T} \right)} e^{j \frac{(N+1)\pi \tau}{T}} \quad (2-43)$$

A partir de (2-40), temos que

$$R_{\tilde{m}_k}(0) = 2 E_s N \quad (2-44)$$

onde E_s é a energia média do sinal e N o número de portadoras do sinal OFDM.

Função Autocorrelação normalizada da envoltória complexa de $\tilde{m}_k(t)$

A Função Autocorrelação normalizada de $\tilde{m}_k$ é definida como

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\tilde{m}_k}(\tau) &= \frac{R_{\tilde{m}_k}(\tau)}{R_{\tilde{m}_k}(0)} \\ &= \frac{R_{\tilde{m}_k}(\tau)}{2E_s N} \end{aligned} \quad (2-45)$$

A partir de (2-42) e fazendo-se $t_1 - t_2 = \tau$ obtém-se,

$$\bar{R}_{\tilde{m}_k}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \cos \left[\frac{2\pi i}{T}(\tau) \right] + j \text{sen} \left[\frac{2\pi i}{T}(\tau) \right] \right\} \quad (2-46)$$

As figuras 2.3 e 2.4 ilustram a Função Autocorrelação normalizada do k -ésimo símbolo OFDM (linha contínua parte Real e linha tracejada parte Imaginária), para 16 e 64 portadoras, respectivamente. Note que esta função autocorrelação não depende do pulso formatador $p(t)$.

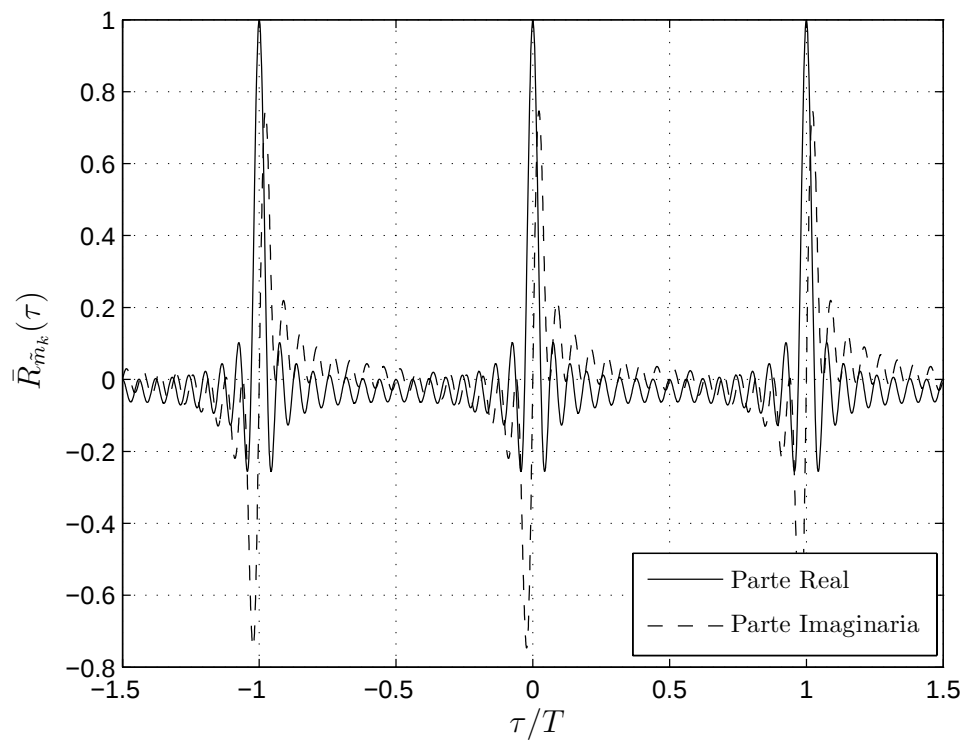


Figura 2.3: Função Autocorrelação normalizada de $\tilde{m}_k(t)$ para $N = 16$

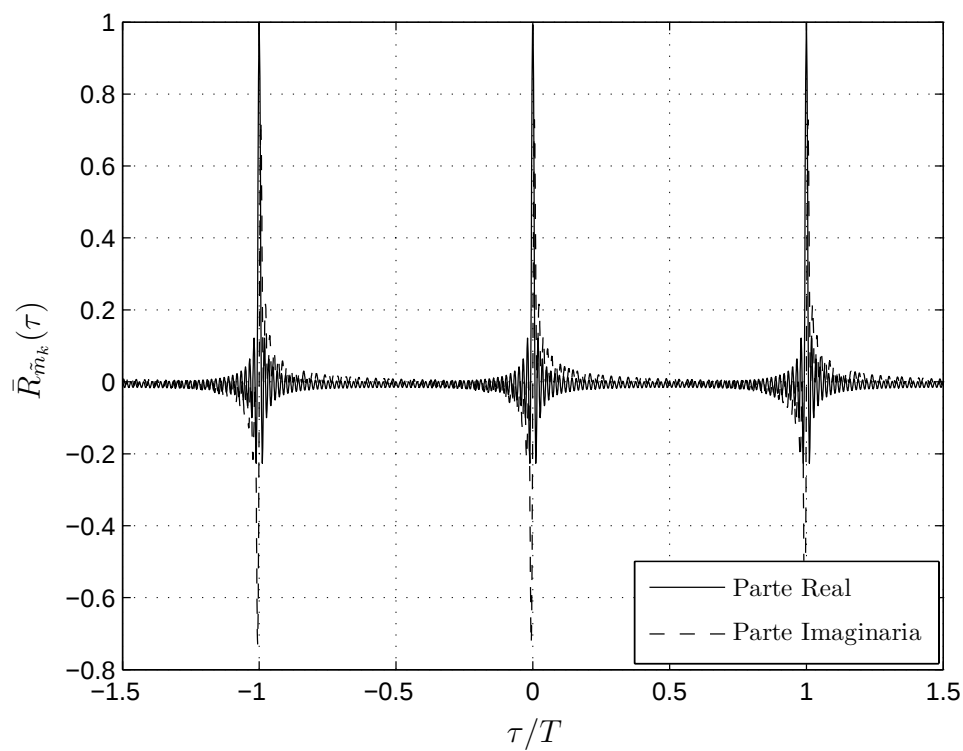


Figura 2.4: Função Autocorrelação normalizada de $\tilde{m}_k(t)$ para $N = 64$

Função Autocorrelação da envoltória complexa de $\tilde{m}(t)$

Pela definição temos:

$$R_{\tilde{m}}(t_1, t_2) = E[\tilde{m}(t_1)\tilde{m}^*(t_2)] \quad (2-47)$$

Considerando-se (2-23),

$$R_{\tilde{m}}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[\tilde{m}_k(t_1)\tilde{m}_\ell^*(t_2)p(t_1 + \epsilon - kT)p(t_2 + \epsilon - \ell T)] \quad (2-48)$$

Note que $R_{\tilde{m}}(t_1, t_2)$ pode ser obtido a partir da autocorrelação condicional $R_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2)$ através da relação

$$\begin{aligned} R_{\tilde{m}}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}_\epsilon [R_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2)p_\epsilon(E)dE \end{aligned} \quad (2-49)$$

onde

$$\begin{aligned} R_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[\tilde{m}_k(t_1)\tilde{m}_\ell^*(t_2)p(t_1 + \epsilon - kT)p(t_2 + \epsilon - \ell T) | \epsilon = E] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[\tilde{m}_k(t_1)\tilde{m}_\ell^*(t_2) | \epsilon = E] p(t_1 + E - kT)p(t_2 + E - \ell T) \end{aligned} \quad (2-50)$$

Note que, levando-se em conta (2-24),

$$\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t_1)\tilde{m}_\ell^*(t_2) | \epsilon = E] = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[d_{ik}d_{n\ell}^*] e^{j\frac{2\pi}{T}(it_1 - nt_2)} e^{j\frac{2\pi}{T}(i-n)E} \quad (2-51)$$

Considerando-se que d_{ik} e $d_{n\ell}$ tem médias nulas e são estatisticamente independentes para $k \neq \ell$, tem-se

$$\mathbb{E}[\tilde{m}_k(t_1)\tilde{m}_\ell(t_2) | \epsilon = E] = \begin{cases} 0, & k \neq \ell; \\ R_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2), & k = \ell. \end{cases} \quad (2-52)$$

onde

$$R_{\tilde{m}_k|\epsilon=E}(t_1, t_2) = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[d_{ik}d_{nk}^*] e^{j\frac{2\pi}{T}(it_1-nt_2)} e^{j\frac{2\pi}{T}(i-n)E} \quad (2-53)$$

Neste caso (2-50) se reduz a

$$R_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\tilde{m}_k|\epsilon=E}(t_1, t_2) p(t_1 + E - kT) p(t_2 + E - kT) \quad (2-54)$$

Observe que se os símbolos d_{ik} e d_{nk} têm média nulas e são estatisticamente independentes para $i \neq n$, a autocorrelação $R_{\tilde{m}_k|\epsilon=E}(t_1, t_2)$ em (2-53) não depende de E , sendo dada por,

$$\begin{aligned} R_{\tilde{m}_k|\epsilon=E}(t_1, t_2) &= 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[|d_{ik}|^2] e^{j\frac{2\pi i}{T}(t_1-t_2)} \\ &= 2 E_s \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi i}{T}(t_1-t_2)} \end{aligned} \quad (2-55)$$

ou seja,

$$R_{\tilde{m}_k|\epsilon=E}(t_1, t_2) = R_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) \quad (2-56)$$

e conseqüentemente, (2-54) pode ser escrita como

$$R_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\tilde{m}_k}(t_1 - t_2) p(t_1 + E - kT) p(t_2 + E - kT) \quad (2-57)$$

substituindo (2-57) em (2-49) obtém-se finalmente

$$R_{\tilde{m}}(t_1, t_2) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} R_{\tilde{m}_k}(t_1 - t_2) p(t_1 + E - kT) p(t_2 + E - kT) dE \quad (2-58)$$

Efetuada-se a mudança de variável de integração $\alpha = t_1 + E - kT$ em (2-58), tem-se

$$R_{\tilde{m}}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\tilde{m}_k}(t_1 - t_2) \frac{1}{T} \int_{t_1 - kT - T/2}^{t_1 - kT + T/2} p(\alpha) p(t_2 + \alpha - t_1) d\alpha \quad (2-59)$$

ou ainda,

$$R_{\tilde{m}}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\tilde{m}_k}(\tau) \frac{1}{T} \int_{t_1 - kT - T/2}^{t_1 - kT + T/2} p(\alpha) p(\alpha - \tau) d\alpha \quad (2-60)$$

Como $R_{\tilde{m}_k}(\tau)$ não depende de k ver (2-55 e 2-56)

$$R_{\tilde{m}}(\tau) = \frac{1}{T} R_{\tilde{m}_k}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha) p(\alpha - \tau) d\alpha \quad (2-61)$$

ou ainda,

$$R_{\tilde{m}}(\tau) = \frac{1}{T} R_{\tilde{m}_k}(\tau) [p(t) * p(-t)](\tau) \quad (2-62)$$

com $R_{\tilde{m}_k}(\tau)$ dado por (2-43). A partir de (2-62) podemos concluir que $\tilde{m}(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo (ESA). A potência média do processo estacionário $\tilde{m}(t)$ é dada por

$$P_{\tilde{m}} = R_{\tilde{m}}(0) \quad (2-63)$$

que, considerando (2-61) e (2-44), se escreve

$$\begin{aligned} P_{\tilde{m}} &= \frac{R_{\tilde{m}_k}(0)}{T} \\ &= \frac{2E_s N}{T} \end{aligned} \quad (2-64)$$

Função Autocorrelação normalizada da envoltória complexa de $\tilde{m}(t)$

A Função Autocorrelação normalizada de $\tilde{m}(t)$ é definida por

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) &= \frac{R_{\tilde{m}}(\tau)}{R_{\tilde{m}}(0)} \\ &= \frac{T R_{\tilde{m}}(\tau)}{2E_s N} \end{aligned} \quad (2-65)$$

considerando-se (2-43) e (2-62), (2-65) se escreve

$$\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) = \bar{R}_{\tilde{m}_k}(\tau) [p(t) * p(-t)](\tau) \quad (2-66)$$

com $\bar{R}_{\tilde{m}_k}(\tau)$ dado por (2-45). Note que definindo-se

$$\bar{m}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{P_{\tilde{m}}}} \tilde{m}(\tau) \quad (2-67)$$

verifica-se facilmente que

$$R_{\bar{m}}(\tau) = \frac{R_{\tilde{m}}(\tau)}{P_{\tilde{m}}} = \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) \quad (2-68)$$

A Figura 2.5 ilustra a função autocorrelação normalizada $\bar{R}_{\tilde{m}_k}(\tau)$ (partes real e imaginaria) e a função $p(\tau) * p(-\tau)$ para um sinal OFDM com pulso $p(\tau)$ retangular e 16 portadoras.

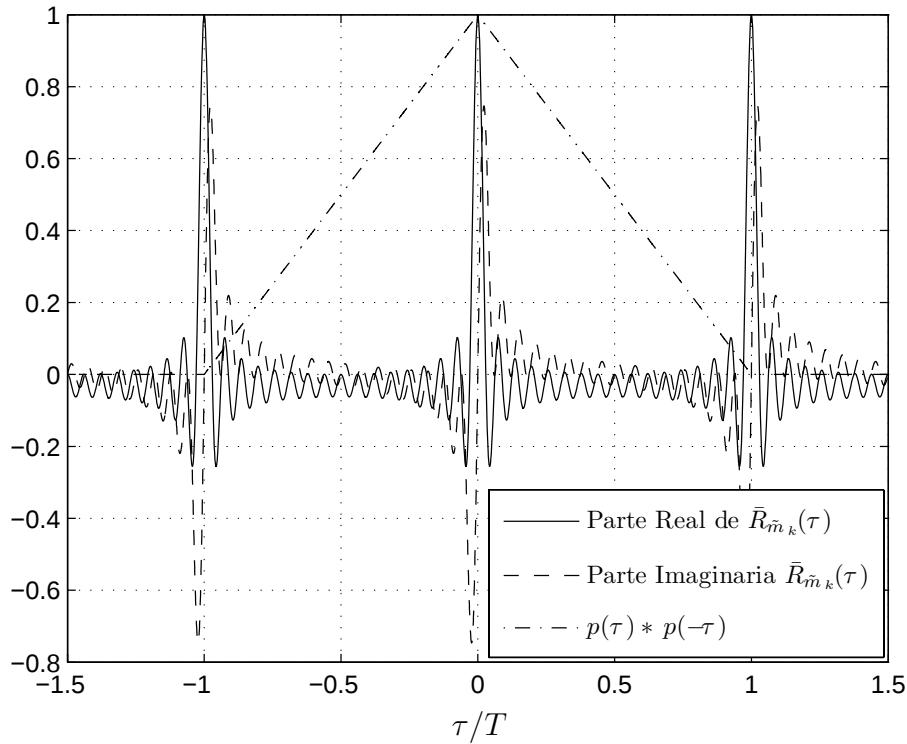


Figura 2.5: Função Autocorrelação de $\tilde{m}_k(t)$ e $p(\tau) * p(-\tau)$, para sinais OFDM com pulso retangular e 16 portadoras.

A função autocorrelação normalizada $\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)$ do processo $\tilde{m}(t)$, também para pulso retangular e 16 portadoras, é apresentada na Figura 2.6.

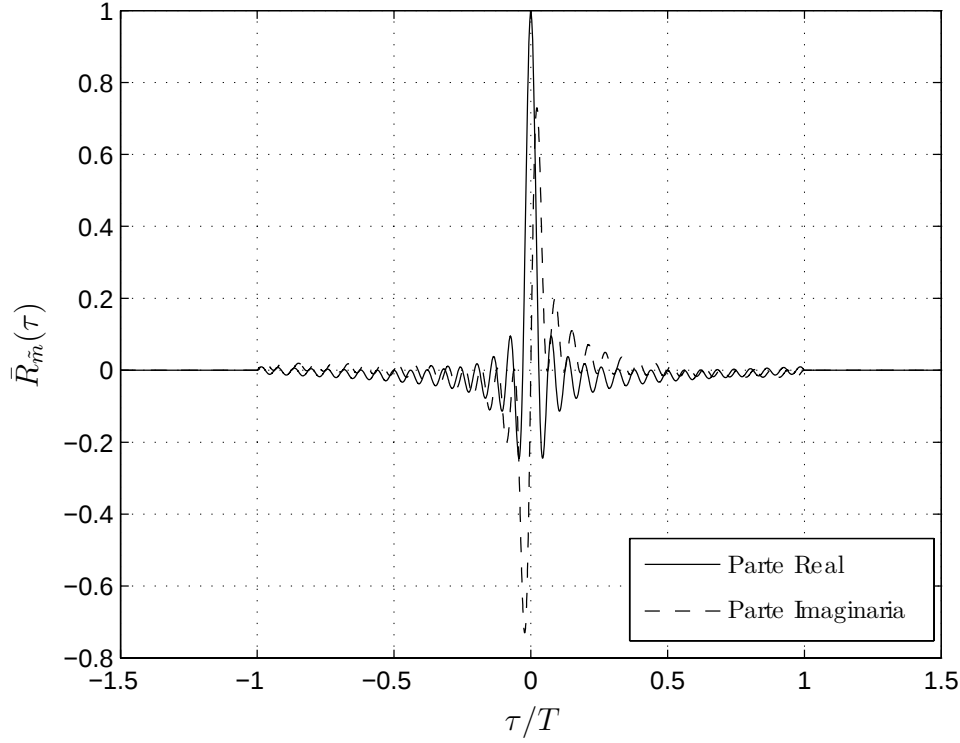


Figura 2.6: Função Autocorrelação de $\tilde{m}(t)$ para $N = 16$

2.2.3

Função Pseudo Autocorrelação

Um processo aleatório complexo $z(t)$ com função pseudo autocorrelação igual a zero é chamado de próprio [9], definida por

$$\hat{R}_z(t_1, t_2) = \mathbb{E} [z(t_1)z(t_2)] \quad (2-69)$$

Função Pseudo Autocorrelação da envoltória complexa de $\tilde{m}_k(t)$

Pela definição de função pseudo autocorrelação [9] temos que:

$$\hat{R}_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) = \mathbb{E} [\tilde{m}_k(t_1)\tilde{m}_k(t_2)] \quad (2-70)$$

Substituindo (2-24) em (2-70) temos:

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^N \sqrt{2} d_{ik} e^{j[\frac{2\pi i}{T}(t_1+\epsilon)+\theta]} \right) \left(\sum_{\ell=1}^N \sqrt{2} d_{\ell k} e^{j[\frac{2\pi \ell}{T}(t_2+\epsilon)+\theta]} \right) \right] \\
 &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N \mathbb{E} \left[d_{ik} d_{\ell k} e^{j[\frac{2\pi i}{T}(t_1+\epsilon)+\theta]} e^{j[\frac{2\pi \ell}{T}(t_2+\epsilon)+\theta]} \right] \\
 &= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\ell=1}^N \mathbb{E} [d_{ik} d_{\ell k}] \mathbb{E} \left[e^{j\frac{2\pi}{T}(i+\ell)\epsilon} \right] \mathbb{E} \left[e^{j\frac{2\pi}{T}(it_1+\ell t_2)} \right] \mathbb{E} [e^{j2\theta}]
 \end{aligned} \tag{2-71}$$

Como θ é uniformemente distribuído em $(0, 2\pi]$,

$$\mathbb{E} [e^{j2\theta}] = 0 \tag{2-72}$$

tem-se que a função pseudo autocorrelação de $\tilde{m}_k(t)$ é nula, ou seja,

$$\hat{R}_{\tilde{m}_k}(t_1, t_2) = 0 \tag{2-73}$$

Função Pseudo Autocorrelação da envoltória complexa de $\tilde{m}(t)$

Pela definição temos,

$$\hat{R}_{\tilde{m}}(t_1, t_2) = \mathbb{E} [\tilde{m}(t_1)\tilde{m}(t_2)] \tag{2-74}$$

Considerando (2-23), tem-se

$$\hat{R}_{\tilde{m}}(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} [\tilde{m}_k(t_1)\tilde{m}_l(t_2)p(t_1 + \epsilon - kT)p(t_2 + \epsilon - lT)] \tag{2-75}$$

Note que $\hat{R}_{\tilde{m}}(t_1, t_2)$ pode ser obtido a partir da autocorrelação condicional $\hat{R}_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2)$ através da relação

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_{\tilde{m}}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}_{\epsilon} \left[\hat{R}_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2) \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2)p_{\epsilon}(E)dE
 \end{aligned} \tag{2-76}$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} [\tilde{m}_k(t_1) \tilde{m}_\ell(t_2) p(t_1 + \epsilon - kT) p(t_2 + \epsilon - \ell T) | \epsilon = E] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} [\tilde{m}_k(t_1) \tilde{m}_\ell(t_2) | \epsilon = E] p(t_1 + E - kT) p(t_2 + E - \ell T) \quad (2-77)\end{aligned}$$

Note que, levando-se em conta (2-24),

$$\mathbb{E} [\tilde{m}_k(t_1) \tilde{m}_\ell(t_2) | \epsilon = E] = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} [d_{ik} d_{n\ell}] e^{j \frac{2\pi}{T} (it_1 + nt_2)} e^{j \frac{2\pi}{T} (i+n)E} \mathbb{E} [e^{j 2\theta}] \quad (2-78)$$

Como θ é uniformemente distribuído em $(0, 2\pi]$,

$$\mathbb{E} [e^{j 2\theta}] = 0 \quad (2-79)$$

ou seja,

$$\mathbb{E} [\tilde{m}_k(t_1) \tilde{m}_\ell(t_2) | \epsilon = E] = 0 \quad (2-80)$$

e conseqüentemente, (2-77) é nula, ou seja,

$$\hat{R}_{\tilde{m}|\epsilon=E}(t_1, t_2) = 0 \quad (2-81)$$

Substituindo (2-81) em (2-76) obtém-se finalmente

$$\hat{R}_{\tilde{m}}(t_1, t_2) = 0 \quad (2-82)$$

Considerando o Teorema do Limite Central podemos concluir que envoltória complexa de $\tilde{m}(t)$ para $N > 30$ é um processo estacionário no sentido amplo (ESA), gaussiano e próprio.

2.2.4

Densidades Espectrais de Potência

A densidade espectral de potência de um processo estacionário no sentido amplo é dada pela Transformada de Fourier de sua função autocorrelação. Assim a partir de (2-41) e fazendo $\tau = t_1 - t_2$, tem-se

$$\begin{aligned} S_{\tilde{m}_k}(f) &= 2 E_s \mathcal{F} \left[\sum_{i=1}^N e^{j[\frac{2\pi i}{T}(\tau)]} \right] \\ &= 2 E_s \sum_{i=1}^N \mathcal{F} \left[e^{j[\frac{2\pi i}{T}(\tau)]} \right] \end{aligned} \quad (2-83)$$

como

$$\mathcal{F} \left[e^{j[\frac{2\pi i}{T}(\tau)]} \right] = \delta \left(f - \frac{i}{T} \right) \quad (2-84)$$

A Densidade Espectral de Potência do sinal $\tilde{m}_k(t)$ é dada por (2-85)

$$S_{\tilde{m}_k}(f) = 2 E_s \sum_{i=1}^N \delta \left(f - \frac{i}{T} \right) \quad (2-85)$$

a partir de (2-85) notamos que a densidade espectral de potência do sinal $\tilde{m}_k(t)$ é dada por um trem de impulsos de área E_s espaçados de $1/T$ conforme ilustrado na Figura 2.7

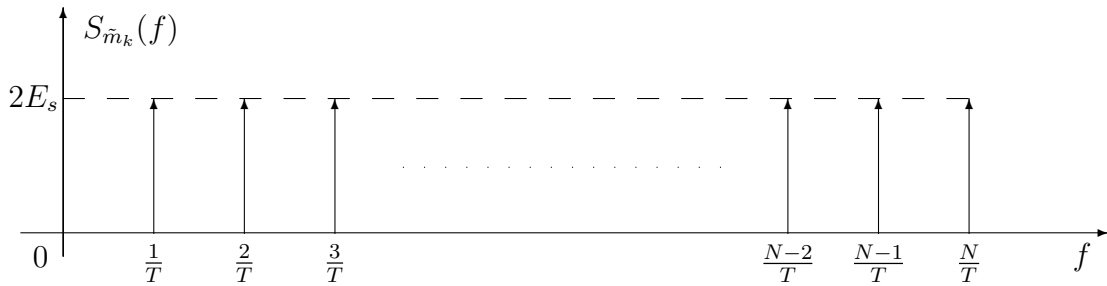


Figura 2.7: Densidade Espectral de Potência do sinal $\tilde{m}_k(t)$

Considerando-se (2-45), a densidade espectral de potência normalizada de $\tilde{m}_k(t)$ definida como a transformada de fourier de $\bar{R}_{\tilde{m}_k}(\tau)$, se escreve

$$\bar{S}_{\tilde{m}_k}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta \left(f - \frac{i}{T} \right) \quad (2-86)$$

A partir de (2-62) a densidade espectral de potência do processo $\tilde{m}(t)$ é dada por

$$S_{\tilde{m}}(f) = \mathcal{F}[R_{\tilde{m}}(\tau)] \quad (2-87)$$

ou ainda, utilizando-se algumas propriedades da Transformada de Fourier e substituindo (2-62) em (2-87), tem-se

$$S_{\tilde{m}}(f) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{T}R_{\tilde{m}_k}(\tau)[p(t) * p(-t)](\tau)\right] \quad (2-88)$$

$$= \frac{1}{T}\mathcal{F}[R_{\tilde{m}_k}(\tau)] * \left\{\mathcal{F}[p(\tau)]\mathcal{F}[p(-\tau)]\right\} \quad (2-89)$$

$$= \frac{1}{T}S_{\tilde{m}_k}(f) * P(f)P^*(f) \quad (2-90)$$

onde $P(f) = \mathcal{F}[p(\tau)]$, ou ainda,

$$S_{\tilde{m}}(f) = \frac{1}{T}S_{\tilde{m}_k}(f) * |P(f)|^2 \quad (2-91)$$

considerando-se (2-85), esta Densidade Espectral de Potência se escreve

$$S_{\tilde{m}}(f) = \frac{2Es}{T} \sum_{i=1}^N \left| P\left(f - \frac{i}{T}\right) \right|^2 \quad (2-92)$$

Define-se a Densidade Espectral de Potência normalizada como sendo a Transformada de Fourier de $\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)$. De (2-65), tem-se

$$\bar{S}_{\tilde{m}}(f) = \frac{S_{\tilde{m}}(f)}{P_{\tilde{m}}} \quad (2-93)$$

onde $S_{\tilde{m}}(f)$ é dado por (2-92) e $P_{\tilde{m}}$ é dado por (2-64). Assim podemos reescrever a densidade espectral de potência normalizada como

$$\bar{S}_{\tilde{m}}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| P\left(f - \frac{i}{T}\right) \right|^2 \quad (2-94)$$

2.3

Caracterização da não linearidade

A utilização de amplificadores operando na região não linear é bastante comum em sistemas de comunicações com limitação de potência (e.g. comunicações via satélites). Na prática, um sinal

$$x(t) = \rho(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t) + \lambda) \quad (2-95)$$

ao passar por um dispositivo não linear, gera, em sua saída um sinal $z(t)$ de mesma frequência, com amplitude e fase que dependem, de maneira não linear, da amplitude do sinal $x(t)$, ou seja,

$$z(t) = g[\rho(t)] \cos(2\pi f_c t + \phi(t) + f[\rho(t)] + \lambda) \quad (2-96)$$

onde $g(\cdot)$ e $f(\cdot)$ são funções que caracterizam as conversões AM/AM e AM/PM produzidas pela não linearidade.

A caracterização de uma não linearidade sem memória [10, 11, 12, 13], é feita através das funções $g(\cdot)$ e $f(\cdot)$ ou, de maneira mais compacta, através da função complexa

$$C[\rho(t)] = g[\rho(t)] e^{jf[\rho(t)]} \quad (2-97)$$

Neste trabalho, a função complexa $C(\cdot)$ será caracterizada pela expansão em série

$$C[\rho(t)] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_{2\ell+1} [\rho(t)]^{2\ell+1} \quad (2-98)$$

onde os coeficientes complexos $\gamma_{2\ell+1}$ são determinados de modo a garantir que a série em (2-98) aproxima-se da função complexa em (2-97)

Considere a Figura 2.8, onde $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{z}(t)$ representam respectivamente as envoltórias complexas das portadoras na entrada e na saída de uma não linearidade sem memória cujo relacionamento entrada-saída é dado por (2-98).

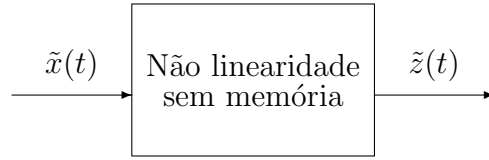


Figura 2.8: Diagrama de blocos do sinal passando por um dispositivo não-linear

É possível mostrar [12] que

$$\begin{aligned}\tilde{z}(t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_{2\ell+1} \tilde{x}^{\ell+1}(t) \tilde{x}^{*\ell}(t) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_{2\ell+1} |\tilde{x}(t)|^{2\ell} \tilde{x}(t)\end{aligned}\quad (2-99)$$

A modelagem matemática de uma não linearidade com memória é usualmente feita pela configuração em cascata de filtros com uma não linearidade sem memória, conforme ilustrado no diagrama em blocos da Figura 2.9.

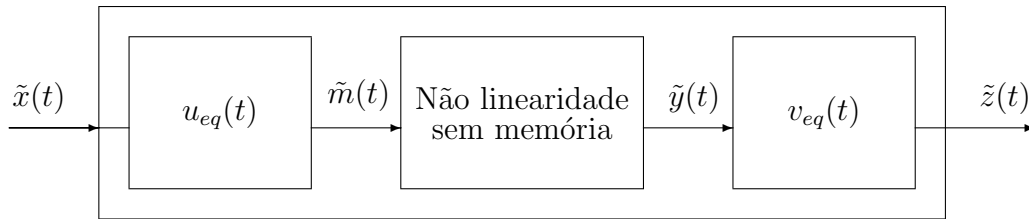


Figura 2.9: Diagrama de blocos de um dispositivo não-linear com memória

Nesta figura $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{z}(t)$ representam respectivamente as envoltórias complexas dos sinais na entrada e na saída da não linearidade, e u_{eq} e v_{eq} representam as respostas ao impulso dos equivalentes passa baixa dos filtros. Repare que se $\tilde{y}(t)$ é estacionário no sentido amplo a média, função autocorrelação e a densidade espectral de potência são facilmente obtidas.

Na prática, as curvas da função complexa $C(\cdot)$, que caracterizam a não linearidade sem memória são fornecidas pelos fabricantes dos equipamentos (por exemplo amplificadores não lineares). Estas curvas são normalmente expressas em função das razões entre as potências dos sinais e as potências de saturação (de entrada e de saída) do dispositivo não linear. Estas razões são usualmente denominadas *back-offs* de entrada e de saída da não linearidade. Assim, o bloco central da Figura 2.9 pode ser representado pelo diagrama da Figura 2.10, no qual a não linearidade $h(\cdot)$ é expressa em função dos *back-offs* de entrada e de saída. Neste diagrama P_{s_i} e P_{s_o} representam as potências de

saturação de entrada e saída do dispositivo não linear.

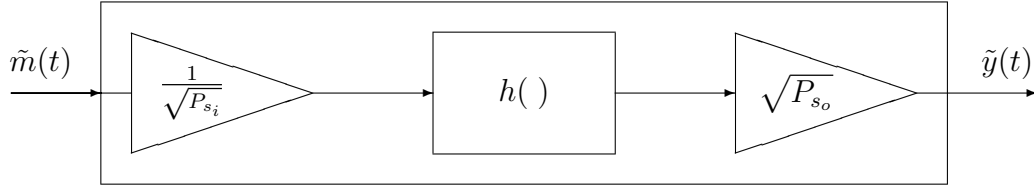


Figura 2.10: Diagrama de blocos de um dispositivo não-linear sem memória

Finalmente, considerando-se que o relacionamento entrada-saída no bloco $h(\cdot)$ da Figura 2.10 é análogo ao relacionamento expresso em (2-99), é possível escrever (2-100)

$$\frac{\tilde{y}(t)}{\sqrt{P_{so}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma_{2\ell+1} \frac{\tilde{m}^{\ell+1}(t)}{(\sqrt{P_{si}})^{\ell+1}} \frac{\tilde{m}^{*\ell}(t)}{(\sqrt{P_{si}})^{\ell}} \quad (2-100)$$

A expressão (2-100) permite determinar estatísticas do processo de saída $\tilde{y}(t)$ da não linearidade sem memória em função das estatísticas do processo estocástico de entrada $\tilde{m}(t)$.

2.4

Caracterização do sinal na saída da Não Linearidade

A média do processo estocástico $\tilde{y}(t)$ pode ser determinada a partir de (2-100). Tem-se assim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{y}(t)] &= \mathbb{E} \left[\sqrt{P_{so}} \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{2i+1} \frac{\tilde{m}^{i+1}(t)}{(\sqrt{P_{si}})^{i+1}} \frac{\tilde{m}^{*i}(t)}{(\sqrt{P_{si}})^i} \right] \\ &= \sqrt{P_{so}} \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{2i+1} \frac{\mathbb{E}[\tilde{m}^{i+1}(t) \tilde{m}^{*i}(t)]}{(\sqrt{P_{si}})^{i+1} (\sqrt{P_{si}})^i} \end{aligned} \quad (2-101)$$

ou ainda,

$$\frac{\mathbb{E}[\tilde{y}(t)]}{\sqrt{P_{so}}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{2i+1}}{(\sqrt{P_{si}})^{2i+1}} \xi_i(t)$$

onde

$$\xi_i(t) = \mathbb{E}[\tilde{m}^{i+1}(t) \tilde{m}^{*i}(t)] \quad (2-102)$$

Mostra-se na Seção A.1 do Anexo que $\xi_i(t)$ é igual a zero, conseqüentemente

$$\mathbb{E} [\tilde{y}(t)] = 0 \quad (2-103)$$

A Função Autocorrelação de $\tilde{y}(t)$, é definida por

$$R_{\tilde{y}}(t_1, t_2) = \mathbb{E} [\tilde{y}(t_1) \tilde{y}^*(t_2)] \quad (2-104)$$

pode ser escrita como, considerando-se (2-100), como

$$\frac{R_{\tilde{y}}(t_1, t_2)}{P_{s_o}} = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{2i+1} \gamma_{2j+1}^* \frac{\tilde{m}^{i+1}(t_1)}{(\sqrt{P_{s_i}})^{i+1}} \frac{\tilde{m}^{*i}(t_1)}{(\sqrt{P_{s_i}})^i} \frac{\tilde{m}^{*j+1}(t_2)}{(\sqrt{P_{s_i}})^{j+1}} \frac{\tilde{m}^j(t_2)}{(\sqrt{P_{s_i}})^j} \right] \quad (2-105)$$

ou ainda,

$$\frac{R_{\tilde{y}}(t_1, t_2)}{P_{s_o}} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\gamma_{2i+1} \gamma_{2j+1}^*}{P_{s_i}^{i+j+1}} \alpha_{ij}(t_1, t_2) \quad (2-106)$$

onde

$$\alpha_{ij}(t_1, t_2) = \mathbb{E} [\tilde{m}^{i+1}(t_1) \tilde{m}^{*i}(t_1) \tilde{m}^{*j+1}(t_2) \tilde{m}^j(t_2)] \quad (2-107)$$

Se $\tilde{m}(t)$ é um processo estocástico gaussiano complexo, próprio [9] e de média nula, é possível re-escrever (2-107) como

$$\alpha_{ij}(t_1, t_2) = R_{\tilde{m}}(t_1, t_2) \sum_{\ell=0}^{\min(i,j)} \beta_{ij\ell} [R_{\tilde{m}}(t_1, t_1)]^{i-\ell} |R_{\tilde{m}}(t_1, t_2)|^{2\ell} [R_{\tilde{m}}(t_2, t_2)]^{j-\ell} \quad (2-108)$$

onde

$$\beta_{ij\ell} = (i+1)! C_i^{i-\ell} C_{j+1}^{\ell+1} (j)! \quad (2-109)$$

As equações (2-108) e (2-109) são demonstradas na Seção A.2 do apêndice. No caso de $\tilde{m}(t)$ ser um processo estocástico estacionário no sentido amplo, a quantidade $\alpha_{ij}(t_1, t_2)$ pode ser escrita como

$$\alpha_{ij}(\tau) = P_{\tilde{m}}^{i+j+1} \bar{\alpha}_{ij}(\tau) \quad (2-110)$$

onde

$$\bar{\alpha}_{ij}(t_1, t_2) = \mathbb{E} \left[\bar{m}^{i+1}(t_1) \bar{m}^{*i}(t_1) \bar{m}^{*j+1}(t_2) \bar{m}^j(t_2) \right] \quad (2-111)$$

com $\tau = t_1 - t_2$ e $P_{\tilde{m}}$ representando a potência média do processo estocástico $\tilde{m}(t)$. Em (2-111), $\bar{m}(t)$ é resultado da normalização do processo estocástico $\tilde{m}(t)$ conforme (2-67), ou seja

$$\bar{m}(t) = \frac{1}{\sqrt{P_{\tilde{m}}}} \tilde{m}(t) \quad (2-112)$$

o que implica

$$R_{\bar{m}}(\tau) = \frac{1}{P_{\bar{m}}} R_{\tilde{m}}(\tau) = \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) \quad (2-113)$$

Note que, levando-se em conta (2-107) e (2-108), (2-111) se escreve

$$\bar{\alpha}_{ij}(\tau) = \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) \sum_{\ell=0}^{\min(i,j)} \beta_{ij\ell} \left| (\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)) \right|^{2\ell} \quad (2-114)$$

Finalmente, considerando-se (2-106) e (2-110), a Função Autocorrelação do processo estocástico $\tilde{y}(t)$ pode ser escrita, no caso particular de $\tilde{m}(t)$ ser estacionário no sentido amplo, como

$$\frac{R_{\tilde{y}}(\tau)}{P_{s_o}} = \frac{P_{\tilde{m}}}{P_{s_i}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_{\tilde{m}}^{i+j}}{P_{s_i}^{i+j}} \gamma_{2i+1} \gamma_{2j+1}^* \bar{\alpha}_{ij}(\tau) \quad (2-115)$$

com $\bar{\alpha}_{ij}(\tau)$ dado por (2-114). A Equação (2-115) pode ainda ser escrita como

$$\frac{R_{\tilde{y}}(\tau)}{P_{s_o}} = 2 b_{in} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\gamma}_{2i+1} \bar{\gamma}_{2j+1}^* \bar{\alpha}_{ij}(\tau) \quad (2-116)$$

onde

$$b_{in} = \frac{P_m}{P_{s_i}} = \frac{P_{\tilde{m}}}{2 P_{s_i}} \quad (2-117)$$

e

$$\bar{\gamma}_{2j+1} = (2 b_{in})^j \gamma_{2j+1} \quad (2-118)$$

Note que (2-103) e (2-116) indicam que $\tilde{y}(\tau)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo.

Substituindo-se (2-114) em (2-116), obtém-se

$$\frac{R_{\tilde{y}}(\tau)}{P_{so}} = 2 b_{in} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\gamma}_{2i+1} \bar{\gamma}_{2j+1}^* \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) \sum_{\ell=0}^{\min(i,j)} \beta_{ij\ell} |\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)|^{2\ell} \quad (2-119)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{R_{\tilde{y}}(\tau)}{P_{so}} &= 2 b_{in} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\gamma}_{2i+1} \bar{\gamma}_{2j+1}^* \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) \sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{\beta}_{ij\ell} |\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)|^{2\ell} \\ &= 2 b_{in} \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) \sum_{\ell=0}^{\infty} |\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)|^{2\ell} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\gamma}_{2i+1} \bar{\gamma}_{2j+1}^* \bar{\beta}_{ij\ell} \end{aligned} \quad (2-120)$$

onde

$$\bar{\beta}_{ij\ell} = \begin{cases} \beta_{ij\ell} & ; \min(i, j) \geq \ell \\ 0 & ; \min(i, j) < \ell \end{cases} \quad (2-121)$$

Em notação vetorial, (2-120) pode ser ainda escrita como

$$\frac{R_{\tilde{y}}(\tau)}{P_{so}} = 2 b_{in} \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) \sum_{\ell=0}^{\infty} |\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)|^{2\ell} \mathbf{g}^T \mathbf{A}_{\ell} \mathbf{g}^* \quad (2-122)$$

onde

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_3 \\ \bar{\gamma}_5 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 b_{in})^0 \gamma_1 \\ (2 b_{in})^1 \gamma_3 \\ (2 b_{in})^2 \gamma_5 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2-123)$$

e

$$\mathbf{A}_{\ell} = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_{00\ell} & \bar{\beta}_{01\ell} & \bar{\beta}_{02\ell} & \cdots \\ \bar{\beta}_{10\ell} & \bar{\beta}_{11\ell} & \bar{\beta}_{12\ell} & \cdots \\ \bar{\beta}_{20\ell} & \bar{\beta}_{21\ell} & \bar{\beta}_{22\ell} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2-124)$$

Considerando-se que nos casos práticos o número de termos da série em (2-98) é finito, é possível escrever

$$\frac{R_{\bar{y}}(\tau)}{P_{so}} = 2 b_{in} \bar{R}_{\bar{m}}(\tau) \sum_{\ell=0}^N |\bar{R}_{\bar{m}}(\tau)|^{2\ell} \mathbf{g}^T \mathbf{A}_{\ell} \mathbf{g}^* \quad (2-125)$$

onde

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_3 \\ \vdots \\ \bar{\gamma}_{2N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 b_{in})^0 \gamma_1 \\ (2 b_{in})^1 \gamma_3 \\ \vdots \\ (2 b_{in})^N \gamma_{2N+1} \end{pmatrix} \quad (2-126)$$

e

$$\mathbf{A}_{\ell} = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_{00\ell} & \bar{\beta}_{01\ell} & \cdots & \bar{\beta}_{0N\ell} \\ \bar{\beta}_{10\ell} & \bar{\beta}_{11\ell} & \cdots & \bar{\beta}_{1N\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\beta}_{N0\ell} & \bar{\beta}_{N1\ell} & \cdots & \bar{\beta}_{NN\ell} \end{pmatrix} ; \quad \ell = 0, \dots, N \quad (2-127)$$

A título de exemplo, no caso de $N = 3$, as matrizes A_{ℓ} são dadas por

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_{000} & \bar{\beta}_{010} & \bar{\beta}_{020} & \bar{\beta}_{030} \\ \bar{\beta}_{100} & \bar{\beta}_{110} & \bar{\beta}_{120} & \bar{\beta}_{130} \\ \bar{\beta}_{200} & \bar{\beta}_{210} & \bar{\beta}_{220} & \bar{\beta}_{230} \\ \bar{\beta}_{300} & \bar{\beta}_{310} & \bar{\beta}_{320} & \bar{\beta}_{330} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 2 & 4 & 12 & 48 \\ 6 & 12 & 36 & 144 \\ 24 & 48 & 144 & 576 \end{pmatrix} \quad (2-128)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\beta}_{111} & \bar{\beta}_{121} & \bar{\beta}_{131} \\ 0 & \bar{\beta}_{211} & \bar{\beta}_{221} & \bar{\beta}_{231} \\ 0 & \bar{\beta}_{311} & \bar{\beta}_{321} & \bar{\beta}_{331} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 72 \\ 0 & 12 & 72 & 432 \\ 0 & 72 & 432 & 2592 \end{pmatrix} \quad (2-129)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\beta}_{222} & \bar{\beta}_{232} \\ 0 & 0 & \bar{\beta}_{322} & \bar{\beta}_{332} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 144 \\ 0 & 0 & 144 & 1728 \end{pmatrix} \quad (2-130)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\beta}_{333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 144 \end{pmatrix} \quad (2-131)$$

Mostra-se na Seção A.3 do apêndice que os coeficientes $\beta_{ij\ell}$ definidos em (2-109) podem, alternativamente, ser escritos como

$$\bar{\beta}_{ij\ell} = \sigma_{i\ell} \sigma_{j\ell} \quad (2-132)$$

onde

$$\sigma_{i\ell} = \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} \frac{(i+1)!}{(i-\ell)!} \frac{i!}{\ell!} \quad (2-133)$$

Assim, a matriz $\mathbf{A}_\ell$ em (2-124), pode ainda ser escrita como

$$\mathbf{A}_\ell = \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_\ell^T \quad (2-134)$$

onde

$$\mathbf{a}_\ell = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{0\ell} \\ \bar{\sigma}_{1\ell} \\ \bar{\sigma}_{2\ell} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2-135)$$

com

$$\bar{\sigma}_{i\ell} = \begin{cases} \sigma_{i\ell} & ; \quad i \geq 0 \\ 0 & ; \quad i < 0 \end{cases} \quad (2-136)$$

sendo $\sigma_{i\ell}$ dado por (2-133).

Conseqüentemente, (2-122) pode também ser escrita como

$$\frac{R_{\tilde{y}}(\tau)}{P_{so}} = 2 b_{in} \bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) \sum_{\ell=0}^{\infty} |\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)|^{2\ell} |\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{g}|^2 \quad (2-137)$$

A Densidade Espectral de Potência do processo estocástico $\tilde{y}(t)$ é dada pela transformada de Fourier da Função Autocorrelação de $\tilde{y}(t)$, ou seja,

$$S_{\tilde{y}}(f) = \mathcal{F} [R_{\tilde{y}}(\tau)] \quad (2-138)$$

a partir (2-122) podemos escrever

$$S_{\tilde{y}}(f) = P_{so} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2 b_{in} \mathbf{g}^T \mathbf{A}_{\ell} \mathbf{g}^* \mathcal{F} \left[\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) |\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)|^{2\ell} \right] \quad (2-139)$$

ou ainda

$$S_{\tilde{y}}(f) = P_{so} \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} \bar{S}_{\ell}(f) \quad (2-140)$$

onde

$$B_{\ell} = 2 b_{in} \mathbf{g}^T \mathbf{A}_{\ell} \mathbf{g}^* \quad (2-141)$$

e

$$\bar{S}_{\ell}(f) = \mathcal{F} \left[\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau) |\bar{R}_{\tilde{m}}(\tau)|^{2\ell} \right] \quad (2-142)$$

Note que as funções $\bar{S}_{\ell}(f)$ em (2-142) são determinadas através da convolução das Densidades Espectrais de Potências normalizadas de $\tilde{m}(t)$, ou seja,

$$S_{\ell}(f) = \underbrace{\bar{S}_{\tilde{m}}(f) * \dots * \bar{S}_{\tilde{m}}(f)}_{\ell+1} * \underbrace{\bar{S}_{\tilde{m}}(-f) * \dots * \bar{S}_{\tilde{m}}(-f)}_{\ell} \quad (2-143)$$

onde $\bar{S}_{\tilde{m}}(f)$ é dada por (2-94).

É interessante observar que no somatório em (2-140), a parcela correspondente a $\ell = 0$ representa a Densidade Espectral de Potência do sinal desejado na saída da não linearidade (Produto de Intermodulação de 1^ª ordem). De maneira análoga, as parcelas correspondentes a $\ell = 1$ e $\ell = 2$ representam as Densidades Espectrais de Potências produzidas pelos Produtos de Intermodulações de 3^ª e 5^ª ordens, respectivamente. De maneira igual, a ℓ -ésima parcela representa a Densidade Espectral de Potência produzido pelo Produto de Intermodulação de ordem $2\ell + 1$.

Assim, (2-140) pode ser reescrita como

$$S_{\bar{y}}(f) = S_D(f) + S_I(f) \quad (2-144)$$

onde $S_D(f)$ e $S_I(f)$ representam, respectivamente, a Densidade Espectral de Potência da envoltória complexa do sinal desejado e da envoltória complexa da interferência devido à intermodulação, dados por

$$\begin{aligned} S_D(f) &= P_{so} B_0 \bar{S}_0(f) \\ &= P_{so} B_0 \bar{S}_{\tilde{m}}(f) \end{aligned} \quad (2-145)$$

e

$$S_I(f) = P_{so} \sum_{\ell=1}^{\infty} B_{\ell} \bar{S}_{\ell}(f) \quad (2-146)$$

Normalizando-se $S_{\bar{y}}(f)$ em (2-144) para que a Potência média da envoltória complexa do sinal desejado na saída da não linearidade seja unitária, obtém-se

$$\bar{S}_{\bar{y}}(f) = \bar{S}_{\tilde{m}}(f) + \bar{S}_I(f) \quad (2-147)$$

onde

$$\bar{S}_{\bar{y}}(f) = \frac{S_{\bar{y}}(f)}{P_{so} B_0} \quad (2-148)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{S}_I(f) &= \frac{S_I(f)}{P_{so} B_0} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{B_0} \bar{S}_{\ell}(f) \end{aligned} \quad (2-149)$$

É interessante observar que em (2-149) cada uma das parcelas de $\bar{S}_I(f)$ corresponde praticamente à densidade espectral de potência associados aos produtos de intermodulação de uma determinada ordem. Assim, as parcelas correspondentes a $\ell = 1$, $\ell = 2$ e $\ell = 3$ representam, por exemplo, densidades espectrais de potências do produtos de intermodulação de 3^a, 5^a e 7^a ordem, respectivamente.