

# 4

## ESTABILIDADE EVOLUTIVA E A DINÂMICA DO REPLICADOR

Para os casos de uma única população, cada estratégia é testada contra todas as outras estratégias da mesma população e então é encontrado o *payoff* esperado. A estratégia com maior *payoff* esperado seria uma estratégia evolutiva estável. Ou seja, se a população fosse formada por dois tipos apenas de estratégias  $x$  e  $y$ , cada uma presente numa certa proporção, teríamos que computar o *payoff* esperado para a estratégia  $x$ ,  $(1-\varepsilon)\mu(x,x) + \varepsilon\mu(x,y) = \mu(x,w)$ , onde  $w = \varepsilon y + (1-\varepsilon)x$ , com  $\varepsilon$  sendo a proporção de  $y$  na população, assim como o *payoff* esperado para  $y$ ,  $\mu(y,w)$ . Se a estratégia original ganhasse um *payoff* esperado  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  contra a população mista  $w$ , então a estratégia  $x$  seria estável e o equilíbrio seria o perfil  $(x,x)$ .

Assim a condição para que uma estratégia residente  $x$  seja um equilíbrio evolutivamente estável é,

$$\mu(x,w) > \mu(y,w)$$

**Equação 4-1**

Como visto, um modo equivalente de se verificar se uma estratégia residente é evolutivamente estável seria através das duas condições de equilíbrio e estabilidade:

$$1 - \mu(x,x) \geq \mu(y,x)$$

Se a estratégia residente for uma melhor réplica para si mesma, o perfil  $(x,x)$  é um equilíbrio pela própria definição de equilíbrio de Nash,

$$2 - \mu(x,y) > \mu(y,y)$$

Se a estratégia mutante for uma melhor réplica alternativa para a estratégia residente  $x$ , isto é, se  $\mu(x,x) = \mu(y,x)$ , então  $\mu(x,y) > \mu(y,y)$  para que  $x$  seja evolutivamente estável. Assim,  $\mu(x,y) > \mu(y,y)$  é chamada de condição de estabilidade

Segundo a teoria, as condições 1 e 2 são equivalentes a  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  que implica na estabilidade evolutiva da estratégia residente  $x$  assim como no equilíbrio  $(x,x)$  de Nash.

Vamos averiguar estas afirmações.

Desenvolvendo  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  para o caso de população com duas estratégias temos;

$$x\Delta[\varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] > y\Delta[\varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] = \varepsilon x\Delta y + x\Delta x - \varepsilon x\Delta x > \varepsilon y\Delta y + y\Delta x - \varepsilon y\Delta x$$

$$\varepsilon(x\Delta y - x\Delta x - y\Delta y + y\Delta x) + x\Delta x - y\Delta x > 0$$

Onde  $\varepsilon$  é a proporção da estratégia mutante  $y$  na população.

Fazendo  $A = x\Delta x - y\Delta x$  e  $B = x\Delta y - y\Delta y$  definimos a função  $f(\varepsilon) = \varepsilon(B - A) + A$ . De acordo com a Equação 4-1,

$$\mu(\xi, \omega) > \mu(\psi, \omega)$$

e  $f(\varepsilon) > 0$  para que o perfil  $(x,x)$  seja um equilíbrio evolutivo estável.

Observe que  $A \geq 0$  equivale a satisfazer a condição 1  $\mu(x,x) \geq \mu(y,x)$  e  $B > 0$  equivale à satisfazer à condição 2  $\mu(x,y) \geq \mu(y,y)$

Estudemos as possíveis possibilidades de  $f(\varepsilon)$

### **Possibilidade 1 - Se $A > 0$ , ou $\mu(x,x) > \mu(y,x)$**

Uma condição para que o perfil  $(x,x)$  seja um equilíbrio é que a estratégia residente  $x$  seja uma melhor réplica estrita contra si mesma, ou seja  $\mu(x,x) > \mu(y,x)$   $\forall y \neq x$ . Então, uma das condições a ser estudada é  $A > 0$ .

Dentro desta condição temos as seguintes possibilidades:

**1.1 - Se  $B < 0 \rightarrow (B - A) < 0$**

Observa-se que se  $0 \leq \varepsilon < \frac{-A}{B-A}$ , na região hachurada, a condição  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  é satisfeita.

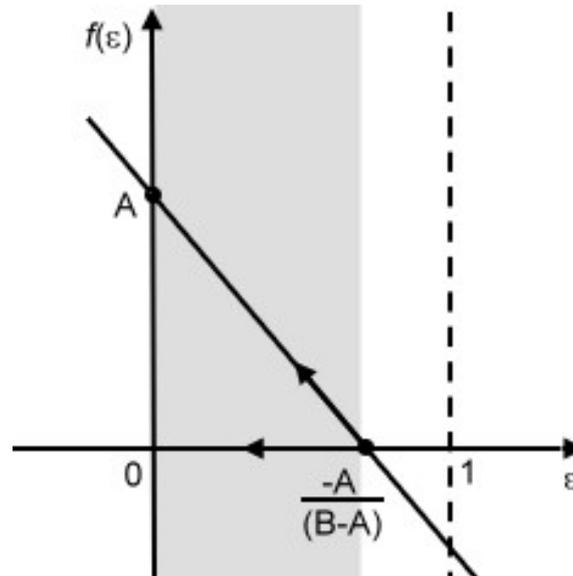


Figura 4-1 –  $A > 0$  e  $B < 0$

Podemos perceber que a estratégia residente pode sobreviver a um processo evolutivo convivendo com outra estratégia  $y$ , desde que a proporção de  $y$  na população não ultrapasse  $\frac{-A}{B-A}$ . Caso contrário se aparecer um mutante numa proporção maior que  $\frac{-A}{B-A}$ , este mutante acabaria por dominar  $x$  e tomaria toda a população.

Então, dependendo da proporção do mutante invasor usada por um algoritmo genético, a condição de estabilidade  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  pode ser satisfeita ou não.

Ao longo desse processo evolutivo, para pequenas proporções de mutantes, se a aptidão for o *payoff* esperado  $\mu(x,w)$  a estratégia residente acabará por tomar toda a população. Os possíveis perfis em equilíbrio decorrentes das condições  $A > 0$  e  $B < 0$  são os perfis  $(x,x)$  ou  $(y,y)$ , dependendo da proporção do invasor  $y$ .

Conclui-se que as condições  $A > 0$  e  $B < 0$  não garantem estabilidade, mas garantem que o perfil  $(x,x)$  seja um equilíbrio de Nash.

Por exemplo, imaginemos uma população bimórfica constituída por duas estratégias puras  $x$  e  $y$ , assim uma matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{matrix} & x & y \\ x & a_{11} & a_{12} \\ y & a_{21} & a_{22} \end{matrix}$  garante que  $A > 0$  se  $a_{11} > a_{21}$  e  $B < 0$  se  $a_{12} < a_{22}$ .

Assim uma possível matriz de *payoff* para este caso seria  $\Delta = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Observando a matriz de *payoff*, vemos que os possíveis equilíbrios de Nash são,  $(x,x)$  e  $(y,y)$ .

O equilíbrio  $(x,x)$  foi garantido, falta verificar se esse equilíbrio é evolutivamente estável. Admitamos que a proporção de  $y$  na população exceda  $\frac{-A}{(B-A)} = 3/4$ , por exemplo,  $4/5$  então calculando  $w$ ,  $\mu(x,w)$  e  $\mu(y,w)$  temos;

$$w = \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\mu(x, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \frac{17}{5}$$

$$\mu(y, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \frac{18}{5}$$

Como existe uma proporção  $\varepsilon$  tal que  $\mu(x,w) < \mu(y,w)$ , a estabilidade evolutiva de  $x$  não está garantida. Para  $\varepsilon > 3/4$ ,  $\mu(x,w) < \mu(y,w)$ , como visto na Figura 4-2.

Invasões de mutantes numa proporção  $\varepsilon > 3/4$  fazem com que  $\mu(x,w) < \mu(y,w)$  e assim a dinâmica do replicador levará a proporção do mutante para 100% da população, do mesmo modo que  $\varepsilon < 3/4$  levará a um estado de total aniquilação das estratégias mutantes.

Observa-se também na Figura 4-3 que uma proporção  $\varepsilon = 3/4$  de mutantes é um equilíbrio estável, ou seja a estratégia mista  $w = (1/4, 3/4)$  é um equilíbrio estável.

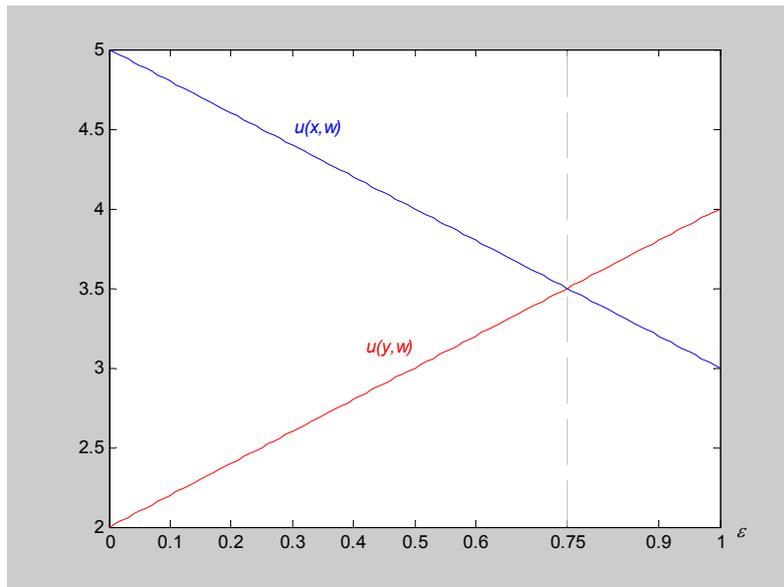


Figura 4-2 – Payoffs das estratégia x e y variando com a proporção de y

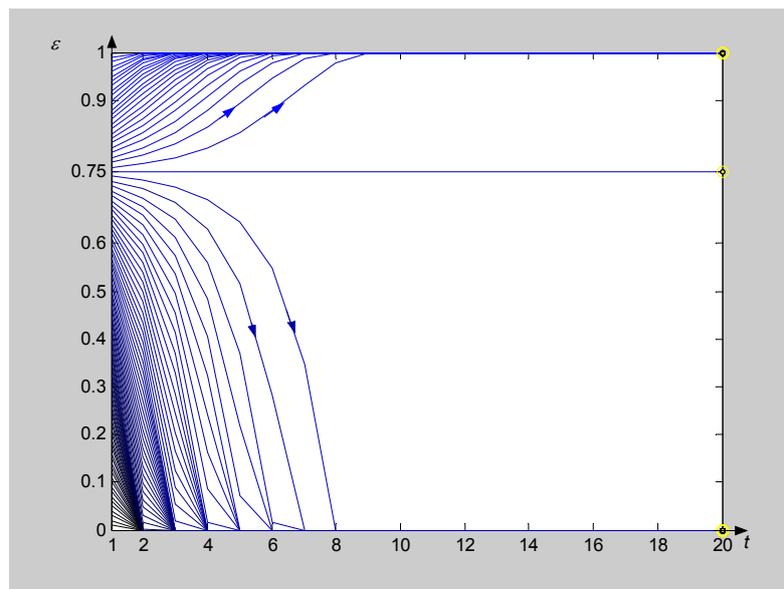


Figura 4-3 – Proporção inicial  $\varepsilon$  do mutante x iterações da dinâmica do replicador

Qual dos equilíbrios é o melhor  $(x,x)$  ou  $(y,y)$  ? Obviamente a resposta é o que der um maior *payoff* ao jogador. Vemos através da Figura 4-2 que o maior *payoff* se dá quando a população é composta somente por estratégias x e naquele caso  $\mu(x,w) = 5$ .

O resultado obtido neste exemplo também pode ser verificado para o caso das estratégias residentes e mutantes serem estratégias mistas, isto é,  $x = [x1, 1-x1]$

e  $y = [y_1, 1-y_1] \forall 0 \leq x \leq 1$  e  $\forall 0 \leq y \leq 1$ . Como exemplo fazemos  $x = [3/4, 1/4]$  e  $y = [y_1, 1-y_1]$  e a proporção de  $y$  na população  $\varepsilon$ .

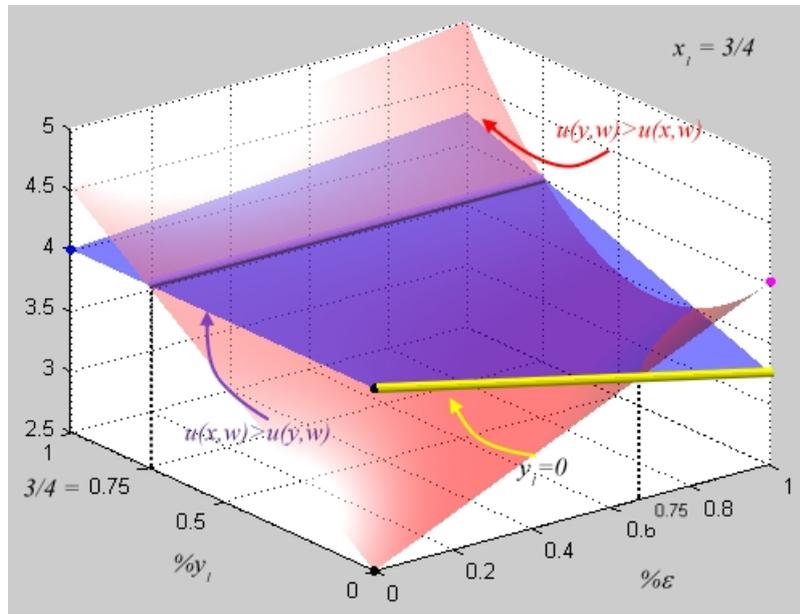


Figura 4-4 – Planos de *payoffs* considerando-se  $x$  e  $y$  como estratégias mistas, mostrando as regiões onde uma estratégia mista  $x = [3/4, 1/4]$  é evolutiva estável quando se varia a estratégia mista  $y$  e sua proporção na população.

Observa-se na Figura 4-4 que se  $x_1 = 3/4$ ,  $y = [y_1 \ 1 - y_1] = [0 \ 1]$  e  $\varepsilon < 3/4$  temos que  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$ , porém se  $A < 0$ , caso em que  $y = [y_1 \ 1 - y_1]$  e  $y_1 > 3/4$ , por exemplo  $y_1 = 4/5$ , não existe  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  tal que  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  como é confirmado nos cálculos abaixo.

$$B = \mu(x,y) - \mu(y,y) < 0$$

$$B = \left( \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \right) - \left( \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \right) = \frac{81}{20} - \frac{104}{25} = -0.11 < 0$$

$$E A = \mu(x,x) - \mu(y,x) < 0$$

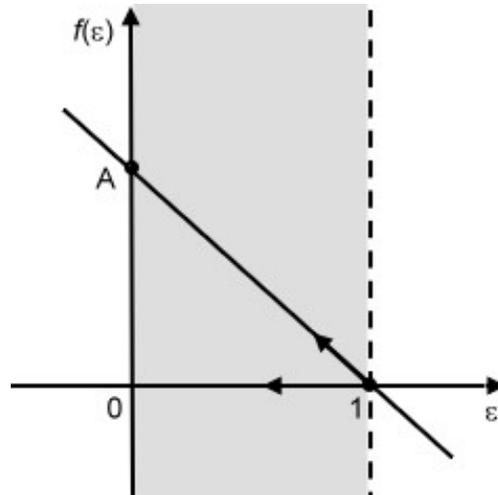
$$A = \left( \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \right) - \left( \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \right) = \left( \frac{64}{16} - \frac{82}{20} \right) = -0.1 < 0$$

$$\frac{-A}{B-A} = \frac{0.1}{(-0.11+0.1)} = -10, \text{ portanto não existe } 0 \leq \varepsilon \leq 1 \text{ tal que, } \mu(x,w) >$$

$\mu(y,w)$ . O caso em que  $A < 0$  e  $B < 0$  e  $B < A$  será visto no caso 2.1.1 - .

**1.2 - Se  $B = 0$**

$$\text{Se } A > 0 \text{ e } B = 0 \rightarrow \varepsilon = \frac{-A}{B-A} < 1$$



**Figura 4-5 –  $A > 0$  e  $B = 0$**

Neste caso se  $0 \leq \varepsilon < 1$  a condição de estabilidade  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  seria satisfeita, e não existiria nenhum mutante que em proporção menor que 100% da população, conseguisse dominar a estratégia residente  $x$ .

Os possíveis perfis em equilíbrio decorrentes das condições  $A > 0$  e  $B = 0$  são  $(x,x)$ ,  $(y,y)$ .

Por exemplo, considerando novamente, sem perda de generalidade e por questão de simplicidade que  $x$  e  $y$  são duas estratégias puras, então uma matriz de *payoff* que satisfaz as condições  $A > 0$  e  $B = 0$  é:

$$\Delta = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Assim, para um  $\varepsilon$  qualquer temos;

$$\mu(x, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 5 - 2\varepsilon$$

$$\mu(y, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 2 + \varepsilon$$

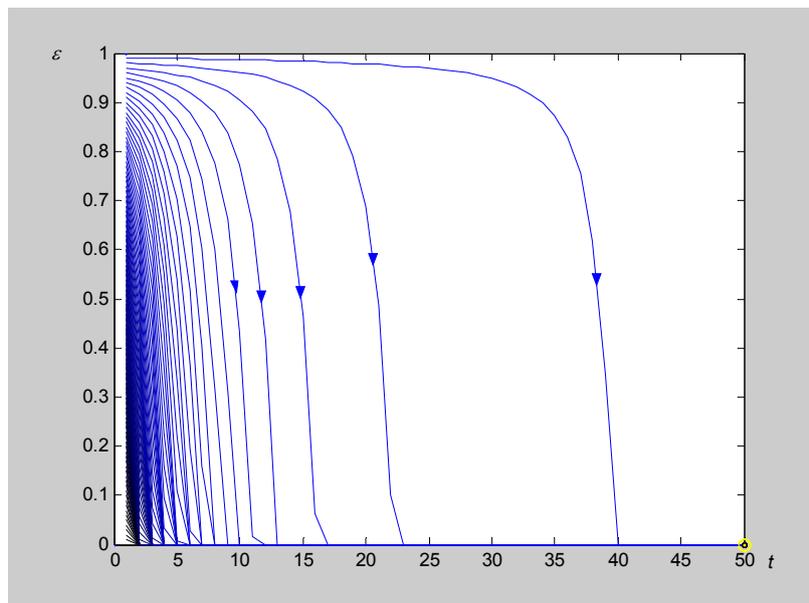
Para que condição  $\mu(x, w) > \mu(y, w)$  seja violada é necessário que exista  $0 \leq \varepsilon < 1$ , que satisfaça  $5 - 2\varepsilon \leq 2 + \varepsilon$  e dessa equação conclui-se que  $\varepsilon \geq 1$ . Assim não existe nenhum  $0 \leq \varepsilon < 1$  tal que  $\mu(x, w) \leq \mu(y, w)$ .

Observando a matriz de *payoff* vemos que os possíveis equilíbrios em estratégias puras são  $(x, x)$  e  $(y, y)$ . Assim o equilíbrio  $(x, x)$  está garantido, assim como a condição da estabilidade de  $x$ .

Observa-se na Figura 4-6, que a dinâmica do replicador guiará a população, com qualquer proporção inicial de estratégias residentes e mutantes, na direção de anular as estratégias invasoras mutantes.

Neste tipo de jogo, representado por tal matriz de *payoff* descrita neste exemplo, e com uma população formada por estratégias puras residentes e mutantes numa dada proporção  $\varepsilon$ ,  $\mu(x, w)$  sempre será maior do que  $\mu(y, w)$ .

De uma forma mais abrangente se  $x$  for a estratégia pura  $[1 \ 0]$ , não existe nenhum  $y$  pura ou mista com proporção  $\varepsilon$ , tal que  $\mu(x, w) < \mu(y, w)$  como pode ser visto na Figura 4-8.



**Figura 4-6 – Convergência da dinâmica do replicador para um estado populacional com ausência de estratégias invasoras.**

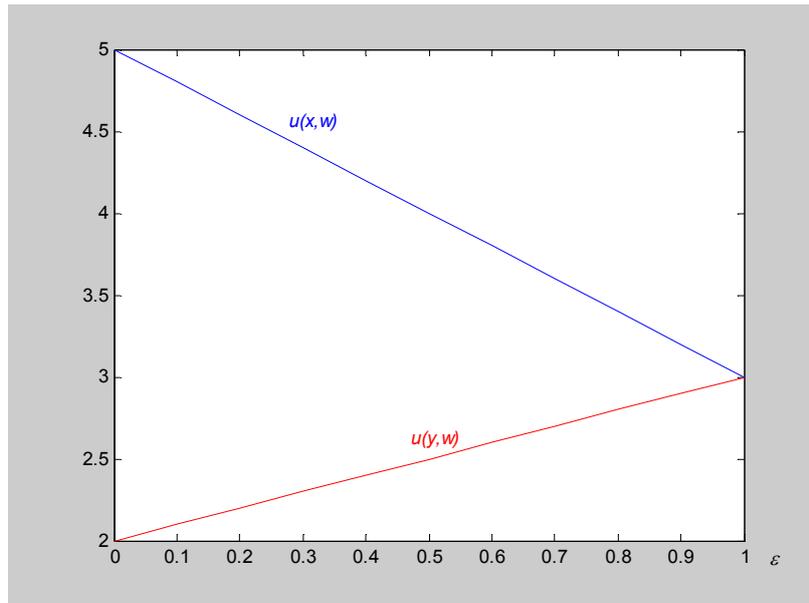


Figura 4-7 – Neste jogo, o payoff  $\mu(x,w)$  da estratégia  $x$ , mostra que ela é estável para qualquer proporção da invasora  $y$ .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0220895/CA

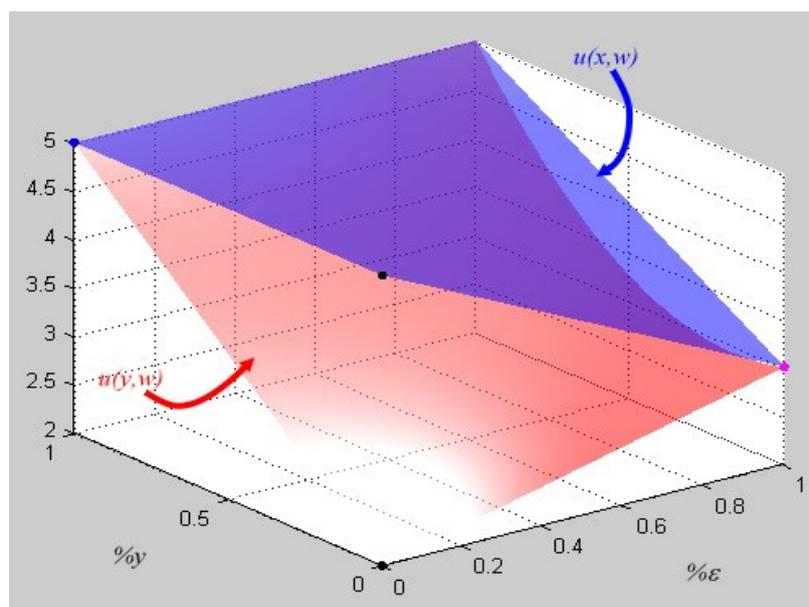


Figura 4-8 – O plano de *payoffs* de  $x$ ,  $\mu(x,w)$ , mostra que  $x$  é estável evolutiva contra qualquer estratégia mista  $y$  invadindo a população em qualquer proporção.

Já se  $x$  for uma estratégia mista  $[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]$ ,  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  se  $y = [y_1 \quad 1 - y_1]$  e  $y_1 > \frac{1}{2}$ , por exemplo  $\frac{2}{3}$ ,  $\mu(x,w) < \mu(y,w)$ .

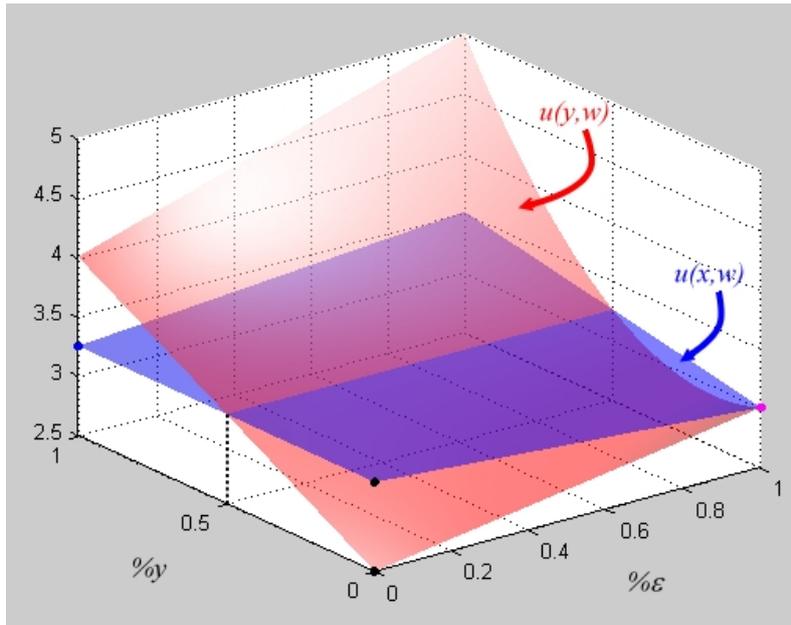


Figura 4-9 – O plano de *payoffs* de  $x$ ,  $\mu(x,w)$ , mostra que  $x$  é estável evolutiva contra qualquer estratégia mista  $y = [y, 1-y]$  para todo  $y > \frac{1}{2}$  e  $0 \leq \epsilon \leq 1$ .

Porém neste caso  $B = \mu(x,y) - \mu(y,y) < 0$

$$B = \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right) - \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right) = \frac{20}{6} - \frac{33}{9} = -0.3333... < 0$$

Não se encaixando na situação descrita de  $A > 0$  e  $B = 0$ .

### 1.3 - Se $B > 0$

Aqui é importante destacar duas situações.

1.3.1 - Se  $B < A \rightarrow$

$$\begin{cases} (B - A) < 0 \\ \epsilon < \frac{-A}{(B - A)} \\ \frac{-A}{(B - A)} > 1 \end{cases}$$

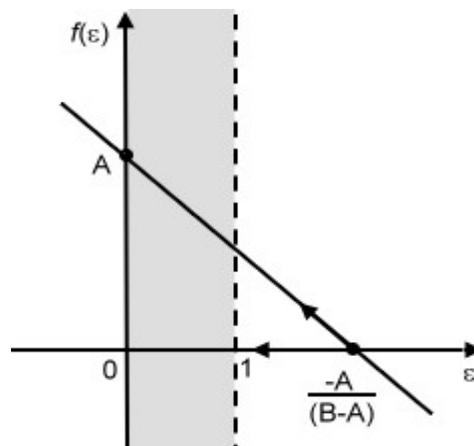


Figura 4-10 –  $A > 0$ ,  $B > 0$  e  $B < A$

Um exemplo para este caso é o da matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

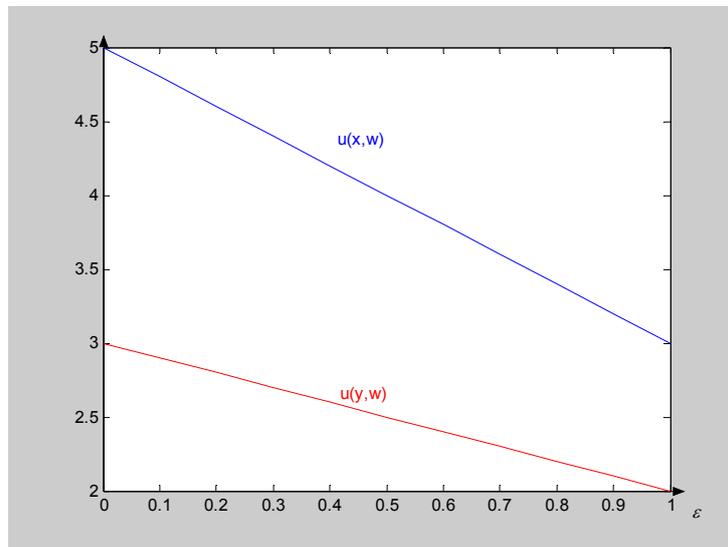


Figura 4-11 – payoff da estratégia  $x$ ,  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  da estratégia invasora  $y \forall \epsilon$ .

Na Figura 4-11 observa-se que  $\mu(x,w)$  é sempre maior que  $\mu(y,w)$ . Por isso o equilíbrio  $(x,x)$  é evolutivamente estável.

Assim para todo  $0 \leq \epsilon < 1$  a condição de estabilidade  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  será satisfeita

1.3.2 - Se  $B > A \rightarrow \begin{cases} (B - A) > 0 \\ \frac{-A}{(B - A)} < 0 \end{cases}$

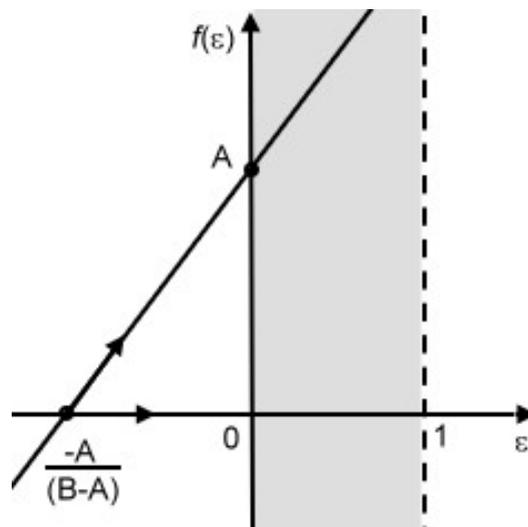


Figura 4-12 –  $A > 0$ ,  $B > 0$  e  $B > A$

Como neste caso  $\varepsilon > \frac{-A}{(B-A)}$ , e  $\frac{-A}{(B-A)} < 0$ , então para todo  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  a condição de estabilidade  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  é sempre satisfeita como vemos na Figura 4-13 e assim  $x$  sempre será uma estratégia evolutiva estável. O único equilíbrio decorrente das condições  $A > 0$ ,  $B > 0$  e  $B > A$  é  $(x,x)$ .

Assim, estas condições garantem que  $(x,x)$  seja um equilíbrio de Nash e que  $x$  seja evolutivamente estável.

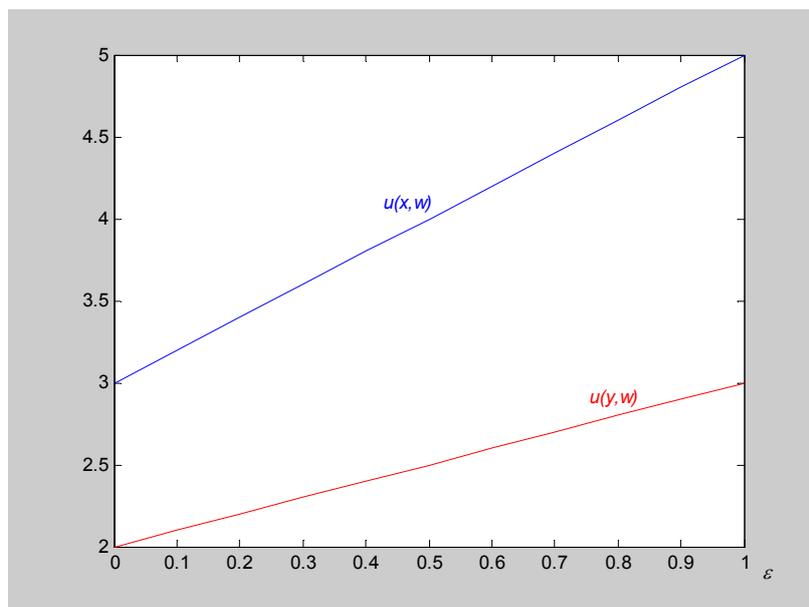


Figura 4-13 – Payoff da estratégia  $x$ ,  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  da estratégia invasora  $y \forall \varepsilon$ .

### Possibilidade 2 - $A < 0$

Esta condição requer que  $x\Delta x < y\Delta x$ , e segundo a teoria, a estratégia  $x$ , por não ser uma melhor réplica contra si própria, não seria um equilíbrio evolutivamente estável. A questão da estabilidade, como qualquer desempenho que a estratégia obtém, não depende só dela mesmo, mas da situação provocada por ela e pelas outras estratégias.

Dentro desta situação temos várias possibilidades descritas a seguir.

#### 2.1 - Se $B < 0$

Aqui ainda cabem duas situações sub adjacentes.

2.1.1 - Se  $B < A \rightarrow \begin{cases} (B - A) < 0 \\ -A < 0 \\ \frac{-A}{B - A} < 0 \end{cases}$

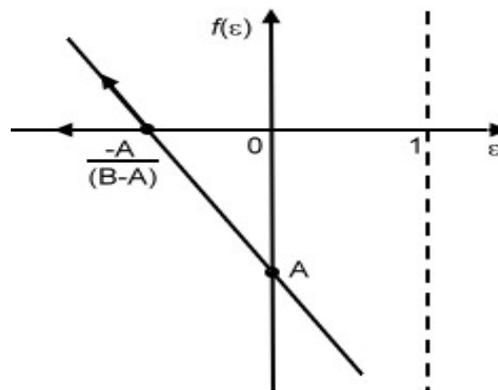


Figura 4-14 –  $A < 0, B < 0$  e  $B < A$

Neste caso não existe nenhuma proporção  $\epsilon$  de alguma estratégia mutante  $y$  tal que a estratégia residente  $x$  seja evolutiva estável. Isso quer dizer que mesmo que  $x$  esteja sozinha na população ela não sobreviveria? Quer dizer apenas que para qualquer proporção de uma possível estratégia mutante maior que zero,  $\mu(x,x)$  deve ser menor que  $\mu(y,x)$ .

Neste caso, o único perfil em equilíbrio é  $(y,y)$ .

As condições  $A < 0, B < 0$  e  $B < A$  não garantem que o perfil  $(x,x)$  seja um equilíbrio de Nash, nem que a estratégia residente  $x$  seja evolutivamente estável.

Uma ilustração deste caso está na Figura 4-15 com  $x = [1 \ 0]$   $y = [0 \ 1]$ .

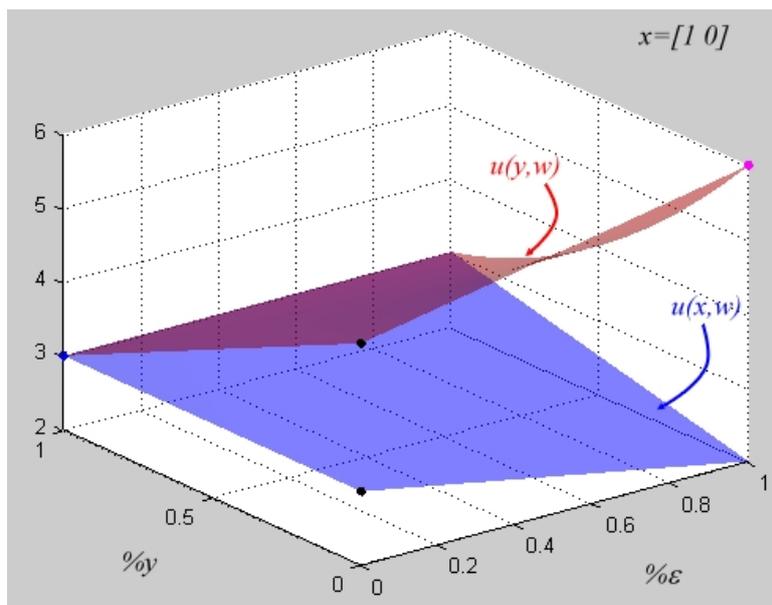


Figura 4-15 – Neste jogo o plano de  $\mu(x,w)$  mostra que a estratégia  $x$  não é evolutiva estável

2.1.2 - Se  $B > A \rightarrow \begin{cases} (B - A) > 0 \\ \frac{-A}{(B - A)} > 1 \\ \varepsilon > \frac{-A}{(B - A)} \end{cases}$

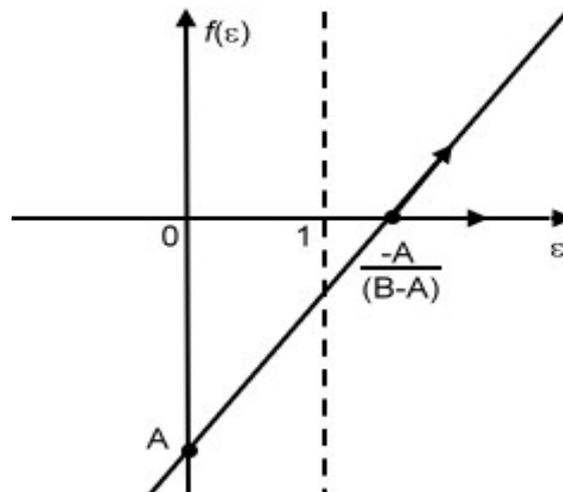


Figura 4-16 –  $A < 0, B < 0$  e  $B > A$

Neste caso  $x$  nunca será evolutivamente estável, pois a condição de estabilidade nunca será satisfeita.

O único perfil em equilíbrio será  $(y,y)$ .

As condições  $A < 0, B < 0$  e  $B > A$  não garantem que o perfil  $(x,x)$  seja um equilíbrio de Nash nem que a estratégia residente  $x$  seja evolutivamente estável.

No exemplo com matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ , observamos na Figura 4-17

que  $\mu(x,x)$  é sempre maior que  $\mu(y,w)$ .

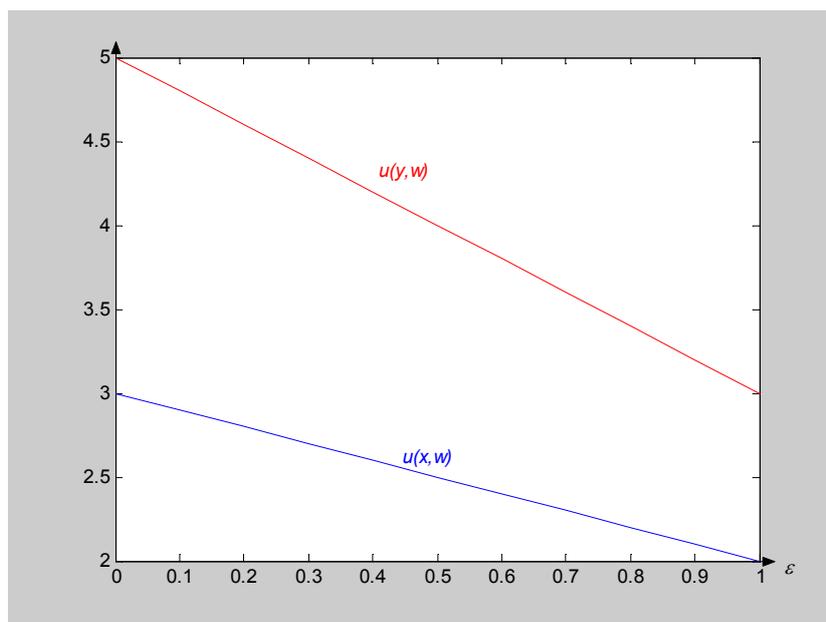


Figura 4-17 – Neste jogo a estratégia  $x$  não é evolutiva estável.

$$2.2 - \text{Se } B > 0 \rightarrow \begin{cases} (B - A) > 0 \\ \frac{-A}{(B - A)} < 1 \end{cases}$$

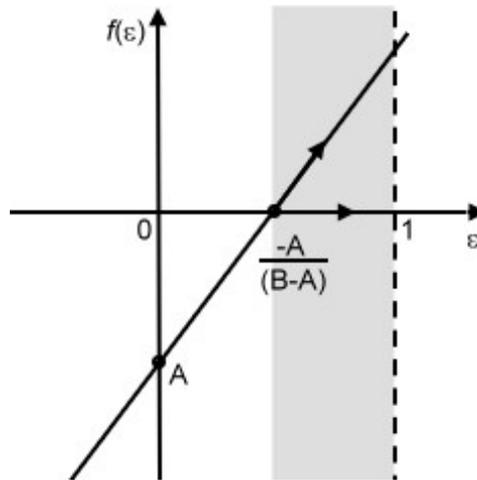


Figura 4-18 –  $A < 0$  e  $B > 0$

À primeira vista parece acontecer uma incoerência afirmar que se a estratégia mutante infectar a população numa pequena quantidade, a estratégia residente não será evolutiva estável, mas se a proporção das mutantes aumentar além de um certo ponto  $\frac{-A}{(B - A)}$ , a estratégia residente se tornará estável.

O que acontece não é uma incoerência e esta situação advém de uma característica da estratégia mutante na qual ela não é eficiente contra si mesma, desde que  $B > 0$   $\mu(y,y) < \mu(x,y)$ . Por outro lado, temos que a estratégia mutante  $y$  é eficiente contra a estratégia residente, ou seja, se  $A < 0$ ,  $\mu(x,y) > \mu(x,x)$ . Então, enquanto houver poucos indivíduos mutantes na população, esses mesmos mutantes conseguem proliferar até que, após certo ponto, começa a acontecer antropofagia e as estratégias mutantes começam a se aniquilar. Este estado pode ser chamado de coexistência e ocorre quando cada uma das estratégias, residentes e mutantes, são melhores umas contra as outras, ao invés delas serem melhores contra elas mesmas.

Nesta situação em particular,  $x$  irá sobreviver numa população bimórfica, e a população convergirá para um estado misto com uma proporção  $\varepsilon = \frac{-A}{(B - A)}$  de

estratégias mutantes  $y$  e uma proporção igual a  $1 - \frac{-A}{(B-A)}$  de estratégias residentes  $x$ . Este é um típico equilíbrio misto.

Os possíveis equilíbrios são  $(x,y)$  e  $(y,x)$ , com cada estratégia em sua devida proporção. Portanto o perfil  $(x,x)$  não será um equilíbrio de Nash fazendo com que a estabilidade evolutiva do perfil formado por estratégias residentes não possa ser garantida, desde que existe uma proporção de estratégias mutantes na população que implica em  $\mu(x,w) < \mu(y,w)$ .

Por Exemplo, sendo uma matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  e  $x$  e  $y$  sendo estratégias puras, temos  $B = \mu(x,y) - \mu(y,y) > 0$

$$B = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) - \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 6 - 2 = 4 > 0$$

$$E A = \mu(x,x) - \mu(y,x) < 0$$

$$A = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) - \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = (3 - 5) = -2 < 0$$

$$\text{Então } \varepsilon > \frac{-A}{(B-A)} = \frac{2}{4+2} = \frac{1}{3}$$

Assim para um  $\varepsilon > \frac{1}{3}$ , por exemplo,  $\varepsilon = \frac{2}{3}$  teremos que a condição de estabilidade  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  deverá ser satisfeita.

$$\mu(x,w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 5$$

$$\mu(y,w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 3$$

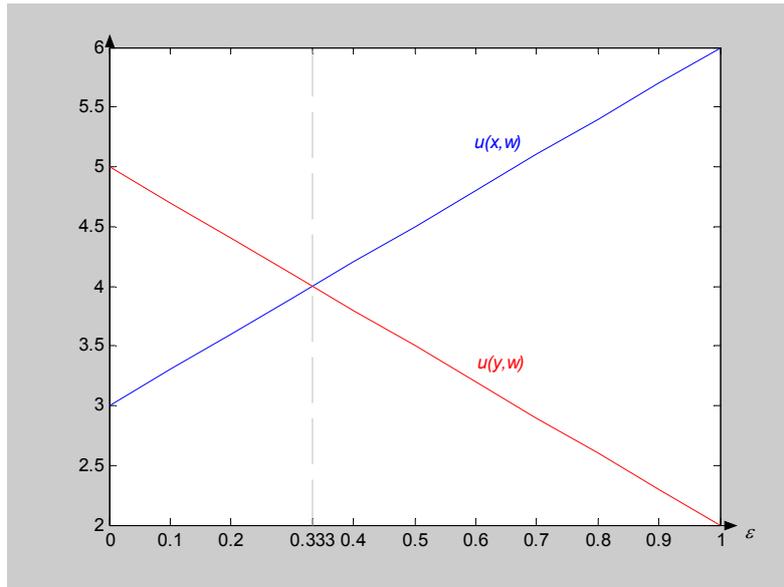


Figura 4-19 – Os *payoffs*  $\mu(x,w)$  mostram que  $x$  só é evolutiva estável para proporções da estratégia invasoras maiores que 33%.

Portanto se  $y$  aparece na população numa proporção maior que 33,3333%  $x$  é evolutiva estável, porém o perfil  $(x,x)$  não é um equilíbrio de Nash, como se pode deduzir através da matriz de *payoff*.

No decorrer da evolução, a estratégia invasora aumentará em proporção até tomar 1/3 da população. Neste ponto  $\mu(x,w)=\mu(y,w) = 4$ . Se a proporção de  $y$  aumentar além de 1/3,  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  e a proporção de  $y$  volta a diminuir. O resultado final será uma população mista com 1/3 da população ocupada de estratégias  $y$  e 2/3 da população ocupada com estratégias  $x$ .

Os possíveis equilíbrios são  $(x,y)$  e  $(y,x)$  na devida proporção, portanto o perfil  $(x,x)$  não será um equilíbrio de Nash e a estabilidade evolutiva da estratégia residente não pode ser garantida desde que existe um proporção de estratégias mutantes na população que implica em  $\mu(x,w) < \mu(y,w)$ .

Porém o perfil  $(x,x)$  pode ser um equilíbrio misto, considerando-se  $x$  uma estratégia mista  $[1-\varepsilon, \varepsilon]$  e  $\varepsilon = \frac{-A}{(B-A)}$ . Para este exemplo  $x$  é  $[2/3, 1/3]$  e o

equilíbrio irá acontecer se  $\mu_1(x,x) \geq \mu_1(y,x)$  e  $\mu_2(x,x) \geq \mu_2(x,y)$

$$\mu_1(x,x) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 4$$

$$\mu_1(e^1, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 4$$

$$\mu_1(e^2, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 4$$

Como  $\mu_1(e^1, x) = \mu_1(e^2, x)$ , então  $\mu_1(y, x) = \mu_1(e^1, x) = \mu_1(e^2, x) \forall y$ . Temos então a igualdade  $\mu(x, x) = \mu(y, x)$ .

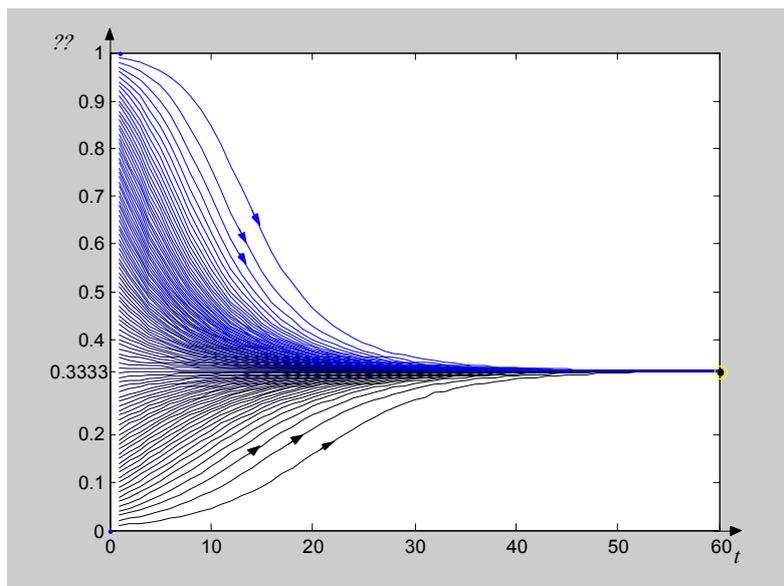
$$\mu_2(x, e^1) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\mu_2(x, e^2) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$$

$$\text{Então } v_2(x, y) = \mu_2(x, e^1) = \mu_2(x, e^2) = \mu_2(x, x)$$

Assim temos que  $v_1(x, x) = \mu_1(y, x)$  e  $\mu_2(x, x) = \mu_2(x, y)$  o que caracteriza  $(x, x)$  como um equilíbrio misto de Nash.

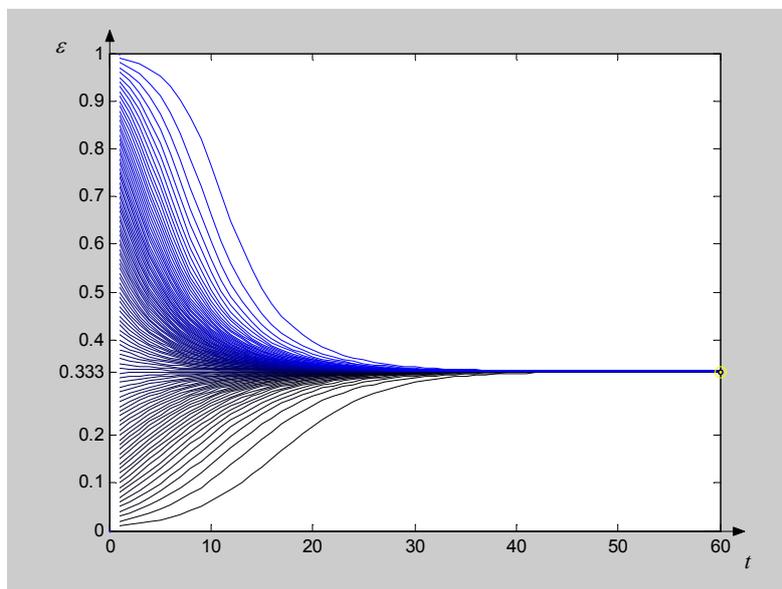
É interessante observar, que neste caso, a dinâmica do replicador, observada na Figura 4-20, propicia uma convergência monotônica para o equilíbrio até atingir a estabilidade em  $\varepsilon = 1/3$ .



**Figura 4-20 – Dinâmica do replicador a partir de uma certa proporção de mutantes**

Um outro exemplo é o jogo dos falcões e dos pombos com uma matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Considerando-se que existam na população, duas estratégias puras que são os vértices do poliedro de estratégias, temos que  $A < 0$  e  $B > 0$  e como vimos, nesta situação a condição  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  só será satisfeita para  $\varepsilon > \frac{-A}{(B-A)} = \frac{1}{3}$  e que o estado da população convergirá para um equilíbrio misto em  $[\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}]$ .

A população convergirá para uma situação em que os mutantes ocuparão 1/3 (Figura 4-21) desta população. O estado final desta população será o equilíbrio misto. A estabilidade, porém, só será alcançada se  $\varepsilon > \frac{1}{3}$ . Ou seja, a estabilidade da estratégia residente pura  $x = e_1$ , só será alcançada se a estratégia mutante vier em uma proporção maior que 1/3 da população. Caso  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  teremos que  $\mu(x,w) = \mu(y,w)$  e a estratégia residente pura  $x$  não será evolutivamente estável, em vez disso o estado final da população com 2/3 de estratégias residentes puras  $x = e_1$  e 1/3 de estratégias mutantes  $y = e_2$ , será uma indicativa de qual estratégia poderá formar um equilíbrio simétrico.



**Figura 4-21 – Dinâmica do replicador convergindo para uma população mista.**

Os *payoffs* esperados das estratégias mutante e residente em função de suas proporções na população são visto na Figura 4-22.

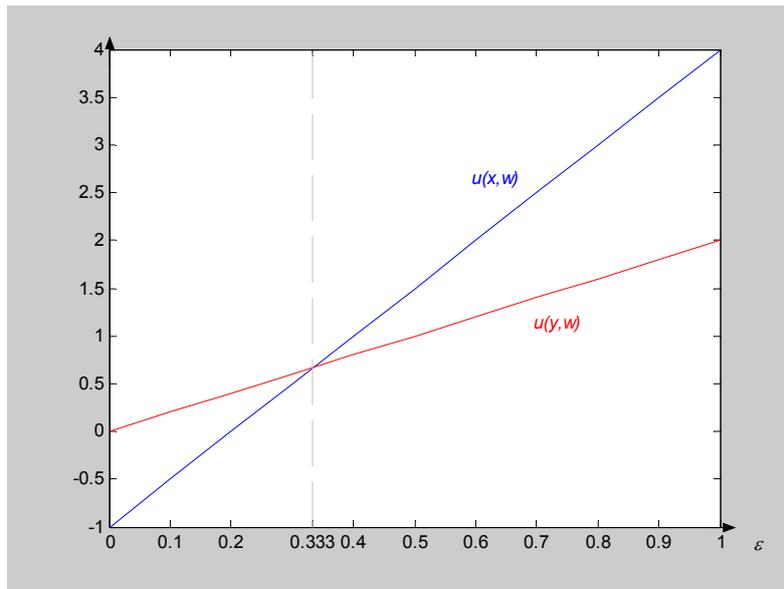


Figura 4-22 – Os *payoffs*  $\mu(x,w)$  mostram que  $x$  só é evolutiva estável para proporções da estratégia invasoras maiores que 33%.

2.3 - Se  $B = 0 \rightarrow \begin{cases} (B - A) = -A > 0 \\ \frac{-A}{(B - A)} = 1 \end{cases}$

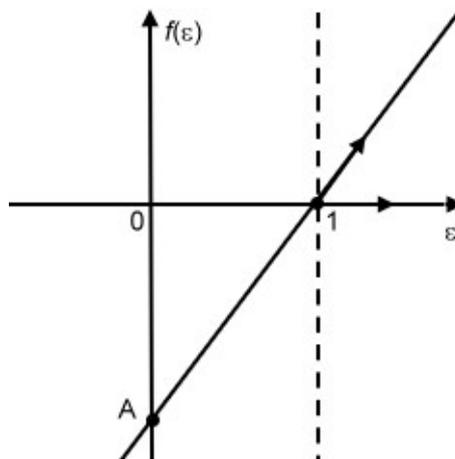


Figura 4-23 –  $A < 0$  e  $B = 0$

Para que a condição de estabilidade  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  seja satisfeita é necessário que  $\epsilon > 1$ , o que na prática é impossível. Assim a estratégia residente  $x$  não é evolutivamente estável.

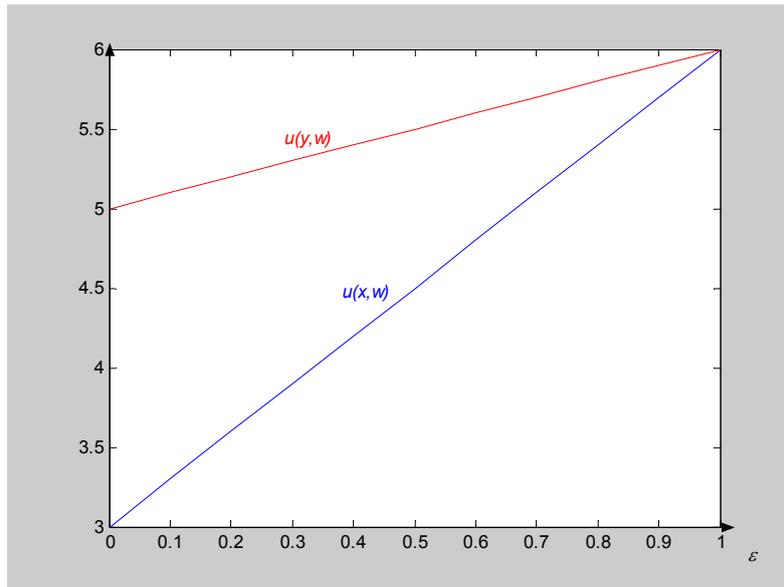


Figura 4-24 – Os *payoffs*  $\mu(x,w)$  mostram que  $x$  não é evolutiva estável.

Mesmo sob estas condições aparecem os equilíbrios,  $(x,y)$ ,  $(y,x)$  e  $(y,y)$

Por exemplo, seja a matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  e  $x$  e  $y$  estratégias puras.

$$B = \mu(x, y) - \mu(y, y) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = 6 - 6 = 0$$

$$A = \mu(x, x) - \mu(y, x) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = 3 - 5 = -2 < 0$$

Se  $\varepsilon \leq 1$  quer dizer que a estratégia mutante pode estar numa proporção de até 100% da população. Se pegarmos o ponto extremo desta faixa, isto é,  $\varepsilon = 1$  temos:

$$\mu(x, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \quad \mu(x, w) = \mu(y, w)$$

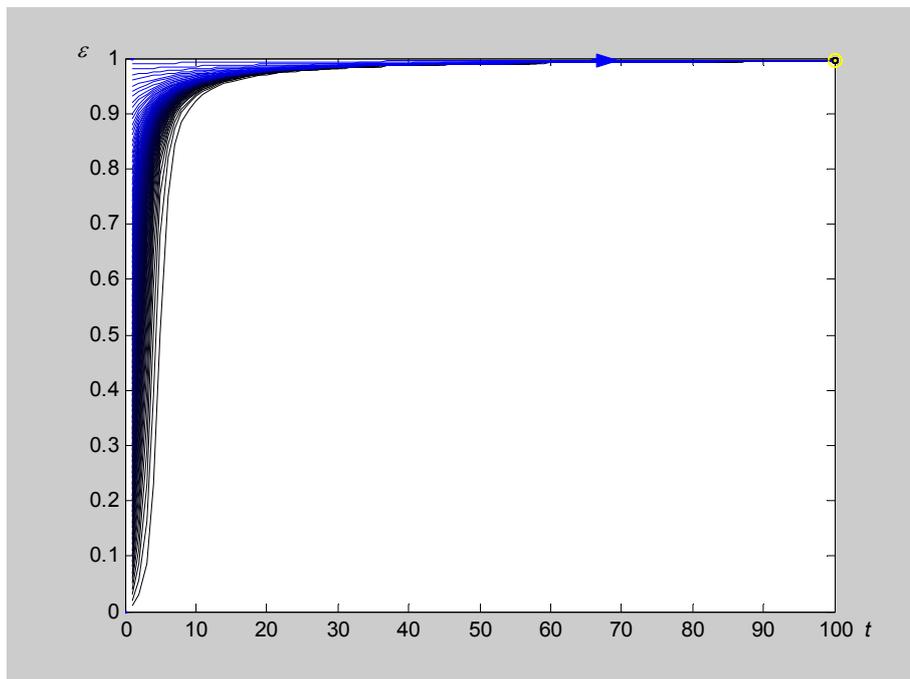
$$\mu(y, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$$

E para qualquer valor de  $\varepsilon < 1$ ,  $u(x, w) < u(y, w)$ , portanto  $x$  não é evolutiva estável. Além disso, se observarmos a matriz de *payoff* vemos que existem três equilíbrios de Nash em estratégias puras. Como o jogo é simétrico podemos escrever;

$$\begin{array}{c}
 \\
 x \\
 y
 \end{array}
 \begin{array}{cc}
 x & y \\
 \left[ \begin{array}{cc}
 3,3 & \underbrace{6,5}_{NE} \\
 \underbrace{5,6}_{NE} & \underbrace{6,6}_{NE}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Assim os perfis de estratégias puras  $(x,y)$ ,  $(y,x)$  e  $(y,y)$  são equilíbrios de Nash, mas  $(x,x)$  não é um equilíbrio estável de Nash, mas  $(y,y)$  é um equilíbrio estável como confirma a dinâmica do replicador na Figura 4-25.

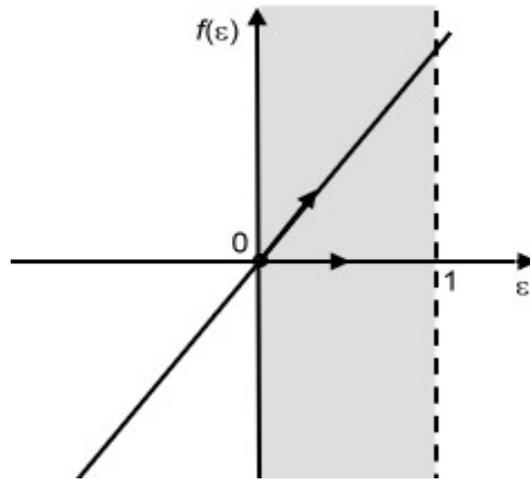
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0220895/CA



**Figura 4-25 – A dinâmica do replicador convergindo para um estado em que as estratégias invasoras dominam a população.**

**Possibilidade 3 - A = 0**

$$3.1 - \text{Se } B > 0 \rightarrow \begin{cases} (B - A) > 0 \\ \frac{-A}{(B - A)} = 0 \end{cases}$$



**Figura 4-26 - A = 0 e B > 0**

Neste caso, a condição de estabilidade  $u(x, w) > u(y, w)$  é satisfeita  $\forall 0 < \epsilon \leq 1$  e os possíveis equilíbrios são  $(x, x)$ ,  $(x, y)$  e  $(y, x)$ .

As condições  $A=0$  e  $B>0$ , garantem que o perfil  $(x, x)$  seja um equilíbrio de Nash e que  $x$  seja evolutivamente estável.

Como exemplo temos o jogo dos falcões e dos pombos, já visto no exemplo do caso em que  $A < 0$  e  $B > 0$ , com uma matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , com a diferença que aqui as estratégias  $x$  e  $y$  não são puras, mas sim mistas e a estratégia residente  $x$  igual à estratégia mista  $[\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}]$ , assim:

$$B = \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{bmatrix} \right) - \left( \begin{bmatrix} y_1 & 1-y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3}(2-3y_1)^2 > 0$$

$$E A = \mu(x, x) - \mu(y, x) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \left[ \begin{smallmatrix} 2/3 & 1/3 \end{smallmatrix} \right] \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & 1-y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

Neste caso, temos que  $A=0$  e  $B>0$ . Esta situação está ilustrada na Figura 4-27, onde temos  $\mu(x,w)$  e  $\mu(y,w)$  como função de  $\varepsilon$  e  $y_1$ . Observamos que a superfície  $\mu(x,w)$  é sempre maior ou igual à superfície de  $\mu(y,w)$  para todo  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  e todo  $0 \leq y_1 \leq 1$ , isto é, seja qual for a estratégia mutante  $y = [y_1 \ 1 - y_1]$  e sua proporção na população  $\varepsilon$ , a estratégia pura  $e_1$  deverá ser jogada em  $2/3$  das vezes e a estratégia pura  $e_2$  em  $1/3$  das vezes. Isto é exatamente o que significa jogar uma estratégia mista.  $\left[ \begin{smallmatrix} 2/3 & 1/3 \end{smallmatrix} \right]$

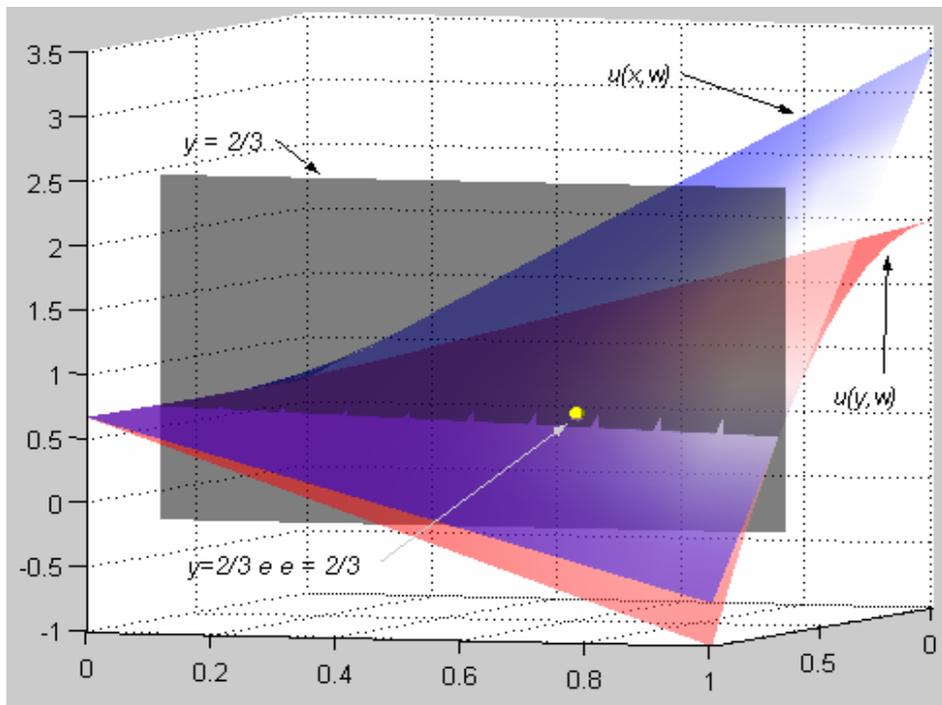


Figura 4-27 – Planos de payoffs representando uma estratégia residente  $x$  estável , numa população sendo invadidas por estratégias em várias proporções.

De outra forma, admitindo-se que a invasão de um mutante à população é feita numa proporção  $\varepsilon$  de mutantes contra  $(1-\varepsilon)$  de estratégia residentes, obtemos as seguintes superfícies para  $\varepsilon$  igual a 0.1,  $2/3$  e  $1/3$  respectivamente.

Nas Figura 4-28, Figura 4-29 e Figura 4-30 temos as superfícies de  $\mu(x,w)$  em azul e de  $\mu(y,w)$  em vermelho. Variando-se o perfil  $[x \ y] \forall 0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$  e portanto, varrendo todos os perfis possíveis, consegue-se visualizar as

regiões onde  $\mu(x,y) > \mu(y,w)$  e as regiões em que  $\mu(y,w) > \mu(x,w)$  para os respectivos níveis de invasão.

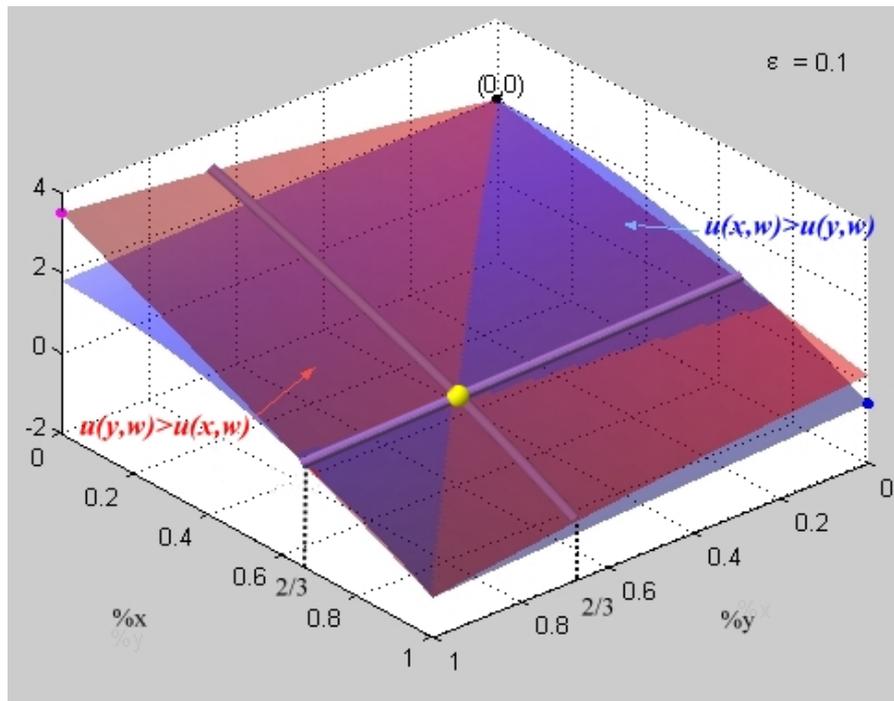


Figura 4-28 – Os planos de payoffs  $\mu(x, w)$  e  $\mu(y, w)$  para  $\epsilon = 0.1$ , ilustram as condições de estabilidade evolutiva da estratégia residente  $x$ .

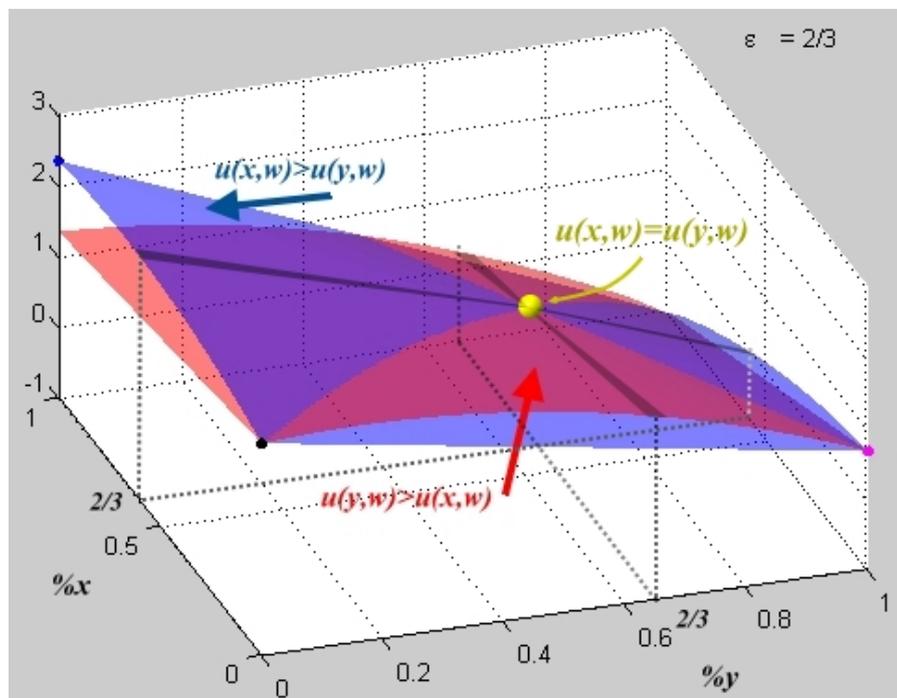


Figura 4-29 – Os planos de payoffs  $\mu(x, w)$  e  $\mu(y, w)$  para  $\epsilon = 2/3$ , ilustram as condições de estabilidade evolutiva da estratégia residente  $x$ .

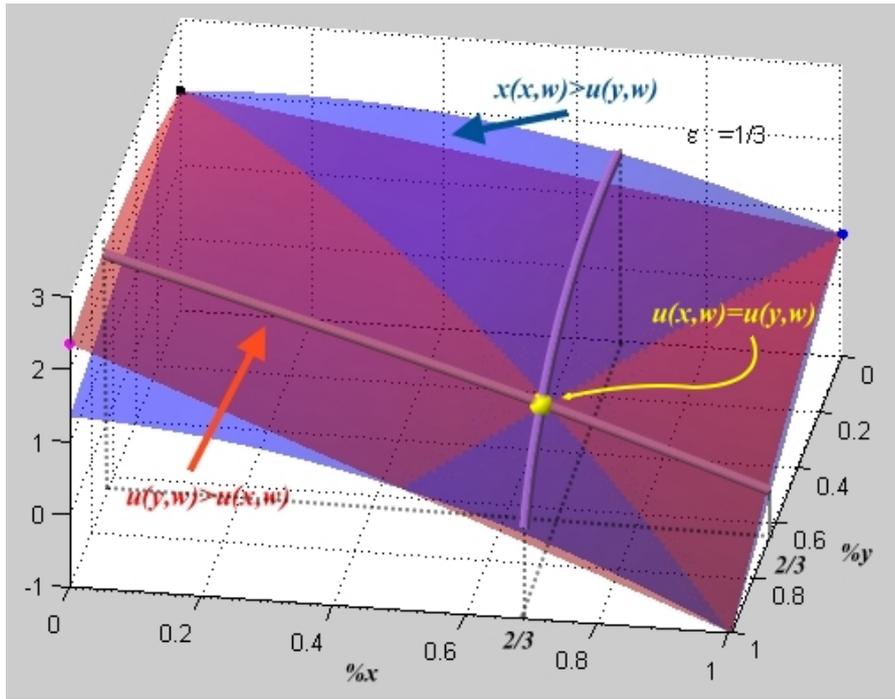


Figura 4-30 – Os planos de payoffs  $\mu(x, w)$  e  $\mu(y, w)$  para  $\varepsilon = 1/3$ , ilustram as condições de estabilidade evolutiva da estratégia residente  $x$ .

3.2 - Se  $B < 0 \rightarrow \begin{cases} (B - A) < 0 \\ -A \\ (B - A) = 0 \end{cases}$

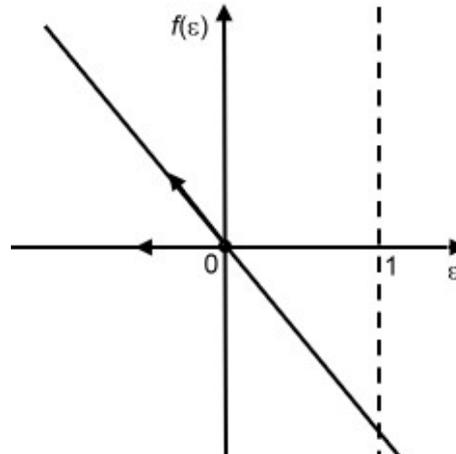


Figura 4-31 –  $A = 0$  e  $B < 0$

Observa-se a partir da Figura 4-31 acima, que a condição de estabilidade evolutiva é satisfeita  $\forall \varepsilon < 0$ . Na prática é impossível que a proporção de uma estratégia seja menor que zero, portando a condição de estabilidade evolutiva nunca será satisfeita. Os possíveis equilíbrios são  $(x, x)$  e  $(y, y)$

Por exemplo, considerando a seguinte matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  e  $x$  e  $y$

estratégias puras.

$$B = \mu(x, y) - \mu(y, y) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = 2 - 5 = -3$$

$$A = \mu(x, x) - \mu(y, x) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} - \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = 3 - 3 = 0$$

Se adotarmos um  $\varepsilon > 0$  qualquer teremos;

$$\mu(x, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 - \varepsilon$$

$$\mu(y, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 3 + 2\varepsilon$$

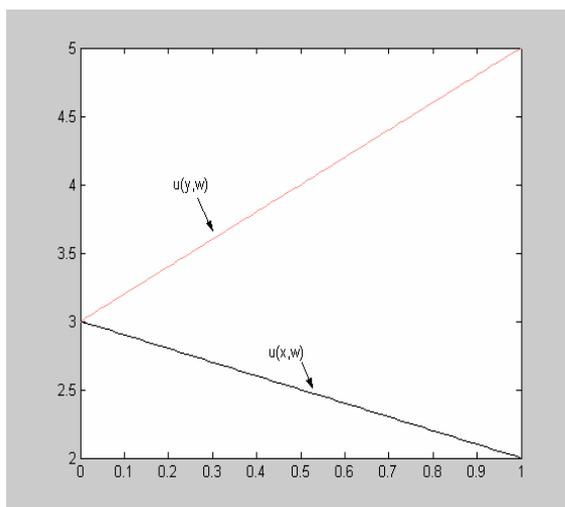


Figura 4-32

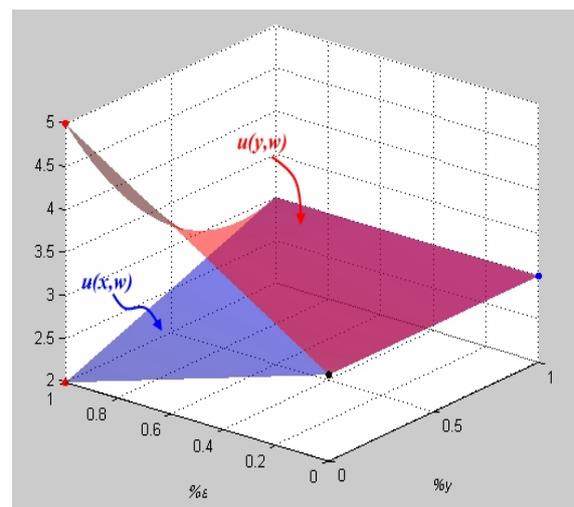


Figura 4-33

As figuras acima ilustram a estabilidade evolutiva da estratégia invasora  $y$

Então  $\mu(x, w) \leq \mu(y, w) \quad \forall 0 \leq \varepsilon \leq 1$

### 3.3 - $B=0$

Esta é uma condição particular em que todos os perfis de estratégias puras  $(x, x)$ ,  $(x, y)$ ,  $(y, x)$  e  $(y, y)$  estão em equilíbrio. Portanto qualquer estratégia mista  $z$  formará um equilíbrio simétrico  $(z, z)$ . Neste caso a estratégia residente  $x$  nunca será evolutivamente estável, desde que  $(B - A) = 0$  e  $A = 0$ .

$$\mu(x, w) - \mu(y, w) = (B - A)\varepsilon + A = 0 \quad \forall \varepsilon$$

A teoria dos jogos evolutivos afirma que a condição de estabilidade evolutiva  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  para uma dada proporção de invasão  $\varepsilon$ , implica na existência de um perfil de equilíbrio  $(x,x)$  e é equivalente às condições:

1.  $\mu(x,x) \geq \mu(y,x)$
2. Se  $\mu(x,x) = \mu(y,x)$ , então  $\mu(x,y) > \mu(y,y)$

A análise recém mostrada conclui, confirmando a teoria, que a condição  $\mu(x,x) > \mu(y,x)$  não garante que  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$ , pois se  $B < 0$ , ou seja, se  $\mu(x,y) < \mu(y,y)$  e  $\varepsilon \geq \frac{-A}{(B-A)}$ ,  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  não é satisfeita, porém garante que o perfil  $(x,x)$  seja um equilíbrio de Nash, mesmo que os perfis formados por estratégias mutantes  $(y,y)$  e estratégias mistas também possam ser equilíbrios de Nash.

Se por exemplo, a matriz de *payoff*  $\Delta = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , temos que  $A > 0$ ,  $B < 0$ . Se

$\varepsilon \geq \frac{-A}{(B-A)}$ , isto é,  $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$  teremos:

$$\mu(x, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

$$\mu(y, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

Ou de forma mais ilustrativa, o mesmo pode ser visto na Figura 4-34.

Como,  $\mu(x,w) = \mu(y,w)$ , o *payoff*  $\mu(z,w)$ , para  $z$  sendo qualquer combinação convexa de  $x$  e  $y$ , será, pela linearidade de  $\mu$ , igual a  $7/2$  indicando que a estratégia mista  $[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}]$  será uma melhor réplica para si mesma e portanto formará um

equilíbrio simétrico  $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$ .

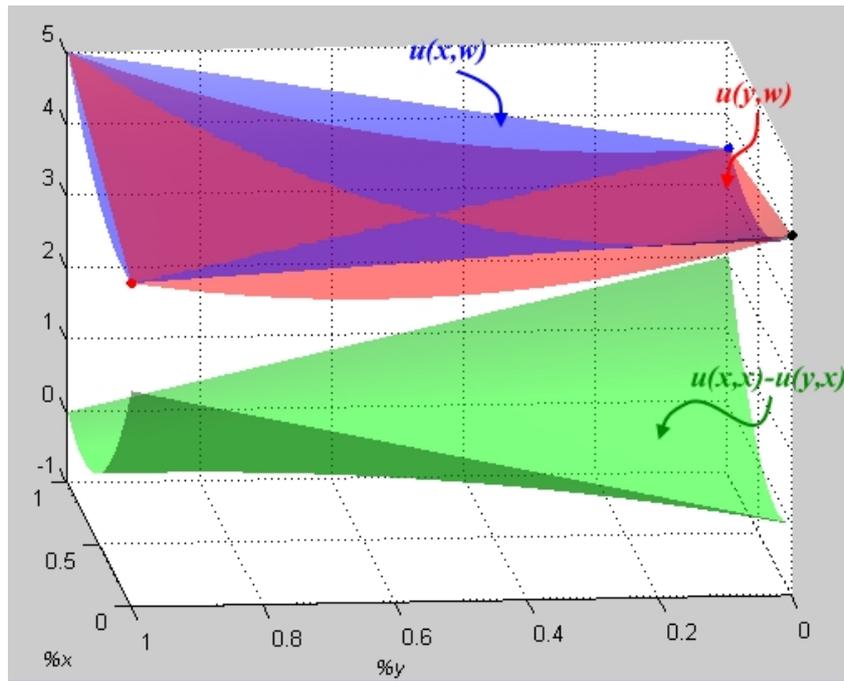


Figura 4-34 – Planos dos payoffs  $\mu(x,w)$ ,  $\mu(y,w)$  para  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  mostram que a condição  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  ocorre nas mesmas condições em que  $\mu(x,y) > \mu(y,x)$

Se  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , por exemplo,  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  teremos;

$$\mu(x, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{12}{3}$$

$$\mu(y, w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{10}{3}$$

Assim,  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  e,

$$\mu(w, w) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{34}{9} = \frac{11.3333}{3} = 3.78$$

Vemos com esses resultados que  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$  não é melhor réplica para si própria, desde que a estratégia pura  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  obtém um *payoff* melhor contra ela.

Portanto o perfil  $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$  não é um equilíbrio de Nash.

Mesmo que  $\mu(x,x) < \mu(y,x)$ , ou seja, se  $A < 0$ , a condição  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  pode ser satisfeita se  $\mu(x,y) > \mu(y,y)$ , isto é, se  $B > 0$  e  $\varepsilon > \frac{-A}{(B-A)}$ . Neste caso o

único equilíbrio misto é o formado pela estratégia mista  $\left[ \frac{B}{(B-A)} \quad \frac{-A}{(B-A)} \right]$ ,

onde  $\frac{B}{(B-A)} = 1 - \frac{-A}{(B-A)}$ .

Na Figura 4-35 no ponto em que  $x_I = 1$  e  $y_I = 0$  temos  $B < 0$ ,  $A > 0$  e  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$ , porém se  $\varepsilon > 1/2$ , por exemplo  $2/3$  Figura 4-36, naquele mesmo ponto  $\mu(x,w) < \mu(y,w)$

Os outros possíveis equilíbrios, são equilíbrios em estratégias puras  $(x,y)$  ou  $(y,x)$ .

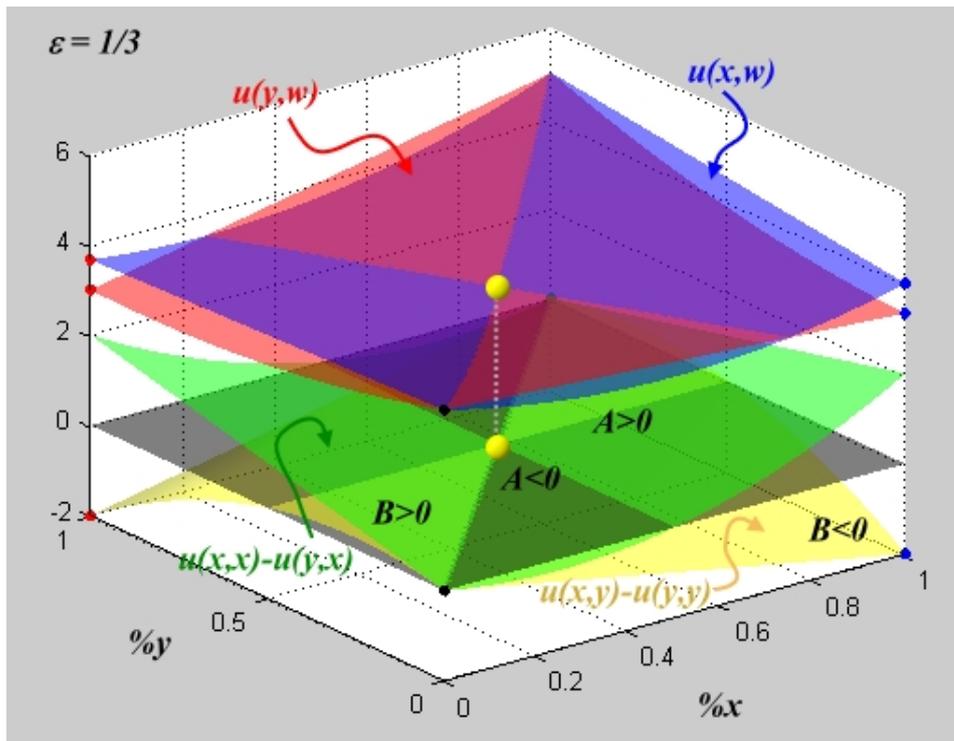


Figura 4-35 – As regiões em que qualquer estratégia residente  $x$  são evolutivas estáveis dependem não só da condição  $A > 0$ , mas também do nível de invasão  $\varepsilon$ .

A condição  $\mu(x,x) < \mu(y,x)$  impede que  $(x,x)$  seja um equilíbrio de Nash.

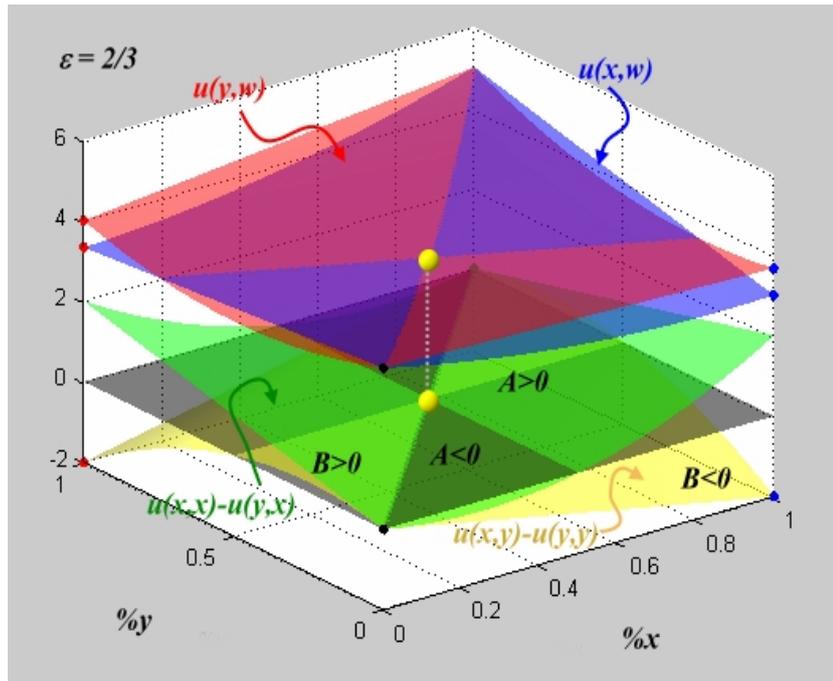


Figura 4-36 – Similar à Figura 4-35, mas com  $\epsilon = 2/3$

E o que a condição de estabilidade implica em termos de equilíbrio? Ela sozinha não garante nenhum tipo específico de equilíbrio, mas garante sempre um tipo de equilíbrio qualquer na convergência. A condição de estabilidade  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  garante apenas que as seguintes condições nunca serão alcançadas.

1 - Evita que o equilíbrio  $(y,y)$  seja alcançado desde que, após a evolução, só sobrarão estratégias residentes  $x$  na população e portanto a estratégia mutante não será mais uma opção.

2 -  $A < 0, B > 0$  e  $\epsilon \leq \frac{-A}{(B-A)}$ . Estas condições levam aos equilíbrios

simétricos  $(x,y)$  e  $(y,x)$  e  $\left[ \frac{B}{(B-A)}, \frac{-A}{(B-A)} \right]$ , mas nunca  $(x,x)$ .

3 -  $(x,x)$  ser um equilíbrio evolutivo estável se  $\epsilon > \frac{-A}{(B-A)}$ . Para  $A < 0, B >$

$0$  e  $\epsilon > \frac{-A}{(B-A)}$ ,  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$ , mas  $(x,x)$  não é equilíbrio de Nash. Portanto o

uso do *payoff* esperado como aptidão pode acontecer num jogo onde  $(x,x)$  não é um equilíbrio de Nash. Este caso vai contra a afirmação que o *payoff* esperado usado como aptidão sempre leva a evolução a encontrar uma estratégia  $x$  tal que quando  $\mu(x,w) > \mu(y,w) \forall y \neq 0$  o jogo convergirá para um equilíbrio

evolutivamente estável  $(x,x)$ . Para usar o *payoff* esperado como aptidão é necessário garantir que a proporção da estratégia mutante  $\varepsilon$  nunca será maior que  $\frac{-A}{(B-A)}$ , pois se isto for garantido, a condição  $A < 0, B > 0$  e  $\varepsilon > \frac{-A}{(B-A)}$  não mais existirá e em todos os outros casos onde  $\mu(x,w) > \mu(y,w)$  o perfil  $(x,x)$  será um equilíbrio evolutivo estável.

Um resumo das condições analisadas, se geram ou não estabilidade evolutiva e quais e quais os equilíbrios resultantes, está apresentado na Tabela 4-1. Como observado lá para que  $(x,x)$  seja um equilíbrio estável são exigidas uma das três condições  $A > 0$ , ou  $A = 0$  e  $B > 0$  exatamente conforme diz a teoria.

| Não geram estabilidade   | Equilíbrios           | Geram estabilidade  | Equilíbrios       |
|--|-----------------------|---|-------------------|
| $\left\{ \begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ \varepsilon \geq \frac{-A}{(B-A)} \end{array} \right.$ | $(x,x), (y,y)$        | $\left\{ \begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ \varepsilon < \frac{-A}{(B-A)} \end{array} \right.$ | $(x,x), (y,y)$    |
| $\left\{ \begin{array}{l} A > 0 \\ B = 0 \\ \varepsilon = 1 \end{array} \right.$                   | $(x,x), (y,x)$        | $\left\{ \begin{array}{l} A > 0 \\ B > 0 \end{array} \right.$                                   | $(x,x)$           |
| $\left\{ \begin{array}{l} A < 0 \\ B > 0 \\ \varepsilon \leq \frac{-A}{(B-A)} \end{array} \right.$ | $(x,y), (y,x)$        | $\left\{ \begin{array}{l} A < 0 \\ B > 0 \\ \varepsilon > \frac{-A}{(B-A)} \end{array} \right.$ | $(x,y)$ e $(y,x)$ |
| $\left\{ \begin{array}{l} A < 0 \\ B \leq 0 \end{array} \right.$                                   | $(y,y), (x,y), (y,x)$ | $\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B > 0 \end{array} \right.$                                   | $(x,x)$           |
| $\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B \leq 0 \end{array} \right.$                                   | $(x,x)$               |   |                   |

Tabela 4-1 – Condições para equilíbrio e estabilidade em uma população

## 4.1 Assimetria e Estabilidade em Multi Populações

Uma hipótese mencionada anteriormente foi a existência de uma única população de indivíduos. Em muitas situações, as interações acontecem entre indivíduos de populações distintas. Na biologia, nós podemos pensar em competições entre o dono de um território e um intruso. A analogia na economia é uma situação de mercado na qual o titular tem que competir com uma empresa concorrente. Um outro exemplo seria um mercado com compradores e vendedores.

Em uma situação evolutiva, isto pode ser modelado através de múltiplas (grandes) populações, onde cada população representa um papel (economicamente) distinto. Para maiores detalhes veja, Samuelson [Ref: 3] e Weibull [Ref: 1].

Uma noção bastante importante na teoria dos jogos evolutivos é a diferença entre jogos simétricos e assimétricos. No primeiro caso os jogadores partem da mesma condição inicial. Não existem diferenças entre eles. Isto significa que eles podem se comportar do mesmo modo ganhando o mesmo *payoff*. Assim, diferenças no tamanho, idade etc. não são levadas em conta. Porém muitos jogos em sistemas reais são assimétricos e esta assimetria pode ser percebida de antemão. Na biologia as interações são em sua maioria assimétricas.

Por exemplo, a competição entre dois indivíduos de espécies diferentes por um território de procriação, ocorre na maioria das vezes, entre um indivíduo já possuindo o recurso, isto é, o protetor, e um outro indivíduo tentando obter este recurso, isto é, o invasor. A posição do protetor poderia trazer-lhe certas vantagens na competição as quais deveriam ser refletidas na matriz de *payoff* do jogo como uma assimetria.

O modelo que representa a interação entre indivíduos que pertencem a grupos diferentes é chamado de modelo de multi-população. Este modelo descreve conflitos nos encontros entre indivíduos de diferentes grupos ou populações. Até mesmo se os indivíduos possuírem o mesmo conjunto de estratégias e *payoffs*, o jogo, ainda assim pode ser representado deste modo. Note que modelos deste tipo podem ser requeridos para examinar a dinâmica de algoritmos co-evolutivos. Além disso, desde que o modelo é uma generalização, ele pode ser facilmente reduzido de volta para o modelo de uma população. Note

que no modelo de multi-população as espécies não serão extintas, desde que são representadas por populações, contudo comportamentos dentro das espécies, que são os diversos indivíduos ou estratégias dentro da população irão. Assim a pergunta é, que combinação de comportamentos será alcançada através da dinâmica de seleção neste modelo?

No caso de múltiplas populações, cada jogador possui uma população de estratégias e escolhe uma de suas estratégias ao acaso para confrontá-la com as estratégias dos outros jogadores. O tamanho da população  $i$  de cada espécie pode ser expressa como  $n^i$  e o número de tipos específicos  $k$ , dentro da  $i$ -ésima espécie, é  $n_k^i$ . Cada população consiste de diferentes tipos de indivíduos que se comportam de uma maneira especificada. O tamanho das populações é constante, assim espécies não se extinguem. Para ser constante é necessário que se um tipo de comportamento se extingue outro tipo de comportamento domine, ou surja na população.

Neste modelo uma interação ocorre entre espécies. Isto significa que é selecionado um indivíduo de cada espécie e um *payoff* é associado a cada uma das espécies na partida representada por um perfil.

Deixe  $P_i$  ser o conjunto de indivíduos numa população monomórfica  $i$ , com  $i = 1, 2$ . Em cada competição, um membro de  $P_1$  escolhido aleatoriamente, encontra-se com um membro de  $P_2$  escolhido também aleatoriamente para jogar um jogo bimatricial  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ . Como no caso de uma única população, uma EEE deve ser pelo menos um equilíbrio de Nash. Então deixe  $x = (x_1, x_2) \in \Theta = \Delta_1 \times \Delta_2$  ser um par de estratégias no equilíbrio de Nash, isto é,

$$x_1^T A x_2 \geq y_1^T A x_2 \quad \forall y_1 \in \Delta_1$$

$$x_2^T B x_1 \geq y_2^T B x_1 \quad \forall y_2 \in \Delta_2$$

**Condição 4-1**

Ou seja,  $x \in \tilde{\beta}(x)$ .

Para serem evolutivamente estáveis as estratégias em equilíbrio de Nash devem ser imunes contra qualquer estratégia mutante em uma ou ambas as

populações. Suponha que algum mutante jogando a estratégia  $y_1 \in \Delta_1$  apareça na população  $P_1$ . Analogamente à Equação 3-3 um equilíbrio de Nash  $(x_1, x_2)$  é dito ser estável contra um mutante  $y_i$  se a estratégia titular  $x_i$  tem uma performance melhor do que a estratégia  $y_i$ . Foi visto que esta condição é satisfeita se a estratégia residente sai-se melhor contra si mesmo do que uma estratégia mutante contra a estratégia residente, ou se a estratégia residente se sai melhor contra a estratégia mutante do que a mutante contra si mesma, no caso em que ambas as estratégias saem-se bem contra a estratégia titular (veja definição 3.1 , condição *i* e *ii*). Entretanto, em múltiplas populações um jogador mutante na população  $P_1$  somente encontra jogadores da população  $P_2$  e assim não encontra um colega mutante da própria população. Isto implica em que a segunda condição torna-se redundante e então, para uma estabilidade evolutiva, as estratégias do equilíbrio de Nash devem satisfazer à condição mais forte de que a estratégia titular de uma população se saia melhor contra a estratégia de outra população do que qualquer estratégia mutante. Conseqüentemente nós temos a seguinte definição:

Um requerimento mínimo para que um perfil  $x$  formado pelas estratégias concorrentes de todos os jogadores seja um perfil evolutivamente estável é que cada estratégia  $x_i$  de cada jogador  $i$  seja a única melhor réplica para o perfil  $x$ , desde que de outro modo a população de um jogador  $i$  ficaria vulnerável a alguma estratégia mutante  $y_i$  que obteria um melhor *payoff* que  $x_i$  no perfil  $x$ .

Assim,

$$\mu_i(x_i, x_{-i}) > \mu_i(y_i, x_{-i}) \quad \forall y_i \neq x_i, \quad \forall i \in I$$

Antes de continuarmos com o estudo sobre a estabilidade em jogos assimétricos entre múltiplas populações, vamos aprofundar a visão de como estas populações interagem. A maneira abordada aqui vem da visão de Selten<sup>3</sup> sobre interações entre várias populações.

---

<sup>3</sup> Reinhard Selten foi um dos fundadores de teoria dos jogos e da economia experimental e vencedor do Prêmio de Nobel em economia em 1994 junto com John F. Nash e John C. Harsanyi

## 4.2 Definição - Par de Estratégias Evolutivamente Estáveis

Um par de estratégias  $(x_1, x_2) \in \Theta$  é um par evolutivamente estável no jogo bimatricial assimétrico  $G = (A, B)$ , se ela satisfaz às condições do equilíbrio de Nash, com desigualdade estrita, ou seja,

$$x_1^T A x_2 > y_1^T A x_2 \quad \forall y_1 \in \Delta_1$$

$$x_2^T B x_1 > y_2^T B x_1 \quad \forall y_2 \in \Delta_2$$

**Condição 4-2**

Selten notou que um par de estratégias evolutivo estável não é somente estável quando os mutantes aparecem em uma das populações, mas também quando os mutantes aparecem simultaneamente em ambas populações. Mais precisamente, se  $(x_1, x_2)$  for evolutivamente estável, então para qualquer  $y = (y_1, y_2) \in \Theta$  existe um  $\varepsilon(y) \in (0, 1)$ , tal que, para todo  $\varepsilon < \varepsilon(y)$ , temos que ou  $x_1$  se sai melhor contra  $w_2$  do que  $y_1$ , ou  $x_2$  se sai melhor contra  $w_1$  do que  $y_2$ , ou ambos, onde  $w_i = (1 - \varepsilon)x_i + \varepsilon y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então, se mutantes aparecem em ambas as populações simultaneamente, a estratégia titular se sai melhor em pelo menos uma das populações e assim dentro desta população os mutantes desaparecerão. Tão logo a fração de mutantes dentro desta população seja bastante pequena, segue da definição 4.2, que na outra população a estratégia titular se sai melhor que a estratégia mutante e assim também na segunda população os mutantes desaparecerão.

Como vimos, um equilíbrio de Nash satisfazendo as condições de estabilidade evolutiva é conhecido na teoria dos jogos tradicional como um equilíbrio de Nash estrito e tem a propriedade que  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  é a única melhor réplica contra  $x_j$ ,  $j \neq i$ . Como já discutido no Capítulo 3, esta propriedade implica em que um equilíbrio evolutivo estável seja um equilíbrio em estratégias puras. Para lembrar, um equilíbrio estrito de Nash não associa qualquer probabilidade às estratégias puras, tal que exista uma estratégia mista que seja uma melhor réplica alternativa, pois do contrário iria existir pelo menos algum jogador para quem duas estratégias puras dariam o mesmo *payoff* máximo a ele.

Em qualquer equilíbrio não estrito as populações não são estáveis contra mutantes que jogam as melhores réplicas alternativas. Entretanto, para uma

grande classe de jogos, o equilíbrio de Nash em estratégias puras não existe e assim a teoria dos jogos evolutivos não faz qualquer previsão sobre os resultados.

### 4.3 Análise da Estabilidade Evolutiva em Multi Populações

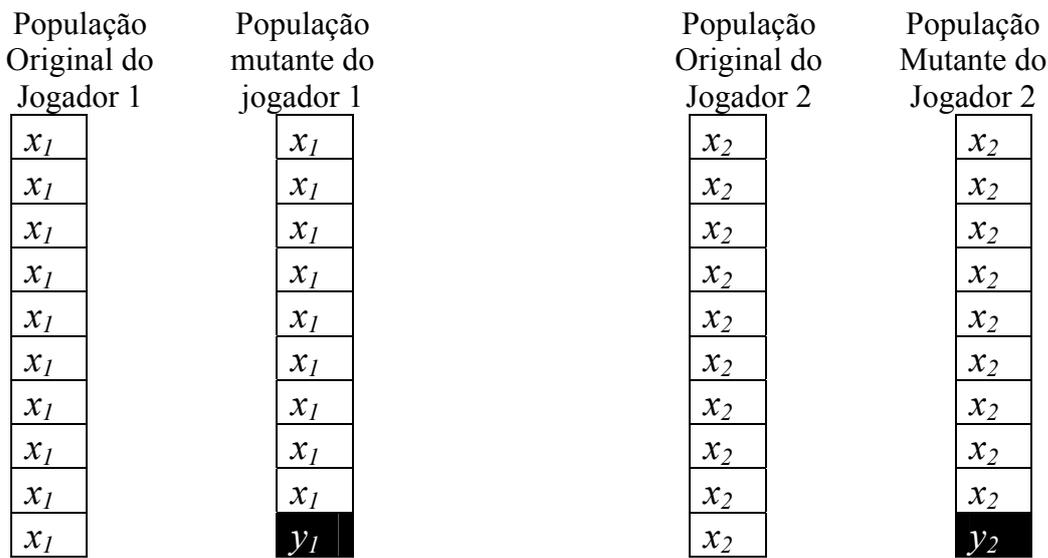
Por definição, não existirá nenhuma melhor réplica alternativa, para qualquer jogador, se o perfil  $x$  for um equilíbrio estrito. Pode ser feita aqui, uma pequena intervenção para que notemos que a condição de um equilíbrio estrito realmente garante a estabilidade evolutiva e que a contabilização do *payoff* pode ser ajustada para transformar o que seria um equilíbrio alternativo num equilíbrio estrito. No caso da existência de melhores réplicas alternativas,  $x_i$  continuaria a ser uma melhor réplica com um *payoff* igual ao das melhores réplicas alternativas, sendo assim, a escolha de  $x_i$  pela evolução, seria mero acaso. Porém porque trocar algo que funciona, que é confiável e conhecido, por alguma coisa que possui o mesmo desempenho, mas ainda não é totalmente conhecido? A questão parece ser bem aceitável e o cálculo do *payoff* pode ser modificado de modo a transformar o equilíbrio alternativo em um equilíbrio estrito. Porém, ao se decidir entre duas melhores réplicas alternativas de modo a beneficiar a residente, a evolução poderá escolher qualquer uma das duas dependendo de qual apareceu primeiro. Como percebemos, se a estratégia residente obtiver o mesmo *payoff* que a estratégia mutante, qualquer uma das duas pode continuar na evolução dependendo apenas do acaso, mas se um peso extra for adicionado à estratégia por ela ser residente, o seu *payoff* sofrerá um acréscimo e se tornará maior que o da estratégia invasora. Ou seja, seria um incentivo ao conservadorismo sem nenhum benefício à evolução.

Suponha agora que  $x \in \Theta$  seja um equilíbrio de Nash e que  $y_i$  é uma melhor réplica alternativa para o jogador  $i$  na partida representada pelo perfil  $x$ . O que protegeria a estratégia  $x_i$  contra o aparecimento de mutantes como a estratégia  $y_i$ ? Independente da sua proporção na população, esses mutantes irão ganhar o mesmo *payoff* que as estratégias  $x_i$  e por esta razão, mesmo os critérios de estabilidade fraca, em jogos com múltiplas populações, tendem a rejeitar todos os equilíbrios não estritos de Nash. Assim, vamos partir do pressuposto que cada

jogador possui uma população isomórfica de estratégias e que essa população pode ser invadida por uma estratégia mutante  $y_i$  numa proporção  $\varepsilon$ .

Digamos que a população original do jogador um fosse formada por dez estratégias  $x_1$  e a população mutante fosse formada por nove estratégias originais  $x_1$  e uma estratégia mutante  $y_1$ . A proporção de  $y_1$  na população é de  $\varepsilon = 10\%$

Se o jogador um escolher uma estratégia convencional  $x_1$ , essa estratégia pode competir contra uma estratégia  $x_2$  numa probabilidade de 90%, ou contra uma estratégia  $y_2$  numa probabilidade de 10%.



Portanto seriam formados dois perfis, um com as estratégias convencionais  $(x_1, x_2)$  em 90% das vezes e um perfil mutante  $(x_1, y_2)$  em 10%

Se as estratégias de ambos os jogadores forem retiradas ao acaso, duas a duas repetidas vezes, poderemos computar o *payoff* esperado que o jogador um obterá jogando cada uma de suas estratégias.

Com o perfil  $x = \{x_1, x_2\}$  calcula-se o *payoff* do jogador um  $\mu_1(x) = \mu_1(\{x_1, x_2\})$  em 90% das vezes e com o perfil  $y = \{x_1, y_2\}$  calcula-se  $\mu_1(y) = \mu_1(x_1, y_2)$  em 10% das vezes, o que é equivalente a estabelecer uma população mista  $w = 0.1*y + 0.9*x$  e calcular  $\mu_1(x_1, w_{-1})$  onde  $w_{-1}$  é a parte do perfil que não pertence ao jogador um, ou seja, no caso,  $w_{-1} = x_2$  em 90% das vezes e igual a  $y_2$  em 10% das vezes.

O mesmo é feito para a estratégia mutante do jogador um,  $y_1$ , isto é, calcula-se o *payoff* esperado  $\mu_1(y_1, w_{-1})$

É importante fixar que o perfil  $x$  é o perfil original  $(x_1, x_2)$ , sem mutações e o perfil  $y$  é um perfil mutante qualquer. Poderíamos considerar, por exemplo, num caso menos geral, que a mutação ocorre apenas na população do jogador um. Neste caso  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, x_2)$ . Assim  $w_{-1}$  será, no caso, sempre igual a  $x_2$ .

Queremos saber agora, quem obterá o maior *payoff*. A estratégia residente ou a estratégia mutante? Se  $\mu_1(x) > \mu_1(y)$ , para todo  $y \neq x$ ,  $x$  é um perfil evolutivo estável e estará em equilíbrio. Dentro da situação atual, isto é, com todos os jogadores jogando as estratégias formadoras do perfil  $x$ ,  $x_1$  é uma melhor réplica o que significa que dentre as estratégias do jogador um ela obtém o melhor *payoff* perante qualquer perfil concorrente que venha a aparecer. Caso a estratégia residente não seja a melhor diante do perfil concorrente, ela não formará um perfil evolutivamente estável porque o jogador será pressionado a mudar de estratégia de acordo com a situação.

Existe porém, uma aparente contradição sobre a exigência da desigualdade estrita na Condição 4-2. O desenvolvimento que vem a seguir, adotado por muitos pesquisadores como a própria definição de equilíbrio evolutivo estável, levanta tal contradição e estabelece o parecer a ser adotado neste trabalho.

Um perfil  $x \in \Theta$  é evolutivamente estável, se para todo perfil  $y \neq x$  existir algum  $\bar{\varepsilon}_y \in (0,1)$ , tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$ , e com  $w = \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x$  sendo um perfil misto,  $\mu_i(x_i, w_{-i}) > \mu_i(y_i, w_{-i}) \forall w_{-i}$

Relembrando que, para o caso de jogos como população original monomórfica de estratégias  $x$ , contaminada por uma estratégia mutante  $y$  temos,

$$\mu_i(x_i, w_{-i}) = \sum_k \mu_i(e_i^k, w_{-i}) x_{i,k} = \sum_k e_i^k \Delta[\varepsilon_{-i} y_{-i} + (1 - \varepsilon_{-i}) x_{-i}] x_{i,k}$$

Onde,  $x_{i,k}$  é a proporção da estratégia pura  $k$  do jogador  $i$  na estratégia mista  $x_i$ .

Do mesmo modo,

$$\mu_i(y_i, w_{-i}) = \sum_k e_i^k \Delta[\varepsilon_{-i} y_{-i} + (1 - \varepsilon_{-i}) x_{-i}] y_{i,k}$$

Para ser evolutivo estável é necessário que  $\sum_k e_i^k \Delta w_{-i} x_{i,k} > \sum_k e_i^k \Delta w_{-i} y_{i,k}$

Em outras palavras, um perfil de estratégias  $x$  é evolutivamente estável se existe para cada perfil mutante  $y \neq x$  uma barreira de invasão  $\bar{\varepsilon}_y$ , tal que se  $y$  vier numa dose menor do que essa barreira, pelo menos uma das estratégias  $x_i$  originais do jogador  $i$ , fará melhor contra a população mista mutante do que qualquer outra estratégia residente.

Vemos que  $\mu_i(x_i, w_{-i}) > \mu_i(y_i, w_{-i})$  é a própria definição de única melhor réplica, que só acontece no caso de equilíbrios estritos, pois é fácil ver que a proporção  $\varepsilon_i$  de  $y_i$  na população do jogador  $i$  não influi em seu *payoff*  $\mu_i(y_i, w_{-i})$ .

Desenvolvendo  $\mu_i(x_i, w_{-i}) > \mu_i(y_i, w_{-i})$  temos,

$$x_i \Delta_i \left[ \sum_{j \neq i} \varepsilon_j x_j \right] > y_i \Delta_i \left[ \sum_{j \neq i} \varepsilon_j x_j \right]$$

Onde  $x_j$  são as estratégias dos outros jogadores e  $\varepsilon_j$  suas devidas proporções dentro da população de estratégias daquele jogador.

Para duas populações este desenvolvimento torna-se,

$$x_i \Delta_i [\varepsilon_{-i} y_{-i} + (1 - \varepsilon_{-i}) x_{-i}] > y_i \Delta_i [\varepsilon_{-i} y_{-i} + (1 - \varepsilon_{-i}) x_{-i}]$$

$$\varepsilon_{-i} x_i \Delta_i y_{-i} + x_i \Delta_i x_{-i} - \varepsilon_{-i} x_i \Delta_i x_{-i} > \varepsilon_{-i} y_i \Delta_i y_{-i} + y_i \Delta_i x_{-i} - \varepsilon_{-i} y_i \Delta_i x_{-i}$$

$$\varepsilon_{-i} (x_i \Delta_i y_{-i} - x_i \Delta_i x_{-i} - y_i \Delta_i y_{-i} + y_i \Delta_i x_{-i}) + x_i \Delta_i x_{-i} - y_i \Delta_i x_{-i} > 0$$

onde,  $A_i = x_i \Delta_i x_{-i} - y_i \Delta_i x_{-i}$  e

$$B_i = x_i \Delta_i y_{-i} - y_i \Delta_i y_{-i}$$

Escrevendo de modo simplificado,

$$\varepsilon_{-i} (B_i - A_i) + A_i > 0$$

**Equação 4-2**

É importante observar na Equação 4-2 que o critério de estratégia evolutivamente estável da população  $i$  depende da distribuição das estratégias nas outras populações  $-i$ , ao contrário do caso com uma única população, e mesmo que a estratégia residente do jogador  $i$  apareça predominantemente na sua população, não garantirá a propriedade de ser evolutiva estável. No caso de uma única população, uma estratégia residente depende somente de sua proporção na população.

No caso de uma população, se a estratégia residente for a melhor réplica contra a estratégia mista  $w$ , ela terá sua proporção aumentada e acabará por dominar a população. Porém, se existir mais de uma população a proporção da estratégia residente não influenciará diretamente o seu *payoff*. Se ela estiver em maior ou menor quantidade que a estratégia mutante, obterá o mesmo *payoff* contra a outra população, portanto não haverá evolução. Em outras palavras, no caso de uma única população, o desempenho da estratégia residente depende de sua própria proporção na população, e no caso de multi população, o desempenho de uma estratégia residente em uma população, depende das proporções das estratégias nas outras populações.

Cada população  $i$  terá uma Equação 4-2 a ser satisfeita para garantir a estabilidade evolutiva do perfil em questão. Existe porém, um caso particular, em que  $A_i = x_i \Delta_i x_{-i} - y_i \Delta_i x_{-i} = 0$ , ou seja  $x_i \Delta_i x_{-i} = y_i \Delta_i x_{-i}$ , no qual a Equação 4-2 pode ser satisfeita, para qualquer  $\varepsilon_i$  não nula. Para isso basta que  $B_i = x_i \Delta_i y_{-i} - y_i \Delta_i y_{-i} > 0$ . Assim, vemos que não necessitamos de desigualdade estrita da Condição 4-2 para garantir a estabilidade apontada pela Equação 4-2.

Como consequência desta incoerência consideramos neste trabalho que o conceito mais apropriado para definir um perfil evolutivo estável é o da estabilidade assintótica que será abordado mais tarde no capítulo 4.5. Lá observaremos que a Condição 4-2 vai além da Equação 4-2. Porém, a desigualdade não restrita também aponta equilíbrios evolutivos estáveis não de perfis, mas de conjuntos de perfis com a propriedade de possuírem os mesmos *payoffs*. Sendo os *payoffs* de perfis, nas faces do poliedro de estratégias mistas, resultado de uma combinação convexa dos *payoffs* nos vértices correspondentes, dizer que o conjunto de perfis representados por uma face é evolutivamente estável é o mesmo que afirmar que todos os perfis de estratégias puras, contidos

no conjunto de vértices dessa face, possuem o mesmo *payoff* e, portanto podem ser escolhidos, sob este critério no caso da convergência de uma dinâmica para uma dessas faces atratoras. Adotaremos aqui como conceito geral de estabilidade evolutiva a Condição 4-1, ressaltando que para o caso específico de perfis isolados a Condição 4-2 é a condição válida. Como exemplo, observemos um jogo não simétrico de dois jogadores definido pelas matrizes de *payoff* a seguir.

$$[M_1, M_2^T] = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_2 & y_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (5,3) & (6,3) \\ (5,4) & (4,2) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Observamos que o *payoff* da estratégia residente  $x_1$  do jogador 1 contra a estratégia residente  $x_2$  do jogador dois,  $x_1 M_1 x_2$ , é igual ao *payoff* da estratégia mutante  $y_1$  do jogador 1 contra a estratégia residente  $x_2$  do jogador dois,  $y_1 M_1 x_2$ , igual a 5. Constatamos porém, que a desigualdade estrita da Equação 4-2 se mantém, pois

$$\mu_1(x_1, w_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\varepsilon_2) \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \varepsilon_2 + 5$$

$$\mu_1(y_1, w_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\varepsilon_2) \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = -\varepsilon_2 + 5$$

E assim  $\mu_1(x_1, w_2) > \mu_1(y_1, w_2) \forall \varepsilon_2 > 0$

Analogamente,

$$\mu_2(x_2, w_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\varepsilon_1) \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \varepsilon_1 + 3$$

$$\mu_2(y_2, w_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\varepsilon_1) \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = -\varepsilon_1 + 3$$

Portanto,  $\mu_2(x_2, w_1) > \mu_2(y_2, w_1) \forall \varepsilon_1 > 0$ .

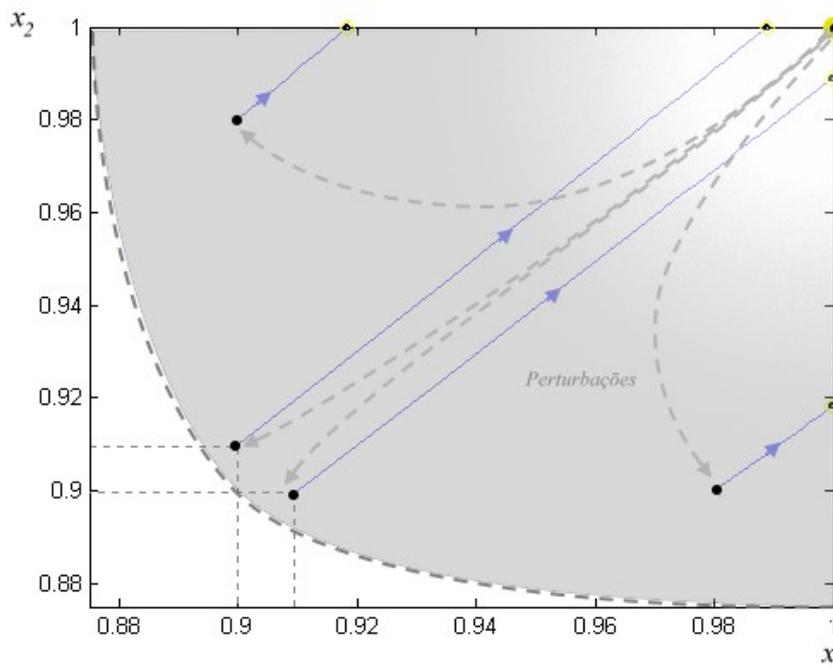
Não se deve concluir que o perfil  $(x_1, x_2)$  é evolutivamente estável, pois não é assintoticamente estável e a dinâmica do replicador, após uma leve perturbação do

perfil  $(x_1, x_2)$  dentro de uma região próxima a ele, não obrigatoriamente retornará ao estado deste perfil, como mostra a Figura 4-37.

Outro argumento que reforça a escolha pelas desigualdades estritas representadas na Condição 4-2, é a natureza da dinâmica do replicador, que leva em conta não somente a proporção das estratégias das populações concorrentes, bem como as proporções na própria população e que, no caso deste exemplo, seriam representadas pelas seguinte equação:

$$\dot{x}_{i,k} = [\mu_i(e_i^k, w_{-i}) - \mu_i(w_i, w_{-i})]x_{i,k}$$

$$\dot{x}_{1,1} = \left[ [1 \ 0]M_1[1 - \varepsilon_2 \ \varepsilon_2]^T - [1 - \varepsilon_1 \ \varepsilon_1]M_1[1 - \varepsilon_2 \ \varepsilon_2]^T \right] (1 - \varepsilon_1)$$



**Figura 4-37 – Perturbações de um estado situado num vértice do espaço de estados, demonstrando que este estado não é assintoticamente estável.**

Portanto, se o *payoff* de uma estratégia pura  $x_{i,k} = e_i^k = x_1$ ,  $\mu_i(x_1, w_2) = \mu_i(y_1, w_2)$ , e  $\varepsilon_1 > 1/2$ , o perfil original  $(x_1, x_2)$  não será estável.

Concluindo o ponto de vista quanto à estabilidade evolutiva em múltiplas populações, resumimos as condições para um perfil ser evolutivamente estável na Tabela 4-2

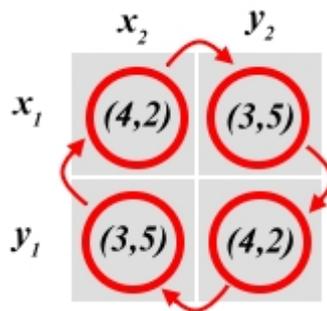
|   | Condição                                       | Equilíbrios   | Tipo de estabilidade   |
|---|--|---------------|--|
| 1 | $\begin{cases} A_i > 0 \\ B_i < 0 \end{cases}$ | $(x,x) (y,y)$ | (Perfil Assintoticamente Estável)  |
| 2 | $\begin{cases} A_i > 0 \\ B_i > 0 \end{cases}$ | $(x,x)$       | (Perfil Assintoticamente Estável)  |
| 3 | $\begin{cases} A_i = 0 \\ B_i > 0 \end{cases}$ | $(x,x)$       | (Perfil Não Assintoticamente Estável)<br>(Face Assintoticamente Estável) |

Tabela 4-2 – Condições necessárias para equilíbrio e estabilidade

Um dos efeitos que pode surgir de matrizes não simétricas seria a ausência de equilíbrios com o conseqüente aparecimento de ciclos limites.

Por exemplo, o caso de dois jogadores onde o primeiro possui uma matriz de *payoff*  $\Delta_1$  e o segundo uma matriz de *payoff*  $\Delta_2$ .

$$\Delta_1 = \begin{matrix} & x_2 & y_2 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \\ y_1 & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ e } \Delta_2 = \begin{matrix} & x_2 & y_2 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \\ y_1 & \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Não existe equilíbrio em estratégias puras quando  $A_1 > 0, B_1 > 0, A_2 < 0$  e  $B_2 > 0$ .

A Equação 4-2 deve atender às mesmas condições estabelecidas na Tabela 4-1 para um jogo com uma única população.

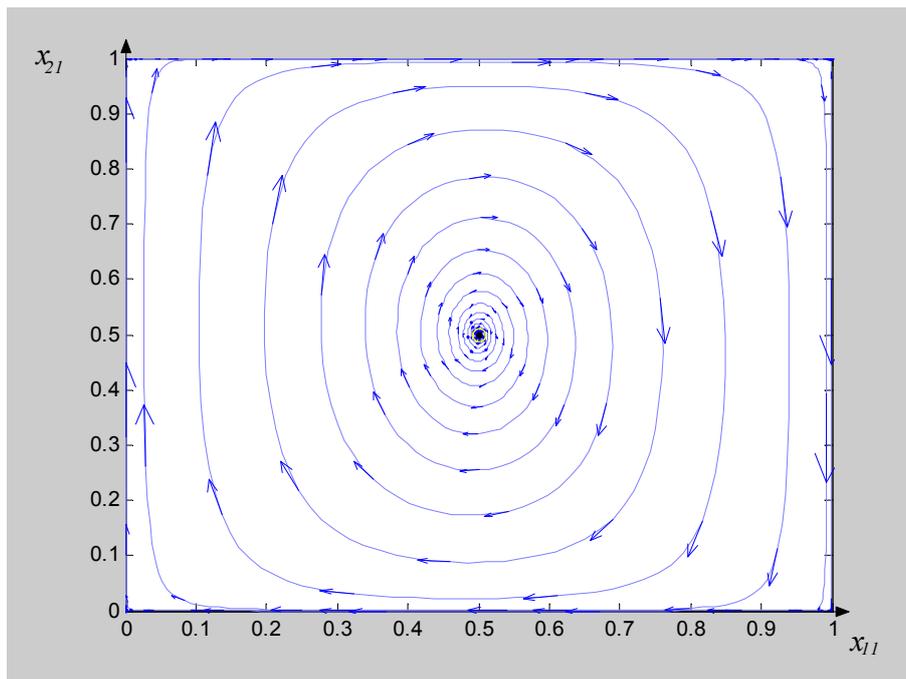
Assim, as condições que geram ao mesmo tempo estabilidade evolutiva e equilíbrio para  $\varepsilon < \frac{-A}{(B-A)}$  foram resumidas na Tabela 4-2, para todo  $i \in I$ .

Neste caso, a dinâmica do replicador, ou processo dinâmico de seleção, não convergiu para nenhum vértice do poliedro de estratégias mistas, como pode ser observado na Figura 4-38.

Em outro exemplo de dois jogadores, caso o jogador um esteja na condição 1 especificada na Tabela 4-2 e o jogador 2 na condição 2,  $A_1 > 0$ ,  $B_1 < 0$ ,  $A_2 > 0$  e  $B_2 > 0$  respectivamente, ocorrerá a estabilidade evolutiva das estratégias residentes  $x_1$  e  $x_2$  dos jogadores um e dois, desde que estas mesmas condições implicam em:

$$\varepsilon_2(B_1 - A_1) + A_1 > 0 \text{ e}$$

$$\varepsilon_1(B_2 - A_2) + A_2 > 0$$



**Figura 4-38 – Divergência da dinâmica do replicador, por não existirem equilíbrio no jogo.**

Demonstrando numericamente este exemplo e fazendo por questão de simplicidade  $x_1 = x_2 = (1, 0)$  e  $y_1 = y_2 = (0, 1)$  temos:

$$\Delta_1 = x_1 \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \Delta_2 = x_2 \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

|       | $x_2$        | $y_2$        |
|-------|--------------|--------------|
| $x_1$ | <b>(5,6)</b> | <b>(1,4)</b> |
| $y_1$ | <b>(2,1)</b> | <b>(3,3)</b> |

Observa-se que existem dois possíveis equilíbrios, o formado pelas estratégias originais de ambos os jogadores  $(x_1, x_2)$  e o formado pelas estratégias mutantes  $(y_1, y_2)$ .

Verificando as condições de estabilidade temos:

$$\varepsilon_2(B_1 - A_1) + A_1 > 0$$

Onde,

$$A_1 = x_1 \Delta_1 x_2 - y_1 \Delta_1 x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = 5 - 2 = 3 > 0$$

$$B_1 = x_1 \Delta_1 y_2 - y_1 \Delta_1 y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = 1 - 3 = -2 < 0$$

$$A_2 = x_2 \Delta_2 x_1 - y_2 \Delta_2 x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = 6 - 4 = 2 > 0$$

$$B_2 = x_2 \Delta_2 y_1 - y_2 \Delta_2 y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Então, para um  $\varepsilon_2 < \frac{-A_1}{B_1 - A_1} = \frac{3}{5}$ , a condição  $\varepsilon_2(B_1 - A_1) + A_1 > 0$  será satisfeita e para um  $\varepsilon_1 < \frac{-A_2}{B_2 - A_2} = \frac{1}{2}$  a condição  $\varepsilon_1(B_2 - A_2) + A_2 > 0$  também será satisfeita.

Será que existe um equilíbrio misto? Para encontrar este equilíbrio fazemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$5x_2 + 1 - x_2 = 2x_2 + 3 - 3x_2 \rightarrow 5x_2 = 2 \rightarrow x_2 = \frac{2}{5}$$

Então a estratégia  $x_2 = [\frac{2}{5} \quad \frac{3}{5}]$  seria um equilíbrio contra si própria.

E para o jogador dois teríamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{bmatrix}$$

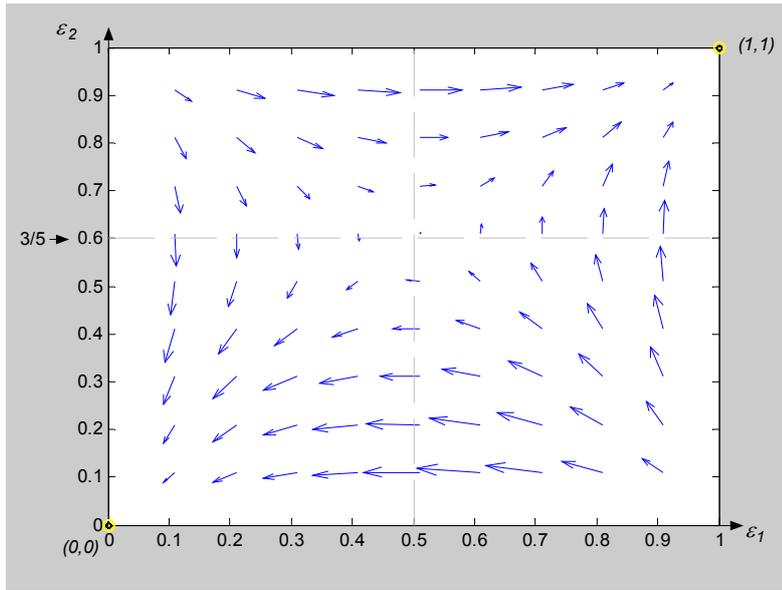
$$6x_1 + 1 - 1x_1 = 4x_1 + 3 - 3x_1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

Para o jogador a estratégia  $x_1 = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]$  seria um equilíbrio contra si própria.

Porém os únicos equilíbrios obtidos pela dinâmica do replicador, como pode ser observado na Figura 4-39, são os equilíbrios em estratégias puras  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

e  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ , portanto são evolutivamente estáveis. Já o equilíbrio misto

$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\}$  não é estável.



**Figura 4-39 – Convergência da dinâmica do replicador para os dois equilíbrios em estratégias puras do jogo.**

Porém sabe-se que se a estratégia  $x_i \in \Delta, \forall i \in I$  e  $x_i$  que é combinação convexa dos vértices de  $\Delta$  for uma melhor réplica contra si própria, então qualquer outra estratégia mista  $x_j \in \Delta$  também é melhor réplica contra  $x_i$ .

Se  $\mu_1(x_1, x_2) \geq \mu_1(y_1, x_2)$  e  $\mu_2(x_1, x_2) \geq \mu_2(x_1, y_2)$  então o perfil  $(x_1, x_2)$  é um equilíbrio de Nash.

$$\mu_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{13}{5} \tag{Equação 4-3}$$

$$\mu_1(e^1, y_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{13}{5} \tag{Equação 4-4}$$

$$\mu_1(e^2, y_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{13}{5} \tag{Equação 4-5}$$

Assim se  $\mu_1(e^1, x_2) = \mu_1(e^2, x_2)$  então  $\mu_1(y_1, x_2) = \mu_1(e^1, x_2) = \mu_1(e^2, x_2) \forall y_1$  combinação convexa das estratégias puras  $e^1$  e  $e^2$ .

Portanto se  $\mu_1(x_1, x_2) = \mu_1(y_1, x_2) \forall y_1$  melhor réplica alternativa para  $x_2$ .

$$\mu_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

$$\mu_2(x_1, e^1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

$$\mu_2(x_1, e^2) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

$$\mu_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

$$\mu_2(e_2^1, x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

$$\mu_2(e_2^2, x_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{7}{2}$$

Se  $\mu_2(e^1, x_1) = \mu_2(e^2, x_1)$  então  $\mu_2(y_2, x_1) = \mu_2(e^1, x_1) = \mu_2(e^2, x_1) \forall y_2$  combinação convexa das estratégias puras  $e^1$  e  $e^2$ .

Portanto se  $\mu_2(x_2, x_1) = \mu_2(y_2, x_1) \forall y_2$ ,  $x_2$  é melhor réplica alternativa para  $x_1$  e o perfil  $\{x_1, x_2\}$  é um equilíbrio de Nash

Porém o que garante que o processo evolutivo irá escolher  $x_1$  e não  $y_1$  se  $x_1$  não é estritamente melhor do que  $y_1$ ?

Por outro lado, fazendo  $\varepsilon_1 = 2/5$  e  $\varepsilon_2 = 1/3$  e  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 1$  temos:

$$\varepsilon_2(B_1 - A_1) + A_1 = \frac{1}{3}(-2 - 3) + 3 = \frac{4}{3} > 0 \text{ e}$$

$$\varepsilon_1(B_2 - A_2) + A_2 = \frac{2}{5}(-2 - 2) + 2 = \frac{2}{5} > 0$$

Estas duas condições indicam a estabilidade evolutiva do perfil  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

de estratégias puras. Para estes perfis de estratégias puras obtém-se as Figura 4-40 e Figura 4-41 que mostram que  $\mu_1(x_1, w_2) > \mu_1(y_1, w_2)$  e  $\mu_2(x_2, w_1) > \mu_2(y_2, w_1)$ . As Figura 4-42 e Figura 4-43 mostram que se as estratégias fossem mistas os equilíbrios de estratégias residentes em cada uma das populações só ocorreriam para as proporções  $\varepsilon_2 < 3/5$  e  $\varepsilon_1 < 1/2$  respectivamente.

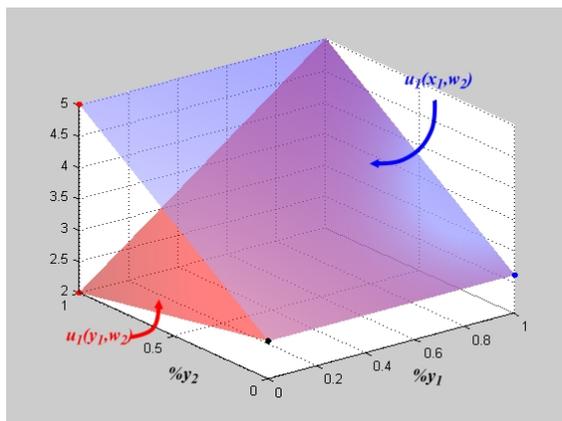


Figura 4-40

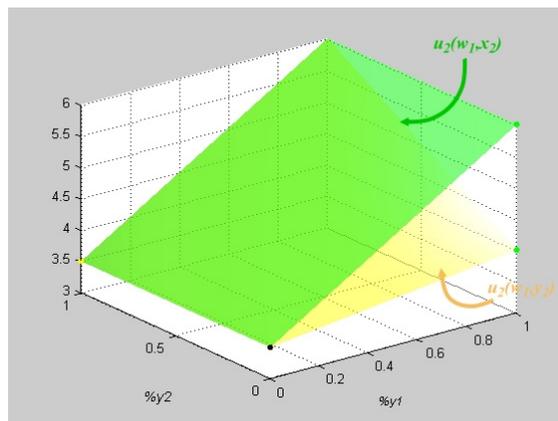


Figura 4-41

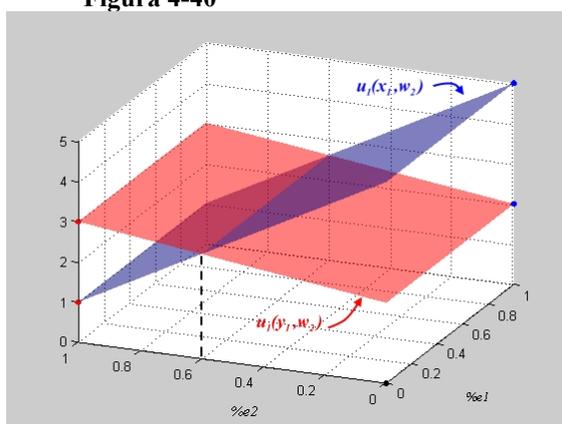


Figura 4-42

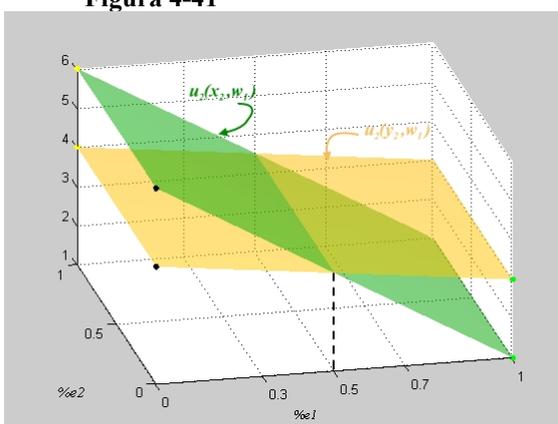


Figura 4-43

As figuras mostram as regiões de estabilidade evolutiva em ambas as populações

E um perfil de estratégias mistas pode ser evolutivamente estável? Para averiguar observemos as superfícies  $\mu(x_1, w_2)$ ,  $\mu(y_1, w_2)$ ,  $\mu(x_2, w_1)$ ,  $\mu(y_2, w_1)$ , considerando  $x_1 = [1/2, 1/2]$  e  $x_2 = [2/5, 3/5]$ .

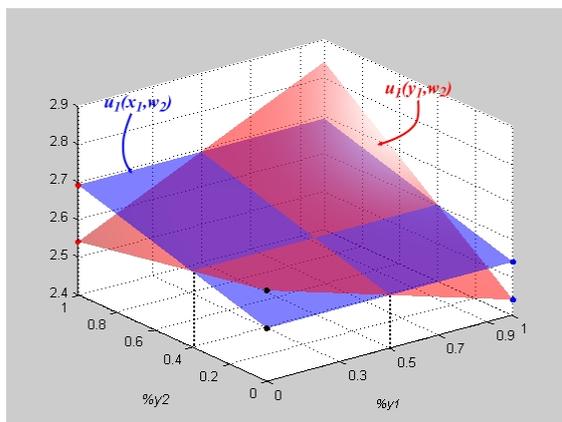


Figura 4-44

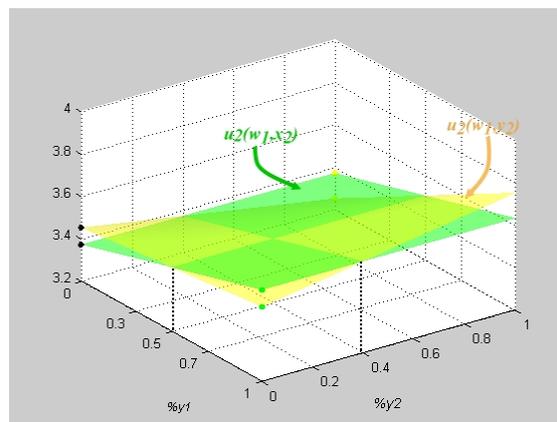


Figura 4-45

As figuras mostras as regiões de estabilidade evolutiva em ambas as populações

Da Figura 4-44 podemos observar que caso a estratégia mutante do segundo jogador  $y_2$  seja  $[2/5 \ 3/5]$  e conseqüentemente a estratégia mista  $w_2$  seja  $[2/5 \ 3/5]$ ,  $\mu_1(x_1, w_2) = \mu_1(y_1, w_2) \forall y_1$  como esperado através das Equação 4-3, Equação 4-4 e Equação 4-5, isto é, variando-se  $x_1$  de um vértice a outro do poliedro de estratégias mistas,  $\mu_1(x_1, w_2)$  será sempre o mesmo. Isto é um entrave ao estabelecimento de um perfil misto em equilíbrio de Nash que seja evolutivamente estável, pois se para toda estratégia  $x$ ,  $\mu_1(x, w_2)$  é o mesmo, então como pode um processo evolutivo se decidir por alguma  $x$ ? É importante lembrar que se neste exemplo  $x_1$  não for a estratégia mista  $[1/2 \ 1/2]$  a estratégia mista do jogador 2  $[2/5 \ 3/5]$  não será mais uma melhor réplica, em vez disso uma de suas estratégias puras deverá sê-la e portanto o perfil  $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \right\} \forall x \neq \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$  nunca será um equilíbrio de Nash.

Pode-se observar, além disso, que existe uma interdependência entre as estratégias mutantes  $y_1$  e  $y_2$  dos dois jogadores para que  $\mu_1(x_1, w_2) > \mu_1(y_2, w_2)$  sempre, que é:

1. Se  $y_1 > 1/2 \Rightarrow y_2 > 3/5$
2. Se  $y_1 < 1/2 \Rightarrow y_2 < 3/5$

Ou seja, se o jogador um souber que a taxa de infecção do seu oponente é menor do que  $3/5$ , ele deverá providenciar uma proporção de mutantes sempre maior que  $1/2$ . Esta afirmação pode ser visualizada na Figura 4-46.

Apesar de  $\mu_1(x_1, w_2) > \mu_1(y_2, w_2)$ ,  $\mu_2(x_2, w_1) < \mu_2(y_2, w_1)$  como pode ser visto na Figura 4-47. Sendo assim  $x_2$  não é uma melhor réplica para  $w_1$  e o par  $(x_1, x_2)$  não é evolutivamente estável.

Para finalizar, estudemos um caso em que não existe equilíbrio de Nash em estratégias puras. Este caso está descrito pelas seguintes matrizes de *payoff*.

$$\Delta_1 = \begin{matrix} & x_2 & y_2 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \\ y_1 & \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ e } \Delta_2 = \begin{matrix} & x_2 & y_2 \\ x_1 & \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \\ y_1 & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

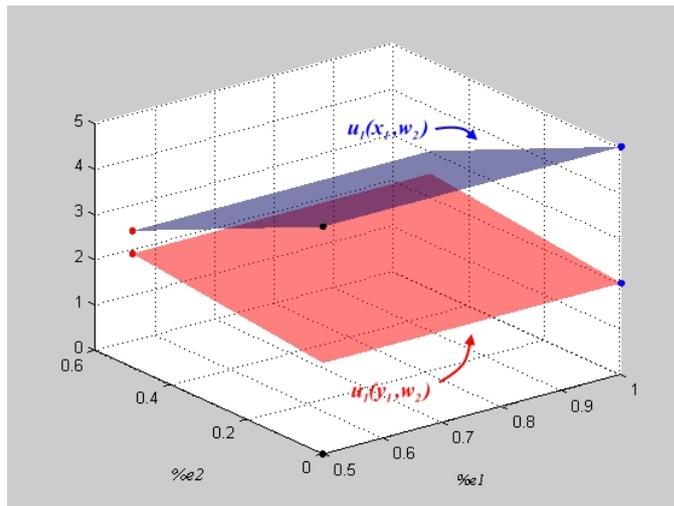


Figura 4-46 – Região em que a estratégia residente  $x$  da primeira população é evolutiva estável.

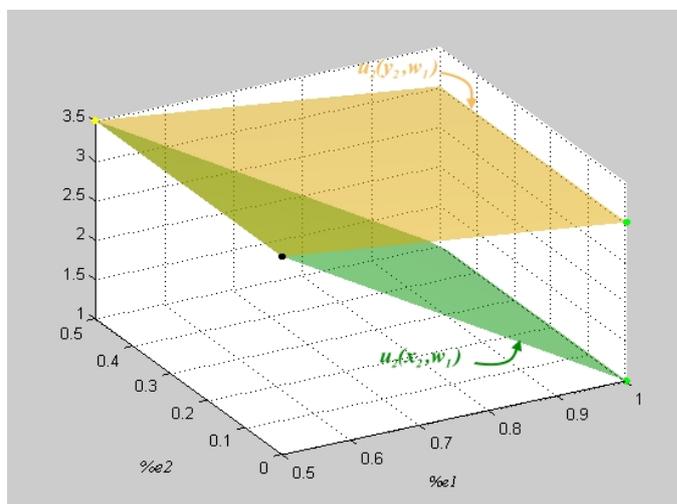


Figura 4-47 – A estratégia invasora  $y$  da segunda população é evolutiva estável.

Estas duas matrizes não são simétricas o que provoca a ciclagem observada na Figura 4-48.

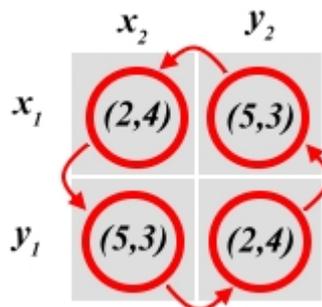


Figura 4-48 – Matriz de payoff de um jogo sem equilíbrio de Nash em estratégias puras.

O equilíbrio misto será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ 1-w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ 1-w_2 \end{bmatrix}$$

$$2w_2 + 5 - 5w_2 = 5w_2 + 2 - 2w_2 \rightarrow w_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 & 1-w_1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & 1-w_1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$4w_1 + 3 - 3w_1 = 3w_1 + 4 - 4w_1 \rightarrow w_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Então o perfil misto  $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$  é um equilíbrio de Nash.

Para averiguar se ele é evolutivamente estável testamos se  $\mu_1(x_1, w_2) > \mu_1(y_2, w_2)$  e  $\mu_2(x_2, w_1) > \mu_2(y_2, w_1)$

$$\varepsilon_2(B_1 - A_1) + A_1 > 0$$

Onde;

$$A_1 = x_1\Delta_1x_2 - y_1\Delta_1x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = 2 - 5 = -3 < 0$$

$$B_1 = x_1\Delta_1y_2 - y_1\Delta_1y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = 5 - 2 = 3 > 0 \text{ e } \varepsilon_2 > 1/2$$

$$A_2 = x_1\Delta_2x_2 - x_1\Delta_2y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = 4 - 3 = 1 > 0$$

$$B_2 = y_1\Delta_2x_2 - y_1\Delta_2y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 3 - 4 = -1 < 0 \text{ e } \varepsilon_1 < 1/2$$

Então o perfil  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$  é evolutivamente estável desde que  $\varepsilon_1 < 1/2$  e  $\varepsilon_2 >$

$1/2$ , mas não é equilíbrio de Nash, como se pode deduzir da Figura 4-48.

Já o perfil  $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$  é um equilíbrio de Nash, mas não é evolutivamente

estável como vemos nos cálculos a seguir.

$$\varepsilon_2(B_1 - A_1) + A_1 > 0$$

Onde,

$$A_1 = x_1 \Delta_1 x_2 - y_1 \Delta_1 x_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 & 1-y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \left[ \frac{7}{2} - \frac{7}{2} \right] = 0$$

$$B_1 = x_1 \Delta_1 y_2 - y_1 \Delta_1 y_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ 1-y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 & 1-y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ 1-y_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \frac{7}{2} + 6y_1 y_2 - 3y_1 - 3y_2 - 2$$

$$\varepsilon_2 \left( \frac{7}{2} + 6y_1 y_2 - 3y_1 - 3y_2 - 2 \right) > 0 \rightarrow \frac{7}{2} + 6y_1 y_2 - 3y_1 - 3y_2 - 2 > 0$$

$$A_2 = x_1 \Delta_2 x_2 - x_1 \Delta_2 y_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ 1-y_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0$$

$$B_2 = y_1 \Delta_2 x_2 - y_1 \Delta_2 y_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 1-y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 & 1-y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ 1-y_2 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \frac{7}{2} - 2y_1 y_2 + y_1 + y_2 - 4$$

$$\varepsilon_1 \left( \frac{7}{2} - 2y_1 y_2 + y_1 + y_2 - 4 \right) > 0 \rightarrow \frac{7}{2} - 2y_1 y_2 + y_1 + y_2 - 4 > 0$$

Assim as duas condições devem ser satisfeitas.

1.  $\frac{7}{2} + 6y_1y_2 - 3y_1 - 3y_2 - 2 > 0$
2.  $\frac{7}{2} - 2y_1y_2 + y_1 + y_2 - 4 > 0$

Porém essas duas equações são opostas em relação ao plano zero. Quando uma for maior que zero a outra será menor e vice versa como pode ser visto na Figura 4-49. Portanto as duas condições nunca serão satisfeitas simultaneamente e

o perfil  $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$  não será evolutivamente estável.

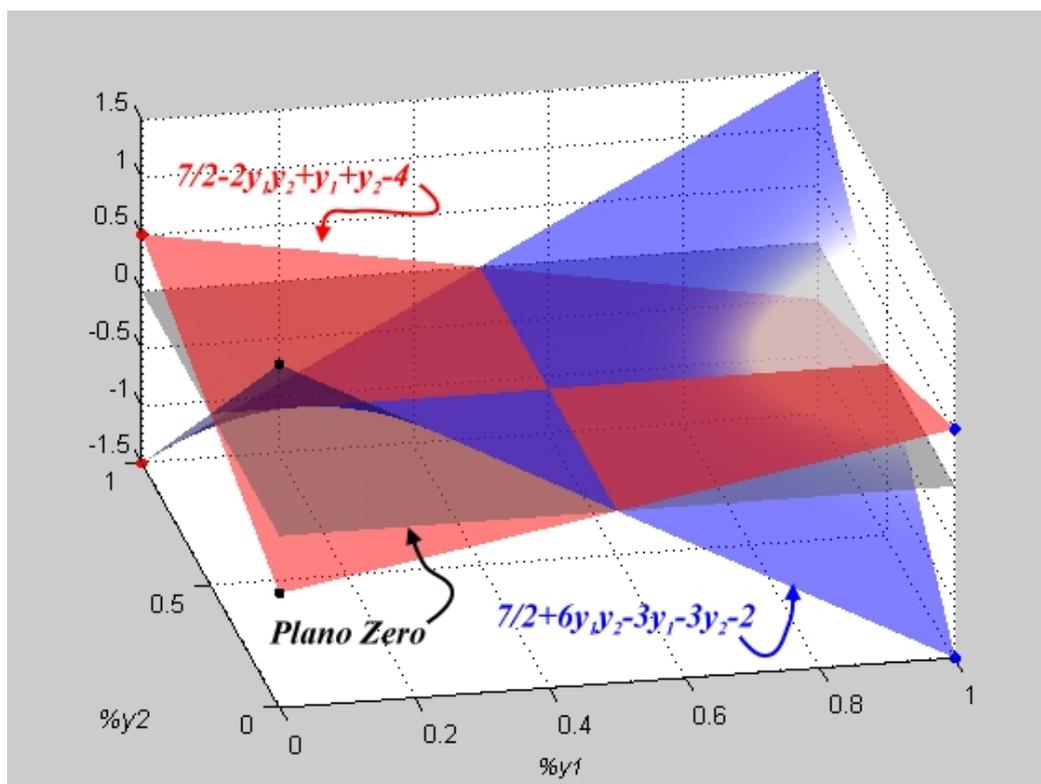


Figura 4-49 – Planos ilustram as condições incoerentes

A Figura 4-50 confirma que a dinâmica do replicador não converge para o equilíbrio misto  $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$ .

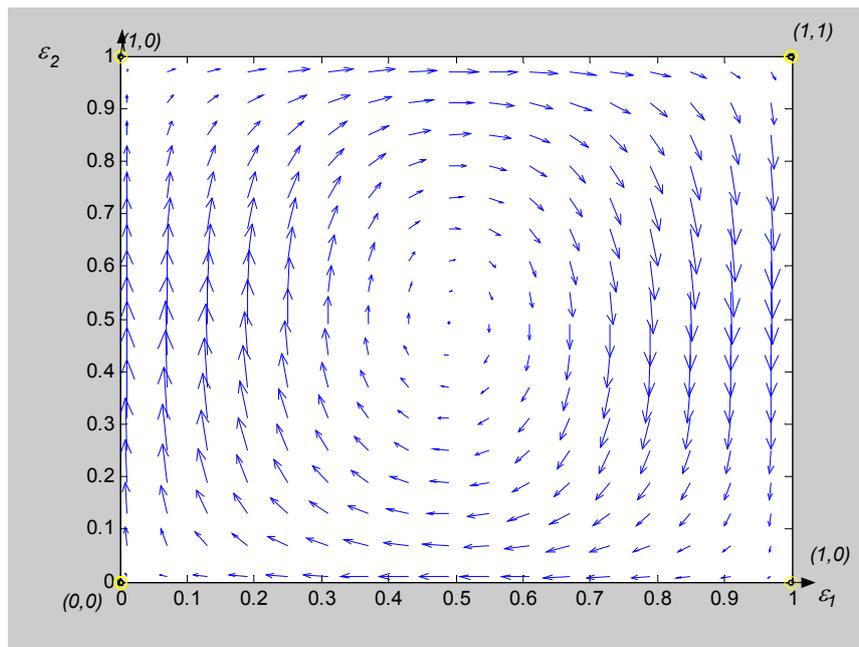


Figura 4-50 – Não convergência da dinâmica do replicador.

#### 4.4 O Significado Econômico da Estratégia Evolutiva Estável

Vimos que o conceito de estratégia estável evolutiva não é nada mais nada menos, do que outro refinamento do conceito do equilíbrio de Nash. Se uma EEE existe, então ela é uma estratégia de equilíbrio próprio e assim a EEE é robusta contra perturbações. Além do mais uma EEE é estável contra mutantes e é assintoticamente estável com respeito à dinâmica de replicador. Estes últimos resultados mostram que o comportamento racional não é necessário para se obter um equilíbrio mais sofisticado. Uma população de jogadores genéticos que herdem os comportamentos de seus pais é capaz de alcançar uma EEE quando a descendência é determinada pela aptidão dos jogadores. Entretanto, não é fácil aplicar estes resultados na economia.

Em primeiro lugar a dinâmica de replicador sempre conduz ao equilíbrio de Nash. Infelizmente o equilíbrio de Nash frequentemente revela maus resultados para a sociedade como um todo. Esta afirmação, pode ser ilustrada pelo PDG (jogo do dilema dos dois prisioneiros). No equilíbrio de Nash obtém-se o pior resultado, ambos os jogadores possam obter *payoffs* mais altos jogando uma estratégia dominada. Em termos simplistas o equilíbrio de Nash pode parecer um

mau resultado, enquanto o perfil de cooperação mútua gera os melhores *payoffs* para ambos os jogadores. Porém é importante observar o risco associado no perfil de cooperação mútua. Vale a pena ganhar mais sob um risco tão alto? Se um prisioneiro coopera, ele correrá o risco do outro prisioneiro não cooperar e com isto obter um *payoff* pior do que o que ele ganharia no equilíbrio.

Opiniões simplistas como esta, do caso do dilema dos prisioneiros inspirou muitos autores a desenvolver modelos de jogos teóricos nos quais os jogadores cooperam jogando estratégias dominadas. Muitos artigos em jogos repetidos são dedicados a este tópico. Infelizmente a teoria dos jogos evolutiva não é muito útil na sustentação do comportamento cooperativo. Pior ainda, no jogo do falcão e do pombo [ o equilíbrio de Nash selecionado pela EEE produz o pior equilíbrio de Nash possível. Fazendo  $a = d = 0$  e conseqüentemente  $b > 0$  e  $c > 0$ , pode facilmente ser visto que ambos os jogadores obtêm um *payoff* maior em qualquer um dos dois equilíbrios em estratégias puras. Assim a EEE não sustenta comportamento cooperativo em jogos  $2 \times 2$  do tipo I ou do tipo III. Isto pode explicar porque vários artigos em jogos evolutivos têm sido focados explicitamente em jogos de coordenação. Sem dúvida tais jogos de coordenação podem ser sustentados por EEE. Para levar a população de um resultado EEE, em jogos de coordenação, para outro, são necessários consideravelmente menos mutantes do que para ir da pior EEE para a melhor EEE e vice versa e então, o resultado mais eficiente é muito provável de acontecer.

Para jogos  $2 \times 2$  do tipo I e do tipo III, pode-se concluir que a substituição da suposição habitual de racionalidade em economia pelo critério de aptidão biológica não é de qualquer ajuda na sustentação do comportamento cooperativo, porque, basicamente, ambas as suposições conduzem as estratégias de melhor réplica e então os únicos possíveis resultados são os equilíbrios de Nash, todos dos quais são ineficientes no sentido de Pareto. Só para esclarecer, se pudermos encontrar uma forma de melhorar a situação de um indivíduo sem piorar a situação de nenhum outro, teremos uma melhoria de Pareto. Se a situação permitir uma melhoria de Pareto, então ela não é eficiente no sentido de Pareto, já que ainda pode melhorar. Caso a situação não permita uma melhoria de Pareto, então ela é eficiente no sentido de Pareto.

Outras idéias têm que ser exploradas para modelar a cooperação. A literatura recente, no campo da sociologia e psicologia, oferece uma saída substituindo a aproximação de racionalidade econômica por racionalidade procedural (de conduta), ver Simon [Ref: 45], especificando uma regra de comportamento. A estratégia do olho por olho (Tit for Tat), bem conhecida da teoria dos jogos repetidos, pode ser vista como um exemplo de tal regra de comportamento.

#### 4.5 Análise da Estabilidade da dinâmica do replicador

Neste capítulo é feita uma abordagem matemática da dinâmica do replicador, incluindo uma rápida passagem por equações diferenciais ordinárias.

Em qualquer processo evolutivo a taxa de crescimento de um determinado indivíduo dentro da população, dependerá do critério de avaliação deste indivíduo. Utilizando-se o *payoff* ganho numa competição, o indivíduo se sobressairá se seu *payoff* for maior do que os dos demais.

Sendo assim, a mudança da proporção de um indivíduo dentro de sua população pode ser avaliada pela dinâmica do replicador, onde a quantidade de clones de um indivíduo na próxima geração será uma função da sua performance no jogo.

Quando o *payoff* representa o efeito incremental do jogo em questão, obtemos a seguinte dinâmica.

$$\dot{x}_k = [\mu(e^k, w) - \mu(w, w)]x_k$$

Onde  $\mu(e^k, w)$  é o *payoff* da estratégia  $k$  contra uma população num estado  $w$  e  $\mu(w, w)$  é o *payoff* médio desta população.

A dinâmica do replicador está diretamente associada ao operador de seleção de um processo evolutivo, podendo seguir várias linhas como a replicação por imitação que precisa de informação externa e onde os jogadores trocam mensagens.

Como forma de iniciar a análise de convergência de tais dinâmicas será apresentado uma breve passagem sobre o assunto das equações diferenciais ordinárias.

## 4.6 Equações diferenciais ordinárias

Um sistema de equações diferenciais ordinárias é um modo clássico de se representar matematicamente um processo determinístico dinâmico e contínuo no tempo.

Esta aproximação também é usada na teoria dos jogos evolutivos, onde o processo dinâmico em questão se preocupa com a mudança no tempo da distribuição das estratégias dentro de uma população. No caso padrão, a interação entre os indivíduos se dá através de competições entre pares de indivíduos selecionados aleatoriamente. Estes pares de indivíduos, ou podem ser escolhidos de uma única população, ou são escolhidos aleatoriamente de cada uma das populações concorrentes para o caso em que existem várias populações no jogo.

Uma questão primordial em tais dinâmicas é se um sistema de equações diferenciais ordinárias determina unicamente como o estado da população evolui sobre o tempo, ou seja, se podemos avaliar a cada geração evolutiva, a proporção de cada uma das estratégias na população, através de um sistema de equações diferenciais, previamente estabelecido. Outra questão importante, a saber, é se a população converge para um determinado estado e se convergir, para qual estado a população convergirá.

As equações diferenciais que governam o movimento de sistemas dinâmicos freqüentemente são muito complicadas e geralmente não fornecem solução exata, principalmente quando as equações são não lineares.

Em geral equações diferenciais podem mudar com o tempo, como são os exemplos da dependência de processos biológicos e do crescimento econômico por fatores externos como o tempo. Se o sistema de equações diferenciais não depender do tempo é chamado homogêneo e este é o tipo de dinâmica a ser focado exclusivamente como parte desta abordagem.

Deste modo o ambiente externo no qual serão estudados os processos de seleção evolutiva serão considerados fixos e invariantes no tempo, pois pela introdução de fatores externos variantes no tempo, como variáveis de estado com equações diferenciais associadas por sua dependência no tempo, pode-se transformar um sistema de equações diferenciais dependente no tempo em um sistema homogêneo. Além do mais só serão consideradas equações diferenciais de

primeira ordem, isto é, equações diferenciais que contêm derivadas de primeira ordem, sem derivadas de ordens mais altas. Isto não se torna nenhuma restrição real, desde que, introduzindo-se derivadas de primeira-ordem como variáveis de estado, qualquer equação diferencial de segunda ordem pode ser transformada em uma equação de primeira ordem e assim por diante. Por exemplo, considere o sistema de um oscilador harmônico amortecido. A dinâmica deste sistema é dada pela seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = 0$$

Pode-se escrever esta equação como uma equação de espaço de estado.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -(K/M)q - (B/M)\dot{q} \end{bmatrix}$$

Defina  $x = (q, \dot{q})$  como o estado do sistema. Desde que este sistema é linear, podemos determinar a sua estabilidade examinando os pólos deste sistema.

Aqui todas as derivadas serão em relação ao tempo e não com relação a alguma das variáveis de estado. Deste modo as equações são ordinárias e não parciais como o seriam se tivessem que ser derivadas em relação às variáveis de estado.

Resumindo, serão focados os sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, homogêneos no tempo.

Um sistema, de  $k$  equações, pode ser escrito na forma vetorial como:

$$\dot{x} = \varphi(x)$$

**Equação 4-6**

Com  $\dot{x}$  sendo a derivada do estado  $x$  em relação ao tempo.

$$\text{Onde } \dot{x} = (\dot{x}_1 \dots \dot{x}_k) = \frac{dx}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt} \dots \frac{dx_k}{dt} \right)$$

$\varphi$  é o mapeamento de um conjunto aberto  $X \subset \mathfrak{R}^k$  em  $\mathfrak{R}^k$ . Aqui  $x = (x_1 \dots x_k) \in X$  é o vetor de estado,  $X$  é o espaço de estado e o lado direito da Equação 4-6 especifica a direção e velocidade da mudança de estado para cada ponto  $x$  no espaço de estado  $X$ . A função  $\varphi$  é chamada de vetor campo. Para cada componente  $x_i$  do estado  $x$ ,  $\varphi_i(x) \in \mathfrak{R}$  é sua derivada no tempo. O vetor campo está ilustrado na Figura 4-51.

A primeira pergunta que surge, uma vez que o sistema de equações diferenciais definido pela Equação 4-6 foi estabelecido, é se ele tem, no sentido exato, uma solução e, nesse caso, se a solução é única. Além disso, há a pergunta de se a solução é global, no sentido de definir o estado em todo o tempo (passado e futuro). Formalmente, uma solução local através de um ponto  $x \in X$  no sistema da Equação 4-6, é uma função  $\xi(\cdot, x^0): T \rightarrow X$ , onde  $T$  é um intervalo aberto contendo  $t = 0$ , tal que  $\xi(0, x^0) = x^0$  e tal que a Equação 4-7 abaixo valha para todo  $t \in T$ . A solução será global se  $T = \mathfrak{R}$ .

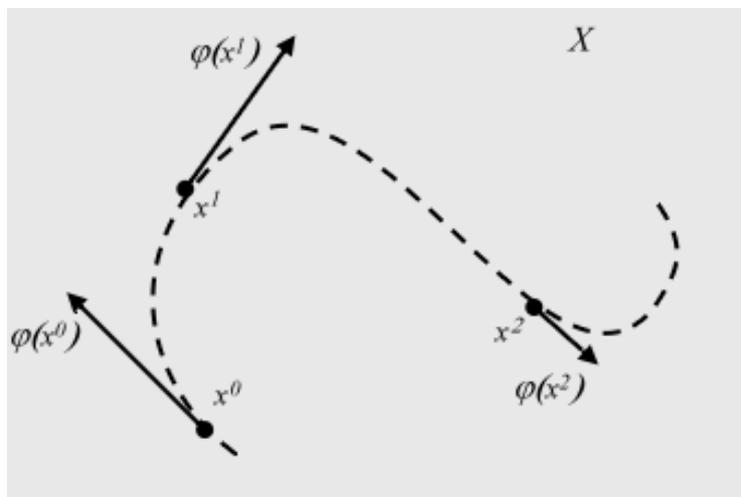


Figura 4-51 – Vetores campo tangentes a uma trajetória no espaço de estado.

$$\frac{d\xi(t, x^0)}{dt} = \varphi[\xi(t, x^0)] \tag{Equação 4-7}$$

A solução  $\xi(\cdot, x^0) = x^0$  é a linha tracejada que parte do ponto  $x^0$  e a medida que o tempo avança ela percorre o espaço  $X$ , transformando  $T \rightarrow X$ . Como admitimos que esta solução começou em  $x^0$ , a sua posição para  $t = 0$ ,  $\xi(0, x^0)$  é igual a  $x^0$ . Caso estejamos no ponto  $x^1$  num tempo posterior ao tempo para o qual

a solução passou por  $x^0$  e o tempo volte atrás, numa viagem ao passado, a posição em  $X$  faria o caminho de volta para  $x^0$ .

Deste modo, se  $\xi(t, x^0)$  for o lugar geométrico em  $X$  da solução de um sistema de equações lineares, substituindo  $\xi(t, x^0)$  na Equação 4-6 temos a Equação 4-7.

A existência e singularidade de uma solução local estão garantidas para todos os vetores de campo  $\varphi$  que são suficientemente suaves. A condição chamada de continuidade de Lipschitz é um pouco mais estrita que continuidade. Relembre que ambos os estados  $x \in X$  e seus vetores campo associados  $\varphi(x)$ , estão no mesmo espaço Euclidiano  $\mathcal{R}^k$ . Conseqüentemente a diferença em comprimento e direção do vetor campo  $\varphi$  pode ser medido de forma significativa para quaisquer dois pontos  $x, y \in X$  pela mesma métrica Euclidiana, que é usada quando se mede uma distância em  $X \in \mathcal{R}^k$ . A continuidade de Lipschitz requer essencialmente que exista algum  $\lambda \in \mathcal{R}$ , constante, tal que a diferença em comprimento e direção de  $\varphi$  para quaisquer dois estados  $x, y \in X$ , seja menor que a distância entre os estados  $\lambda\|x - y\|$ . Mais precisamente e numa versão local ligeiramente mais fraca, uma função  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{R}^k$ , onde  $X \subset \mathcal{R}^k$ , é localmente Lipschitz contínua, se para todo subconjunto compacto  $C \subset X$ , existe algum número real  $\lambda$ , tal que a Equação 4-8 seja válida para todo  $x, y \in C$ .

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \lambda\|x - y\| \tag{Equação 4-8}$$

Se o vetor campo  $\varphi$  possui as primeiras derivadas parciais contínuas, então ele é Lipschitz contínuo e se  $\varphi$  for Lipschitz contínuo então ele é contínuo.

A implicação reivindicada para a singularidade e existência de uma solução local no sistema 1.1 é um resultado clássico chamado teorema de Picard-Lindelöf. Este teorema diz que se  $X \subset \mathcal{R}^k$  for aberto e o vetor campo  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{R}^k$  for Lipschitz contínuo, então o sistema 1.1 possui solução única  $\xi(t, x^0) : T \rightarrow X$ , para todo estado  $x^0 \in X$ . Além do mais  $\xi(t, x^0)$  é contínua em  $t \in T$  e  $x \in X$ . [Ref: 7]

Aqui foi considerado que todos os estados relevantes pertenciam a algum subconjunto compacto  $C$  do domínio  $X$  do vetor campo  $\varphi$ . Mais precisamente,

temos  $x^0 \in C$  e  $\xi(t, x^0) \in C$  para todo o  $t \in T(x^0)$ , onde  $T(x^0) \subset \mathfrak{R}$  é o intervalo aberto de tempo no qual a solução através de  $x^0$  está definida. Normalmente  $X = \mathfrak{R}$  e  $C$  ou é o simplex  $\Delta$  de estratégias mistas de um jogador, ou  $C$  é o poliedro  $\mathcal{O}$  de perfis de estratégias mistas do jogo em questão. Em tal situação alguém poderia mostrar que a solução através de qualquer ponto  $x^0 \in C$  é global. [Ref: 39]

Suponha que  $X \subset \mathfrak{R}$  seja aberto, que  $\varphi$  é Lipschitz contínuo e que  $C$  é um subconjunto compacto de  $X$  tal que  $\xi(t, x^0) \in C$  para todo  $x^0 \in C$  e  $t \in T(x^0)$ . Assim  $T(x^0)$  pode ser levado em  $\mathfrak{R}$  e a solução  $\xi: \mathfrak{R} \times C \rightarrow C$  admitirá três condições:

$$\xi(0, x) = x \quad \forall x \in C, \quad \text{Axioma 4-1}$$

$$\xi[t, \xi(s, x)] = \xi(t + s, x) \quad \forall x \in C, \forall s, t \in \mathfrak{R} \quad \text{Axioma 4-2}$$

$$\xi \text{ é contínua} \quad \text{Axioma 4-3}$$

O Axioma 4-1 diz que o estado após  $t = 0$  unidades de tempo é idêntico ao estado inicial. A Axioma 4-2 diz que o estado após  $t + s$  unidades de tempo é idêntico ao estado inicial obtido pelo primeiro axioma  $\xi(0, x) = x$ , seguindo a solução através do estado inicial por  $s$  unidades de tempo chegando no estado  $y = \xi(s, x)$  e então seguindo a solução que passou pelo estado  $y$  por outras  $t$  unidades de tempo. Veja a Figura 4-52. A terceira condição diz que as soluções são funções contínuas, tanto no tempo como também com respeito ao estado inicial. A última propriedade simplesmente significa que quando observado em qualquer momento fixo  $t \in \mathfrak{R}$ , a trajetória da solução através de qualquer estado inicial  $y^0$  próximo a  $x^0$  fica próxima à trajetória da solução através de  $x^0$ . Desde que na prática pode ser difícil obter a informação precisa sobre o estado inicial exato, esta propriedade é claramente uma propriedade de robustez desejável.

Consideremos agora, que  $D = (\mathfrak{R}, C, \xi)$  defina um sistema dinâmico no espaço de estado  $C \subset X$ , no tempo contínuo  $t \in \mathfrak{R}$  e com solução  $\xi$  estando de acordo com as três condições expressas pelos Axioma 4-1, Axioma 4-2 e Axioma 4-3. De agora em diante iremos requerer os sistemas de equações diferenciais ordinárias vistos na indução de tais sistemas dinâmicos D.

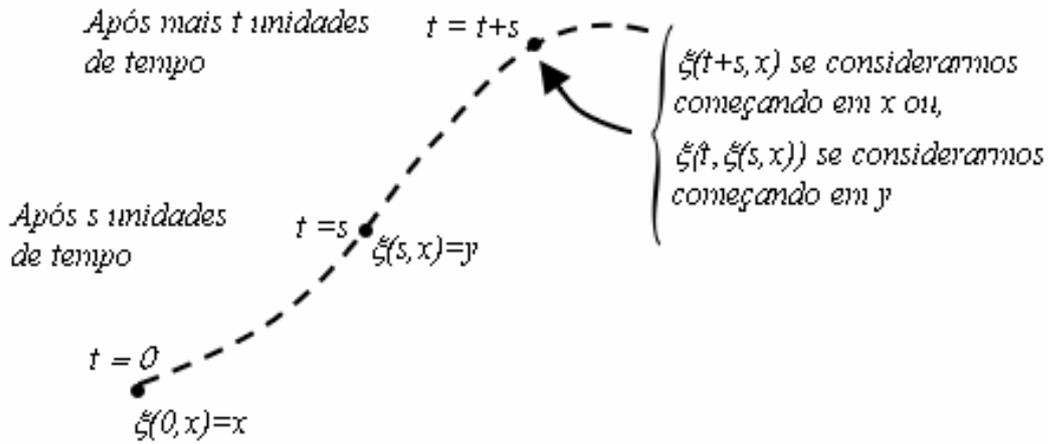


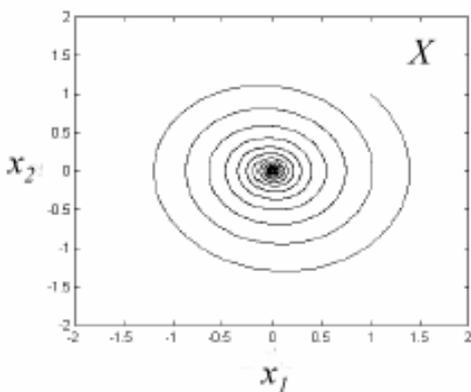
Figura 4-52 – Ilustração do Axioma 4-2

No estudo destes sistemas dinâmicos os conceitos de trajetória, órbita, invariância, estacionariedade e estabilidade são de total importância. A trajetória (solução), ou caminho, através de um estado  $x^0 \in C$  é o gráfico da solução  $\xi(\cdot, x)$ . Formalmente, é o subconjunto dos seguintes pares de tempo e estado:

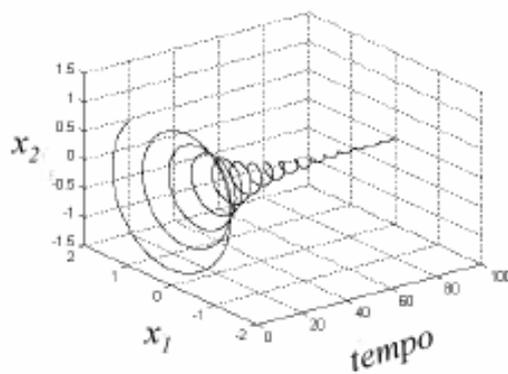
$$\tau(x^0) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times C : x = \xi(t, x^0)\} \tag{Equação 4-9}$$

Em outras palavras, a trajetória  $\tau(x^0)$  contém toda a informação de como o estado evolui sobre o tempo. Em contraste com a órbita através de um ponto no espaço que só nos diz quais pontos são alcançados, mas não quando. Formalmente, a órbita  $\gamma(x^0)$  através de um estado inicial  $x^0$ , é a reflexão de todo o eixo do tempo na solução  $\xi(t, x)$  traçada em  $X$ .

$$\gamma(x^0) = \{x \in C : x = \xi(t, x^0) \text{ para qualquer } t \in \mathbb{R}\}$$



(a)



(b)

Figura 4-53 – (a) órbita  $\gamma$ . (b) trajetória  $\tau$

Equivalentemente pode-se pensar na órbita  $\gamma(x^0)$ , como sendo a projeção da trajetória  $\tau(x^0)$  no espaço de estado  $C$ . Escreve-se  $\gamma(A) \subset C$ , quando  $A \subset C$ , para a união de todas as órbitas  $\gamma(x^0)$  com  $x^0 \in A$ .

Em muitas aplicações estaremos interessados no conjunto de estados que serão alcançados após o sistema ter passado em  $x^0$ . Para este propósito define-se como órbita adiante ou semi-órbita que passa pelo estado  $x^0$ , como a órbita  $\gamma(x^0)$  para todo  $t \geq 0$ , ou seja, é a órbita projetada pela trajetória a partir do tempo  $t = 0$ .

$$\gamma^+(x^0) = \{x \in C : x = \xi(t, x^0) \text{ para qualquer } t \geq 0\}$$

O Conjunto  $\gamma^+(A)$  é definido como a união de todas as semi-órbitas  $\gamma^+(x^0)$  com  $x^0 \in A$ .

#### 4.7 Invariância e Estacionariedade

Um subconjunto de estados  $A \subset C$  é invariante perante uma dada solução  $\xi$  se a órbita completa através de qualquer ponto em  $A$  permanece dentro  $A$ . Em outras palavras, se o estado é sabido estar em  $A$ , em algum ponto no tempo, então, para ser invariante ele já esteve e sempre deverá estar em  $A$ . O conjunto é positivamente invariante ou invariante adiante, se a solução através de qualquer ponto em  $A$  permanecer para sempre em  $A$ . Formalmente um subconjunto  $A \subset C$  é invariante se  $\gamma(x^0) \subset A$  para todo  $x^0 \in A$ . O conjunto é positivamente invariante se  $\gamma^+(x^0) \subset A$  para todo  $x^0 \in A$ .

Como propriedade dos conjuntos invariantes, temos que a união e interseção destes conjuntos, também são invariantes. Se  $A \subset C$  for invariante, então também o serão seu, fecho  $\bar{A} \subset C$ , seu complemento  $B = C \cap \sim A$ , seu interior  $\text{int}(A) \subset C$  e sua borda  $\text{bd}(A) \subset C$ .

Lembrando que a vizinhança de um ponto  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o conjunto aberto  $U \subset \mathfrak{R}^n$  que contém  $x$ . O complemento de um conjunto  $X \subset \mathfrak{R}^n$ ,  $\sim X$ , é tudo que está fora do fecho de  $X$ . O interior de um conjunto  $X \subset \mathfrak{R}^n$ ,  $\text{int}(X)$  é o subconjunto de pontos  $x$  em  $X$ , tal que  $X$  contém qualquer vizinho de  $x$ . A borda de um conjunto  $X$ ,  $\text{bd}(X)$  é o conjunto de pontos  $y \in \mathfrak{R}^n$ , tal que toda vizinhança de  $y$  contém

algum ponto de  $X$  e algum ponto de  $\sim X$ . O fecho de um conjunto  $X \subset \mathfrak{R}^n$ ,  $\bar{X}$ , é a união de  $X$  e sua borda. Se um conjunto for fechado ele é igual ao seu fecho.

No caso de processos evolutivos onde as coordenadas são proporções das estratégias na população o espaço é um conjunto fechado  $\Delta$ , para;

$$\{x \in \Delta : x \in [0,1]_1 \times \cdots \times [0,1]_n : n = Ne - Nj\}$$

Onde  $Ne$  é um número total de estratégias no jogo e  $Nj$  é o número de jogadores. Como cada jogador possui  $m$  estratégias e as proporções dessas  $m$  estratégias somam 1 cada um deles contribui com  $m-1$  dimensões para o simplex de estratégias mistas. No caso de dois jogadores cada qual com duas estratégias nosso  $n = Ne - Nj = 4-2 = 2$  dimensões como consta nos exemplos.

Sendo assim, as órbitas sempre estarão dentro do simplex de estratégias mistas e por isso este poliedro é um conjunto invariante.

Uma importante classe dos conjuntos invariantes é a dos estados estacionários, isto é, estados sem nenhum movimento. Um estado estacionário sob uma solução  $\xi$ , é um estado  $x \in C$ , tal que  $\xi(t,x) = x$  para todo  $t \in \mathfrak{R}$ . Em outras palavras a trajetória não se move, logo o vetor campo  $\varphi(x) = 0$ .

Um sistema linear invariante no tempo, da forma  $\dot{x} = Ax$ , possui um único ponto de equilíbrio se  $A$  não for singular. Se  $A$  for singular o sistema possui um número infinito de pontos de equilíbrio que estão contidos no espaço definido por  $Ax = 0$ .

Os estados estacionários também são referidos como pontos de descanso, pontos críticos ou equilíbrios. Assim um estado  $x \in X$  é estacionário se e somente se a órbita  $\gamma(x)$  através de  $x$  é o *singleton*  $\{x\}$ , ou, equivalentemente, se e somente se o conjunto  $A = \{x\}$  for invariante. Expresso em termos de um sistema de equações diferenciais ordinárias, um estado  $x \in C$  é estacionário se e somente se o vetor campo  $\varphi$  se anula em  $x$ , isto é,  $\varphi(x) = 0$ . Para compreender isto, note que se o vetor campo se anula em  $x \in C$ , então uma solução para o sistema da Equação 4-6, através de  $x$  é  $\xi(t,x) = x$  para todo  $t$ . Pelo teorema de Picard-Lindelöf, esta é a

única solução através de  $x$ , por isso  $x$  é estacionário. Inversamente, suponha que  $\xi(t,x) = x$ , para todo  $t$ , seja a solução através de  $x$ , então fica claro que  $d\xi(t,x)/dt = 0$  para todo  $t$  e que pela Equação 4-7,  $\varphi(x) = 0$ .

Uma consequência útil dos Axioma 4-1, Axioma 4-1 e Axioma 4-3, é que se a solução converge no tempo, então o estado limite é necessariamente estacionário. Se uma solução através de algum estado de inicial  $x$ , tende, com o passar do tempo, a algum estado  $y$ , então o vetor campo deveria ser fraco próximo a  $y$  e se anular em  $y$ .

Formalmente se  $x, y \in C$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t, x) = y$ , então  $y$  é estacionário.

Note, entretanto, que a convergência de uma solução em direção a um ponto não implica que o ponto será alcançado em um tempo finito. Na realidade, a menos que o sistema esteja inicialmente em um estado estacionário, nunca estará em um estado estacionário: Se  $x \neq y$  e  $y$  for estacionário,  $\xi(t,x) \neq y$  para todo  $t$  finito. Se  $y$  for estacionário então uma solução através de  $y$  é uma solução constante  $\xi(t,y) = y$  para todo  $t$  e pelo teorema de Picard-Lindelöf esta é a única solução de  $y$ .

## 4.8 Conceitos de Estabilidade

Estabilidade pode ser vista intuitivamente como um tipo de bom comportamento em torno de um ponto de operação desejado.

Deixe  $D = (\mathcal{R}, C, \xi)$  ser um sistema dinâmico. Veremos aqui duas noções distintas de estabilidade: estabilidade no sentido de Lyapunov e estabilidade assintótica, aplicadas tanto para um estado  $x \in C$ , como para um conjunto de estados  $A \in C$ . Um estado  $x \in C$  é estável no sentido de Lyapunov se nenhuma pequena perturbação deste estado leva o sistema para outro estado longe de  $x$ . Enquanto a estabilidade no sentido de Lyapunov requer que não haja nenhum movimento para longe do estado a partir de um pequeno empurrão, a estabilidade assintótica requer que haja uma atração de volta para aquele estado. Deste modo, um estado  $x \in C$  é assintoticamente estável, se ele for estável no sentido de Lyapunov e todas pequenas perturbações do estado impliquem num movimento

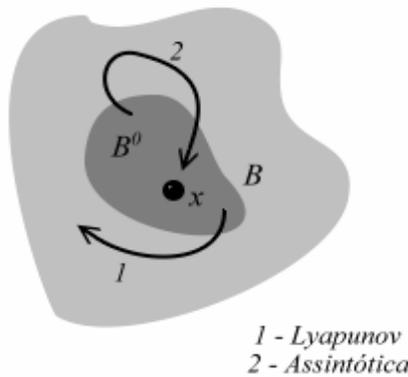
de volta para este estado. Por definição, estabilidade assintótica implica em estabilidade no sentido de Lyapunov.

O conceito de longe ou perto de um estado está relacionado com a região onde são respeitadas as propriedades e restrições sob as quais se deseja estar. Dizemos que o estado foi para longe se esta região de destino não contém as propriedades que se deseja que a região de origem tenha.

Formalmente, um estado  $x$  é estável no sentido de Lyapunov, se toda vizinhança  $B$  de  $x$  contém uma vizinhança  $B^0$  de  $x$ , tal que  $\xi(t, x^0) \in B$  para todo  $x^0 \in B^0 \cap C$  e  $t \geq 0$ . Um estado  $x$  é assintoticamente estável, se ele é estável no sentido de Lyapunov e existe uma vizinhança  $B^0$  tal que a Equação 4-10 é válida para todo  $x^0 \in B^0 \cap C$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t, x^0) = x$$

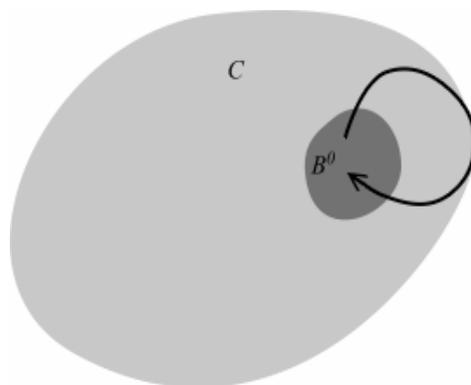
**Equação 4-10**



**Figura 4-54 – Estabilidade assintótica versus estabilidade de Lyapunov**

Se após uma perturbação o estado voltar para  $x$ , ele é assintoticamente estável? Pode-se questionar o fato de que se o sistema voltar para o estado inicial não seja assintoticamente estável. É fácil construir um contra exemplo que mostre que a convergência de um estado não implique necessariamente em estabilidade. Por exemplo a órbita vista na Figura 4-55 se inicia em  $B^0$  e acaba voltando para  $B^0$ , porém não sem antes sair do conjunto compacto  $C$  antes de convergir para o estado  $x$ . Assim,  $x$  é instável no sentido de Lyapunov a despeito do estado da convergência. Chamar este sistema de instável é bastante razoável, desde que a região fora de  $C$  é uma região onde o modelo não é válido.

Geometricamente, a solução particular  $\xi(t, x^0)$  é estável se qualquer movimento iniciado dentro do conjunto  $B^0$  permanece dentro da vizinhança  $B$  de  $B^0$  para todo o tempo. Se o movimento se aproxima de  $x^0 \in B^0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , a solução trivial é assintoticamente estável e se ela atinge a fronteira do conjunto  $B$  em um tempo finito, ela é instável. Soluções periódicas no tempo, não perturbadas, são representadas por órbitas fechadas no espaço e podem caracterizar movimentos de equilíbrio.



**Figura 4-55 – Exemplo de órbita instável por não respeitar a região onde o modelo seja válido**

Assim, denotando uma dada órbita fechada por  $\gamma(x^0)$ , se toda órbita na vizinhança de  $\gamma(x^0)$  permanece na vizinhança de  $\gamma(x^0)$ , então o movimento é dito orbitalmente estável. Se as órbitas se aproximam de  $\gamma(x^0)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o movimento não perturbado é chamado assintoticamente orbitalmente estável. De outro modo, se existirem órbitas que tendem a sair da vizinhança de  $\gamma(x^0)$  (ou aproximar de  $\gamma(x^0)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ ), o movimento não perturbado é dito *orbitalmente instável*. Estabilidade orbital de um sistema é também conhecida como estabilidade no sentido de Poincaré e está associada com trajetórias fechadas, geralmente conhecidas como ciclos limites.

Uma questão de particular interesse em sistemas não lineares é a existência de trajetórias que implicam em movimento periódico. Ciclos Limites são movimentos de equilíbrio no qual o sistema possui movimento periódico. Tal definição é oposta ao conceito de pontos de equilíbrio, já que estes estão em repouso. No caso dos ciclos limites, devemos falar em estabilidade orbital. Para se

obter um ciclo limite estável é necessário que o estado  $x^0$  seja instável. Como consequência, trajetórias de pequena amplitude movem-se para fora, à medida que o tempo passa. Por outro lado, trajetórias de grande amplitude devem se mover para dentro. Existem dois critérios para a existência de ciclos limite:

*Teorema de Poincaré-Bendixson.* Seja  $D$  um domínio finito que não contém pontos estacionários e do qual as trajetórias não partem. Então  $D$  contém um ciclo limite.

*Critério de Bendixson.* Dados os sistemas de equações diferenciais ordinárias  $\dot{x} = \varphi(x)$  e  $\dot{y} = \phi(y)$ , se a expressão  $\partial\varphi/\partial x + \partial\phi/\partial y$  não for identicamente nula e não mudar de sinal no domínio  $D$ , então a equação diferencial não apresenta órbitas fechadas em  $D$ .

Note que o critério da estabilidade de Lyapunov é equivalente ao requerimento de que toda semi-órbita que sai de  $B^0$  esteja contida em  $B$ , ou seja,  $\gamma^+(B^0 \cap C) \subset B$ .

O estado  $x$  deve ser estacionário de modo a ser estável, desde que de outro modo a solução  $\xi$  seria conduzida para longe de  $x$ , mesmo na ausência de uma perturbação, como uma mutação. Portanto se o estado for estável no sentido de Lyapunov, ele é estacionário.

As definições precedentes sobre os tipos de estabilidades de um estado  $x \in C$  podem ser facilmente estendidos para conjuntos de estados  $A \subset C$ . Desde que necessitemos considerar a convergência para um conjunto fechado em vez da convergência para um ponto, serão necessárias mais três considerações matemáticas. Em primeiro lugar, a distância entre um ponto  $y \in C$  e um conjunto fechado  $A \subset C$  é medida como a mínima distância entre  $y$  e qualquer ponto  $a$  em  $A$ . A notação usada aqui é  $d(y, A) = \min_{a \in A} (y, a)$ . Em segundo lugar, diz-se que a solução  $\xi(\cdot, x^0)$  converge para um conjunto fechado  $A \subset C$ , escrito  $\xi(t, x^0)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow A$ , se a distância  $d(\xi(t, x^0), A)$  converge para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Note que isto não requer que a solução seja convergente. A terceira e última consideração, é que entendamos por vizinhança de um conjunto fechado  $A$ , um conjunto aberto  $B$  que contém  $A$ .

Assim, em relação a um conjunto  $A \subset C$ , a estabilidade no sentido de Lyapunov se dá quanto toda vizinhança  $B$  de  $A$ , contém uma vizinhança  $B^0$  de  $A$ , tal que  $\gamma^+(B^0 \cap C) \subset B$ . Um conjunto fechado  $A \subset C$  é assintoticamente estável se for estável no sentido de Lyapunov e se existe uma vizinhança  $B^0$  de  $A$ , tal que  $\xi(t, x^0)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow A$  para todo  $x^0 \in B^0 \cap C$ .

Quando um conjunto fechado  $A \subset C$  for estável no sentido de Lyapunov, então ele é positivamente invariante, ou seja, toda solução  $\xi(t, x^0)$  através de todo ponto  $x^0 \in A$ , permanece em  $A$ .

Um conceito muito útil, proximamente relacionado com aquele da estabilidade assintótica, é o da bacia de atração de um estado  $x \in C$ , ou de um conjunto fechado de estados  $A \subset C$ . Como o nome sugere, esta bacia é o conjunto de estados iniciais que submetidos a uma certa dinâmica são puxados para o ponto  $x$ , ou para o conjunto  $A$  em questão. Mais precisamente, a bacia de atração de um estado  $x$ , é o conjunto de estados  $x^0$  tal que a solução através de  $x^0$  converge, no tempo, para  $x$ . Do mesmo modo, a bacia de atração de um conjunto  $A$  é o conjunto de pontos iniciais, tal que a solução através de cada um destes pontos iniciais tende para  $A$ . Note, entretanto, que neste último caso da bacia de atração de um conjunto, que a solução não precisa ser convergente. Basta que sua distância para o conjunto  $A$  em questão, convirja para zero. Formalmente, pode-se tratar estados individuais e conjuntos de estados com a mesma matemática: A bacia de atração de um conjunto fechado  $A \subset C$  é o conjunto  $\{x^0 \in C: \xi(t, x^0)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow A\}$ . Um conjunto  $A \subset C$ , é chamado de atrator, se sua bacia de atração estiver na vizinhança  $A$ . Conseqüentemente um estado ou conjunto estável no sentido de Lyapunov é assintoticamente estável, se e somente se, este estado ou conjunto, for um atrator.

Das definições acima, nota-se que a estabilidade é uma dependência contínua e uniforme das condições iniciais e são locais. Um ponto de equilíbrio é estável no sentido que atrai soluções iniciais próximas a ele, mas pode não atrair soluções com condições iniciais distantes. O conjunto de todas as possíveis condições iniciais que converge para o mesmo atrator é chamado *bacia de atração*. Neste caso, o estudo sobre a estabilidade do sistema é feito através da perturbação das condições iniciais.

Numa analogia como um sistema mecânico mostrado na Figura 4-56 de massa, mola, amortecedor temos as seguintes comparações entre as definições de estabilidade e energia mecânica:

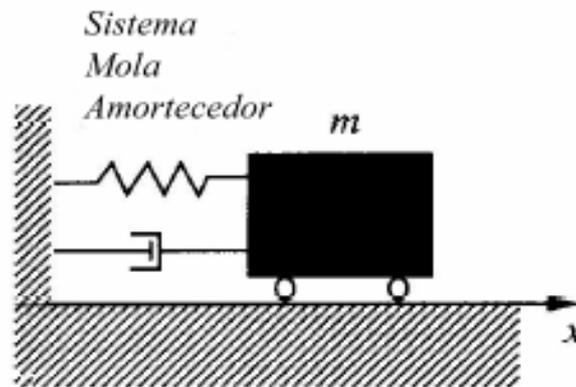


Figura 4-56 – Sistema mola amortecedor

1. Energia nula corresponde ao ponto de equilíbrio  $x$  para o qual  $\dot{x} = 0$
2. Estabilidade assintótica implica na convergência da energia mecânica para zero
3. Instabilidade está relacionada com o aumento da energia mecânica

## 4.9 Método Direto de Lyapunov

Um método geral para estabelecer a estabilidade de estados individuais, ou de conjuntos fechados de estados, é o método direto de Lyapunov. A idéia é intuitivamente simples e será aplicada em três contextos distintos.

Em primeiro lugar deixe  $A \subset C$  ser um conjunto fechado para o qual se quer demonstrar a estabilidade no sentido de Lyapunov para uma determinada dinâmica  $\xi$  no conjunto compacto  $C$ . Suponha que encontramos alguma função real e contínua  $v$  definida numa vizinhança  $D$  do conjunto  $A$ , tal que  $v(x)$  é zero em  $A$  e positiva fora de  $A$ .

Considerando funções deste tipo que sejam independentes do tempo,  $v(x)$ , temos as seguintes definições:

1. A função  $v(x)$  é dita *positiva definida* se existir um conjunto  $A \subset C$ , fechado, tal que  $v(x)$  é positiva para  $x \in A$ ;

2. A função  $v(x)$  é dita *positiva semidefinida* se existir um conjunto  $A \subset C$ , fechado, tal que  $v(x) \geq 0$  para  $x \in A$ ;

3. A definição de função *negativa definida* é análoga;

4. A função  $v(x)$  é dita *indefinida* se não for nem definida, nem semidefinida. Neste caso, qualquer vizinhança arbitrariamente pequena de  $x^0$  contém tanto pontos para os quais  $v(x)$  assume valores positivos, como pontos para os quais  $v$  assume valores negativos.

Suponha, além do mais, que  $v$ , avaliada ao longo de qualquer solução em seu domínio  $D$ , não cresça com o tempo. Se for assim, tenderemos a achar que, ao menos para os estados iniciais suficientemente próximos de  $A$ , o sistema não se moverá para longe de  $A$ . Existem algumas sutilezas, decerto, envolvendo a possibilidade de que o sistema se mova para algum mínimo local de  $v$ ,  $y \notin A$  e/ou em direção à borda do domínio  $D$  de  $v$ . Entretanto a estabilidade no sentido de Lyapunov de  $A$  pode, de fato, ser provada.

Suponha que  $A \subset C$  é fechado. Se existir alguma vizinhança  $D$  de  $A$  e uma função contínua  $v : D \rightarrow \mathfrak{R}_+$  obedecendo as Condição 4-3 e Condição 4-4 abaixo, então o conjunto  $A$  é estável no sentido de Lyapunov.

$$v(x) = 0, \text{ se e somente se } x \in A \quad \text{Condição 4-3}$$

$$v(\xi(t,x)) \leq v(x), \text{ se } x \notin A, t > 0 \text{ e } \xi(s,x) \in D \forall s \in [0,t] \quad \text{Condição 4-4}$$

Suponha agora que  $A \subset C$  é fechado. Só existirá uma vizinhança  $D$  de  $A$  e uma função contínua  $v : D \rightarrow \mathfrak{R}_+$  obedecendo as Condição 4-3 e Condição 4-5, se e somente se  $A$  for assintoticamente estável.

$$v(\xi(t,x)) < v(x), \text{ se } x \notin A, t > 0 \text{ e } \xi(s,x) \in D \forall s \in [0,t] \quad \text{Condição 4-5}$$

Aparecem duas desvantagens a partir destes resultados. A mais aparente é que nenhum método é dado de como encontrar a função de Lyapunov. Realmente esta é uma questão de intuição e sorte, entretanto há uma classe de funções de entropia que funcionam bem em muitos contextos de dinâmicas dos jogos evolutivos. A segunda desvantagem é que condições de monotonicidade como as Condição 4-4 e Condição 4-5 são de difícil verificação. Entretanto se a dinâmica  $\xi$

for a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias (Equação 4-6), e o vetor campo associado  $\varphi$  for continuamente diferenciável, então cada uma das duas condições de monotonicidade podem ser substituídas por uma condição suficiente, intuitiva e operacional. Nesta aproximação alternativa usa-se o mapa de contorno da função valor  $v$  e o vetor campo  $\varphi$ , respectivamente e não será necessário nenhum conhecimento das soluções explícitas para o sistema de equações diferenciais.

Novamente a idéia básica é simples. Em qualquer estado  $x$  no domínio  $D \subset C$  da função valor  $v$ , a direção do *steepest ascent* de  $v$  é determinada por seu gradiente que é um vetor ortogonal à curva de nível (isoquanta) de  $v$ , através do ponto  $x$ .

$$\nabla v(x) = (\partial v(x)/\partial x_1, \dots, \partial v(x)/\partial x_k)$$

A derivada direcional de uma função  $v(x)$ , mede a taxa de variação de uma função em relação à distância em uma determinada direção e pode ser obtida pelo produto escalar do gradiente por um vetor unitário na direção desejada. Como queremos estudar  $v(x)$ , na direção da solução  $\xi(x)$ , utilizamos como direção o vetor campo  $\varphi(x)$  e portanto a taxa de variação de  $v(x)$  na direção de  $\varphi(x)$  a por  $\nabla v(x) \cdot \varphi(x)$ .

Se  $\alpha$  é o ângulo entre os dois vetores  $\varphi$  e  $\nabla v$  então  $\nabla v \cdot \varphi$  é igual a  $|\varphi| |\nabla v| \cos(\alpha)$  que será máximo quando  $\cos(\alpha) = 1$  ou quando  $\varphi$  estiver na direção do gradiente  $\nabla v$  e neste caso a derivada direcional será  $|\nabla v|$ . Logo o gradiente de uma função está na direção e sentido nos quais a função  $v$  possui sua taxa máxima de variação.

Igualmente o vetor  $\varphi(x)$  aponta na direção tangente da curva de solução  $\xi(x)$  através de  $x$ . Conseqüentemente,  $v$  é decrescente ao longo da solução  $\xi$ , se o produto interno  $\nabla v(x) \cdot \varphi(x)$  for negativo.

Pela regra da cadeia da diferenciação, este produto interno é igual à derivada no tempo da função de valor em  $x = \xi(t, x^0)$ .

$$\frac{d}{dt} [v(\xi(t, x))] = \sum_{h=1}^k \frac{\partial v(x)}{\partial x_h} \left[ \frac{d\xi_h(t, x)}{dt} \right] = \sum_{h=1}^k \frac{\partial v(x)}{\partial x_h} \varphi_h(x) = \nabla v(x) \bullet \varphi(x) \quad \text{Equação 4-11}$$

Garantindo que a solução permanece no domínio  $D$  durante algum intervalo de tempo  $[0, t]$ , a integração da Equação 4-11 dá:

$$v(\xi(t, x^0)) - v(x^0) = \int_0^t \nabla v(\xi(s, x^0)) \bullet \varphi(\xi(s, x^0)) ds \quad \text{Equação 4-12}$$

Assim, se o produto interno  $\nabla v(x) \bullet \varphi(x)$  for negativo para todo  $x \notin A$  no domínio  $D$ , então claramente a Condição 4-5 é obedecida. Igualmente pode-se mostrar que se  $\nabla v(x) \bullet \varphi(x)$  não for positivo para todo  $x \notin A$  no domínio  $D$  e  $A$  for um conjunto conectado, então a Condição 4-4 é obedecida.

Um conjunto conectado é um conjunto que não pode ser dividido em dois subconjuntos não vazios, tal que cada subconjunto não possui nenhum ponto em comum com o *fecho* um do outro.

Suponha que  $A \subset C$  seja fechado. Se existir uma vizinhança  $D$  de  $A$  e uma função continuamente diferenciável  $v: D \rightarrow \mathfrak{R}_+$ , obedecendo as Condição 4-3 e Condição 4-6, então  $A$  é assintoticamente estável. Suponha que  $A \subset C$  seja fechado e conectado. Se existir uma vizinhança  $D$  de  $A$  e uma função continuamente diferenciável  $v: D \rightarrow \mathfrak{R}_+$ , obedecendo as Condição 4-3 e Condição 4-7, então  $A$  é estável no sentido de Lyapunov.

$$\nabla v(x) \bullet \varphi(x) < 0 \quad \forall x \notin A \quad \text{Condição 4-6}$$

$$\nabla v(x) \bullet \varphi(x) \leq 0 \quad \forall x \notin A \quad \text{Condição 4-7}$$

Note que os requerimentos topológicos no conjunto de estados  $A$  em questão, são trivialmente encontrados no caso especial de um estado singular. Se  $A = \{x\}$  para algum  $x \in C$ , então  $A$  tanto é fechado, como é conectado.

Como pela Equação 4-6  $\varphi(x) = \dot{x}$ , fazemos  $\nabla v(x) \cdot \varphi(x) = \nabla v(x) \cdot \dot{x}$ , de modo que expandindo este produto interno temos:

$$\dot{v} = \nabla v(x) \cdot \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v}{\partial x_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \end{bmatrix} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_k} \dot{x}_k \quad \text{Equação 4-13}$$

**Teorema da estabilidade de Lyapunov 1:** Se existe para o sistema da Equação 4-6 uma função positiva definida  $v(x_1, \dots, x_k)$ , cuja derivada  $\dot{v}(x_1, \dots, x_k)$  é negativa semidefinida ao longo da órbita,  $\gamma^+(x^0)$  então a solução trivial é estável.

**Teorema da estabilidade de Lyapunov 2:** Se existe para o sistema Equação 4-6 uma função positiva definida  $v(x_1, \dots, x_k)$ , cuja derivada  $\dot{v}(x_1, \dots, x_k)$  é negativa definida ao longo da órbita  $\gamma^+(x^0)$ , então a solução trivial é assintoticamente estável.

**Teorema da instabilidade de Lyapunov 1:** Se existe para o sistema da Equação 4-6 uma função positiva definida  $v(x_1, \dots, x_k)$  cuja derivada  $\dot{v}(x_1, \dots, x_k)$  é positiva definida ao longo da trajetória da Equação 4-6, e  $v$  pode ter valores positivos para pequenos  $(x_1 \dots x_k)$  então a solução trivial é instável.

Nos teoremas acima, em todos os lugares em que aparece positivo e negativo pode ser trocado por negativo e positivo, sem a perda da validade dos resultados. A dificuldade para se usar estes teoremas, é que eles não nos dizem nada sobre como construir uma função de Lyapunov, considerando que exista uma. No caso em que o sistema autônomo (homogêneo) da Equação 4-6 representa um problema físico, é natural, primeiro considerar, a função energia total real do sistema como possível função de Lyapunov.

## 4.10 Método Indireto de Lyapunov

Este método também é chamado de método da linearização e permite investigar a estabilidade local de um sistema não-linear através do seu modelo linearizado. Os sistemas não lineares são aproximados por truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e a sua estabilidade é estudada através dos autovalores. Trata-se de um resultado de

grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores utilizando modelos linearizados em torno do ponto de operação nominal.

Para classificação dos equilíbrios, consideremos pequenas perturbações  $\varepsilon(t)$  sobre a solução  $\bar{x}(t)$ ,

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{\varepsilon}(t) = \varphi(\bar{x} + \varepsilon)$$

E considerando  $\dot{x} = \varphi(x)$  temos que,

$$\dot{\varepsilon}(t) = \varphi(\bar{x} + \varepsilon) - \varphi(\bar{x}) \quad \text{Equação 4-14}$$

Para pequenas perturbações  $\varepsilon$ , o lado direito da Equação 4-14 pode ser desenvolvido em uma série de Taylor desprezando-se os termos de segunda ordem em diante.

$$\dot{\varepsilon}(t) = \varphi(\bar{x}) + \nabla \varphi(\bar{x})\varepsilon - \varphi(\bar{x}) = \nabla \varphi(\bar{x})\varepsilon = \mathbf{J}\varepsilon$$

Onde  $\mathbf{J}$  é a matriz de derivadas parciais de primeira ordem chamada matriz Jacobiana.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

Considerando a equação característica,

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \text{Equação 4-15}$$

Onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\lambda$  são os autovalores da matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$ . Para encontrar os autovalores devemos resolver a equação característica.

Os autovalores da matriz constante  $\mathbf{J}$ , fornecem informações sobre a estabilidade local e podem ser reais ou complexos. Seja  $\lambda = \text{Re}(\lambda) + i\text{Im}(\lambda)$ , onde

*Re* e *Im* são as partes real e imaginária do autovalor. Do teorema do método indireto de Lyapunov temos as seguintes afirmações.

1. Se o modelo linearizado for estável, mas não assintoticamente estável, existe algum autovalor de **J** localizado sobre o eixo imaginário e nada se pode afirmar sobre o sistema da Equação 4-6.

2. Se o modelo linearizado for assintoticamente estável os autovalores de **J** terão parte real negativa e o sistema da Equação 4-6 será assintoticamente estável em torno do equilíbrio.

3. Se o modelo linearizado for instável, com a parte real de algum dos autovalores positiva, então o sistema da Equação 4-6 será instável.

Para exemplificar admitamos um sistema determinado pela dinâmica do replicador,

$$\dot{x}_i = [u(e_i^1, x) - u(x, x)]x_i$$

E conseqüentemente, da Equação 4-6,  $\varphi_i(x) = [u_i(e_i^1, x) - u_i(x, x)]x_i$

Para um jogo com dois jogadores e cada um deles com duas estratégias, temos:

$\varphi_1(x) = [u_1(e_1^1, w_2) - u_1(w_1, w_2)]x_1$ , onde  $x_1$  é a proporção da estratégia pura  $e_1^1$ , igual a  $(1 - \varepsilon_1)$  e  $w_2$  é a distribuição da segunda população mista.

$\varphi_2(x) = [u_2(e_2^1, w_1) - u_2(w_2, w_1)]x_2$ , onde  $x_2$  é a proporção da estratégia pura  $e_2^1$ , igual a  $(1 - \varepsilon_2)$  e  $w_1$  é a distribuição da primeira população mista.

$$\varphi(x_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \right\} x_1$$

$$\varphi(x_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} \right\} x_2$$

Desenvolvendo as equações temos:

$$\varphi(x_1) = [a_{11} + (a_{12} - a_{11})\varepsilon_2 - a_{11}(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + a_{21}\varepsilon_1(1 - \varepsilon_2) + a_{12}(1 - \varepsilon_1)\varepsilon_2 + a_{22}\varepsilon_1\varepsilon_2]x_1$$

$$\varphi(x_2) = [b_{21} + (b_{22} - b_{21})\varepsilon_1 - b_{11}(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) + b_{21}\varepsilon_2(1 - \varepsilon_1) + b_{12}(1 - \varepsilon_2)\varepsilon_1 + b_{22}\varepsilon_1\varepsilon_2]x_2$$

ou,

$$\varphi(x_1) = [a_{11} + (a_{12} - a_{11})(1 - x_2) - a_{11}x_1x_2 + a_{21}(1 - x_1)x_2 + a_{12}x_1(1 - x_2) + a_{22}(1 - x_1)(1 - x_2)]x_1$$

$$\varphi(x_2) = [b_{21} + (b_{22} - b_{21})(1 - x_1) - b_{11}x_1x_2 + b_{21}(1 - x_2)x_1 + b_{12}x_2(1 - x_1) + b_{22}(1 - x_1)(1 - x_2)]x_2$$

A matriz Jacobiana  $A$  será:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = a_{11}x_2 + a_{12} - a_{12}x_2 - 2a_{11}x_1x_2 - a_{21}x_2 + 2a_{21}x_1x_2 - 2a_{12}x_1 + 2a_{12}x_1x_2 - a_{22} + a_{22}x_2 + 2a_{22}x_1 - 2a_{22}x_1x_2$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = a_{11}x_1 - a_{12}x_1 - a_{11}x_1^2 - a_{21}x_1 + a_{21}x_1^2 + a_{12}x_1^2 + a_{22}x_1 - a_{22}x_1^2$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = b_{11}x_2 - b_{12}x_2 - b_{11}x_2^2 - b_{21}x_2 + b_{21}x_2^2 + b_{12}x_2^2 + b_{22}x_2 - b_{22}x_2^2$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = b_{11}x_1 + b_{12} - b_{12}x_1 - 2b_{11}x_1x_2 - b_{21}x_1 + 2b_{21}x_1x_2 - 2b_{12}x_2 + 2b_{12}x_1x_2 - b_{22} + b_{22}x_1 + 2b_{22}x_2 - 2b_{22}x_1x_2$$

Da equação característica  $Det(J - \lambda I) = 0$  podemos calcular os autovalores.

$$Det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \lambda \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \lambda \right) \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \lambda \right) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} =$$

$$= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \lambda^2 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \lambda^2 - \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) \lambda + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 - 4\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right)}}{2} \quad \text{Equação 4-16}$$

Agora, analisemos mais especificamente, o caso em que  $A = \mu(x,x) - \mu(y,x) < 0$  e  $B = \mu(x,y) - \mu(y,y) > 0$ . Com já foi visto, os pares  $(x,x)$  e  $(y,y)$ , ou seja, os pares formados apenas com estratégias residentes ou apenas com estratégias mutantes não são equilíbrios de Nash. Os equilíbrios serão formados, neste caso, com uma das populações apenas com estratégias residentes e a outra apenas como estratégias mutantes  $(x,y)$  e vice-versa  $(y,x)$ .

Considerando um jogo em que as matrizes de *payoff* dos jogadores são:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Visto do lado do jogador  $A$ , temos o seguinte jogo,

$$\begin{matrix} & e_2^1 & e_2^2 \\ e_1^1 & [(0.3,0.3) & (0.6,0.5)] \\ e_1^2 & [(0.5,0.6) & (0.2,0.2)] \end{matrix}$$

Onde são observados os equilíbrios em estratégias puras  $(e_1^2, e_2^1)$  e  $(e_1^1, e_2^2)$ . Agora vamos investigar os possíveis equilíbrios mistos. Para isto deve haver uma estratégia mista numa população para a qual existam pelos menos duas estratégias puras da outra população que jogadas ambas contra esta estratégia mista ganhem o mesmo *payoff*. Sendo assim, temos para cada um dos vértices do poliedro de estratégias mista *payoffs* iguais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 1-x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 1-x_2 \end{bmatrix}$$

$$0.3x_2 + 0.6 - 0.6x_2 = 0.5x_2 + 0.2 - 0.2x_2 \rightarrow x_2 = 2/3$$

Qualquer estratégia mista da população 1 será uma melhor réplica para a estratégia mista  $[2/3, 1/3]$  da população 2, pois se os *payoffs* nos vértices são iguais, qualquer combinação convexa deles também o será.

Podemos fazer o mesmo para segunda população, já que a matriz de *payoff* dela é igual neste caso, ao da população 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1-x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1-x_1 \end{bmatrix}$$

Assim  $x_1 = 2/3$ , ou seja, a proporção da estratégia residente na população 1 será igual a  $2/3$ .

Portando conclui-se que o par de perfis  $\left\{ \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\}$  é um equilíbrio misto.

Será este perfil um equilíbrio estável? Este não é um equilíbrio estrito desde que qualquer outra estratégia da população 1 é uma melhor réplica alternativa para a estratégia mista  $[2/3, 1/3]$  da população 2 e vice-versa. Neste caso,  $\mu(x_1, w_2) = \mu(y_1, w_2)$ . Sendo assim qualquer estratégia mutante  $y_1$  poderá substituir a estratégia residente  $x_1$  sem prejuízo para a primeira população. Portanto não há qualquer indicativa de que a estratégia encontrada seja um atrator e implique em estabilidade assintótica.

Analisemos agora, a dinâmica do replicador.

As funções  $\varphi_1(x)$  e  $\varphi_2(x)$  serão nulas em  $[2/3, 2/3]$ , logo este estado é estacionário, porém não é um equilíbrio assintoticamente estável. No equilíbrio evolutivo estável o *payoff* médio da estratégia evolutiva estável é igual ao *payoff* médio da população porque ela é a única na população, sendo nulas as proporções de todas as outras estratégias.

No estado misto estacionário em questão o caso é outro. Ali o estado não é atrator, mas é estacionário porque existe um equilíbrio de forças que agem sobre aquele estado. Formalmente podemos descrever esta afirmação como:

$$R_i = \sum_{k=1}^m \mu_i(e_i^k, w_{-i}) \vec{d}_k = 0 \quad \forall i \in I \tag{Equação 4-17}$$

Assim o somatório dos *payoffs* médios das estratégias da população de todos os jogadores é nulo, implicando o equilíbrio de forças sobre o estado.

Este tipo de estado está situado na *membrana* que divide as bacias de atração.

Podemos observar do exemplo que;

$$\mu_1(e_1^1, w_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 0.4$$

$$\mu_1(e_1^2, w_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 0.4$$

Da Equação 4-17 temos que  $\mu_1(e_1^1, w_2) \vec{d}_1 + \mu_1(e_1^2, w_2) \vec{d}_2 = 0$ . Do mesmo modo podemos constatar que  $\mu_2(e_2^1, w_1) \vec{d}_1 + \mu_2(e_2^2, w_1) \vec{d}_2 = 0$ .

Escrevendo de outra forma a Equação 4-17 tem-se:

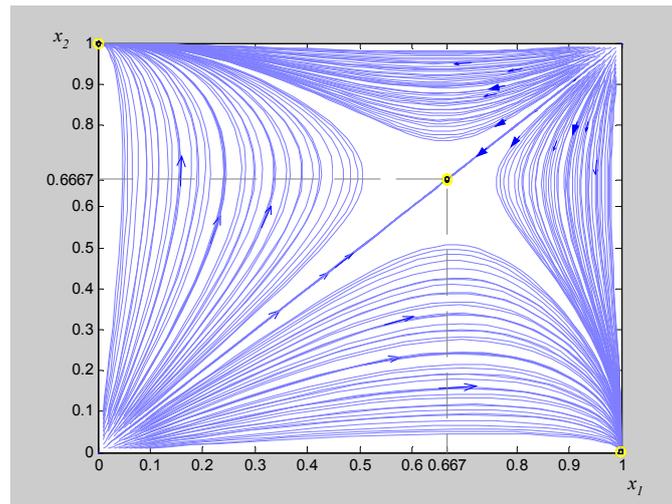
$$\rho_j^k = \mu_j(e_j^k, w_{-j}) - \sqrt{\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq k}}^m \mu_j(e_j^h, w_{-j})}^{1/2} \tag{Equação 4-18}$$

Com auxílio da Equação 4-18 podemos formalizar a definição do estado estacionário interior formado por um perfil de estratégias completamente mistas como:

$$\{\theta_{int}^{est} \in \Theta \mid \rho_j^k = 0 \quad \forall j \in I, k \in \Delta_j\} \tag{Equação 4-19}$$

Outra forma de vermos que o ponto  $[2/3, 2/3]$  não é um equilíbrio assintoticamente estável, seria através da Equação 4-16. A partir desta equação podemos calcular os autovalores:

$$\lambda_1 = 0.1333 \text{ e } \lambda_2 = -0.1333$$



**Figura 4-57 – Os dois equilíbrios em estratégias puras e suas respectivas bacias de atração contrastam com o equilíbrio em estratégias mistas sem bacia de atração**

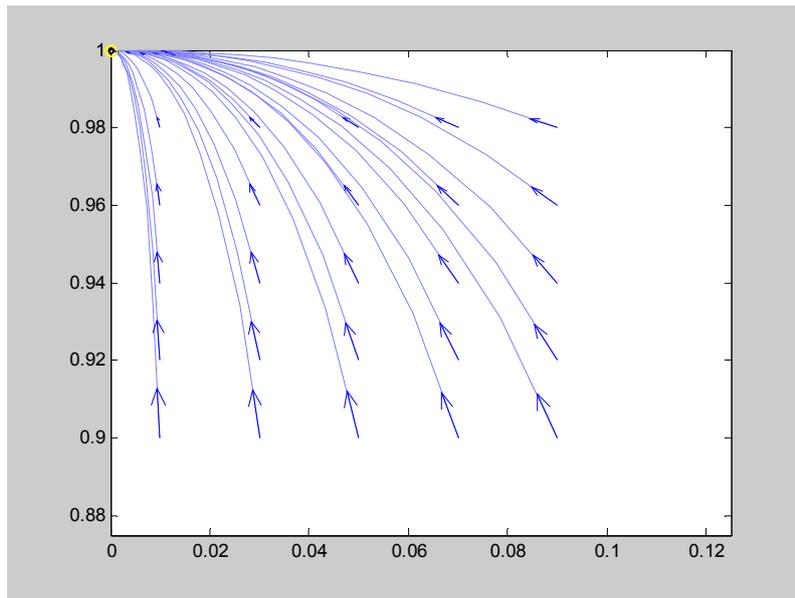
Como os autovalores são reais e um deles é positivo o estado não é assintoticamente estável. Na verdade ele é instável, pois pelo conceito de estabilidade assintótica deve-se observar que a vizinhança do estado  $[2/3, 2/3]$  deve ser uma bacia de atração e como vizinhança entende-se, pela definição já apresentada, como um conjunto aberto  $U \subset \mathfrak{R}^n$  que contém o estado. Neste caso, temos um espaço de duas dimensões, portanto cada ponto da vizinhança  $U \subset \mathfrak{R}^2$  deveria fazer parte da bacia de atração o que não acontece, desde que apenas um autovalor é negativo. O autovalor negativo em questão se refere a uma dimensão apenas. Portanto existem pontos na vizinhança de  $[2/3, 2/3]$  que não convergem para este ponto e por isso não é assintoticamente estável.

Porém o estado  $[0,1]$ , com uma das populações terminando somente com estratégias mutantes e a outra somente com residentes, apresenta autovalores iguais a:

$$\lambda_1 = -0.2$$

$$\lambda_2 = -0.4$$

Observa-se através da Figura 4-58, que toda vizinhança no  $\mathfrak{R}^2$  de  $x = [2/3, 2/3]$  converge para  $x$ . Por isso os dois autovalores não negativos e este estado é assintoticamente estável.



**Figura 4-58 – Equilíbrio estável no sentido assintótico cuja bacia de atração o envolve**

O estado no canto superior esquerdo da Figura 4-57 é assintoticamente estável, bem como o estado  $[1, 0]$  no canto inferior direito da mesma figura com os autovalores  $\lambda_1 = -0.2$  e  $\lambda_2 = -0.4$ .

Um ponto importante a ser discutido é como um algoritmo evolutivo é então capaz de atingir um equilíbrio que não é assintoticamente estável, caso um operador de *crossover* ou de mutação estabeleça o estado inicial  $x^0$  na bacia de atração  $D$ . Este fato, como observado neste exemplo, é realmente possível. Postos estacionários no interior do poliedro de estratégias mistas podem interceptar uma trajetória que convergia em direção a um equilíbrio estável. Porém em muitos casos, este conjunto  $D$  é tão exíguo que se torna improvável que operadores de *crossover* ou mutação estabeleçam um estado inicial contido nesta bacia de atração, como mostram as Figura 4-59 – (a), (b), (c), (d).

Com matrizes de *payoff* iguais a  $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$  para os jogadores

1 e 2 respectivamente nenhuma órbita atingiu o ponto estacionário  $[1/3, 2/3]$ . Como ambas as proporções,  $1/3$  e  $2/3$  são dízimas periódicas as órbitas apenas se aproximam deste equilíbrio como visto na Figura 4-59 (c) e ao mesmo tempo, toda órbita iniciando na vizinhança de  $[2/3, 2/3]$  se afastará dele.

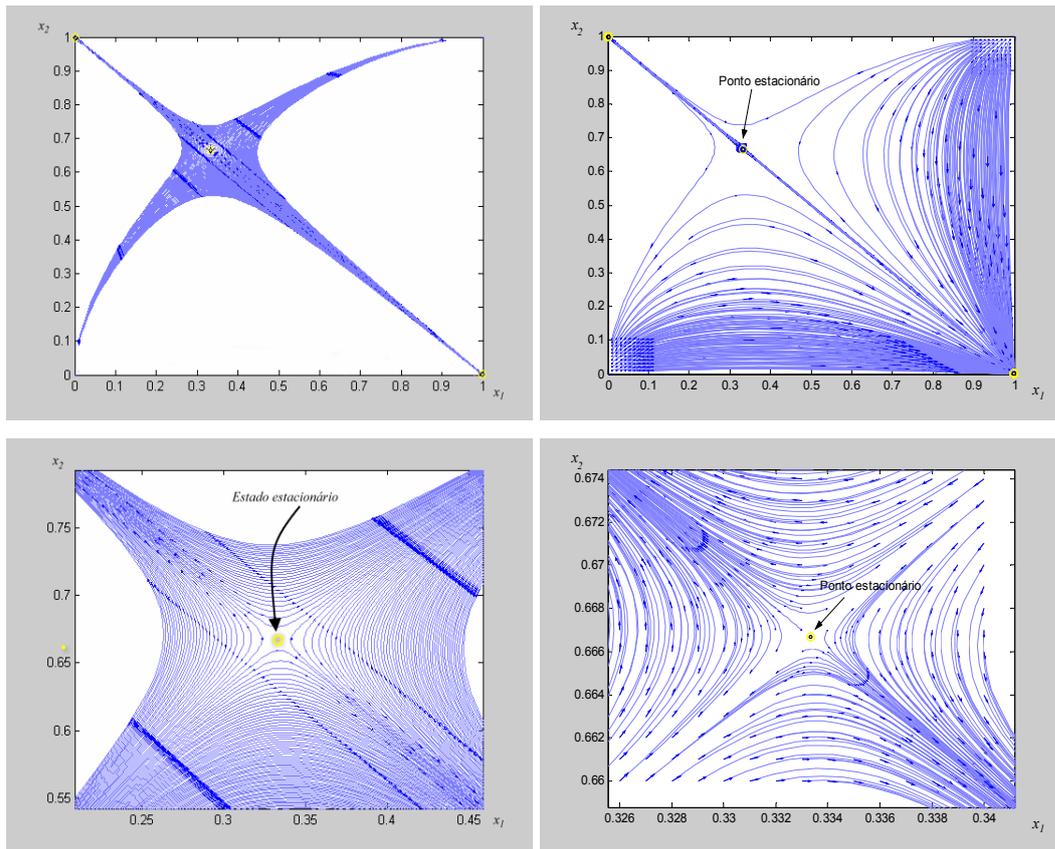


Figura 4-59 – (a), (b), (c), (d) - mesmas órbitas para diferentes níveis de aproximação

Conclui-se assim que nada garante a convergência para equilíbrios mistos.

Admitindo-se  $\varepsilon(t) = e^{(t-t_0)\lambda} \varepsilon_0$ , tem-se  $(A - \lambda I)\varepsilon_0$ , onde  $\varepsilon_0$  são os autovetores de  $A$ , então a solução será da forma,

$$\varepsilon(t) = e^{\text{Re}(\lambda)t} e^{i \text{Im}(\lambda)t} \varepsilon_0$$

Como  $e^{[i \text{Im}(\lambda) t]}$  é limitada, a estabilidade de  $\varepsilon(t)$  vai depender essencialmente de  $\text{Re}(\lambda)$ , então:

1. *Parte real não nula.* Neste caso, os correspondentes pontos fixos são chamados pontos fixos hiperbólicos ou não degenerados. Se  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ , para todo  $i$ ,  $e^{[\text{Re}(\lambda_i) t]}$  cresce continuamente com o tempo e  $\varepsilon(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , o ponto de equilíbrio é instável. Se  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , para um ou mais valores,  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , implica em estabilidade assintótica.

2. *Parte real nula.* Neste caso, o equilíbrio é dito não hiperbólico, elíptico ou degenerado. Se o sistema de equações for linear, então as soluções  $\varepsilon(t)$  para  $t \rightarrow \infty$  não se afastam nem tendem a  $\varepsilon_0$ , permanecendo em sua vizinhança. O ponto é estável e é chamado um *centro*.

Quando a matriz Jacobiana possui  $s$  autovalores com parte real negativa,  $u$  autovalores com parte real positiva e  $c$  autovalores com parte real nula, temos que os autovetores associados com estes autovalores podem representar o espaço  $\mathbf{R}^n$  como soma direta dos três subespaços  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$ .

Os espaços  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$  são subespaços invariantes do sistema linear correspondente. Como vimos, uma solução do sistema linear iniciado em um subespaço invariante permanece neste subespaço por todo tempo. Então, soluções iniciadas em  $E^s$  se aproximam do ponto fixo quando  $t \rightarrow \infty$ , soluções iniciadas em  $E^u$  se aproximam do ponto fixo quando  $t \rightarrow -\infty$  e soluções iniciadas em  $E^c$  nem crescem, nem decrescem no tempo. Os subespaços  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$  são chamados de subespaço estável, instável e centro respectivamente.

O número de casos diferentes gerados pelas inúmeras combinações possíveis de autovalores cresce dramaticamente com a dimensão do sistema. Assim, consideraremos apenas o caso bidimensional ( $n = 2$ ), que foi, até agora, o único estudado detalhadamente. Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dois autovalores, então temos que:

1.  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais, distintos.  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

Neste caso, o ponto fixo é denominado um nó ou ponto nodal.

*Estabilidade* :  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , o ponto fixo é instável.

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , o ponto fixo é estável.

2.  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais,  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

Neste caso, o ponto fixo é denominado nó impróprio.

3.  $\lambda_1, \lambda_2$  são reais com  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ .

Quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm sinais distintos, o ponto de equilíbrio é denominado ponto de sela hiperbólico. Tal ponto é sempre instável.

4.  $\lambda_1, \lambda_2$  são complexos conjugados,  $Re \lambda_1 \neq 0$ .

Consideremos  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \beta$ .

Se  $\alpha \neq 0$ , as trajetórias descrevem uma espiral convergindo para um ponto fixo que se chama foco. Se  $\alpha = 0$ , o ponto fixo é chamado centro.

Estabilidade:  $\alpha > 0$  , foco instável.

$\alpha < 0$  , foco estável.

#### 4.11 A Dinâmica do Replicador em Múltiplas Populações.

Ao aplicarmos a teoria dos jogos evolutivos às situações econômicas, nós freqüentemente nos deparamos com um problema em que, as condições de uma única população simétrica e o emparelhamento aleatório, não são verificados. Em muitas situações econômicas nós temos que lidar com interações entre mais de dois indivíduos e/ou com interações entre indivíduos de várias populações distintas. Todavia a teoria dos jogos evolutivos pode facilmente ser adaptada para modelar estas características.

Primeiro, em vez de um par, consideramos o caso em que todos os jogadores estão interagindo entre si, isto é, todos os jogadores estão no jogo. Agora, o *payoff* para um jogador, é determinado pela própria estratégia e as estratégias de todos os outros jogadores. Entretanto, nós podemos ainda assim considerar a função de *payoff* como uma função de aptidão e aplicar a dinâmica do replicador para esta população. Como exemplo, nós pegamos um modelo de uma economia de simples troca que consiste de um grande (infinito) número de agentes e um número fixo de mercadorias. Suponha inicialmente que cada indivíduo disponha de uma unidade de uma das mercadorias. Esta dotação pode ser vista como uma estratégia herdada dos pais ou obtida por aprendizado. Deixe  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  ser a fração de indivíduos dotados com a mercadoria  $j$ . Além do mais, a utilidade de um agente obtida de um vetor  $y \in \mathfrak{R}^m$  de mercadorias é dada por  $\mu(y)$ . Então todos os agentes são idênticos exceto por suas dotações iniciais. Suponha que, para esta economia, exista um único vetor preço de equilíbrio Walrasiano<sup>4</sup>  $p(x) \in \mathfrak{R}^m$ , isto é, quando a quantidade disponível da mercadoria é igual ao consumo. Neste vetor preço, para cada mercadoria  $j$ , o consumo total é igual à dotação total inicial, assim o consumo médio da mercadoria  $j$  é igual a  $x_j$ , e cada indivíduo maximiza sua utilidade de acordo com seu rendimento. Claramente, o vetor de preço Walrasiano  $p(x)$  depende da distribuição  $x$  das dotações.

---

<sup>4</sup> Leon Walras (1834-1910), economista de Lausanne, França foi um dos primeiros pesquisadores da teoria geral do equilíbrio.

Dentro deste quadro, a renda  $r_j(x)$  de um indivíduo do tipo  $j$ , isto é, de um agente dotado com a mercadoria  $j$ , pode ser visto como o seu *payoff*. Este *payoff* depende de sua própria dotação e das dotações dos outros.

Permitindo o ajuste das dotações, desde que os agentes morrem e são substituídos pelos novos agentes nascidos, nós podemos utilizar a dinâmica do replicador declarando que a distribuição das dotações se desenvolve de acordo com o sistema de equações diferenciais.

$$\dot{x}_j = [r_j(x) - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m r_k(x)x_k]x_j, j \in I_m,$$

De forma que a fração de indivíduos dotada com a mercadoria  $j$  aumentará (diminuirá) se  $r_j(x)$  estiver acima (abaixo) da renda média. Pegando a média

ponderada  $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m r_k(x)x_k$ , nós temos que o sistema satisfaz  $\sum_{j=1}^m \dot{x}_j = 0$ , de forma que

ao longo da trajetória de solução a soma das frações  $x_j, j \in I_m$ , permanece igual a um. Assumindo que inicialmente todas as mercadorias estão disponíveis e que o processo irá convergir, a economia se desenvolve para uma situação na qual todos os preços são iguais. Se inicialmente uma mercadoria possui um preço alto, é porque há uma relativa escassez desta mercadoria e mais agentes vão adotar esta mercadoria. De outro modo, menos indivíduos irão adotar uma mercadoria. Pode ser mostrado que o estado estável na qual todos os preços são iguais maximiza o bem estar social.

Este resultado mostra que as economias evolutivas deveriam ser vistas como uma generalização dinâmica da otimização convencional e da teoria de equilíbrio.

Existem várias possibilidades para generalizar a dinâmica do replicador desde o caso de uma simples população até o caso de múltiplas populações. A generalização mais comum foi proposta por Taylor [Ref: 38]. Para o caso de duas populações a dinâmica é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1j} &= [(e_1^j - x_1)^T A x_2] x_{1j}, j \in I_{m_1}, \\ \dot{x}_{2j} &= [x_1^T B (e_2^j - x_2)] x_{2j}, j \in I_{m_2}, \end{aligned}$$

Com  $e_i^j$  o  $j$ -ésimo vetor unidade em  $\mathfrak{R}^{m_i}, i = 1, 2$ .

Claramente esta é uma generalização direta da Equação 3-7 e o caminho da solução destas dinâmicas tem as mesmas propriedades do caso da dinâmica do replicador para um única população. Em particular temos que todo equilíbrio estrito de Nash evolutivo estável é assintoticamente estável e que estratégias estritamente dominadas desaparecem ao longo de qualquer caminho de solução interior. Porém, como os equilíbrios estritos de Nash podem não existir, o conceito de estabilidade assintótica em jogos assimétricos é considerado muito menos útil que em jogos simétricos.

Isto motivou Samuelson [Ref: 3] a procurar uma estabilidade mais robusta especificando formulações alternativas para a dinâmica. Infelizmente, até mesmo se a dinâmica for feita com um *payoff* monótono, isto é, quando uma estratégia com um *payoff* mais alto tem uma taxa de crescimento mais alta, uma estratégia estritamente dominada pode sobreviver ao longo do caminho de solução se for estritamente dominada somente por estratégias mistas, mas não por estratégias puras. Isto levou Samuelson à conclusão de que para se obter resultados razoáveis, uma estrutura adicional tem que ser colocada na seleção evolutiva, ou processo de aprendizado e assim as teorias de aprendizado são uma área importante para pesquisa.

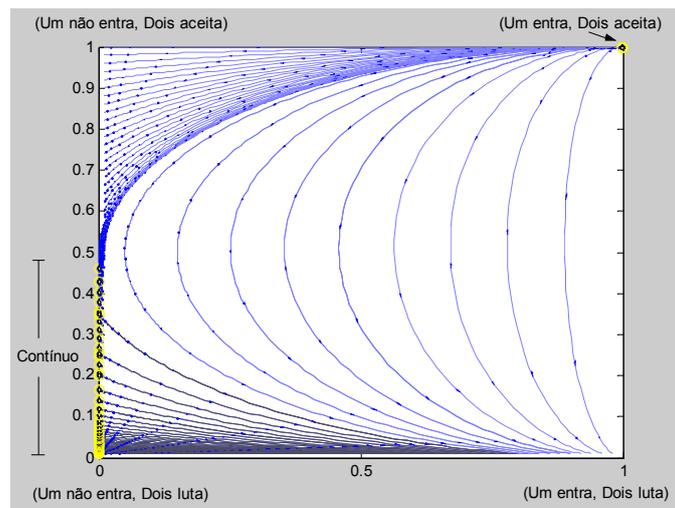
Em atenção e com total concordância às conclusões de Samuelson, o processo de aprendizado, será levado em conta neste trabalho através das estratégias comportamentais. Tais estratégias serão fruto do aprendizado e da experiência do jogador, e propiciam o aparecimento de equilíbrios estáveis no jogo, como será visto no capítulo 6.

Para ver alguns exemplos que ilustrem a aplicação da dinâmica do replicador em jogos de dois jogadores, veja Weibull [Ref: 1]. As propriedades e as fraquezas das dinâmicas são bem demonstradas pelo jogo do Impedimento de Entrada (Entry Deterrence Game) dado pelas matrizes de *payoff*.

$$(A, B^T) = \begin{bmatrix} (2,2) & (0,0) \\ (1,4) & (1,4) \end{bmatrix}$$

O jogador dois é um monopolista no mercado e quer que o jogador um fique fora da concorrência. Se o jogador um ficar fora do mercado o jogador dois obtém um *payoff* de 4. No caso em que o jogador um entra, o jogador dois pode

aceitar a concorrência, caso no qual o mercado é compartilhado (com *payoff* 2) ou lutar contra a concorrência, caso em que o *payoff* será 0 para ambos os jogadores. Este jogo possui um único equilíbrio estrito de Nash, isto é,  $x_1 = (1,0)^T$  (jogador um entra) e  $y_1 = (1,0)^T$  (o jogador dois aceita), dando a ambos os jogadores um *payoff* de dois. Além deste equilíbrio, existe um contínuo de equilíbrios de Nash, isto é, qualquer  $(x_1, x_2) \in \Theta$  com  $x_{11} = 0$  (o jogador um fica fora) e  $x_{21} < 1/2$  (o jogador irá lutar com uma probabilidade de pelo menos 1/2). Observe que para o jogador dois, a estratégia "lutar", é fracamente dominada por "aceitar". Para a maioria dos estados iniciais a dinâmica do replicador converge para o único equilíbrio estrito. Entretanto para alguns estados iniciais como os com ambos  $x_{11}$  e  $x_{21}$  próximos a zero, a dinâmica do replicador converge para um equilíbrio de Nash no qual o jogador um fica fora. Para tal equilíbrio o procedimento de seleção evolutivo não destrói a estratégia fracamente dominada "lutar".



**Figura 4-60 – Conjunto contínuo de equilíbrios resultantes da indiferença do jogador dois quando o jogador um ficar fora do mercado.**

Tal observação, conhecida no âmbito das pesquisas sobre teoria dos jogos evolutivos, é na verdade uma propriedade útil nesta abordagem, visto que o contínuo de equilíbrios desenhado na Figura 4-60, nos diz que é interessante para o jogador 1 ficar fora e que a média de *payoffs* obtidos neste perfil é maior do que a média obtida através do perfil em equilíbrio estrito (*Entra, Aceita*), por isso mesmo não existe motivo para o jogador 1 entrar no jogo de modo competitivo.

Quanto ao aspecto da convergência em si alcançar a face esquerda do poliedro de estratégias mistas, significa que qualquer perfil nesta face aponta

automaticamente para outros dois perfis, que são vértices do mesmo poliedro e que, portanto, podem ser equilíbrio estritos mostrando que convergir para uma face é similar a “convergir” indiretamente para os vértices desta face.

Para concluir, é interessante enfatizar que o emparelhamento aleatório dos jogadores é uma das suposições básicas da teoria dos jogos evolutiva. Embora, esta suposição possa ser apropriada dentro do quadro da biologia, no cenário econômico um agente interage freqüentemente somente dentro de um pequeno subconjunto de agentes.

Então, oposto ao emparelhamento aleatório, alguns autores discutiram também as implicações de regras locais de emparelhamento nas quais cada indivíduo só interage dentro de um pequeno grupo de conhecidos ou vizinhos. Sob emparelhamento local, as forças evolutivas são muito mais fortes, que é quando o sistema se ajusta mais rapidamente.

Enquanto sob o emparelhamento aleatório os tempos de convergência são incrivelmente longos e deste modo de pouca ajuda para previsões úteis de resultados, sob interação local a convergência pode aparecer rapidamente no processo. Pode ser mostrado que quanto menor é a vizinhança, mais alta é a probabilidade de se alcançar um equilíbrio eficiente.

Na verdade, demonstra-se que o critério sugerido para estabilidade evolutiva em múltiplas populações, só é conhecido para equilíbrios estritos de Nash. Critérios para estabilidade evolutiva em múltiplas populações, junto com a robustez contra novos equilíbrios e equilíbrios de estabilidade evolutiva dos conjuntos de perfis de estratégias, são analisado na seção 5.1 Weibull [Ref: 1]

Após a introdução sobre a estabilidade de estados submetidos a alguma dinâmica podemos analisar como se dá a interação entre indivíduos de populações diferentes e como se comportam os estados destas populações durante um processo evolutivo.

Como em uma única população as estratégias são emparelhadas formando perfis de concorrência e o *payoff* é calculado. Porém, em contraste com caso de uma população, cada uma das estratégias participantes do emparelhamento vem de uma população diferente. Para cada emparelhamento obtém-se a performance de uma estratégia contra o perfil complemento. Como perfil complemento do jogador *i* pode-se entender como a parte do perfil que não pertence ao jogador *i*,

ou seja, o perfil complemento é formado pelas estratégias dos outros jogadores, menos pela estratégia do jogador  $i$ . Formalmente um perfil complemento do jogador  $i$  é escrito como  $x_{-i}$ .

Cada população  $i$  envolvida é formada por  $m_i$  sub-populações de estratégias puras com cada sub-população sendo formada por uma estratégia pura  $h \in S_i$  disponível ao jogador  $i$ . Assim o estado da população referente a um jogador é uma distribuição de probabilidades  $(x_{i1}, \dots, x_{ik})$ , onde cada  $x_{ih}$  para  $h = \{1, \dots, k\}$  é a proporção da estratégia pura  $h$  na população do jogador  $i$ . Porém, diferente do caso de uma única população temos agora o estado populacional formado pelos estados de todas as populações  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  no poliedro de perfis mistos  $\Theta$ , onde cada componente  $x_i$  é um ponto no simplex  $\Delta_i$  de estratégias mistas correspondente e representam as distribuições individuais de cada estratégia disponível, nas populações de cada um dos jogadores  $i$ .

Cada perfil será formado por exatamente o mesmo número de estratégias que o número de populações. Cada jogador escolherá uma estratégia de sua população de estratégias para participar do perfil de concorrência.

Existem várias versões para uma dinâmica do replicador. A mais comumente usada foi sugerida por Taylor [Ref: 38] e é da forma,

$$\dot{x}_{ih} = [u_i(e_i^h, x_{-i}) - u_i(w_i, w_{-i})]x_{ih} \tag{Equação 4-20}$$

A taxa de crescimento da estratégia pura  $h$ ,  $\dot{x}_{hi}/x_{ih}$  dentro de sua população  $i$  será igual ao excesso entre seu *payoff* e o *payoff* médio de sua população.

Como vimos, o lado direito da Equação 4-20 é o vetor campo e é em geral quadrático. Sendo quadrática é Lipschitz contínua, desde que toda função quadrática possui esta propriedade, no espaço Euclidiano  $\mathcal{R}^m$ , contendo o espaço de estado  $\Theta$ . Deste modo, pelo teorema de Picard-Lindelöf, o sistema de equações formado por equações do tipo da Equação 4-20 possui solução única  $\xi(\cdot, x^0): \mathcal{R} \rightarrow \Theta$  através do estado inicial  $x^0 \in \Theta$ . Pode ser verificado, que o poliedro  $\Theta$ , bem como seu interior e sua borda, são invariantes sob esta dinâmica.

Como propriedade da Equação 4-20 segue-se que se todos os jogadores possuem a mesma matriz de *payoff*, ou seja, se  $\mu_i(x) = \mu_j(x)$  para todo  $i, j \in I$  e  $x \in \Theta$ , esta dinâmica induz a uma mesma órbita por  $\Theta$  e conseqüentemente às mesmas propriedades de estabilidade.

Existem outros modelos de equações diferenciais descrevendo dinâmicas de seleções de processos evolutivos além da dinâmica do replicador padrão. Existem além de outras versões de dinâmica do replicador, dinâmicas que representam interações entre as espécies. A seguir serão descritas brevemente algumas delas.

O modelo de espécies competitivas consiste num caso em que existe competição entre as espécies em relação aos recursos ambientais, ou seja, quanto maior a população de cada uma das espécies, mais prejudicial e, portanto, menor a taxa de crescimento da outra espécie.

$$\dot{x} = (a_1 - b_1x - c_1y)x$$

$$\dot{y} = (a_2 - b_2y - c_2x)y$$

Onde  $a_i, b_i$  e  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ) são parâmetros positivos.

A partir desse modelo podemos facilmente modificar as hipóteses sobre a forma de interação entre as espécies, simplesmente modificando os sinais associados ao parâmetro de interação  $c$ . Se trocarmos ambos os sinais para positivo, temos a chamada hipótese de mutualismo entre as espécies, onde cada uma delas se beneficia com a presença da outra.

No modelo de mutualismo das espécies, a dinâmica é representada pelas seguintes equações diferenciais ordinárias;

$$\dot{x} = (a_1 - b_1x + c_1y)x$$

$$\dot{y} = (a_2 - b_2y + c_2x)y$$

Onde  $a_i, b_i$  e  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ) são parâmetros positivos.

Por outro lado, se trocarmos apenas um dos sinais teremos a chamada hipótese de parasitismo de uma das espécies (por exemplo, aquela com população  $y(t)$ ), que se beneficia da presença da outra espécie, sendo que esta por sua vez é prejudicada pela presença da outra.

No modelo de parasitismo das espécies a dinâmica é representada pelas seguintes equações diferenciais ordinárias;

$$\dot{x} = (a_1 - b_1x - c_1y)x$$

$$\dot{y} = (a_2 - b_2y + c_2x)y$$

Onde  $a_i, b_i$  e  $c_i (i = 1, 2)$  são parâmetros positivos.

Aproveitando esse mesmo contexto, podemos ainda introduzir o conhecido modelo Predador-Presa de Lotka-Volterra-D'Ancona [Ref: 2]. Na versão simplificada desse modelo, assume-se que a espécie que é a presa constitui-se na principal fonte de alimento da outra espécie predadora, e que a própria presença desta última elimina o problema que a superpopulação de presas poderia ter sobre a sua taxa de crescimento. Ou seja, denominando-se por  $x(t)$  e  $y(t)$  as populações de presas e predadores, supõe-se que:

$$\dot{x} = (A - By)x$$

Onde  $A$  representa a taxa natural de crescimento das presas, na ausência dos predadores.

No caso da espécie predadora, supõe-se que:

$$\dot{y} = (-C + Dx)y$$

Onde  $C$  representa a taxa natural de redução da população dos predadores, na ausência da sua principal fonte de alimento.