

Referências Bibliográficas

- [1] SALTZBERG, B. R.. **Performance of an efficient parallel data transmission system.** IEEE Trans. Commun., 15:805–811, 1967.
- [2] WEINSTEIN, S. B.; EBERT, P. M.. **Data transmission by frequency-division multiplexing using discrete fourier transform.** IRE Trans. Commun., 19:1293–1302, 1971.
- [3] LEITE PINTO, E.; DE ALBUQUERQUE, C. P.. **A técnica de transmissão ofdm.** Revista Científica Periódica - Telecomunicações, 05:01–10, 2002.
- [4] BINGHAM, J. A. C.. **Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come.** IEEE Communications Magazine, 1990.
- [5] VAN NEE, R.; PRASAD, R.. **OFDM for Wireless Multimedia Communications.** Artech House, London, 2000.
- [6] **Advanced Digital Techniques for UHF Satellite Sound Broadcasting - Collected Paper on Concepts for Sound Broadcasting into the 21st Century.** European Broadcasting Union Technical Centre, August, 1988.
- [7] FORTES, J. M.; SAMPAIO NETO, R.. **A fast algorithm for sorting and counting third order intermodulation products.** IEEE Trans. on Commun, 34:1266–1272, 1986.
- [8] DE ALMEIDA E ALBUQUERQUE, J. P.; FORTES, J. M. P.; FINAMORE, W. A.. **Modelos Probabilísticos em Engenharia Elétrica.** CETUC, 2002.
- [9] NEESER, F. D.; MASSEY, J. L.. **Proper complex random processes with applications to information theory.** IEEE Trans. Inform. Theory, 39:1293–1302, 1993.

- [10] FUENZALIDA, J. C.; SHIMBO, O. ; COOK, W. L.. **Time-domain analysis of intermodulation effects caused by nonlinear amplifiers**. COMSAT Technical review, 3(1):89–143, 1973.
- [11] BENEDETO, S.; BIGLIERI, E. ; DAFFARA, R.. **Modeling and performance evaluation of non-linear satellite links: a volterra series approach**. IEEE Trans. on Aero. and Elec. Systems, 15, 1979.
- [12] BENEDETO, S.; BIGLIERI, E. ; CASTELLANI, V.. **Digital Transmission Theory**. Prentice-Hall Inc., New York, 1987.
- [13] FORTES, J. M. P.; SAMPAIO NETO, R.. **Séries de Volterra na Análise dos Efeitos da Não Linearidade do Canal Satélite no Desempenho de Portadoras PSK**. CETUC, 1997.
- [14] RAPPAPORT, T. S.. **Wireless Communications - Principles and Practice**. Prentice Hall PTR, London, 2002.
- [15] REED, I. S.. **On a moment theorem for complex gaussian process**. IRE Trans. on Inform. Theory, 217:194–195, 1962.

A

Resultados Relacionados ao Teorema dos Momentos para Processos Gaussianos Complexos

Teorema

Sejam $z_n = 1, \dots, N$ amostras de um processo estocástico $z(t)$, gaussiano, complexo, próprio, estacionário no sentido amplo e de média nula. Então,

(i) para $s \neq r$, o momento conjunto

$$\mathbb{E} [z_{m_1}^* z_{m_2}^* \cdots z_{m_s}^* z_{n_1} z_{n_2} \cdots z_{n_r}] \quad (\text{A-1})$$

onde m_k e n_j são inteiros do conjunto $1, \dots, N$, é igual a zero.

(ii) para $s = r$, o momento conjunto

$$\mathbb{E} [z_{m_1}^* z_{m_2}^* \cdots z_{m_s}^* z_{n_1} z_{n_2} \cdots z_{n_r}] \quad (\text{A-2})$$

se escreve

$$\sum_{\pi} \left(\mathbb{E} [z_{m_{\pi(1)}}^* z_{n_1}] \right) \left(\mathbb{E} [z_{m_{\pi(2)}}^* z_{n_2}] \right) \cdots \left(\mathbb{E} [z_{m_{\pi(r)}}^* z_{n_r}] \right) \quad (\text{A-3})$$

onde π é uma permutação do conjunto de inteiros $1, \dots, r$.

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [15].

Exemplos de aplicação deste teorema são as relações

$$\mathbb{E} [|z|^{2n}] = n! (\mathbb{E} [|z|^2])^n$$

$$\mathbb{E} [(z_1^* z_2)^n] = n! (\mathbb{E} [z_1^* z_2])^n$$

$$\mathbb{E} [z_1^* z_2^* z_3 z_4] = \mathbb{E} [z_1^* z_3] \mathbb{E} [z_2^* z_4] + \mathbb{E} [z_2^* z_3] \mathbb{E} [z_1^* z_4]$$

No caso de $\tilde{m}(t)$ ser um processo estocástico gaussiano complexo, próprio, estacionário no sentido amplo e de média nula, o cálculo das quantidades $\xi_i(t)$ e $\alpha_{ij}(t_1, t_2)$ definidas em 2-102 e 2-107, pode ser feito considerando-se o Teorema.

A.1

Determinação de $\xi_i(t)$

A partir de (2-102), temos que $\xi_i(t)$ é dado por

$$\xi_i(t) = \mathbb{E} \left[\tilde{m}^{i+1}(t) \tilde{m}^{*i}(t) \right] \quad (\text{A-4})$$

Pelo Teorema, tem-se obviamente

$$\xi_i(t) = 0 \quad (\text{A-5})$$

A.2

Determinação de $\alpha_{ij}(t_1, t_2)$

A partir de (2-107), temos que $\alpha_{ij}(t_1, t_2)$ é dado por

$$\alpha_{ij}(t_1, t_2) = \mathbb{E} \left[\tilde{m}^{i+1}(t_1) \tilde{m}^{*i}(t_1) \tilde{m}^{*j+1}(t_2) \tilde{m}^j(t_2) \right] \quad (\text{A-6})$$

Considere o diagrama da Figura A.1, onde $\tilde{m}_1 = \tilde{m}(t_1)$ e $\tilde{m}_2 = \tilde{m}(t_2)$.

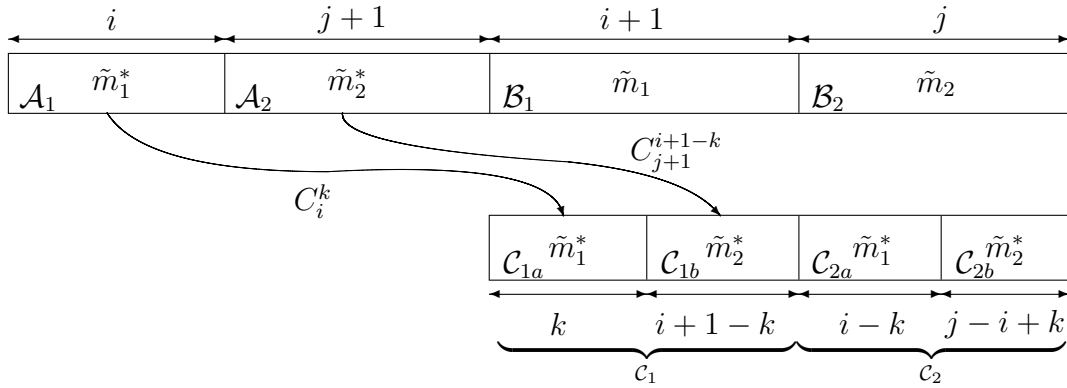


Figura A.1: Diagrama de blocos de um dispositivo não-linear com memória

Nesta Figura os elementos do conjunto $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, correspondem ao conjunto de variáveis aleatórias

$$\underbrace{\{\tilde{m}_1^*, \dots, \tilde{m}_1^*\}}_i \underbrace{\{\tilde{m}_2^*, \dots, \tilde{m}_2^*\}}_{j+1} \underbrace{\{\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_1\}}_{i+1} \underbrace{\{\tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_2\}}_j \quad (\text{A-7})$$

O valor esperado do produto dessas variáveis aleatórias se escreve (A-6) e aplicando o Teorema, $\alpha_{ij}(t_1, t_2)$ pode ser escrito como produtos de momentos de segunda ordem das variáveis envolvidas. Para gerar as permutações indicadas no

teorema, considere o conjunto $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ da Figura A.1, no qual serão colocadas permutações dos elementos de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Para tal, considere um dado valor k , inteiro e menor que i . Suponha que k dos i elementos de $\mathcal{A}_1$ sejam colocadas em $\mathcal{C}_{1a}$ e que o restante do conjunto $\mathcal{C}_1$ seja completado com $i + 1 - k$ dos $j + 1$ elementos de $\mathcal{A}_2$. Note que nesta situação, os elementos de $\mathcal{C}_2$ estão todos completamente especificados.

Assim, o valor esperado em (A-6) pode ser escrito em função do produto dos momentos de segunda ordem dos pares de variáveis aleatórias, formados tomando-se ordenadamente elementos de $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{C}_1$ e elementos de $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{C}_2$, produto este que é dado por

$$[R_{\tilde{m}}(t_1, t_1)]^k [R_{\tilde{m}}(t_1, t_2)]^{i+1-k} [R_{\tilde{m}}^*(t_1, t_2)]^{i-k} [R_{\tilde{m}}(t_2, t_2)]^{j-i+k} \quad (\text{A-8})$$

Note que o número de configurações nas quais o conjunto $\mathcal{C}_1$ tem k elementos $\tilde{m}_1^*$ e $i + 1 - k$ elementos $\tilde{m}_2^*$ é dado por

$$C_i^k C_{j+1}^{i+1-k} \quad (\text{A-9})$$

Considerando-se as $(i + 1)!$ permutações dos pares de variáveis aleatórias formados por elementos de $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{C}_1$ e as $(j)!$ permutações dos pares de variáveis aleatórias formados $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{C}_2$, tem-se que o número total β_{ijk} de configurações onde o produto dos momentos de segunda ordem desses pares se escreve como

$$\beta_{ijk} = (i + 1)! C_i^k C_{j+1}^{i+1-k} (j)! \quad (\text{A-10})$$

Observando-se da Figura A.1 que se $i \leq j$, k toma valores entre 0 e i e se $i \geq j$, k toma valores entre $i - j$ e i , obtém-se finalmente

$$\alpha_{ij}(t_1, t_2) = \sum_{k=\max(0, i-j)}^i \beta_{ijk} [R_{\tilde{m}}(t_1, t_1)]^k [R_{\tilde{m}}(t_1, t_2)]^{i+1-k} [R_{\tilde{m}}^*(t_1, t_2)]^{i-k} [R_{\tilde{m}}(t_2, t_2)]^{j-i+k} \quad (\text{A-11})$$

ou ainda

$$\alpha_{ij}(t_1, t_2) = R_{\tilde{m}}(t_1, t_2) \sum_{k=\max(0, i-j)}^i \beta_{ijk} [R_{\tilde{m}}(t_1, t_1)]^k |R_{\tilde{m}}(t_1, t_2)|^{2(i-k)} [R_{\tilde{m}}(t_2, t_2)]^{j-i+k} \quad (\text{A-12})$$

Fazendo-se uma mudança de variável do índice do somatório tal que $i - k = \ell$, tem-se

$$\alpha_{ij}(t_1, t_2) = R_{\tilde{m}}(t_1, t_2) \sum_{\ell=0}^{\min(i,j)} \beta_{ij\ell} [R_{\tilde{m}}(t_1, t_1)]^{i-\ell} |R_{\tilde{m}}(t_1, t_2)|^{2\ell} [R_{\tilde{m}}(t_2, t_2)]^{j-\ell} \quad (\text{A-13})$$

onde

$$\beta_{ij\ell} = (i+1)! C_i^{i-\ell} C_{j+1}^{\ell+1} (j)! \quad (\text{A-14})$$

A.3

Expressão alternativa para $\beta_{ij\ell}$

Os coeficientes, $\beta_{ij\ell}$ em (A-14) podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \beta_{ij\ell} &= (i+1)! C_i^{i-\ell} C_{j+1}^{\ell+1} (j)! \\ &= (i+1)! \frac{i!}{(i-\ell)! \ell!} \frac{(j+1)!}{(\ell+1)! (j-\ell)!} j! \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

observe que $(\ell+1)! = (\ell+1) \ell!$ tem-se

$$\beta_{ij\ell} = \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} \frac{(i+1)! i!}{(i-\ell)! \ell!} \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} \frac{(j+1)! j!}{(j-\ell)! \ell!} \quad (\text{A-16})$$

ou

$$\beta_{ij\ell} = \sigma_{i\ell} \sigma_{j\ell} \quad (\text{A-17})$$

onde

$$\sigma_{i\ell} = \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} \frac{(i+1)! i!}{(i-\ell)! \ell!} \quad (\text{A-18})$$

A.4

Expressão alternativa para $\mathbf{g}^T \mathbf{A}_\ell \mathbf{g}^*$

De acordo com (2-124) e (2-132) a matriz $\mathbf{A}_\ell$ é definida por

$$\mathbf{A}_\ell = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_{00\ell} & \bar{\beta}_{01\ell} & \bar{\beta}_{02\ell} & \cdots \\ \bar{\beta}_{10\ell} & \bar{\beta}_{11\ell} & \bar{\beta}_{12\ell} & \cdots \\ \bar{\beta}_{20\ell} & \bar{\beta}_{21\ell} & \bar{\beta}_{22\ell} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A-19})$$

onde

$$\bar{\beta}_{ij\ell} = \begin{cases} \beta_{ij\ell} & ; \min(i, j) \geq \ell \\ 0 & ; \min(i, j) < \ell \end{cases} \quad (\text{A-20})$$

Considere o vetor $\mathbf{a}_\ell$, definido por

$$\mathbf{a}_\ell = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{0\ell} \\ \bar{\sigma}_{1\ell} \\ \bar{\sigma}_{2\ell} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{A-21})$$

onde

$$\bar{\sigma}_{i\ell} = \begin{cases} \sigma_{i\ell} & ; i \geq 0 \\ 0 & ; i < 0 \end{cases} \quad (\text{A-22})$$

com $\sigma_{i\ell}$ dado por (A-18).

A partir das definições em (A-19), (A-20), (A-21), (A-22) e considerando-se (A-18), mostra-se facilmente que

$$\mathbf{A}_\ell = \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_\ell^T \quad (\text{A-23})$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}^T \mathbf{A}_\ell \mathbf{g}^* &= \mathbf{g}^T \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_\ell^T \mathbf{g}^* \\
 &= \mathbf{g}^T \mathbf{a}_\ell \mathbf{a}_\ell^{*T} \mathbf{g}^* \\
 &= |\mathbf{a}_\ell^T \mathbf{g}|^2
 \end{aligned} \tag{A-24}$$