3
Shifts de Tipo Finito

Espaços de seqüências que são descritos por um conjunto finito de blocos proibidos $\mathfrak{P}$ são chamados de *shifts de tipo finito*. Apesar de serem simples, os shifts de tipo finito são essenciais em algumas áreas da matemática como os sistemas dinâmicos. Iniciaremos esse capítulo introduzindo shifts de tipo finito, dando alguns exemplos típicos desse tipo de shift. Nesta seção também veremos grafos e seus shifts (shift aresta e vértice) assim como as representações de grafos de shifts de tipo finito. Um objeto essencial será a matriz de adjacência de um grafo. Esta matriz (e suas potências) fornece algumas propriedades dos shifts.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

3.1
Restrições de Tipo Finita

Em primeiro lugar, iremos definir shifts de tipo finito, e então falaremos sobre as propriedades de shifts com *memória finita*.

Definição 3.1 (Shift de tipo finito) *Um shift de tipo finito é um espaço de seqüências, que é descrito por um conjunto finito de blocos proibidos, isto é, um espaço de seqüências X da forma $X_{\mathfrak{P}}$, para algum conjunto finito $\mathfrak{P}$ de blocos.*

Veremos alguns exemplos dos diversos shifts de tipo finito existentes.

Exemplo 9 *O espaço de seqüências completo $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é um shift de tipo finito, basta tomarmos $\mathfrak{P} = \emptyset$ para obter $X = X_{\emptyset}$. Assim, nenhum bloco de $\mathfrak{P}$ é proibido no espaço de seqüências X.*

Exemplo 10 *O shift de ouro do exemplo 2 é um shift de tipo finito, basta considerarmos a coleção finita de blocos proibidos $\mathfrak{P} = \{11\}$ para obter $X = X_{\mathfrak{P}}$.*

Observe que um shift de tipo finito X também pode ser descrito por um conjunto infinito de blocos proibidos. A Definição 3.1 somente requer que haja uma coleção finita de blocos proibidos $\mathfrak{P}$.

Definição 3.2 (Shift de tipo finito com memória M) *Um shift de tipo finito X tem memória M, se existe uma coleção $\mathfrak{P}$ de blocos proibidos de tamanho $(M+1)$ tal que $X = X_{\mathfrak{P}}$.*

Observamos que na definição acima, todos os blocos do conjunto $\mathfrak{P}$ de blocos proibidos têm o mesmo tamanho $M+1$.

Observação 3.3 *Se um shift X tem memória $M \geq 1$ ele também tem memória K para todo $K \geq M$.*

Prova: Basta considerar a família $\mathfrak{P}$ de blocos proibidos de tamanho $M+1$ de X e para cada $\mathfrak{b} \in \mathfrak{P}$ considerar todos os blocos de tamanho $k+1$ que contém o bloco $\mathfrak{b}$. Obtemos desta forma um novo conjunto finito $\mathfrak{Q}$ formado por blocos de tamanho $k+1$. É imediato que $X_{\mathfrak{Q}} = X_{\mathfrak{P}}$. □

Proposição 3.4 *Se X é um shift de tipo finito, então existe $M \geq 0$ tal que X tem memória M.*

Prova: Como X é de tipo finito, então existe uma coleção finita $\mathfrak{P}$ de blocos tal que $X = X_{\mathfrak{P}}$. Se $\mathfrak{P} = \emptyset$, basta tomarmos $M = 0$ e não há nada a fazer. Se $\mathfrak{P}$ é não vazio, consideraremos o bloco $\mathfrak{b}$ de maior tamanho de $\mathfrak{P}$. Suponhamos que tal tamanho seja $M+1$. Raciocinamos agora como na Observação 3.3, para cada bloco $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{P}$ consideraremos todos os blocos de tamanho $M+1$ que contém $\mathfrak{a}$. Obtemos assim um conjunto $\mathfrak{Q}$ de blocos de tamanho M. Por construção $X = X_{\mathfrak{P}} = X_{\mathfrak{Q}}$. Assim obtemos que o X tem memória M, concluindo a prova da proposição. □

A linguagem de um shift de tipo finito é caracterizada pela seguinte propriedade: *se duas palavras se sobrepõem, então elas podem ser "coladas"na parte coincidente formando uma nova palavra na linguagem.* Isto é parte do conteúdo do próximo resultado:

Teorema 3.5 (Princípio de sobreposição) *Um espaço de seqüências X de tipo finito tem memória M se, e somente se, para todo par de blocos da forma $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{v}\,\mathfrak{w} \in \mathcal{L}(X)$ com $|\mathfrak{v}| \geq M$, então se verifica que $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w} \in \mathcal{L}(X)$.*

Prova: Seja X um shift de tipo finito com memória M, tal que, $X = X_{\mathfrak{P}}$, para uma coleção finita $\mathfrak{P}$ formada por $(M+1)$-blocos. Suponhamos que $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{v}\,\mathfrak{w} \in \mathcal{L}(X)$, onde $|\mathfrak{v}| = n \geq M$. Então, existem pontos $x, y \in X$ e números naturais k e ℓ tais que

$$x_{[-k,n]} = \mathfrak{u}\,\mathfrak{v}, \quad y_{[1,\ell]} = \mathfrak{v}\,\mathfrak{w}, \quad \text{e} \quad x_{[1,n]} = y_{[1,n]} = \mathfrak{v}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

Afirmamos que

$$z = x_{(-\infty,0]}\,\mathfrak{v}\,y_{[n+1,\infty)} \in X.$$

Para provar esta afirmação devemos ver que z não contém nenhum bloco de $\mathfrak{P}$. Suponhamos por absurdo que z contenha algum bloco de $\mathfrak{P}$. Como o tamanho de $\mathfrak{v}$ é maior ou igual do que M, e o tamanho dos blocos de $\mathfrak{P}$ tem tamanho exatamente M, não existe nenhum bloco de $\mathfrak{P}$ que contenha propriamente $\mathfrak{v}$. Portanto, um elemento de $\mathfrak{P}$ que ocorre em z, ou ocorre em $x_{(-\infty,0]}\mathfrak{v} = x_{(-\infty,n]}$ ou ocorre em $\mathfrak{v}\,y_{[n+1,\infty)} = y_{[1,\infty)}$. No primeiro caso $x \notin X$ e no segundo $y \notin Y$, contradizendo o fato de que $x \in X$ e $y \in X$. Portanto,

$$\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w} = x_{[-k,0]}\,\mathfrak{v}\,y_{[n+1,l]} = z_{[-k,l]} \in \mathcal{L}(X).$$

Reciprocamente, suponhamos que X seja um espaço de seqüências sobre o alfabeto finito $\mathcal{A}$, e que M tenha a propriedade de que, se $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{v}\,\mathfrak{w} \in \mathcal{L}(X)$, com $|\mathfrak{v}| \geq M$, então $\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w} \in \mathcal{L}(X)$. Seja $\mathfrak{P}$ o conjunto de todos os $(M+1)$-blocos sobre o alfabeto $\mathcal{A}$ que não estão em $\mathfrak{B}_{M+1}(X)$ (o conjunto dos $(M+1)$-blocos de X). Mostraremos que $X = X_{\mathfrak{P}}$, e portanto X é um shift de tipo finito de memória M.

Se $x \in X$, então nenhum bloco em $\mathfrak{P}$ pode estar em x, logo $x \in X_{\mathfrak{P}}$. Isto mostra que $X \subseteq X_{\mathfrak{P}}$. Agora suponha que $x \in X_{\mathfrak{P}}$. Então, $x_{[0,M]}$ e $x_{[1,M+1]}$ estão em $\mathcal{L}(X)$, pela definição de $\mathfrak{P}$. Se os blocos $x_{[0,M]}$ e $x_{[1,M+1]}$ se sobrepõem em M símbolos então, por hipótese, $x_{[0,M+1]}$ também estará em $\mathcal{L}(X)$ (basta tomar $\mathfrak{u} = x_{[0]}, \mathfrak{v} = x_{[1,M]}, \mathfrak{w} = x_{[M+1]}$)). Agora, temos que $x_{[2,M+2]}$ está em $\mathcal{L}(X)$ e se sobrepõe a $x_{[0,M+1]}$ em M símbolos. Assim, $x_{[0,M+2]} \in \mathcal{L}(X)$. Repetindo este argumento em cada direção, teremos que $x_{[-k,l]} \in \mathcal{L}(X)$ para todos $k, l \geq 0$. Usando o Corolário 2.7, temos que $x \in X$, provando que $X_{\mathfrak{P}} \subseteq X$. Concluímos assim a prova do teorema. □

Exemplo 11 *O Teorema 3.5 nos dá uma idéia de como mostrar que um shift par X (veja o Exemplo 3) não é um shift de tipo finito. Caso fosse, pela Proposição 3.4 teria memória M.*

Suponhamos que X tenha memória M, com $M \geq 1$. Como $1\,0^{2M+1}$ e $0^{2M+1}\,1$ são blocos permitidos em $\mathcal{L}(X)$, pelo princípio de sobreposição no Teorema 3.5 temos que $1\,0^{2M+1}\,1 \in \mathcal{L}(X)$, contradizendo a definição de shift par (entre dois 1's existe um número par de 0's).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

3.2
Grafos e seus Shifts

Um método para construção de shifts de tipo finito começa com um grafo finito e produz uma seqüência de arestas no grafo. Nesta seção iremos introduzir a definição de shift de arestas e usaremos matrizes adjacentes de um grafo para responder questões sobre tais shifts. Iremos trabalhar com grafos finitos. Somente as propriedades mais simples de tais grafos serão desenvolvidas nesta seção.

Definição 3.6 (Grafo) *Um grafo G consiste de um conjunto finito $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ de vértices, assim como de um conjunto finito $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$ de arestas. Cada aresta $e \in \mathcal{E}(G)$ se inicia em um vértice denotado por $i(e) \in \mathcal{V}(G)$ e termina em um vértice $t(e) \in \mathcal{V}(G)$ (isto é, as arestas são pares ordenados formados pelos vértice do grafo G). Equivalentemente, dizemos que a aresta e tem posição inicial $i(e)$ e posição final $t(e)$. Uma aresta e com $i(e) = t(e)$ é chamada laço.*

Existem maneiras naturais de transformar grafos em novos grafos, de modo que suas posições iniciais e finais sejam preservadas.

Definição 3.7 (Homomorfismo de grafos) *Sejam G e H dois grafos. Um homomorfismo de grafos de G em H consiste em um par de aplicações*

$$\partial\phi\colon \mathcal{V}(G) \to \mathcal{V}(H) \quad e \quad \phi\colon \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(H)$$

tais que

$$i(\phi(e)) = (\partial\phi)(i(e)) \quad e \quad t(\phi(e)) = (\partial\phi)(t(e))$$

para toda aresta $e \in \mathcal{E}(G)$.

Neste caso, escrevemos $(\partial\phi, \phi)\colon G \to H$.

A seguir iremos introduzir a definição de matriz adjacente de um grafo.

Definição 3.8 (Matriz adjacente de um grafo) *Sejam G um grafo cujo conjunto de vértices é $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$. Dados $I, J \in \mathcal{V}$, seja A_{IJ} o número de arestas de G com posição inicial I e posição final J. A matriz adjacente de G é denotada por $A = A_G = [A_{IJ}]$.*

Veremos agora um exemplo de como obter uma matriz adjacente de um determinado grafo.

Exemplo 12 *Seja G o grafo da Figura 3.1. Então, a matriz adjacente de G é dada por:*

$$A_G = [A_{IJ}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

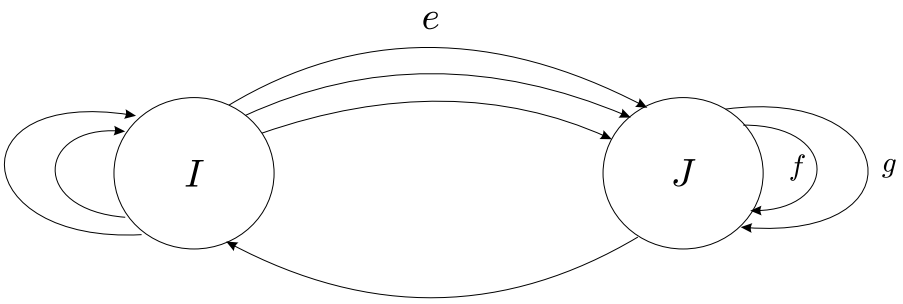


Figura 3.1: Grafo Típico

Definição 3.9 *Seja $A = [A_{IJ}]$ uma matriz quadrada $(r \times r)$ com entradas inteiras não-negativas. Então, o grafo associado a A é o grafo $G = G(A) = G_A$ com conjunto de vértices $\mathcal{V}(G) = \{1, 2, 3, \cdots, r\}$ e, para cada $I, J \in \{1, \ldots, r\} = \mathcal{V}(G)$, com um número A_{IJ} de arestas distintas com posição inicial I e posição final J.*

A seguir, definiremos shift de arestas e veremos que cada grafo G com matriz adjacente correspondente A_G é um shift de tipo finito.

Definição 3.10 (Shift de Arestas) *Seja G um grafo com conjunto de arestas $\mathcal{E}$ e matriz adjacente A. O shift de arestas X_G ou X_A é o espaço de seqüências sobre o alfabeto finito $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ especificado por:*

$$X_G = X_A = \{\xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : t(\xi_i) = i(\xi_{i+1}), \quad \textit{para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

A aplicação shift em X_G ou X_A é chamada de aplicação shift de arestas *e é denotada por σ_G ou σ_A.*

De acordo com essa definição, uma seqüência bi-infinita de arestas está em X_G exatamente quando a posição final de cada aresta é a posição inicial da próxima aresta.

No grafo G, do Exemplo 12, X_G tem oito arestas. Nas arestas f e g, temos $i(f) = t(f) = i(g) = t(g) = J$. Portanto, qualquer seqüência bi-infinita de $f's$ e $g's$ é uma seqüência de X_G. Nosso próximo resultado irá mostrar que os shifts de arestas são de fato shifts de tipo finito.

Proposição 3.11 *Se G é um grafo com matriz adjacente A, então o shift de arestas associado $X_G = X_A$ é um shift de tipo finito com memória* 1.

Prova: Seja $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ o alfabeto finito de X_G. Consideremos a coleção finita

$$\mathfrak{P} = \{e\, f : e,\, f \in \mathcal{A}, \quad t(e) \neq i(f)\}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

de 2-blocos sobre $\mathcal{A}$. De acordo com a Definição 3.10, um ponto $\xi \in \mathcal{A}^Z$ está em X_G se, e somente se, quando nenhum bloco de $\mathfrak{P}$ ocorre em ξ. Logo, $X_G = X_{\mathfrak{P}}$. Portanto, X_G é um shift de tipo finito. Por outro lado, como todos os blocos em $\mathfrak{P}$ tem tamanho 2, segue que $X_{\mathfrak{P}}$ tem memória 1. □

Exemplo 13 *Sejam $r \geq 1$ e A a matriz 1×1 dada por $A = [r]$ (sua única entrada é r). Então, G_A tem um vértice e r laços nesse único vértice. Se enumerarmos as arestas de 0 até $r-1$, então X_G é um r-shift completo, que denotaremos por $X_{[r]}$.*

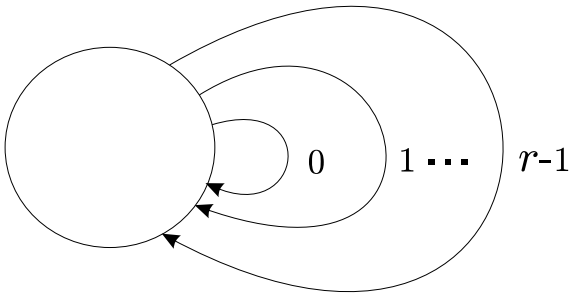


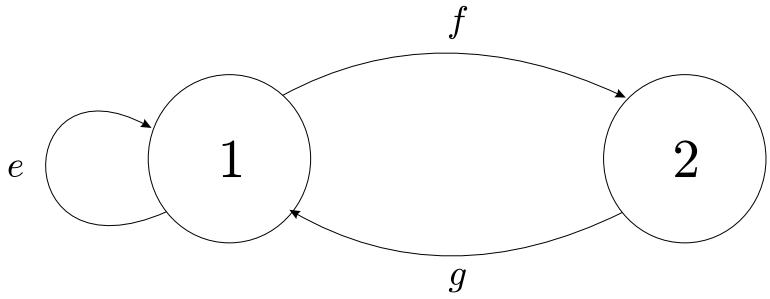
Figura 3.2: r-shift

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

Exemplo 14 *Seja A a matriz quadrada*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

então, o grafo $G = G_A$ da matriz A é descrito por:



Definição 3.12 (Grafo essencial) *Dizemos que um vértice v de um grafo G é* solto *se para toda aresta e do grafo se verifica $i(e) \neq v$ ou se para toda aresta e do grafo se verifica $t(e) \neq v$.*

Um grafo G é essencial *se nenhum vértice de G é solto.*

A seguir, veremos a definição de caminhos finitos em um grafo G, usando seqüências finitas.

Definição 3.13 (Caminhos e ciclos) *Um* caminho $\pi = e_1\, e_2 \cdots e_m$ *em um grafo G é uma seqüência finita de arestas e_i de G tal que $t(e_i) = i(e_{i+1})$ para $1 \leq i \leq m-1$. O* tamanho *de $\pi = e_1\, e_2 \cdots e_m$ é $|\pi| = m$. Dizemos que e o caminho* se inicia *no vértice $i(\pi) = i(e_1)$ e* termina *no vértice $t(\pi) = t(e_m)$.*

Um ciclo *é um caminho π que se inicia e termina no mesmo vértice, $i(\pi) = t(\pi)$.*

Um ciclo simples *é um ciclo que não se auto intercepta, isto é, um ciclo tal que as posições $i(e_1), \cdots, i(e_m)$ são todas distintas.*

Para cada vértice I de G, existe também um caminho vazio $\mathcal{E}_I$, que tem tamanho 0.

Note que, se G é essencial, então caminhos não-vazios em G correspondem a blocos não-vazios do seu shift de aresta X_G.

Proposição 3.14 *Sejam G um grafo com matriz adjacente A e $m \geq 0$. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

1. *Dados dois vértices I e J do grafo G, o número de caminhos de tamanho m de I a J é $(A^m)_{IJ}$, isto é, a (I,J)-ésima entrada de A^m.*

2. *O número de ciclos de tamanho m em G é $tr(A^m)$, o traço de A^m, e é igual ao número de pontos em X_G com período m.*

Prova: Provaremos primeiro o item (1). A prova é por indução. O resultado é obvio (a definição) para $m = 1$. Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para caminhos de tamanho m. Para ver que é verdadeiro para caminhos de tamanho $m+1$, dados dois vértices I e J e um caminho de tamanho $m+1$ de I a J, escreveremos este caminho como um caminho de tamanho m de I a um certo vértice K e um caminho de tamanho 1 de K a J (princípio de baldeação). Portanto, pela hipótese de indução, o número total de caminhos de tamanho $m+1$ de I a J é

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(G)} (A^m)_{I,K}\, A_{K,J} = (A^{m+1})_{I,J},$$

onde a última igualdade segue da definição de produto de duas matrizes.

Provaremos agora o ítem (2). A primeira parte da demonstração é imediata, segue do ítem (1) e da definição de *ciclo* (caminhos con início e fim no mesmo vértice). Para provarmos a segunda parte, suponha que π é um ciclo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

de tamanho m no grafo G . Então, π^∞ é um ponto de período m em X_G. Se tomarmos um ponto x de período m no shift de arestas X_G temos que $x_{[0,m-1]}$ é um ciclo em G de tamanho m, caracterizando assim uma correspondência injetiva entre os ciclos de tamanho m em G e pontos de período m em X_G. Assim, concluímos a demonstração da proposição. □

Na Seção 2.4, Definição 2.8, vimos que um espaço de seqüências X é irredutível, se todo par ordenado de blocos permitidos $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{L}(X)$ puder se juntar a um bloco $\mathfrak{w} \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\mathfrak{u}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}$ também é permitido em $\mathcal{L}(X)$. Os grafos obtidos por shifts de arestas irredutíveis são fáceis de se descrever.

Definição 3.15 (Grafo irredutível) *Um grafo G é* irredutível *se para cada par ordenado de vértices I, J existe um caminho em G que se inicia em I e termina em J.*

Proposição 3.16 *Um grafo essencial é irredutível se, e somente se, seu shift de arestas é irredutível.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

Prova: Seja G um grafo irredutível e $\pi, \tau \in \mathcal{L}(X_G)$. Suponhamos que π termine em um vértice I e τ inicie em um vértice J. Pela irredutibilidade de G, existe um caminho $\mathfrak{w} \in \mathcal{L}(X_G)$ de I a J. Então, $\pi\,\mathfrak{w}\,\tau$ é um caminho em G, portanto, $\pi\,\mathfrak{w}\,\tau \in \mathcal{L}(X_G)$. Isto prova que o shift de arestas é irredutível.

Reciprocamente, suponhamos que o grafo G seja essencial e que X_G seja um espaço de seqüências irredutível. Sejam I, J vértices de G. Como G é essencial, existem arestas $e, f \in G$ tais que e se inicia em I e f termina em J. Pela irredutibilidade de X_G, existe um bloco $\mathfrak{w} \in X_G$ tal que $e\,\mathfrak{w}\,f \in \mathcal{B}(X_G)$. Então $\mathfrak{u} = e\,\mathfrak{w}\,f$ é um caminho em G de I a J, portanto, temos que G é um grafo irredutível. □

3.3
Representação de Grafos de Shifts de Tipo Finito

Os shifts de arestas introduzidos na Seção 3.2 podem parecer um caso especial de shifts de tipo finito. Nesta seção, mostraremos que todo shift de tipo finito pode ser transformado em um shift de arestas. Para isso usaremos o espaço de seqüências de blocos com sobreposição. Introduziremos também a definição de transformação de arestas de um grafo e daremos uma descrição alternativa dos shifts de tipo finito usando matrizes formadas por 0's e 1's.

Teorema 3.17 *Se X é um shift de tipo finito com memória M, então existe um grafo G tal que o espaço de seqüências de $(M+1)$-blocos com sobreposição $X^{[M+1]}$ é igual ao shift de arestas X_G associado a G.*

Prova: Primeiramente, observe que se $M = 0$, então X é um espaço de seqüências completo e podemos assumir que G tem um vértice simples e uma aresta para cada símbolo pertencente ao espaço de seqüências X. Assim, assumiremos $M \geq 1$. Definiremos o conjunto de vértices de G por $\mathcal{V} = \mathfrak{B}_M(X)$, isto é, o conjunto dos M-blocos permitidos em X. Agora, definiremos o conjunto de arestas $\mathcal{E}$ da seguinte maneira. O conjunto de arestas será um subconjunto do conjunto de $(M+1)$-blocos. Consideramos dois vértices em G da forma

$$I = a_1 a_2 \dots a_M \quad \text{e} \quad J = b_1 b_2 \dots b_M.$$

Se existe uma sobreposição

$$a_2 a_3 \dots a_M = b_1 b_2 \dots b_{M-1} \quad \text{e} \quad a_1 \dots a_M b_M = a_1 b_1 \dots b_M$$

e que esses blocos estejam em $\mathcal{L}(X)$. Então definimos uma aresta em G do vértice I ao vértice J, denominada

$$a_1 a_2 \dots a_M b_M = a_1 b_1 b_2 \dots b_{M-1} b_M.$$

Caso contrário, não existe nenhuma aresta ligando o vértice I ao vértice J.

Acabamos de construir o grafo G. De acordo com esta construção, um caminho bi-infinito em G é precisamente uma seqüência de $(M+1)$-blocos em $\mathfrak{B}_{M+1}(X)$ que se sobrepõem. Portanto, $X^{[M+1]} = X_G$ e assim obtemos o resultado anunciado. □

Na Seção 2.5.1, dado um espaço de seqüências X, construímos o espaço de seqüências de N-blocos com sobreposição $X^{[N]}$ de X. A seguir veremos uma construção análoga para grafos.

Para isso primeiro consideramos o conjunto $\mathcal{C}_N$ de todos os caminhos de tamanho $(N-1)$ em G.

Definição 3.18 (Grafo de arestas de ordem N) *Seja G um grafo. Para $N \geq 2$, definimos o* Grafo de arestas de ordem N *associado a G, denotado por $G^{[N]}$ como o grafo que verifica:*

- *o conjunto de vértices de $G^{[N]}$ é a coleção de todos os caminhos de tamanho $(N-1)$ em G,*
- *conjunto de arestas de $G^{[N]}$ está contido no conjunto de caminhos de ordem N de G e existe uma aresta ligando os vértices $I = e_1 e_2 \dots e_{N-1}$ e $J = f_1 f_2 \dots f_{N-1}$ de $G^{[N]}$ sempre que exista sobreposição $e_2 e_3 \dots e_{N-1} = f_1 f_2 \dots f_{N-2}$.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

Exemplo 15 *A Figura 3.3 ilustra os grafos de arestas nos casos em que* $N = 2$ *e* $N = 3$.

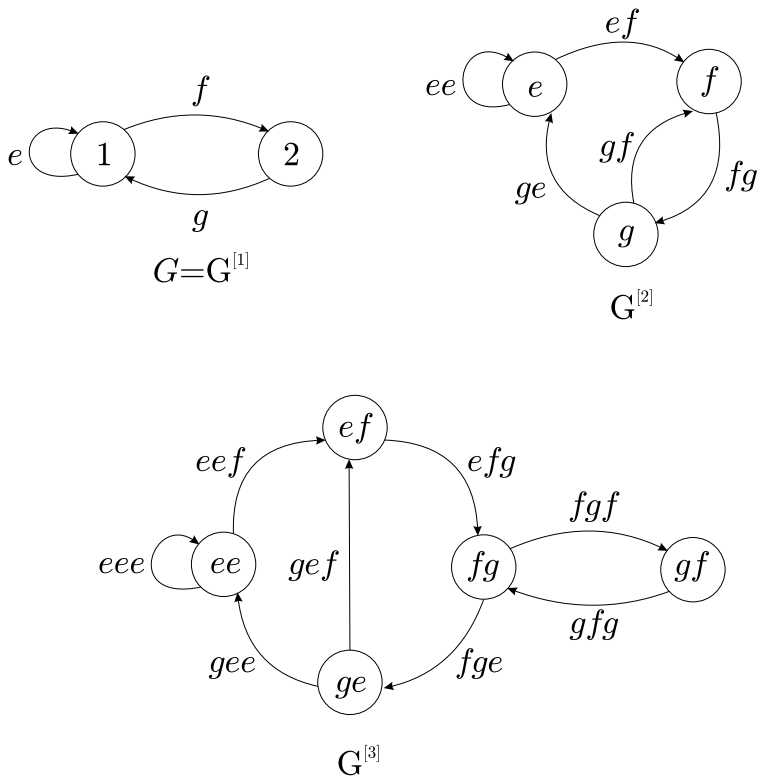


Figura 3.3: Grafo de arestas

A relação entre shift de arestas no grafo de arestas de ordem N-arestas $G^{[N]}$ do grafo G, $X_{G^{[N]}}$, e o espaço de seqüências de N-blocos com sobreposição de X_G, $(X_G)^{[N]}$, é dada pela seguinte proposição.

Proposição 3.19 *Seja* G *um grafo. Então,* $(X_G)^{[N]} = X_{G^{[N]}}$.

Prova: Em primeiro lugar, observamos que os símbolos de $(X_G)^{[N]}$ são, por definição, os N-blocos de X_G, que são, também por definição, os caminhos de tamanho N em G. Mas tais símbolos, são também por definição, símbolos de $X_{G^{[N]}}$. Uma seqüência bi-infinita de tais símbolos está em um dos dois shifts precisamente quando seus símbolos (ou N-blocos) se sobrepõem. Portanto, $(X_G)^{[N]} = X_{G^{[N]}}$ e assim obtemos o resultado desejado.

□

Observamos que a matriz de adjacência de $G^{[N]}$ está formada por 0's e 1's: observe que, por definição, existe no máximo uma aresta ligando dois vértices de $G^{[N]}$. Uma matriz cujas entradas são 0's e 1's é chamada de *matriz 0-1*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA

Se um grafo G tem como matriz adjacente uma matriz 0-1, então entre quaisquer dois vértices existe no máximo uma aresta ligando-os. Portanto, um caminho em G pode ser descrito por uma seqüência de vértices (a caminhos diferentes associamos seqüências de vértices diferentes). Tal descrição, e o fato de que a matriz de adjacência de $G^{[N]}$ é uma matriz 0-1, nos conduz a uma construção alternativa dos shifts de vértices, que são válidos somente para matrizes 0-1.

Definição 3.20 (Shift de vértices) *Seja B uma matriz* 0-1 *quadrada $(r \times r)$ ou, equivalentemente, a matriz adjacente de um grafo G tal que entre quaisquer dois vértices de G exista no máximo uma aresta.*

O shift de vértices $\hat{X}_B = \hat{X}_G$ *é o espaço de seqüências com alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, r\}$ definido por*

$$\hat{X}_B = \hat{X}_G = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \colon B_{x_i x_{i+1}} = 1, \quad \textit{para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

A aplicação shift de vértices *associada a G (ou B) é a aplicação shift em $\hat{X}_B = \hat{X}_G$ e é denotada por $\hat{\sigma}_B$ ou $\hat{\sigma}_G$.*

Exemplo 16 *Seja*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, o shift de vértices $\hat{X}_B$ é o shift de ouro descrito no Exemplo 2.

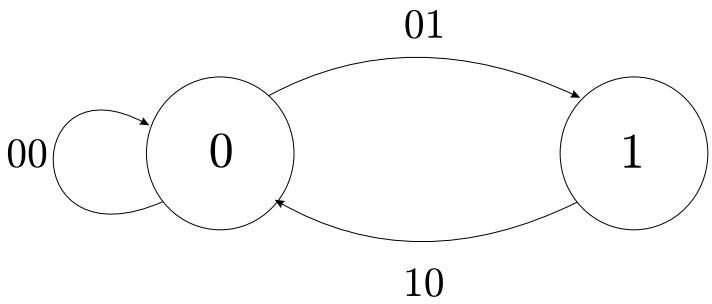


Figura 3.4: Grafo do shift de ouro

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0421035/CA