

4

Shifts Sóficos

Suponha que as arestas de um grafo sejam *denominadas* por símbolos de um alfabeto finito $\mathcal{A}$, onde duas ou mais arestas podem ter a mesma *denominação*. Cada trajetória bi-infinita no grafo nos fornece um ponto na sequência completa $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, que armazena as denominações de suas arestas. O conjunto de todos esses pontos é chamado de *shift sófico*. Neste capítulo, veremos que a classe dos shifts sóficos é uma coleção dos espaços de seqüências que contém todos os shifts de tipo finito. De fato, o termo *sófico*, proposto por Weiss, é derivado da palavra hebraica "finito".

4.1

Apresentações de Shifts Sóficos

Shifts sóficos são definidos usando grafos cujas arestas são denominadas usando os símbolos de um alfabeto finito e diversas dessas arestas podem receber a mesma denominação.

Definição 4.1 (Grafo com denominações) *Um grafo com denominações $\mathcal{G}$ é um par $(G, \mathcal{D})$, onde G é um grafo com conjunto de arestas $\mathcal{E}$ e $\mathcal{D} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ é uma função que atribui a cada aresta e de G uma denominação $\mathcal{D}(e)$ do alfabeto finito $\mathcal{A}$. A transformação $\mathcal{D}$ é a etiqueta de $\mathcal{G}$. Dizemos que G é o grafo subjacente de $\mathcal{G}$.*

Um grafo com denominações é irredutível se o seu grafo subjacente é irredutível.

A figura 4.1 ilustra dois típicos grafos com denominações.

Um grafo G é convenientemente descrito por sua matriz de adjacência A_G . Um grafo com denominações $\mathcal{G}$ será descrito, de forma análoga, por uma matriz simbólica de adjacência $A_{\mathcal{G}}$. A (I, J) -ésima entrada da matriz simbólica adjacente $A_{\mathcal{G}}$ contém a soma formal das denominações de todas as arestas que têm posição inicial em um vértice I e posição final em um vértice J , ou um caracter zero se não existirem tais arestas.

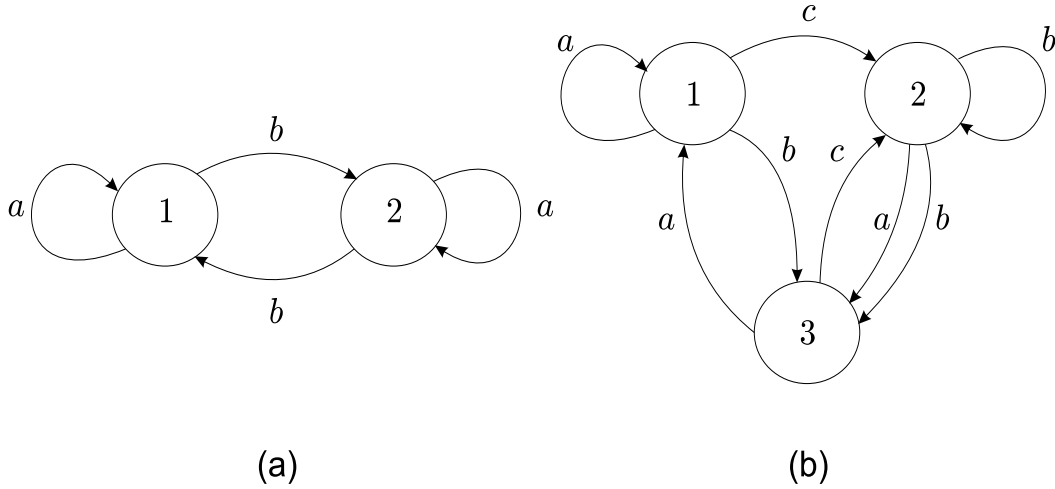


Figura 4.1: Grafos com denominações

Por exemplo, se $\mathcal{G}$ é o grafo com denominações da figura 4.1 item (a) e $\mathcal{H}$ é o grafo com denominações do item (b), então suas respectivas matrizes simbólicas adjacentes $A_{\mathcal{G}}$ e $A_{\mathcal{H}}$ são representadas por

$$A_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} a & c & b \\ 0 & b & a+b \\ a & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Veremos que existe uma analogia entre homomorfismos de grafos e os homomorfismos de grafos com denominações, onde as denominações de um grafo $\mathcal{G}$ são preservadas.

Definição 4.2 *Sejam $\mathcal{G} = (G, \mathcal{D}_G)$ e $\mathcal{H} = (H, \mathcal{D}_H)$ grafos com denominações. Um homomorfismo de grafos com denominações de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{H}$ é um homomorfismo de grafos $(\partial\phi, \phi) : G \rightarrow H$, tal que $\mathcal{D}_H(\phi(e)) = \mathcal{D}_G(e)$ para toda aresta $e \in \mathcal{E}_G$. Neste caso, escrevemos $(\partial\phi, \phi) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$.*

Se $\mathcal{G} = (G, \mathcal{D})$ é um grafo com denominações, então a etiqueta $\mathcal{D}$ pode ser usada para denominar caminhos e trajetórias bi-infinitas em um grafo subjacente G . Definiremos a *denominação* de um caminho $\pi = e_1 e_2 \dots e_n$ em um grafo G por

$$\mathcal{D}(\pi) = \mathcal{D}(e_1)\mathcal{D}(e_2) \dots \mathcal{D}(e_n),$$

onde $\mathcal{D}(\pi)$ é um n -bloco sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$. Para cada caminho vazio $\mathcal{E}_I$ em G , definiremos $\mathcal{D}(\mathcal{E}_I) = \mathcal{E}$, isto é, o bloco vazio sobre o alfabeto finito $\mathcal{A}$.

Se $\xi = \dots e_{-1} e_0 e_1 \dots$ é uma trajetória bi-infinita em um grafo G , tal que ξ é um ponto do shift de arestas X_G , definiremos a *denominação* da trajetória

ξ por

$$\mathcal{D}_\infty(\xi) = \dots \mathcal{D}(e_{-1})\mathcal{D}(e_0)\mathcal{D}(e_1)\dots \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$$

O conjunto de *denominações* de todas as trajetórias bi-infinitas de G , é denotado por

$$\begin{aligned} X_G &= \{x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z} : x = \mathcal{D}_\infty(\xi), \text{ para algum } \xi \in X_G\} = \\ &= \{\mathcal{D}_\infty(\xi) : \xi \in X_G\} = \mathcal{D}_\infty(X_G) \end{aligned}$$

Assim, temos que X_G é um subconjunto do conjunto das $\mathcal{A}$ -seqüências completas.

Exemplo 17 Se $\mathcal{G}$ é o grafo da figura 4.1 item (a), então X_G é a $\{a, b\}$ -seqüência completa

Definição 4.3 (Shift sófico) Um subconjunto X de um espaço de seqüências completas é um shift sófico se $X = X_G$ para algum grafo com denominações $\mathcal{G}$.

Uma apresentação de um shift sófico X é um grafo com denominações $\mathcal{G}$ para o qual $X_G = X$.

A aplicação shift em X_G é denotada por σ_G .

É importante observar um shift sófico pode ter apresentações diferentes. A seguir veremos um exemplo que ilustra tais diferenças.

Exemplo 18 A Figura 4.2 mostra quatro apresentações diferentes de uma 2-seqüência completa.

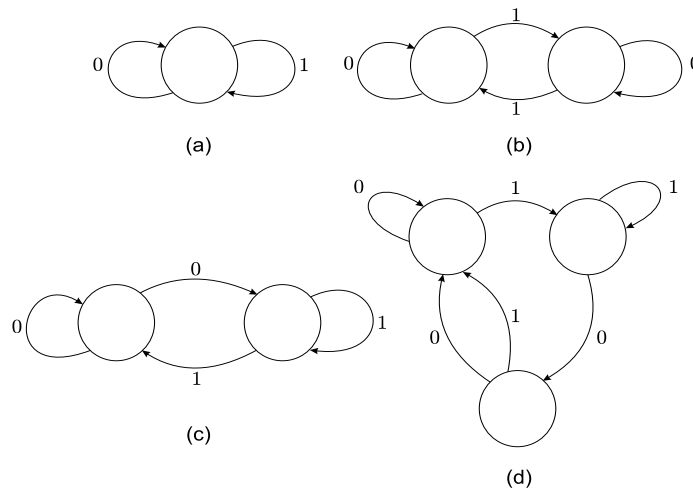


Figura 4.2: Diferentes apresentações de um shift sófico

Definição 4.4

- Se X é um *shift sófico* apresentado por $\mathcal{G} = (G, \mathcal{D})$ e $\mathfrak{w}$ é um bloco na linguagem $\mathcal{L}(X)$, dizemos que um caminho π no grafo G é uma *apresentação* de $\mathfrak{w}$, se $\mathcal{D}(\pi) = \mathfrak{w}$.
- Se $x \in X_G$, dizemos que uma *trajetória bi-infinita* ξ em X_G é uma *apresentação* de x se $\mathcal{D}(\xi) = x$.

A definição de *shift sófico* não requer que tal shift seja um espaço de seqüências. No entanto, o seguinte teorema nos garante tal afirmação.

Teorema 4.5 *Shifts sóficos são espaços de seqüências*

Prova: Sejam X um shift sófico sobre o alfabeto finito $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G} = (G, \mathcal{D})$ uma apresentação de X . A transformação $\mathcal{D}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ nos dá o 1-código $\mathcal{D}_\infty: X_G \rightarrow X_G$. Pelo Teorema 2.22, temos que a imagem $X = \mathcal{D}_\infty(X_G)$ é um espaço de seqüências e assim obtemos o resultado desejado. $\square$

O seguinte resultado, nos mostrará que shifts de tipo finito são sóficos.

Teorema 4.6 *Todo shift de tipo finito é sófico.*

Prova: Seja X um shift de tipo finito. Pela Proposição 3.4, temos que existe $M \geq 0$ tal que X tem memória M . Na prova do Teorema 3.17 construímos um grafo G , para obtermos $X^{[M+1]} = X_G$. Lembremos que os vértices do grafo G são os M -blocos permitidos em X e que existe uma aresta e que liga o vértice $I = a_1 a_2 \dots a_M$ ao vértice $J = b_1 b_2 \dots b_M$ se, e somente se,

$$a_2 a_3 \dots a_M = b_1 b_2 \dots b_{M-1} \quad \text{e} \quad a_1 \dots a_M b_M = a_1 b_1 \dots b_M$$

estão em $\mathcal{L}(X)$. Neste caso, nomearemos a aresta e por $a_1 a_2 \dots a_M b_M$ e representaremos sua *denominação* por $\mathcal{D}(e) = a_1$. Isto nos rende um grafo com denominação $\mathcal{G} = (G, \mathcal{D})$. Mostraremos a seguir que ele é uma *apresentação* de X .

Seja $\beta_{M+1}: X \rightarrow X^{[M+1]} = X_G$ uma transformação de $M+1$ -blocos com sobreposição vista na Seção 2.5.1, definida por

$$\beta_{M+1}(x)_{[i]} = x_{[i, i+M]}.$$

Se a denominação $\mathcal{D}(x_{[i, i+M]}) = x_i$, temos que dado $x = (x_i) \in X$, se verifica, pela definição da etiqueta, $\mathcal{D}_\infty(\beta_{M+1}(x)) = (x_i)$, provando assim que $X \subseteq X_G$.

Reciprocamente, de acordo com a Definição 2.9 temos que todo ponto $\xi \in X_G = X^{[M+1]}$ tem a forma $\xi = \beta_{M+1}(x)$, para algum $x \in X$ tal que

$\mathcal{D}_\infty(\xi) = \mathcal{D}_\infty(\beta_{M+1}(x)) = x \in X$. Portanto, $X_{\mathcal{G}} = \mathcal{D}_\infty(X_G) \subseteq X$. Assim, concluímos que $X = X_{\mathcal{G}}$ e provamos o resultado desejado. $\square$

A seguir, veremos duas definições que serão importantes no Capítulo 5.

Definição 4.7

- Um grafo $\mathcal{G} = (G, \mathcal{D})$ é injetor à direita, se para cada vértice I de G , as arestas que se iniciam em I recebem diferentes denominações.
- Seja X um shift sófico sobre um alfabeto finito $\mathcal{A}$. Uma apresentação injetora à direita de um shift sófico é um grafo com denominações injetor à direita.