

2

TEORIA DOS JOGOS CONCEITUAÇÃO E CONTEXTUALIDADE

Jogos e decisões estratégicas têm sido relatados ao longo da história, como na compilação anciã das leis babilônicas do Talmud e do general chinês do século IV A.C. Sun Tzu em o livro *The art of war* . A partir do século XVIII vários pesquisadores lançaram as bases da teoria dos jogos, como James Waldegrave, em 1713 proveu a primeira solução conhecida para o problema do minimax de estratégias mistas para o jogo de duas pessoas, Augustin Cournot, que em 1838 explicou intuitivamente o que mais tarde seria conhecido como Equilíbrio de Nash, Francis Ysidro Edgeworth, que em 1881, trouxe a noção de equilíbrios competitivos, Emile Borel, em 1927, proveu a primeira percepção em estratégias mistas, John von Neumann fundou, como conhecemos hoje, a Teoria dos Jogos e juntamente com Oskar Morgenstern publicou em 1947 o livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, John Nash que em 1950 provou a existência do equilíbrio não cooperativo e John Charles C. McKinsey que em 1952 escreveu o livro sobre a teoria dos jogos, *Introduction to the Theory of Games*.

A teoria dos jogos é uma abordagem distinta e interdisciplinar do estudo do comportamento humano, e nos provê os fundamentos necessários para o entendimento da interação entre agentes econômicos. As disciplinas mais envolvidas na teoria dos jogos são a matemática, economia e outras ciências sociais e do comportamento.

Existem dois ramos principais na teoria dos jogos: cooperativo e não cooperativo, ou competitivo. Para os jogos competitivos, a teoria dos jogos, estuda como os agentes lidam uns com os outros, de modo a atingir seus objetivos pessoais. Já nos jogos cooperativos os agentes objetivam ganhos mútuos.

A partir de Nash em 1950, a teoria dos jogos tornou-se um campo popular de pesquisas. O pensamento na época era que esta teoria tornaria possível uma série de soluções de problemas até então insolúveis.

Ainda que a teoria dos jogos tenha sido aplicada a uma grande variedade de problemas, o interesse nela foi diminuindo a partir dos anos sessenta até o início dos anos setenta. Entre o fim dos anos setenta e início dos anos oitenta aconteceu um novo *boom* na teoria dos jogos, especialmente depois que Ariel [Ref: 47] publicou em 1982 um artigo no qual provou que o modelo de barganha não cooperativo possui um único equilíbrio perfeito. Ao final dos anos 80, entretanto, existia um sentimento de desconforto no uso do equilíbrio de Nash na predição de resultados. Na época os jogadores foram assumidos como hiper racionais e estava sendo usado para cada problema um tipo diferente e muito específico de equilíbrio de Nash. O número de refinamentos para o equilíbrio de Nash cresceu enormemente e não era claro de antemão em quais situações um certo refinamento serviria melhor. O que estava claro é que no mundo real as pessoas não agiam da forma como foi postulada nos modelos. Antes que um novo declínio no interesse pela teoria dos jogos tivesse lugar, os teóricos aproveitaram a idéia de evolução vinda da biologia. Um artigo de 1973, escrito pelos biólogos Maynard Smith² e Price [Ref: 17] no qual eles definiram o conceito de estratégias evolutivas estáveis, tornou-se a mais importante tradução do pensamento evolutivo da biologia na teoria dos jogos. O livro *Evolution and the Theory of Games* escrito por Maynard Smith introduziu explicitamente a seleção evolutiva no jogo. A noção da evolução das estratégias em jogos repetidos assemelha-se a certos modelos nos quais, os jogadores aprendem através do comportamento passado, o que veio facilitar a aceitação destes modelos evolutivos. Na década de 90, os modelos evolutivos tornaram-se populares na teoria dos jogos e em outros campos da economia.

Este estudo começará revisando a base técnica da teoria dos jogos, principalmente do equilíbrio de Nash. A esta teoria será unida a noção de Estratégias Evolutivas Estáveis(EEE). Mais adiante, o conjunto de equações diferenciais que regem um processo evolutivo biológico, como a dinâmica do

² John Maynard Smith (1920–2004) – Um dos gigantes da biologia evolutiva do século XX era também engenheiro, faleceu no dia 19 de abril de 2004, em sua casa, na Inglaterra, vítima de complicações decorrentes de um câncer no pulmão. Há um prêmio em seu nome, o John Maynard Smith Prize, oferecido a cada dois anos, desde 1997, pela European Society for Evolutionary Biology.

replicador, também será abordada. Será discutido o significado econômico de uma EEE e da dinâmica de replicador, mostrado que uma EEE nada mais é do que outro refinamento do equilíbrio de Nash e que, embora a dinâmica do replicador pareça descrever muito bem um certo processo evolutivo biológico não racional, os equilíbrios evolutivos estáveis são um subconjunto dos equilíbrios próprios de Nash considerados como hiper racionais. Por este motivo em certos cenários econômicos que não levam em conta qualquer forma de comportamento racional esta dinâmica poderá em todo caso favorecer uma comparação entre um ambiente racional e um ambiente de racionalidade limitada.

A teoria dos jogos tornou-se uma ferramenta padrão na modelagem de situações conflitantes entre agentes racionais. Tal modelo descreve um conjunto de estratégias de cada agente ou jogador e o seu *payoff* para cada perfil de estratégia, onde perfil de estratégias é a lista de estratégias concorrentes escolhidas pelos jogadores. O conceito do equilíbrio de Nash é a pedra fundamental na previsão do resultado do jogo. No equilíbrio de Nash cada estratégia dos jogadores maximiza sua utilidade diante das estratégias jogadas pelos outros jogadores. Em muitas situações o equilíbrio de Nash não é único, isto é, existe mais de um perfil em equilíbrio. Deste modo, muitos artigos em teoria dos jogos foram dedicados à seleção do tipo de equilíbrio. Refinando-se o conceito do equilíbrio de Nash permite-se descartar certos tipos de equilíbrios que não satisfazem a certos tipos de comportamentos racionais. Nesta seção será revisto um pouco da teoria do equilíbrio de Nash e seus refinamentos. Isto capacita-nos mostrar, como os conceitos básicos da teoria dos jogos evolutivos se encaixam neste quadro.

O modelo básico da teoria dos jogos não cooperativos é conhecido como um jogo de n agentes e em sua forma normal é caracterizado por uma $2n$ -*tupla*,

$$\Gamma = (S_1, S_2, \dots, S_n; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

Onde $S_i = (1, 2, \dots, m_i)$ é o conjunto de todas as m_i estratégias puras do jogador i e,

$\pi_i(s)$ é o *payoff* do jogador i diante do perfil de estratégias puras $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$.

Cada estratégia pura s_i jogada pelo jogador i pertence ao conjunto de estratégias puras S_i deste jogador i .

O produto cartesiano $S = \times S_i$ é chamado de espaço de estratégias puras, em que todo perfil $s \in S$.

O *payoff* combinado $\pi(s)$ é definido como $[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$.

Em termos de estratégias puras, um jogo em sua forma normal pode ser escrito como:

$G = (I, S, \pi)$, onde I é o conjunto de jogadores.

Para o caso de jogos com dois jogadores, os *payoffs* podem ser postos na forma matricial e denota-se A como a matriz de *payoff* do primeiro jogador, onde cada elemento de $A = a_{hk} = \pi_1(h, k)$ é o *payoff* que o jogador 1 obtém ao jogar sua estratégia pura h contra a estratégia pura k do jogador 2. Do mesmo modo, denota-se B como a matriz de *payoff* do segundo jogador, onde cada elemento de $B = b_{hk} = \pi_2(h, k)$ é o *payoff* que o jogador 2 obtém ao jogar sua estratégia pura k contra a estratégia pura h do jogador 1.

2.1 Estratégias mistas

Até agora vimos que as ações de um jogador são representadas através das estratégias puras. Uma outra forma de representar tais ações são as estratégias mistas. Considere que cada estratégia pura é jogada com uma certa probabilidade, então uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de estratégias puras, é chamado de estratégia mista. Estas estratégias são representadas pelo vetor $x_j \in \mathfrak{R}^{m_j}$, onde cada elemento deste vetor x_{jh} é a probabilidade do jogador j jogar a estratégia pura h . O conjunto de todas as estratégias mistas do jogador j é um simplex unitário de dimensão $m_j - 1$ definido como:

$$\Delta_j = \left\{ x_j \in \mathfrak{R}_+^{m_j}; \sum_{h=1}^{m_j} x_{jh} = 1 \right\} \tag{Equação 2-1}$$

O simplex Δ_j tem dimensão $m_j - 1$, pois podemos escrever qualquer probabilidade como 1 menos a soma das outras probabilidades, desde que o somatório de todas estas probabilidades é igual a um. Assim, sem nenhuma perda

de informação, pode-se estudar o simplex $\Delta_j \in \mathfrak{R}^{m_j}$ por sua projeção no espaço com dimensão m_j-1 .

Para o caso de m_j igual a 2, isto é, para o caso em que o jogador j possui apenas duas estratégias de jogo, o espaço de estratégias mistas como definido na Equação 2-1 é representado graficamente na Figura 2-1 e sua projeção num espaço $m_j - 1$ pode ser vista na Figura 2-2.

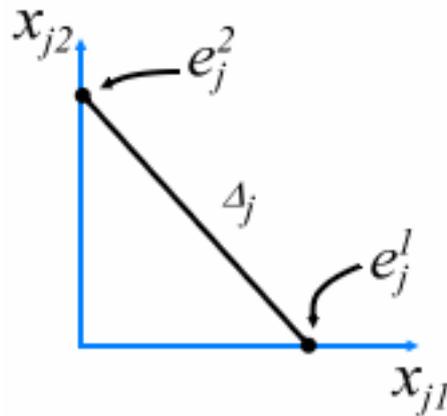


Figura 2-1 – Espaço de estratégias mistas para o caso de duas estratégias

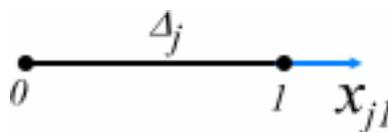


Figura 2-2 – Projeção do espaço de estratégias mistas $\mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$

Para o caso de um jogador com três estratégias, o espaço de estratégias mistas pode ser visto na Figura 2-3 e sua projeção no espaço bidimensional na Figura 2-4

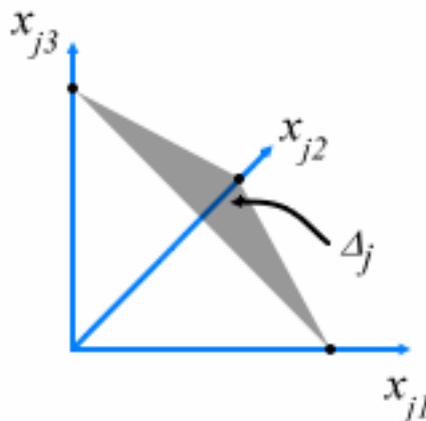


Figura 2-3 – Espaço de estratégias mistas para o caso de três estratégias

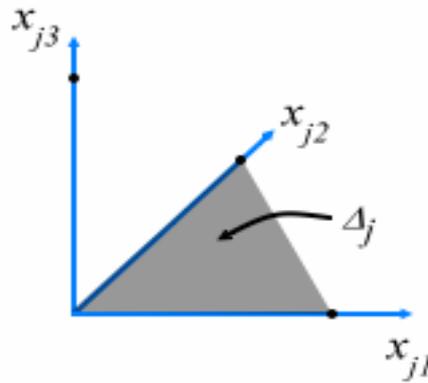


Figura 2-4 – Projção do espaço de estratégias mistas $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Os vértices do simplex unitário Δ_j são vetores unitários no espaço m_j denotados por $e_j^1 = \{1, 0, \dots, 0\}$, $e_j^2 = \{0, 1, \dots, 0\}$, ..., $e_j^{m_j} = \{0, 0, \dots, 1\}$

Cada vértice e_j^h representa uma estratégia mista para o jogador j que associa a probabilidade um à sua h -ésima estratégia pura e conseqüentemente probabilidades nulas para as estratégias restantes. Assim o simplex de estratégias mistas Δ_j é a casca convexa de todos os seus vértices, isto é, cada estratégia mista $x_j \in \Delta_j$ é uma combinação convexa de estratégias puras. Deste modo podemos escrever.

$$x_j = \sum_{h=1}^{m_j} x_{jh} e_j^h$$

A seguir serão introduzidas algumas definições necessárias ao entendimento da teoria dos jogos.

2.1.1 Suporte de uma estratégia mista

É o conjunto de estratégias puras com probabilidade maior que zero e é definida como:

$$C(x_j) = \{h\text{-ésima estratégia} \in S_j : x_{jh} \geq 0\}$$

Ou seja, para cada estratégia h do conjunto de estratégias puras S_j do jogador j existe uma probabilidade maior que zero x_{jh}

Como exemplo considere o jogador j com duas estratégias apenas, assim suas estratégias mistas terão a forma $x_j = \{x_{j1}, x_{j2}\}$.

Se x_j for $\{0,5 \ 0,5\}$ o suporte $C(x_j)$ será $\{1,2\}$

Se x_j for $\{1,0 \ 0,0\}$ o suporte $C(x_j)$ será $\{1\}$

2.1.2 Face de um espaço de estratégias mistas

Se um subconjunto $X_j \subset \Delta_j$ for a casca convexa de algum subconjunto de estratégias puras (vértices de Δ_j) então X_j é chamado face de Δ_j . Em particular $X_j = \Delta_j$ é uma face.

2.1.3 Interior de um espaço de estratégias mistas

Um subconjunto escrito como $INT(\Delta_j)$ é chamado interior, se cada elemento $x_{jh} > 0$, portanto cada estratégia pura deste subconjunto é jogada com probabilidade maior que zero. Estratégias mistas com esta característica são chamadas de estratégias completamente mistas ou interiores e têm suporte completo, ou seja, $C(x_j) = S_j$.

2.1.4 Fronteira do espaço de estratégias mistas

O conjunto de estratégias não interiores de Δ_j é chamado de fronteira (ou borda) e é denotado por:

$$bd(\Delta_j) = \{x_j \in \Delta_j : x_j \notin INT(\Delta_j)\}$$

No caso da fronteira, o suporte não é completo. A fronteira $bd(\Delta_j)$ pode ser vista como a união de todas as faces fronteiras de Δ_j e como vimos uma face é a combinação convexa de um subconjunto de vértices ou estratégias puras. Sendo assim, Δ_j é a única face que não é face fronteira.

2.1.5 Perfil de estratégias mistas

Seja $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um perfil de estratégias mistas onde x_j é a estratégia mista do jogador j . Um perfil de estratégias mistas é um ponto do espaço de perfis de estratégias mistas definido como o produto cartesiano de n simplexes Δ_j de dimensão m_j-1 .

$$\Theta = \times_{j \in I} \Delta_j$$

O espaço Θ possui dimensão m , onde $m = \sum_{j=1}^n m_j$ é o total de estratégias puras no jogo e sua projeção feita no espaço de dimensão $m-n = m_1-1+m_2-1+\dots+m_n-1$ é o produto cartesiano das projeções de Δ_j .

Para um jogo de duas pessoas com $n = 2$ e cada jogador possuindo apenas duas estratégias $m_1=m_2 = 2$, o espaço $\Theta = \{[x_{11},x_{21}], [x_{11},x_{22}], [x_{12},x_{21}], [x_{12},x_{22}]\} \in \mathbb{R}^4$ é o produto cartesiano de Δ_1 e Δ_2 .

Neste caso o produto cartesiano das projeções de Δ_1 e Δ_2 é:

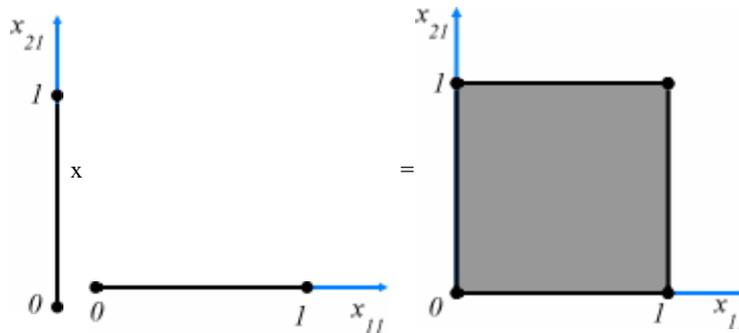


Figura 2-5 – Espaço de perfis de estratégias mistas como o produto cartesiano de espaços de estratégias mistas de uma dimensão

Para um caso de dois jogadores, $n = 2$, o jogador um possuindo três estratégias e o jogador dois possuindo duas estratégias, o espaço dos perfis de estratégias mistas será o produto cartesiano de Δ_1 e Δ_2 igual a;

$$\Theta = \{[x_{11},x_{21}], [x_{11},x_{22}], [x_{12},x_{21}], [x_{12},x_{22}], [x_{13},x_{21}], [x_{13},x_{22}]\} \in \mathbb{R}^5$$

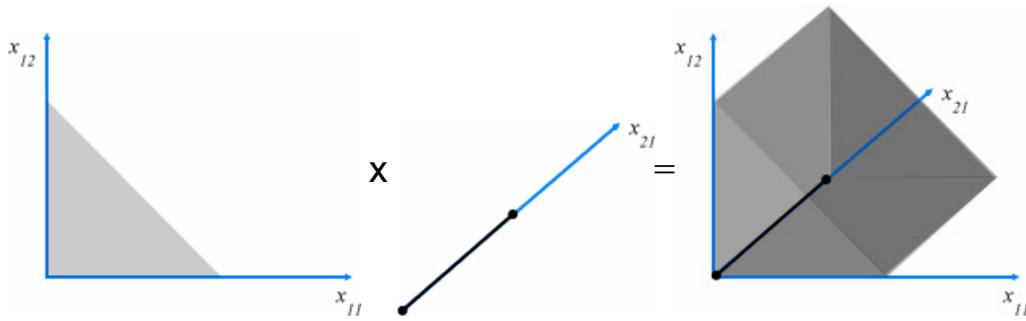


Figura 2-6 – Espaço de perfis de estratégias mistas como o produto cartesiano de espaços de estratégias mistas de duas dimensões

Um perfil de estratégias mistas x é dito interior se cada uma de suas estratégias mistas x_j for interior e é definido por,

$$INT(\Theta) = \times_{j \in I} INT(\Delta_j)$$

O suporte de um perfil de estratégias mistas x é $C(x) = \times_{j \in I} C(x_j) \subset S$ e x é $INT(\Theta)$ se e somente se $C(x) = S$.

A fronteira de Θ , $bd(\Theta)$ é o conjunto de perfis não interiores de Θ . Um subconjunto $X \subset \Theta$ é chamado face de Θ se X é o produto cartesiano das faces dos *simplexes* dos jogadores. Em particular se $X = \Theta$ é chamado de face máxima de Θ . Todas as outras faces de Θ são chamadas de faces de fronteira. Assim cada perfil de estratégia pura, visto como um subconjunto *singleton* de Θ , é uma face de fronteira. A união das faces de fronteiras de Θ é a própria $bd(\Theta)$.

Seja (x_j, y_j) o perfil de estratégias no qual o jogador j joga a estratégia $x_j \in \Delta_j$ contra o perfil $y \in \Theta$ jogado pelos outros jogadores. Mais precisamente o perfil de estratégias $Z=(x_j, y_j) \in \Theta$ é definido por $z_j = x_j$ e $z_i = y_i$ para todo $j \neq i$

2.2 Função de *payoff* de uma estratégia mista

A probabilidade que um perfil de estratégias puras $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ ser usado quando o perfil de estratégias mistas $x \in \Theta$ é jogado é:

$$x(s) = \prod_{j=1}^n x_{js_j}$$

Onde x_{js_j} é a probabilidade do jogador j jogar sua estratégia s_j .

No caso de dois jogadores cada um com duas estratégias, sendo que o jogador A possui as estratégias a_1 e a_2 e o jogador B possui as estratégias b_1 e b_2 , um perfil de estratégias puras seria, por exemplo, $s = (a_1, b_1)$ e uma possível estratégia mista do jogador A seria $x_A = (x_{A1}, x_{A2})$ onde x_{A1} é a probabilidade do jogador A jogar a estratégia a_1 e x_{A2} é a probabilidade do jogador A jogar a estratégia a_2 . Um perfil de estratégias mistas seria $x = (x_A, x_B)$ onde x_B é uma estratégia mista de B . Então é equivalente escrever,

$$x = (x_A, x_B) = \left(\begin{bmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix} \right) \in \Theta$$

O valor esperado do *payoff* para o jogador j associado com o perfil de estratégias mistas $x \in \Theta$ é:

$$\mu_j(x) = \sum_{s \in S} x(s) \pi_j(s)$$

Onde $x(s)$ é a probabilidade do perfil de estratégias puras e $\pi_j(s)$ é o *payoff* que o jogador j obtém caso o perfil de estratégias puras s for jogado.

Jogar a estratégia pura $s_j = k$ é probabilisticamente equivalente a jogar a estratégia mista $e_{jk} \in \Delta_j$, assim podemos escrever $u_j(e_{jk}^k, x_{-j})$ como o *payoff* esperado do jogador j quando o perfil (e_{jk}^j, x_{-j}) for jogado, ou seja, o *payoff* que o jogador j obtém quando ele joga sua k -ésima estratégia pura. Assim para qualquer perfil $x \in \Theta$,

$$\mu_j(x) = \sum_{k=1}^{m_j} \mu_j(e_{jk}^k, x_{-j}) x_{jk}$$

Onde x_{jk} é a probabilidade do jogador j jogar sua k -ésima estratégia pura.

Em outras palavras o *payoff* $\mu_j(x)$ pode ser computado como a soma ponderada dos *payoffs* do jogador j obtidos jogando-se cada uma de suas estratégias puras contra um determinado perfil de estratégias, dos outros

jogadores, onde os pesos são as probabilidades associadas pela estratégia mista jogada pelo jogador, a cada uma de suas estratégias puras.

A função combinada $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_n(x))$ é chamada de função de *payoff* combinada de estratégias mistas do jogo.

Uma alternativa para isto é a representação de estratégias puras $G=(I,S,\pi)$ ou ainda, em algumas vezes mais conveniente uma extensão de G para as estratégias mistas (I, Θ, μ) .

Para o caso de dois jogadores poderíamos representar o jogo pela matriz de *payoff*. Assim, para qualquer par de estratégias mistas $x_1 \in \Delta_1$ e $x_2 \in \Delta_2$ temos:

O valor esperado do *payoff* do jogador “1” associado com a estratégia mista x .

$$\mu_1(x) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} a_{hk} x_{2k} = x_1^T A x_2, \text{ onde } \mathbf{A} \text{ é a matriz de } \textit{payoff} \text{ do jogador “1”}.$$

O valor esperado do *payoff* do jogador “2” associado com a estratégia mista x .

$$\mu_2(x) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} b_{hk} x_{2k} = x_1^T B^T x_2 \text{ onde } \mathbf{B} \text{ é a matriz de } \textit{payoff} \text{ do jogador } B$$

Para o caso de dois jogadores temos a seguinte matriz de *payoff* para o jogador A ,

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pi_1(a_1, b_1) & \pi_1(a_1, b_2) \\ \pi_1(a_2, b_1) & \pi_1(a_2, b_2) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Onde o $\pi_j(a_h, b_k)$ é o *payoff* do jogador j jogando sua estratégia pura h contra a estratégia pura k do outro jogador $i \neq j$.

O *payoff* esperado do jogador “2” será:

$$\mu_1(s) = \sum_{s \in S} x(s) \pi_1(s) = Prob(a_1, b_1) * \pi_1(a_1, b_1) + Prob(a_1, b_2) * \pi_1(a_1, b_2) + Prob(a_2, b_1) * \pi_1(a_2, b_1) + Prob(a_2, b_2) * \pi_1(a_2, b_2)$$

Onde a $Prob(a_h, b_k) = Probabilidade(a_h) \times Probabilidade(b_k)$. Note que para que esta igualdade seja válida é necessário que a estratégia jogada pelo primeiro jogador seja independente da estratégia jogada pelo segundo jogador.

A Probabilidade da estratégia pura a_h ser jogada é tirada do h -ésimo elemento da estratégia mista usada pelo jogador j , x_{jh} .

Fazendo $\pi_1(a_h, b_k) = a_{hk}$ temos,

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} = a_{11}x_{11}x_{21} + a_{12}x_{11}x_{22} + a_{21}x_{12}x_{21} + a_{22}x_{12}x_{22} = \sum_{h=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{hk} x_{1h} x_{2k}$$

Do mesmo modo,

$$\mu_2(x) = \sum_{h=1}^2 \sum_{k=1}^2 b_{hk} x_{1h} x_{2k} = x_1^T \mathbf{B} x_2 = x_2^T \mathbf{B}^T x_1$$

A função de *payoff* combinado de estratégias mistas $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x)) : IR^4 \rightarrow IR^2$, ou seja $IR^m \rightarrow IR^n$ onde $m = m_1 + m_2$ é o total de estratégias puras, neste caso igual a quatro, e n o número de jogadores, igual a 2.

Para uma matriz de *payoff* do jogador A igual a,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_1(x) = x_1 \mathbf{A} x_2 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_{11} + 5x_{12} & 3x_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} =$$

$$4x_{11}x_{21} + 5x_{12}x_{21} + 3x_{12}x_{22} \text{ e,}$$

$$\mu_2(x) = x_1 \mathbf{B} x_2 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_{11} & 5x_{12} + 3x_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} =$$

$$4x_{11}x_{21} + 5x_{12}x_{22} + 3x_{12}x_{22}$$

2.3 Dominância

Existem três tipos de dominância, a dominância fraca, a dominância estrita e a dominância estrita iterativa. É importante ter em mente que tais conceitos nos levam a indicar que estratégias podem ser removidas do jogo sem que a solução final seja alterada. Tais estratégias são ditas estratégias dominadas.

2.3.1 Dominância fraca

Uma estratégia domina fracamente outra quando o *payoff* do jogador obtido quando ele joga tal estratégia contra todos os perfis de estratégias do jogo é sempre maior ou igual ao *payoff* quando ele joga qualquer outra de suas estratégias contra os mesmos perfis de estratégias e maior para pelo menos um dos perfis.

Ou seja, $y_j \in \Delta_j$ domina fracamente $x_j \in \Delta_j$ se $\mu_i(y_j, z_{-j}) \geq \mu_i(x_j, z_{-j})$ para todo $z \in \Theta$ e com estrita desigualdade para algum $z \in \Theta$.

Uma estratégia é dita não dominada quando nenhuma outra a domina de modo fraco.

Como exemplo observemos o jogo com a seguinte matriz de *payoff*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O primeiro jogador possui três estratégias puras e o segundo jogador possui duas estratégias puras. A estratégia três, por exemplo, não é dominada por nenhuma das outras duas estratégias do jogador um.

Outro exemplo é o conhecido dilema dos dois prisioneiros onde as matrizes de *payoff* dos dois jogadores são respectivamente.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

As duas estratégias são:

1 – Coopera

2 – Delata

Vemos que a segunda estratégia (2) do primeiro jogador, delatar, domina estritamente a estratégia um, desde que $\pi(2,1) > \pi(1,1)$ e $\pi(2,2) > \pi(1,2)$

Do mesmo modo a estratégia dois do segundo jogador domina de modo estrito a primeira.

2.3.2 Dominância estrita

Uma estratégia é dita estritamente dominante se o *payoff* que o jogador obtém quando a joga é sempre maior do que o *payoff* que ele obtém quando joga qualquer outra de suas estratégias, ou seja, $y_j \in \Delta_j$ domina estritamente $x_j \in \Delta_j$ se $\mu_j(y_j, z_{-j}) > \mu_j(x_j, z_{-j})$ para todo $z \in \Theta$

Como exemplo, consideremos a matriz de *payoff* de um jogador com três estratégias competindo com outro jogador que possui duas estratégias.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Observa-se pelos *payoffs* obtidos na terceira linha, que nenhuma estratégia do jogador A domina fracamente sua terceira estratégia pura, e_A^3 , pois:

1 - O *payoff* de sua primeira estratégia contra a segunda estratégia do jogador B é menor que o *payoff* da terceira estratégia contra a segunda estratégia do jogador B.

2 - O *payoff* de sua segunda estratégia contra a primeira estratégia do jogador B é menor que o *payoff* da terceira estratégia contra a primeira estratégia do jogador B.

Em termos de estratégias puras, nenhuma estratégia do jogador A é estritamente ou fracamente dominante. Entretanto se o jogador A usa uma estratégia mista $y_A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, ou seja joga a sua primeira estratégia pura 50% das vezes e joga a sua segunda estratégia pura nas outras 50% das vezes e não joga nenhuma vez a sua terceira estratégia pura, o *payoff* do jogador A, $\mu_A(y_A, z_B)$ é

maior do que qualquer outro *payoff* que ele possa obter jogando uma outra estratégia mista x_A .

$$\begin{aligned} \mu_A(y_A, z_B) &= \text{Prob}(a_1, b_1) * \pi_A(a_1, b_1) + \text{Prob}(a_1, b_2) * \pi_A(a_1, b_2) + \\ &\text{Prob}(a_2, b_1) * \pi_A(a_2, b_1) + \text{Prob}(a_2, b_2) * \pi_A(a_2, b_2) + \text{Prob}(a_3, b_1) * \pi_A(a_3, b_1) + \\ &\text{Prob}(a_3, b_2) * \pi_A(a_3, b_2) \end{aligned}$$

Considerando a probabilidade de A jogar $a_1 = \frac{1}{2}$, a probabilidade de A jogar $a_2 = \frac{1}{2}$, a probabilidade de A jogar $a_3 = 0$ e finalmente considerando-se $\text{Prob}(b_2) = 1 - \text{Prob}(b_1)$, temos,

$\text{Prob}(a_1, b_1) = \frac{1}{2} \text{Prob}(b_1)$ e $\text{Prob}(a_1, b_2) = \frac{1}{2} (1 - \text{Prob}(b_1))$ assim,

$$\begin{aligned} \mu_A(y_A, z_B) &= \\ &= 3 \frac{\text{Prob}(b_1)}{2} + 0 \left(\frac{1 - \text{Prob}(b_1)}{2} \right) + 0 \frac{\text{Prob}(b_1)}{2} + 3 \left(\frac{1 - \text{Prob}(b_1)}{2} \right) + 1 * 0 + 1 * 0 \\ &= 3 \left(\frac{\text{Prob}(b_1)}{2} \right) + \frac{3}{2} - 3 \left(\frac{\text{Prob}(b_1)}{2} \right) = 1,5 \end{aligned}$$

Já se o jogador A jogar sua terceira estratégia pura $e_A^3 = (0,0,1)$, ou seja, só joga sua terceira estratégia, seu *payoff* será:

$$\mu_A(x_A, z_B) = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 1 = 1 < 1,5$$

$\mu_A(y_A, z_B)$ será maior do que qualquer outro *payoff* que A possa obter jogando uma outra estratégia mista $\in \Delta_A$ contra todo $z_B \in \Delta_B$.

2.3.3 Dominância estrita iterativa

É natural pensar que qualquer sujeito racional despreze suas estratégias estritamente dominadas em jogos competitivos, pois elas podem ser retiradas do jogo sem alterar o resultado final. Porém, se isso for feito, algumas estratégias puras restantes podem tornar-se estritamente dominadas no jogo reduzido.

Repetidas remoções de estratégias puras estritamente dominadas de um jogo G nos leva à seguinte definição. Uma estratégia pura não é iterativamente estritamente dominada se ela não for estritamente dominada no jogo original, nem em nenhum dos jogos reduzidos até que não haja mais estratégias estritamente dominadas.

Seja G^t um jogo reduzido na iteração t . Para t igual a zero temos o jogo original e para $t = T$ o último jogo reduzido onde não existem mais estratégias dominadas. G^1 é o primeiro jogo reduzido após terem sido retiradas as estratégias estritamente dominadas do jogo original G^0 . G^2 é o segundo jogo reduzido após terem sido removidas as estratégias estritamente dominadas do jogo G^1 . Se uma estratégia não é estritamente dominada em nenhum dos jogos G^t , então ela não é iterativamente estritamente dominada.

Para qualquer jogo finito em sua forma normal $G = (I, S, \pi)$, deixe $S^D \subset S$ (espaço dos possíveis perfis de estratégias puras do jogo) ser um subconjunto dos perfis de estratégias puras iterativamente estritamente não dominados. Se este subconjunto é um *singleton*, ou seja só possui um elemento, então o jogo é chamado de domínio estritamente solúvel.

Como exemplo temos o jogo de dois jogadores com as respectivas matrizes de *payoff*.

$$A = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ a_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ b_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ b_3 & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pode-se observar que a segunda estratégia pura do jogador A é estritamente dominada, já que os *payoffs* da segunda linha da matriz A são menores que os *payoffs* das outras linhas.

Então a_2 é estritamente dominada, pois, $\pi(a_2, b_1) < \pi(a_1, b_1)$ e $\pi(a_2, b_1) < \pi(a_3, b_1)$ e $\pi(a_2, b_2) < \pi(a_1, b_2)$ e $\pi(a_2, b_2) < \pi(a_3, b_2)$ e $\pi(a_2, b_3) < \pi(a_1, b_3)$ e $\pi(a_2, b_3) < \pi(a_3, b_3)$. Assim, tanto a estratégia a_1 como a a_3 do jogador A dominam estritamente a estratégia a_2 . O mesmo acontece com a segunda estratégia pura do jogador B , b_2 , ela é estritamente dominada pelas estratégias b_1 e b_3 .

Como a_2 e b_2 são estritamente dominadas, elas podem ser retiradas do jogo e o jogo reduzido G^1 terá as seguintes matrizes de *payoff*.

$$A = \begin{matrix} & b_1 & b_3 \\ a_1 & \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & a_1 & a_3 \\ b_1 & \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \\ b_3 & \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Agora a estratégia a_1 domina estritamente a_3 e b_1 também domina estritamente b_3 . Deste modo somente o perfil de estratégias puras $s = (a_1, b_1)$ permanece em G^2 . Então $S^D = \{(a_1, b_1)\}$.

Weibull comenta em seu livro “*Evolutionary Game Theory*” [Ref: 1].

“O postulado de que nenhum jogador usa uma estratégia estritamente dominada é uma suposição de racionalidade relativamente fraca. Para isto só se requer que a função de *payoff* de cada jogador represente as suas preferências. Em particular, nenhum conhecimento por parte do jogador sobre as preferências ou comportamento dos outros jogadores é requerido. Em contraste, a aplicação da eliminação iterativa das estratégias estritamente dominadas requer, que os jogadores saibam sobre as funções de *payoff* dos outros jogadores, de forma a poderem eliminar cada estratégia estritamente dominada. Além disso, este conhecimento das preferências, tem que ser conhecido por todos os jogadores, de forma que eles possam eliminar as estratégias que são estritamente dominadas no jogo reduzido após uma rodada de remoções de estratégias estritamente dominadas e assim por diante, até um nível de conhecimento mútuo, onde iterações adicionais não eliminam mais nenhuma estratégia”.

2.4 Melhor réplica

Uma melhor réplica pura ou melhor resposta em estratégias puras para o jogador j no perfil de estratégias $y \in \Theta$ é uma estratégia pura $s_j \in S_j$ tal que nenhuma outra estratégia pura disponível do jogador resulta num *payoff* melhor. Isto define a *i-ésima* estratégia de melhor resposta do jogador j . É importante

ressaltar que o termo *réplica*, utilizado no conceito de melhor *réplica*, está associado à idéia de contra resposta, contestação. Mais adiante quando for introduzido o conceito de dinâmica do replicador, o termo replicador será sinônimo de duplicador, aquele que clona, que copia.

2.4.1 Correspondência de Melhor Réplica

A correspondência de melhor *réplica* de estratégia pura de um jogador, $\beta_j : \Theta \rightarrow S_j$, mapeia cada perfil de estratégia mista $y \in \Theta$ em um conjunto de melhores *réplicas* puras do jogador j diante do perfil y . Este conjunto, finito e não vazio é definido por:

$$\beta_j(y) = \{h \in S_j : \mu_j(e_j^h, y_{-j}) \geq \mu_j(e_j^k, y_{-j}) \forall (k \neq h) \in S_j\}$$

Em resumo, $\beta_j(y)$ é o conjunto de estratégias puras que obtém os melhores *payoffs* diante de um perfil concorrente y . Se a estratégia for uma melhor *réplica*, pode haver outras estratégias tão boas quanto ela, mas não melhores.

Desde que cada estratégia mista $x_j \in \Delta_j$ é uma combinação convexa de estratégias puras e $\mu_j(x_j, y_{-j})$ é linear em relação a x_j , nenhuma estratégia mista $x_j \in \Delta_j$ pode dar ao jogador j um *payoff* maior contra o perfil $y \in \Theta$ do que qualquer uma de suas melhores *réplicas* puras diante do mesmo y .

Seja $e_{j1} = (1,0)$ e $e_{j2} = (0,1)$ as duas estratégias puras de um jogador j .

Considerando que $\mu_j(e_{j1}, y_{-j}) > \mu_j(e_{j2}, y_{-j})$, então qualquer estratégia mista x_j que seja uma combinação convexa dessas duas estratégias puras terá um *payoff* $\mu_j(e_{j1}, y_{-j}) > \mu_j(x_j, y_{-j}) > \mu_j(e_{j2}, y_{-j})$

Formalmente podemos escrever que para qualquer $y \in \Theta$, $x_j \in \Delta_j$ e $h \in \beta_j(y)$ o *payoff*

$$\mu_j(x_j, y_{-j}) = \sum_{k=1}^{m_j} \mu_j(e_j^k, y_{-j}) x_{jk} \leq \sum_{k=1}^{m_j} \mu_j(e_j^h, y_{-j}) x_{jk} = \mu_j(e_j^h, y_{-j})$$

observando-se que,

$$\sum_{k=1}^{m_j} \mu_j(e_j^k, y_{-j}) x_{jk} = \mu_j(e_j^h, y_{-j}) \sum_{k=1}^{m_j} x_{jk} = \mu_j(e_j^h, y_{-j}) \cdot 1$$

Resta-nos ver que $\mu_j(x_j, y_{-j}) = \sum_{k=1}^{m_j} \mu_j(e_j^k, y_{-j})x_{jk}$ desde que a estratégia mista x_j pode ser escrita como combinação convexa dos vértices de Δ_j ,

$$x_j = \sum_{k=1}^{m_j} e_j^k x_{jk}$$

Assim,

$$\beta_j(y) = \{h \in S_j : \mu_j(e_j^h, y_{-j}) \geq \mu_j(x_j, y_{-j}) \forall x_j \in \Delta_j\}$$

Ou seja, o *payoff* de uma melhor réplica pura é maior do que o *payoff* de qualquer estratégia mista.

Uma melhor réplica mista para o jogador j diante do perfil de estratégias $y \in \Theta$ é uma estratégia $x_j \in \Delta_j$, tal que nenhuma outra estratégia mista consegue um *payoff* maior contra o perfil y .

Cada melhor réplica pura pode ser vista como uma estratégia mista e_{jh} com 100% de probabilidade para a estratégia pura s_h . Portanto cada melhor réplica pura é também uma melhor réplica mista. Além do mais, pela linearidade do *payoff* $\mu_j(x_j, y_{-j})$ em relação a x_j , qualquer combinação convexa de melhores réplicas puras, também é uma melhor réplica mista. Conseqüentemente a correspondência da melhor réplica mista do jogador $\tilde{\beta}_j : \Theta \rightarrow \Delta_j$ mapeia cada perfil de estratégias mistas para a face de Δ_j que é gerada pelas melhores réplicas puras diante de y .

Por exemplo,

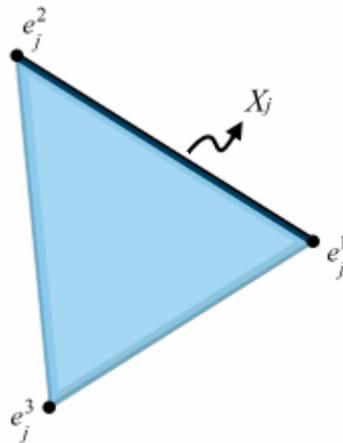


Figura 2-7 – Conjunto de melhores réplicas mistas, situadas na face do poliedro, combinação convexa de duas melhores réplicas alternativas.

Se e_j^1 e e_j^2 são as melhores réplicas puras e X_j uma face de Δ_j gerada pelas combinações convexas das duas melhores réplicas puras diante de um perfil de estratégias $y \in \Theta$, então temos as melhores réplicas mistas $\in X_j$.

O mapeamento $\tilde{\beta}_j : \Theta \rightarrow \Delta_j$ definido por:

$$\tilde{\beta}_j(y) = \{x_j \in \Delta_j : u_j(x_j, y_{-j}) \geq u_j(z_j, y_{-j}) \forall z_j \in \Delta_j\} =$$

é a correspondência de melhor réplica mista do jogador j . Qualquer estratégia mista $x_j \in \tilde{\beta}_j(y)$ é uma melhor réplica para o jogador j contra o perfil de estratégias $y \in \Theta$.

Sendo uma melhor réplica mista uma combinação convexa de melhores réplicas puras, então a probabilidade x_{jh} que não está associada a uma melhor réplica pura h será nula para qualquer estratégia pura $\notin \beta_j(y)$,

$$\{x_j \in \Delta_j : x_{jh} = 0 \forall h \notin \beta_j(y)\}$$

Ou ainda, para o caso de x_j ser uma melhor réplica mista;

$$\{x_j \in \Delta_j : C(x_j) \subset \beta_j(y)\},$$

pois o suporte $C(x_j)$ de x_j é o conjunto de estratégias puras associadas as probabilidades $x_{jh} > 0$.

A correspondência de melhor réplica pura combinada, $\beta: \Theta \rightarrow S$, do jogo é definida como o produto cartesiano de todas as correspondências de melhores réplicas puras.

$$\beta(y) = \times_{j \in I} \beta_j(y) \subset S$$

A correspondência combinada $\tilde{\beta} : \Theta \rightarrow \Theta$ é definida pelo produto cartesiano das melhores réplicas mistas de cada jogador.

$$\tilde{\beta}(y) = \times_{j \in I} \tilde{\beta}_j(y) \subset \Theta$$

2.5 Dominância x Melhor Réplica

Uma estratégia pura e_j^h que é uma melhor réplica diante de um perfil y de estratégias mistas não pode ser estritamente dominada, pois para isso seria necessário que $\mu_j(e_j^h, y_{-j}) < \mu_j(e_j^k, y_{-j})$ para algum $(k \neq h) \in S_j$ o que vai contra a definição de melhor réplica pura.

Para um jogo de dois jogadores as afirmações seguintes são verdadeiras.

1. Uma estratégia estritamente dominada não pode ser uma melhor réplica.
2. Uma estratégia que não é estritamente dominada é necessariamente uma melhor réplica.
3. Uma estratégia que é uma melhor réplica diante de um perfil de estratégias completamente misto é não dominada.
4. Uma estratégia pura não dominada é a melhor réplica para algum perfil de estratégias completamente mistas.

2.6 Equilíbrio de Nash

Um perfil $y = (x_j, y_{-j}) \in \Theta$ é um equilíbrio de Nash se cada uma de suas estratégias mistas x_j é uma melhor réplica contra o perfil restante y_{-j} , ou seja quando y é uma melhor réplica para si mesmo como consequência de que toda estratégia mista $x_j \in y$ é uma melhor réplica mista.

Então $y \in \Theta$ é um equilíbrio de Nash se $y \in \tilde{\beta}(y)$.

Segue da definição de $\tilde{\beta}(y)$ que se y é um equilíbrio de Nash, então toda estratégia pura no suporte de cada componente mista de y é uma melhor réplica para y . Se uma estratégia mista x_j pertencente ao perfil y for uma melhor réplica então $\{x_j \in \Delta_j : C(x_j) \subset \beta_j(y)\}$.

A estratégia mista $x_j = \{x_{j1}e_j^1, x_{j2}e_j^2, x_{j3}e_j^3\}$, onde x_{jh} é a probabilidade da estratégia pura e_j^h ser jogada, só será uma melhor réplica mista se for combinação convexa de melhores réplicas puras e digamos que somente e_j^1 e e_j^2 sejam melhores réplicas puras, então para que x_j seja uma melhor réplica mista é necessário que a probabilidade x_{j3} seja zero. Deste modo podemos facilmente

concluir que as melhores réplicas puras $\in \beta_j(y)$ possuem uma probabilidade maior que zero e, portanto pertencem ao suporte da estratégia mista x_j .

Portanto se $s_h \in C(x_j) \Rightarrow s_h \in \beta_j(y)$. A estratégia pura s_h do jogador j com probabilidade $x_{jh} > 0$, e x_j componente do perfil em equilíbrio de Nash é uma melhor réplica pura.

Como exemplo considere o seguinte jogo de dois jogadores sem equilíbrio em estratégias puras. Cada jogador possui duas estratégias apenas e as matrizes de *payoff* são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Seja $\pi_j(s)$ o *payoff* mostrado nas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} para um determinado perfil s de estratégias puras. O *payoff* do jogador j para o perfil de estratégias mistas x é,

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= [x_{11}, x_{12}] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \\ &= x_{11}x_{21} - x_{12}x_{21} + x_{12}x_{22} - x_{11}x_{22} = x_{21}[x_{11} - x_{12}] + x_{22}[x_{12} - x_{11}] \end{aligned}$$

Sabemos que $x_{21} = 1 - x_{22}$ e $x_{11} = 1 - x_{12}$

Então,

$$\mu_A(x) = 1 + x_{12}(4x_{22} - 2) - 2x_{22}$$

Para que uma estratégia mista seja uma melhor réplica é preciso que as estratégias puras e_A^1 e e_A^2 sejam melhores réplicas puras, então $\mu(e_A^1, y_{-j}) = \mu(e_A^2, y_{-j})$ portanto expandindo esta expressão temos,

$$1 + 0(4x_{22} - 2) - 2x_{22} = 1 + 1(4x_{22} - 2) - 2x_{22} \rightarrow 2 = 4x_{22} \rightarrow x_{22} = \frac{1}{2}, x_{21} = \frac{1}{2}$$

Diante do perfil $x_{-A} = (e_B^1)$, e_A^1 é uma melhor réplica pura para o jogador A e diante do perfil $y_{-A} = (e_B^2)$, e_A^2 é uma melhor réplica pura. Já diante do perfil $x_B = (e_A^1)$, e_B^2 é a melhor réplica pura do jogador B, portanto o perfil $x = (e_A^1, e_B^1) \notin \tilde{\beta}(x)$ e não é um equilíbrio de Nash. Se continuarmos com este raciocínio para os demais perfis de estratégias do jogo, veremos que nenhum perfil de estratégias puras $x \in \tilde{\beta}(x)$ e, portanto, não há equilíbrio de Nash em estratégias puras neste jogo.

Uma questão interessante surge neste exemplo. Como vimos, apesar da estratégia pura e_A^1 ser a única melhor réplica pura contra e_B^1 o perfil (e_A^1, e_B^1) não está em equilíbrio desde que e_B^1 não é melhor réplica pura contra e_A^1 , e estendendo este raciocínio para as outras estratégias puras vemos que não existe nenhum equilíbrio em estratégias puras neste jogo. Existe ainda a possibilidade de haver estratégias mistas em equilíbrio de Nash e pela própria definição do equilíbrio elas devem ser melhores réplicas mistas. Porém, sabemos que uma melhor réplica mista é combinação convexa de duas melhores réplicas puras. Acontece que neste exemplo existe uma estratégia mista que dá o mesmo *payoff* contra qualquer estratégia existente no perfil de estratégias. Sendo assim qualquer estratégia é uma melhor réplica mista contra ela. Veja a seguir.

Se um jogador opta por jogar uma estratégia mista com ambas as probabilidades iguais, isto é, $x_{11} = 1 - x_{12} = 1/2$, qualquer estratégia x_B do jogador B é uma melhor réplica mista diante de $x_A = (1/2, 1/2)$, pois como se pode verificar o *payoff* de qualquer estratégia contra $(1/2, 1/2)$ será igual a zero. Assim todas estratégias puras e_B^h , são melhores réplicas.

Como a estratégia $x_A = (1/2, 1/2)$ é uma melhor réplica diante do perfil $x_{-A} = x_B = (1/2, 1/2)$ e a estratégia $x_B = (1/2, 1/2)$ é uma melhor réplica diante do perfil $x_{-B} = x_A = (1/2, 1/2)$ então $x = (x_A, x_B) \in \tilde{\beta}(x)$ e é assim um equilíbrio de Nash. Observe que $x_A = (1/2, 1/2)$, apesar de ser uma melhor réplica mista é combinação convexa do perfil de réplicas puras e_A^1 e e_B^2 , ou seja $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, que só são melhores réplicas puras contra a estratégia mista $(1/2, 1/2)$.

Veja os *payoffs* de três estratégias de A contra a estratégia $[1, 0]^T$ de B.

$$\mu_{A1} = [1,0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{é melhor réplica pura contra } [1,0]^T$$

$$\mu_{A2} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{combinação convexa de } [1,0]^T \text{ e } [0,1]^T$$

$$\mu_{A3} = [1,0] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \quad \text{não é melhor réplica pura contra } [1,0]^T$$

$\mu_{A1} > \mu_{A2} > \mu_{A3}$, portanto contra qualquer outra estratégia não existe mais de uma melhor réplica pura e portanto não existiriam melhores réplicas mistas.

Assim no caso de só existir uma única melhor réplica pura contra determinado perfil, a conclusão é não existe réplica mista que seja melhor que a melhor réplica pura. Além do mais se o perfil está no equilíbrio não significa que ele possui o maior *payoff*, assim como se o perfil possuir o maior *payoff* não quer dizer que ele está no equilíbrio.

Um equilíbrio de Nash x é chamado de equilíbrio estrito se cada componente x_j do perfil x é a única melhor réplica para x . Cada $\tilde{\beta}_j(x)$ é um *singleton* x_j e, portanto, $\times_{j \in I} \tilde{\beta}_j(x)$ é o próprio perfil x .

Enquanto o critério do equilíbrio de Nash requer que nenhum desvio fora do equilíbrio seja mais lucrativo o critério do equilíbrio estrito de Nash requer que qualquer desvio fora do equilíbrio seja custoso. Um equilíbrio estrito não pode envolver uma probabilidade menor que um relacionado com uma determinada estratégia pura, pois assim haveria algum jogador para o qual existiriam pelo menos duas melhores réplicas puras, desde que as estratégias mistas são combinações convexas de pelo menos duas estratégias puras e o *payoff* é combinação linear das estratégias mistas e para haver equilíbrio estrito deve haver somente uma melhor réplica. Assim cada equilíbrio estrito de Nash é um perfil de estratégias puras, vértice dos espaços de perfis Θ .

Um perfil em equilíbrio de Nash não pode ser estritamente dominado. Entretanto não existe nada na definição que o previna se ser fracamente dominado. Pode existir outra melhor réplica para o perfil em equilíbrio que não é pior que a estratégia em equilíbrio em questão e que é melhor contra qualquer outro perfil. Um equilíbrio de Nash x é dito não dominado se cada estratégia x_j do perfil é não dominada.

Observe que $\tilde{\beta}(x)$ não depende só de x_j . Claramente $x \in \Theta$ é um equilíbrio de Nash se e somente se $x_j \in \tilde{\beta}(x) \forall j \in I_n$.

A elegância do conceito do equilíbrio de Nash e o comportamento racional dos agentes inspiraram muitos economistas na formulação de problemas econômicos como os jogos de n pessoas não cooperativos. Desde os anos 70 o conceito de Nash tem sido aplicado a uma grande classe de problemas. Entretanto, na aplicação do conceito alguns teóricos se deram conta de uma séria desvantagem do equilíbrio de Nash, ou seja, constataram que um jogo não cooperativo de n pessoas pode ter muitos equilíbrios de Nash. Assim um equilíbrio escolhido arbitrariamente pode não fazer muito sentido como predição do resultado do problema. Além do mais em muitos casos nem todos os resultados são consistentes com a noção intuitiva de qual deveria ser o resultado do jogo. Então, nos anos setenta vários teóricos abordaram o problema da seleção de equilíbrio pondo mais requisitos nos comportamentos racionais dos jogadores.

Assumindo-se jogadores altamente racionais pode-se eliminar os resultados menos intuitivos. Neste estudo só serão considerados os conceitos dos equilíbrios perfeito e próprio de Nash em suas formas normais. A noção de equilíbrio perfeito de Nash, de um jogo de forma normal, foi introduzido por Reinhard Selten e é um dos resultados mais fundamentais na teoria dos refinamentos do equilíbrio de Nash. Para algum número real $0 > \mu > 1$ ($\mu_{ih} \in (0,1)$), um perfil de estratégias completamente mistas $x \in \Theta$, isto é, $x_{jk} > 0 \forall j \in I_n$ e $k \in S_j$, é um equilíbrio de Nash μ perfeito se $x_{jk} \leq \mu$, quando $e_j^k \notin \tilde{\beta}(x)$. A probabilidade da estratégia pura e_j^k ser jogada deve ser menor que uma certa probabilidade μ se ela não estiver no espaço de melhores réplicas mistas. Assim para um equilíbrio de Nash μ perfeito cada estratégia pura é jogada com uma probabilidade positiva (maior que zero), mas

somente as estratégias puras contidas no conjunto de melhores réplicas podem ter uma probabilidade mais alta que μ . Deste modo é permitido aos jogadores cometerem erros, mas a probabilidade com que uma estratégia não ótima será jogada é limitada por μ . Um equilíbrio perfeito é agora definido como o limite de uma seqüência de equilíbrios μ perfeitos quando μ tende a zero. Todo equilíbrio interior é um equilíbrio perfeito, pois se $x \in \Theta(\mu)$, sendo que $\Theta(\mu) \subset INT(\Theta)$ e $x \in \Theta^{NE}$ (subconjunto de perfis em equilíbrio de Nash) então $x \in \Theta^{NE}(\mu)$. Além disso, todo $x \in \Theta^{PE}$ (subconjunto de perfis em equilíbrio perfeito de Nash) é não dominado.

2.7 Equilíbrio Perfeito de Nash

Um perfil de estratégia $x^* \in \Theta$ é um equilíbrio perfeito de Nash para um jogo $G = (I_n, \Theta, u)$ se, para alguma seqüência $\mu^r > 0$, $r \in \mathbb{N}$ convergindo para zero, existe uma seqüência de equilíbrios μ perfeitos de Nash convergindo para x^* .

Da definição, segue-se imediatamente que qualquer equilíbrio de Nash com estratégias completamente mistas é um equilíbrio perfeito de Nash para algum μ suficiente pequeno. Além disso, Selten provou que qualquer jogo $G = (I_n, \Theta, u)$ tem um equilíbrio perfeito de Nash, mesmo se o jogo não possui equilíbrio nas estratégias completamente mistas.

2.8 Teorema de Selten

Qualquer jogo $G = (I_n, \Theta, u)$ tem pelo menos um equilíbrio perfeito de Nash e o conjunto dos equilíbrios perfeitos de Nash é um subconjunto do conjunto dos equilíbrios de Nash.

Embora a noção de equilíbrio perfeito elimine os equilíbrios de Nash que não são robustos com respeito às pequenas probabilidades de engano por erro dos jogadores, a probabilidade com o qual um jogador racional joga uma estratégia por engano dependerá do efeito prejudicial da estratégia não ótima. Enganos mais custosos irão ser menos prováveis que os enganos menos custosos.

Para um refinamento adicional do conjunto de equilíbrio de Nash, Myerson (1978) introduziu o conceito de equilíbrio próprio. Para algum número real $1 > \mu > 0$ um perfil de estratégias completamente mistas $x \in \Theta$ é um equilíbrio μ

próprio de Nash se para qualquer jogador $j \in I_n, x_{jk} \leq \mu x_{jh}$ se $u^j(e_j^k, x_{-j}) < u^j(e_j^h, x_{-j}) \quad \forall k, h \in I_{m_j}$. Novamente, para um equilíbrio μ próprio de Nash cada estratégia pura é jogada com uma probabilidade positiva. Além do mais, se alguma estratégia pura k é uma pior réplica contra as estratégias dos outros jogadores que uma certa estratégia h , então a probabilidade com que a estratégia k é jogada é no máximo μ vezes a probabilidade com que estratégia h é jogada.

Ainda existe uma proposição que diz que se $x \in \Theta^{NE}$ é não dominado, então num jogo de dois jogadores $x \in \Theta^{PE}$.

2.9 Equilíbrio Próprio de Nash

Um perfil de estratégias $x^* \in \Theta$ é um equilíbrio próprio de Nash para o jogo $G = (I_n, \Theta, u)$, se para alguma seqüência $\mu^r > 0, r \in \mathbb{N}$, convergindo para zero, existe uma seqüência de equilíbrios μ^r próprios de Nash convergindo para x^* .

Novamente, segue imediatamente que qualquer equilíbrio interior de Nash (completamente misto) é um equilíbrio próprio de Nash. Além do mais cada equilíbrio próprio de Nash satisfaz as condições de um equilíbrio perfeito, porque a noção de propriedade restringe o conjunto de enganos permissíveis. Myerson provou que qualquer jogo $G = (I_n, \Theta, u)$ tem pelo menos um equilíbrio próprio de Nash.

2.10 Teorema de Myerson

Qualquer jogo $G = (I_n, \Theta, u)$ possui pelo menos um equilíbrio próprio de Nash. Além disso, o conjunto de equilíbrios próprios de Nash é um subconjunto do conjunto de equilíbrios perfeitos de Nash.

Os conceitos de equilíbrio próprio e perfeito de Nash são bem ilustrados pelo seguinte exemplo. Seja o jogo bimatricial, de duas pessoas, dado por.

$$A = B^T = \begin{bmatrix} \rightarrow 1 & 0 & -9 \\ 0 & \rightarrow 0 & -7 \\ -9 & -7 & \rightarrow -7 \end{bmatrix}$$

Este jogo possui três equilíbrios de Nash em estratégias puras apontados pelas setas, ou seja, cada perfil de estratégia no qual os dois jogadores jogam a mesma estratégia pura. Entretanto, o equilíbrio de Nash no qual ambos jogadores jogam a terceira estratégia é muito improvável por ser irracional. Este equilíbrio é rejeitado pela noção de perfeição, a qual só admite os dois equilíbrios nos quais ou ambos os jogadores jogam sua primeira estratégia ou ambos os jogadores jogam sua segunda estratégia. Podemos ver que uma melhor réplica para a terceira estratégia do jogador B e_B^3 , é e_A^3 e a uma melhor réplica para a terceira estratégia do jogador A e_A^3 é e_B^3 , portanto (e_A^3, e_B^3) é um equilíbrio de Nash. Porém, como nem (e_A^1, e_B^3) nem (e_A^2, e_B^3) , são equilíbrios de Nash, então toda estratégia mista candidata a melhor réplica deve ter suas componentes x_{A1} e x_{A2} iguais a zero. Assim não seria robusto a perturbações e, portanto, não é um equilíbrio perfeito.

Seguindo com este mesmo raciocínio para os outros equilíbrios temos que e_A^1 e e_A^2 são melhores réplicas para e_B^2 , portanto qualquer estratégia mista combinação convexa de e_A^1 e e_A^2 é uma melhor réplica mista contra e_B^2 e o perfil $\{e_A^2, e_B^2\}$ é um equilíbrio de Nash. Para $x_A = (x_{A1}, x_{A2}, 0)$, onde x_A é combinação convexa de (e_A^1, e_A^2) , e_B^2 é uma melhor réplica? Calculemos os *payoffs* $\mu(e_B^1, x_A)$, $\mu(e_B^2, x_A)$ e $\mu(e_B^3, x_A)$.

$$\mu(e_B^1, x_A) = [1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ 0 \end{bmatrix} = [1, 0, -9] \begin{bmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ 0 \end{bmatrix} = x_{A1} \geq 0$$

$$\mu(e_B^2, x_A) = [0, 1, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ 0 \end{bmatrix} = [0, 0, -7] \begin{bmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mu(e_B^3, x_A) = [0, 0, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ 0 \end{bmatrix} = [-9, -7, -7] \begin{bmatrix} x_{A1} \\ x_{A2} \\ 0 \end{bmatrix} = -9x_{A1} - 7x_{A2} \leq 0$$

Portanto e_B^2 só é uma melhor réplica para x_A se $x_{A1} = 0$, caso contrário e_B^2 não é uma melhor réplica para x_A e (x_A, e_B^2) não é um equilíbrio de Nash.

Um modo mais claro de vermos se x é um equilíbrio perfeito de Nash seria considerarmos a seguinte definição: Um equilíbrio μ - perfeito em um jogo de forma normal é um perfil $x^\mu \in \Theta^{\text{NE}}(\mu)$, tal que para cada jogador j , x_j^μ maximiza o *payoff* $\mu(x_j, x_{-j}^\mu)$ sujeito a $x_{jh} \geq \mu_{jh}$ para toda $h \in S_j$, onde $0 < \mu_{jh} < \mu$

Deste modo se considerarmos a equilíbrio (e_A^3, e_B^3) , temos que:

$$e_A^3 = [0,0,1] \text{ e } e_A^{3\mu} = [\mu_{A1}, \mu_{A2}, 1 - \mu_{A1} - \mu_{A2}]$$

$$e_B^3 = [0,0,1] \text{ e } e_B^{3\mu} = [\mu_{B1}, \mu_{B2}, 1 - \mu_{B1} - \mu_{B2}]$$

Então,

$$\mu(e_A^3, e_B^{3\mu}) = [0,0,1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{B1} \\ \mu_{B2} \\ 1 - \mu_{B1} - \mu_{B2} \end{bmatrix} = -2\mu_{B1} - 7$$

$$\mu(e_A^2, e_B^{3\mu}) = [0,1,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{B1} \\ \mu_{B2} \\ 1 - \mu_{B1} - \mu_{B2} \end{bmatrix} = 7\mu_{B1} + 7\mu_{B2} - 7$$

$$\mu(e_A^1, e_B^{3\mu}) = [1,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{B1} \\ \mu_{B2} \\ 1 - \mu_{B1} - \mu_{B2} \end{bmatrix} = 10\mu_{B1} + 9\mu_{B2} - 9$$

Se variarmos μ de 1 a 0, isto é, simulando $\mu_{**} \rightarrow 0$, variamos os *payoffs* $\mu(e_A^*, e_B^{3\mu})$ e observaremos que não existe $0 < \mu < 1$ tal que $(e_A^3, e_B^{3\mu})$ seja um equilíbrio de Nash, portanto (e_A^3, e_B^3) não é um equilíbrio perfeito de Nash

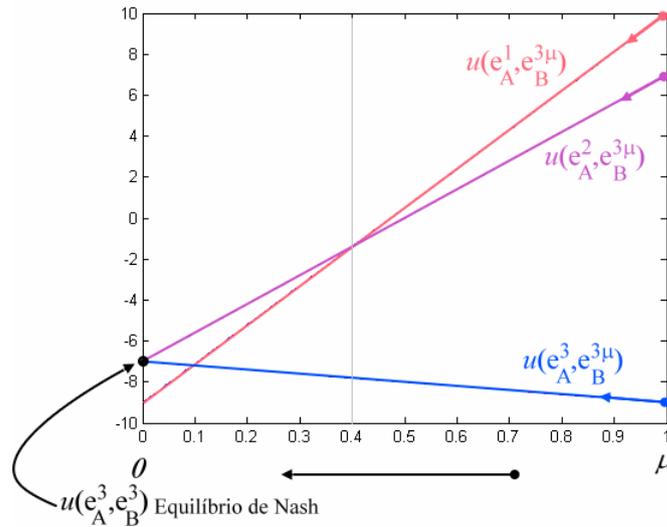


Figura 2-8 – O perfil $(e_A^3, e_B^{3\mu})$ não é um equilíbrio perfeito de Nash, pois não é robusto à menor perturbação. Já o perfil $(e_A^2, e_B^{3\mu})$ é robusto à qualquer perturbação $\mu < 0.4$

Consideremos agora, um outro equilíbrio de Nash deste jogo (e_A^2, e_B^2) , assim, repetindo o mesmo procedimento anterior, temos que:

$$e_A^2 = [0,1,0] \text{ e } e_A^{2\mu} = [\mu_{A1}, 1-\mu_{A1}-\mu_{A3}, \mu_{A3}]$$

$$e_B^2 = [0,1,0] \text{ e } e_B^{2\mu} = [\mu_{B1}, 1-\mu_{B1}-\mu_{B3}, \mu_{B3}]$$

Então,

$$\mu(e_A^1, e_B^{2\mu}) = [1,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{B1} \\ 1-\mu_{B1}-\mu_{B3} \\ \mu_{B3} \end{bmatrix} = \mu_{B1} - 9\mu_{B3}$$

$$\mu(e_A^2, e_B^{2\mu}) = [0,1,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{B1} \\ 1-\mu_{B1}-\mu_{B3} \\ \mu_{B3} \end{bmatrix} = -7\mu_{B3}$$

$$\mu(e_A^3, e_B^{2\mu}) = [0,0,1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{B1} \\ 1-\mu_{B1}-\mu_{B3} \\ \mu_{B3} \end{bmatrix} = -2\mu_{B1} - 7$$

Se variarmos μ de 1 em direção a 0, isto é, simulando $\mu_{**} \rightarrow 0$, variamos os *payoffs* $\mu(e_A^*, e_B^{2\mu})$ e observaremos que para todo $0 < \mu < 1$, $(e_A^2, e_B^{2\mu})$ é um equilíbrio de Nash, desde que $\mu(e_A^2, e_B^{2\mu}) > \mu(e_A^1, e_B^{2\mu}) > \mu(e_A^3, e_B^{2\mu})$. Portanto (e_A^2, e_B^2) é um equilíbrio perfeito de Nash.

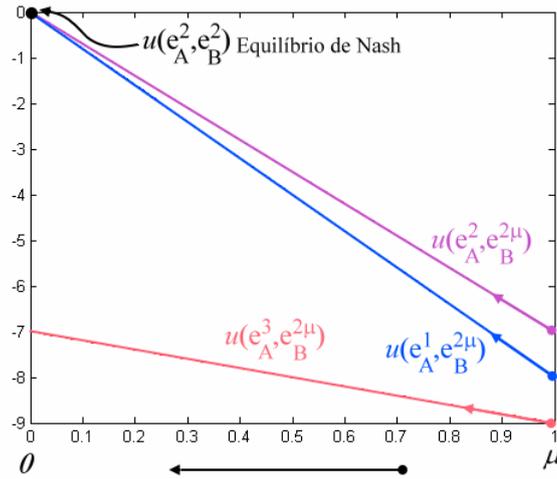


Figura 2-9 – O perfil $(e_A^2, e_B^{2\mu})$ é uma equilíbrio perfeito de Nash para todo $0 < \mu < 1$

Finalmente, considerando o equilíbrio de Nash restante deste jogo (e_A^1, e_B^1) e repetindo os procedimentos anteriores, temos que:

$$e_A^1 = [1,0,0] \text{ e } e_A^{1\mu} = [1-\mu_{A2}-\mu_{A3}, \mu_{A2}, \mu_{A3}]$$

$$e_B^1 = [1,0,0] \text{ e } e_B^{1\mu} = [1-\mu_{B2}-\mu_{B3}, \mu_{B2}, \mu_{B3}]$$

Então,

$$\mu(e_A^1, e_B^{1\mu}) = [1,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\mu_{B1}-\mu_{B3} \\ \mu_{B2} \\ \mu_{B3} \end{bmatrix} = 1 - \mu_{B2} - 10\mu_{B3}$$

$$\mu(e_A^2, e_B^{1\mu}) = [0,1,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\mu_{B1}-\mu_{B3} \\ \mu_{B2} \\ \mu_{B3} \end{bmatrix} = -7\mu_{B3}$$

$$\mu(e_A^3, e_B^{1\mu}) = [0,0,1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \\ -9 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \mu_{B1} - \mu_{B3} \\ \mu_{B2} \\ \mu_{B3} \end{bmatrix} = 2\mu_{B2} + 2\mu_{B3} - 9$$

Se variarmos μ de 1 em direção a 0, isto é, simulando $\mu_{**} \rightarrow 0$, variamos os *payoffs* $\mu(e_A^*, e_B^{1\mu})$ e assim poderemos observar que para todo $0 < \mu < 1/4$, $(e_A^1, e_B^{1\mu})$ é um equilíbrio de Nash, desde que para este intervalo $\mu(e_A^1, e_B^{1\mu}) > \mu(e_A^2, e_B^{1\mu}) > \mu(e_A^3, e_B^{1\mu})$. Portanto (e_A^1, e_B^1) é um equilíbrio perfeito de Nash.

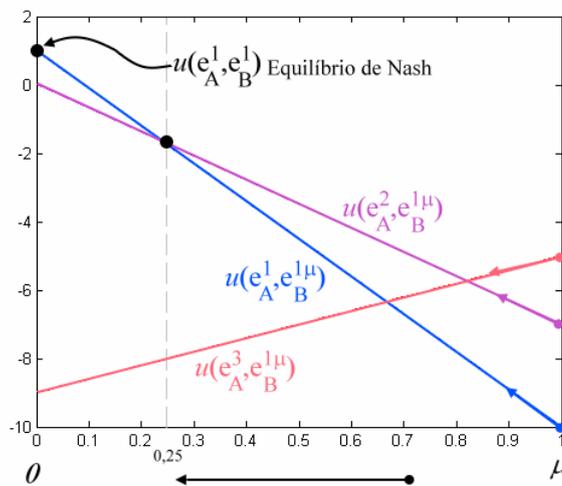


Figura 2-10 – O perfil $(e_A^1, e_B^{1\mu})$ é uma equilíbrio perfeito de Nash para todo $0 < \mu < 1/4$

O segundo equilíbrio é rejeitado pela noção de equilíbrio próprio. Observe que pela definição de equilíbrio μ próprio, $\mu(e_A^1, e_B^2) = \mu(e_A^2, e_B^2) = 0 > \mu(e_A^3, e_B^2) = -7$, portanto $x_{A3} \leq \mu x_{A2}$ e $x_{A3} \leq \mu x_{A1}$ e $\mu(e_A^1, e_B^1) > \mu(e_A^1, e_B^2) > \mu(e_A^1, e_B^3)$, portanto $\mu x_{B1} > x_{B2}$ e $\mu x_{B1} > x_{B3}$, assim o equilíbrio (e_A^2, e_B^2) seria menos provável do que o equilíbrio (e_A^1, e_B^1) .

Então, pela definição de equilíbrio próprio seleciona-se o equilíbrio na qual ambos os jogadores jogam a primeira estratégia. Este equilíbrio dá a ambos os jogadores um *payoff* igual a um.