4
O *Ant System* (AS)

O AS foi o primeiro algoritmo baseado no comportamento de formigas a ser desenvolvido, no ano de 1991, e serviu de base para o desenvolvimento de muitos outros modelos, como o ACS e o AS-VRP. Sua aplicação original, que será apresentada aqui, foi no problema do caixeiro viajante (TSP), descrito na seção 3.1. Este algoritmo, assim como os outros algoritmos baseados em formigas, simula ciclos de vida de cada formiga atuante no problema. Ou seja, cada formiga é criada em um nó inicial definido, faz suas escolhas de qual caminho percorrer de acordo com uma regra probabilística, e quando tiver passado por todos os nós do problema, ela morre (é excluída do problema). O registro do caminho por onde a formiga passou consta em sua memória, e é normalmente utilizado para a avaliação da qualidade das soluções, ou seja, para a determinação do comprimento total percorrido. Além disso, esta memória também indica a localização dos arcos onde os ferormônios devem ser depositados, o que só é feito depois da formiga ter terminado seu ciclo de vida.

A regra probabilística de decisão para os algoritmos do tipo AS levam em consideração tanto a quantidade de ferormônios acumulada em cada arco, quanto o comprimento destes arcos. Estas quantidades de ferormônios representam o conhecimento acumulado pela colônia, e é resultado de decisões tomadas por todas as formigas precedentes; os comprimentos dos arcos, por sua vez, representam as informações físicas do problema, que são estáticas e independem das formigas precedentes. Pode-se dar um peso diferente para a contribuição da densidade de ferormônios e do comprimento do arco, através dos parâmetros *alfa* e *beta*. Matematicamente, podemos descrever estes fatos através da eq. 3, que define como é feito o cálculo da atratividade de cada arco:

$$a_{ij}(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{l \in N_i}[\tau_{il}(t)]^{\alpha}[\eta_{il}]^{\beta}} \tag{3}$$

Este cálculo da atratividade é realizado para uma formiga que se encontra em um nó i qualquer, e para todo j pertencente a N_i, onde N_i é o conjunto dos nós adjacentes ao nó i. Ou seja, cada arco ij incidente ao nó i tem o valor de a_{ij} calculado, e como o denominador da expressão acima é o somatório de todos os valores de a_{ij} dos arcos incidentes ao nó i, este valor de a_{ij} em particular representa uma fração deste somatório de valores de a. Na equação acima, a variável τ_{ij} representa a quantidade de ferormônio acumulada no arco ij, e a variável η_{ij} é igual ao inverso do comprimento do arco ij. Ou seja, quanto maior a concentração de ferormônios em um arco, e quanto menor seu comprimento, maior o valor de a do arco. Pode-se ver que o parâmetro *alfa* define a importância que é dada à quantidade de ferormônios no arco, e o parâmetro *beta* define a importância do comprimento do arco.

Uma vez calculados os valores de a de todos os arcos incidentes a i, pode-se definir a probabilidade de uma formiga k escolher percorrer o arco ij como:

$$p_{ij}^{k}(t) = \frac{a_{ij}(t)}{\sum_{l \in N_i^k} a_{il}(t)} \tag{4}$$

Na eq. 4, temos N_i^k como sendo o subconjunto de N_i que contém somente os nós que ainda não foram visitados pela formiga k, ou seja, os nós que não constam na memória da formiga. Podemos ver esta probabilidade então como uma fração entre o valor de a de um arco e a soma dos valores de a dos arcos que são factíveis, ou seja, que levam a nós que ainda não foram visitados. A figura 3 ilustra o procedimento:

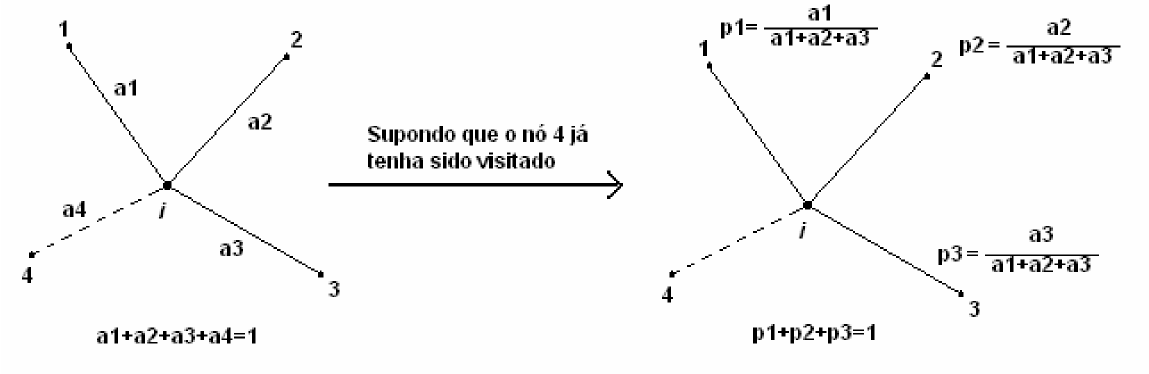

Figura 3 – Cálculo das probabilidades de escolha de um arco, para o *Ant System*

Na figura acima, o conjunto N_i consiste dos nós 1, 2, 3 e 4, enquanto que N_i^k possui apenas os elementos 1, 2 e 3. Cada um destes três nós tem, então, suas probabilidades p1, p2 e p3 determinadas, e com base nestas probabilidades o nó seguinte será escolhido. A forma como esta escolha baseada nas probabilidades é efetuada será descrita na implementação dos algoritmos, no capítulo 6.

Uma vez que todas as k formigas já tenham percorrido seus caminhos por inteiro, parte-se para a atualização da quantidade de ferormônios nos arcos. Dois fenômenos acontecem neste ponto: a evaporação dos ferormônios e a deposição de novos ferormônios pelas formigas. Ambos os fenômenos podem ser modelados por uma mesma equação:

$$\tau_{ij}(t) \leftarrow (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t) \qquad (5)$$

Na eq. 5, o parâmetro ρ define o quão rápida será a evaporação dos ferormônios, ou seja, ele atua como um coeficiente de decaimento. Já o termo $\Delta\tau_{ij}$ é o somatório de todos os $\Delta\tau_{ij}^k$ de cada arco *ij*, ou seja, é a soma de todas as contribuições individuais de cada formiga k que tenha passado pelo arco *ij* na iteração em questão; $\Delta\tau_{ij}^k$ é a quantidade de ferormônios que a formiga k deposita no arco *ij,* e é definida como o inverso do comprimento total do percurso que a formiga k percorreu, ou seja, quanto menor comprimento L_k do caminho encontrado, maior será a contribuição em ferormônios da formiga k aos arcos que ela percorreu. Um arco que é percorrido por um número grande de formigas recebe um número maior de contribuições de ferormônios, e o tamanho dessas contribuições é proporcional à qualidade das soluções encontradas. Matematicamente, temos:

$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{L_k(t)}, & se(i,j) \in percurso\ \ feito\ \ pela\ \ formiga\ \ k \\ & \qquad na\ \ iteração\ \ t \\ 0, & caso\ \ contrário \end{cases} \qquad (6)$$

$$\Delta\tau_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_{ij}^k(t), \quad onde\ \ m\ \ é\ \ o\ \ número\ \ de\ \ formigas$$

Esta é a idéia básica do AS, aplicado ao problema do caixeiro viajante. A seguir, veremos uma outra meta-heurística que foi desenvolvida tendo como base o AS, conhecida como *Ant Colony System*.