5
OS PROCESSOS EVOLUTIVOS E OS JOGOS

Neste capítulo será abordada a idéia básica por trás da computação evolutiva, seus operadores e aspectos principais que estão relacionados à teoria dos jogos evolutivos. Serão descritos os operadores genéticos e como tais operadores influenciam as dinâmicas evolutivas assim como a influência do ambiente externo na evolução.

Desta abordagem resultarão as conclusões de quais operadores evolutivos serão aproveitados para este trabalho.

5.1 Operadores Evolutivos

Os processos evolutivos se baseiam em três operadores básicos que são: seleção, *crossover* e mutação. O operador de seleção como vimos, pode ser formalizado pela dinâmica do replicador, em que a taxa de crescimento de uma certa estratégia dentro de uma população pode ser representada por uma equação diferencial ordinária.

O *crossover*, por sua vez, seria uma mistura de informações entre duas estratégias existentes na população. No caso de cromossomos binários, o *crossover* seria a troca de bits entre eles, de forma a gerar novos cromossomos resultantes dessa troca. Para um cromossomo situado no domínio $\Re^n$ o *crossover* pode ser uma combinação convexa entre dois outros cromossomos. Então, dados dois cromossomos c_1 e c_2, dois novos cromossomos c_{12} e c_{21} poderiam resultar de;

$$c_{12} = \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \quad \forall\ \lambda \subset [0,1] \in \Re$$

$$c_{21} = (1-\lambda)c_1 + \lambda c_2 \quad \forall\ \lambda \subset [0,1] \in \Re$$

Note que as estratégias progenitoras c_1 e c_2 dão lugar a duas novas estratégias c_{12} e c_{21}, por isso as taxas de c_1 e c_2 na população diminuem, ao mesmo tempo em que as taxas de c_{12} e c_{21}, antes nulas, aparecem na população.

Como conseqüência imediata, a matriz de *payoff* é modificada. Inicialmente, num jogo com dois jogadores, 1 e 2, cada qual com duas estratégias, temos a seguinte matriz de *payoff*,

$$A_i = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} e_2^1 & e_2^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1^1 \\ e_1^2 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Então, esta matriz é composta pelas combinações de *payoff*s resultantes da concorrência das estratégias do jogador 1 contra as estratégias do jogador 2. Se aparecer mais uma estratégia, além das estratégias já existentes do jogador 1, a proporção de uma das estratégias é reduzida, ao passo que, aparece outra nova estratégia, dando lugar a uma nova matriz de *payoff*.

$$A_c = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} e_2 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_1^3 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \end{array}$$

Deste modo, a estratégia mista sai da face do poliedro de estratégias mistas e entra em seu interior. É importante pensar neste poliedro como sendo sempre multidimensional, pois mesmo que não exista um número de estratégias que justifique este hiper dimensionamento pode-se sempre pensar em termos de vértices ou faces deste poliedro.

No caso do exemplo, tivemos a transformação do espaço $\Re^2 \rightarrow \Re^3$. Caso as novas estratégias permaneçam na bacia de atração do equilíbrio dos quais seus progenitores faziam parte, a órbita continuará convergindo para o mesmo equilíbrio. Porém a bacia de atração no $\Re^3$ vai depender da nova estratégia e nada garante que permaneça a caminho do dito equilíbrio. O operador de *crossover* pode gerar pontos iniciais de órbitas que tenderão para equilíbrios diferentes, se o equilíbrio não for estrito, ou seja, se o equilíbrio não for o único existente.

Processos evolutivos que estão submetidos às operações de *crossover*, portanto só irão convergir para um ponto em duas condições. Ou o processo de seleção se completa antes que ocorra um novo cruzamento, ou caso exista um equilíbrio estrito. Caso contrário qualquer equilíbrio em estratégias puras pode ser alcançado.

Um importante aspecto a ser observado é a freqüência de inserção de novas estratégias na população. Existe uma relação entre o vetor campo $\varphi(x)$ e a freqüência de *crossover* ou mutação. Caso esta freqüência seja alta em relação à velocidade com que a órbita se dirige ao equilíbrio, o espaço invariante pode ficar restrito ao interior do simplex de estratégias, não tendo velocidade suficiente para alcançar um vértice antes que aconteça outra mudança na população. O operador de *crossover* pode transformar uma bacia de atração em atrator, no caso que freqüentes cruzamentos trazem de volta para a bacia de atração, órbitas que, caso fossem deixadas livres desse operador, tenderiam para um determinado equilíbrio.

O operador de mutação também cria novas estratégias na população que substituem algumas já existentes. Porém, diferentemente das novas estratégias resultantes de um *crossover*, as obtidas através da mutação são criadas aleatoriamente, podendo cair em qual parte do espaço de estratégias mistas. Se o operador de mutação for um ruído branco, com média nula, os cuidados quanto à freqüência de ocorrência de mutação devem ser reforçados, sob pena da órbita não sair da vizinhança do ponto inicial, dando a falsa impressão de se tratar de um processo estável no sentido de Lyapunov.

Para visualizar um exemplo em que ocorram freqüentes mutações, imaginemos um jogo com um número fixo de possíveis estratégias em que uma mutação signifique a transformação de uma estratégia em outra. Isto significa que, a cada mutação, as únicas mudanças que ocorrem são nas proporções das estratégias envolvidas. Consideremos agora que a distribuição de estratégias de uma população seja:

$w_1 = [x_{11}, 1 - x_{11} - x_{31}, x_{31}]$, onde x_{11} é a proporção da estratégia 1 da população 1, 1-x_{11}-x_{31} é a proporção da estratégia 2 da população 1 e x_{31} é a proporção da população 3. Na Figura 5-3, vemos o resultado deste processo evolutivo. O equilíbrio alcançado foi o mesmo porque as mutações foram incapazes de levar a órbita para fora da bacia de atração daquele equilíbrio.

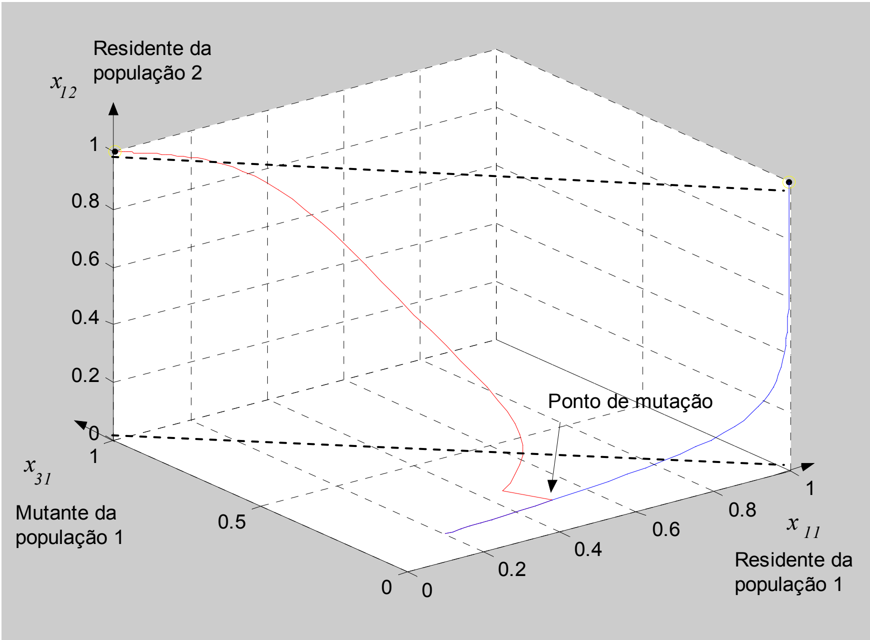


Figura 5-1 – Órbita sem e com mutação

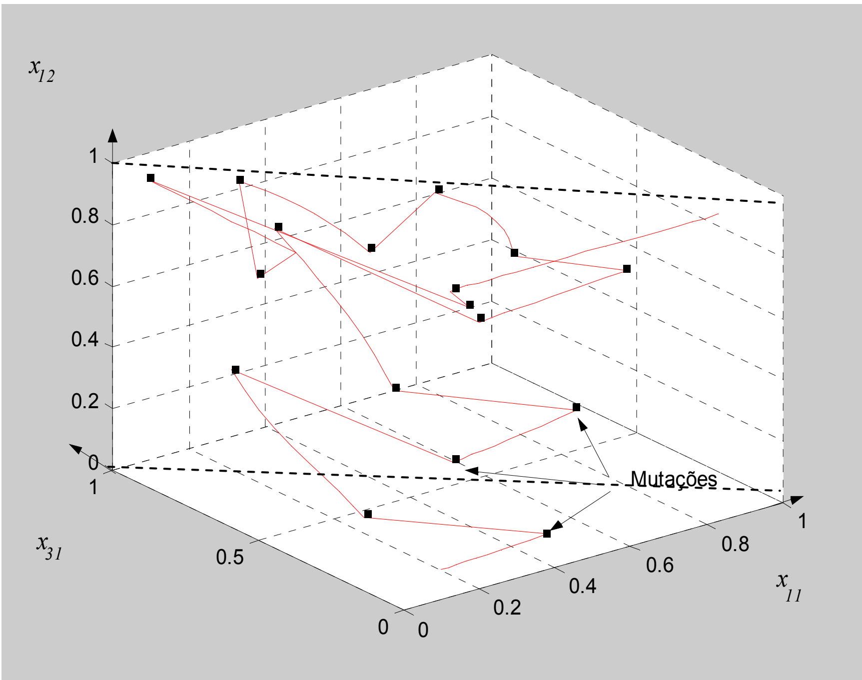


Figura 5-2 – Órbita com mutações freqüentes

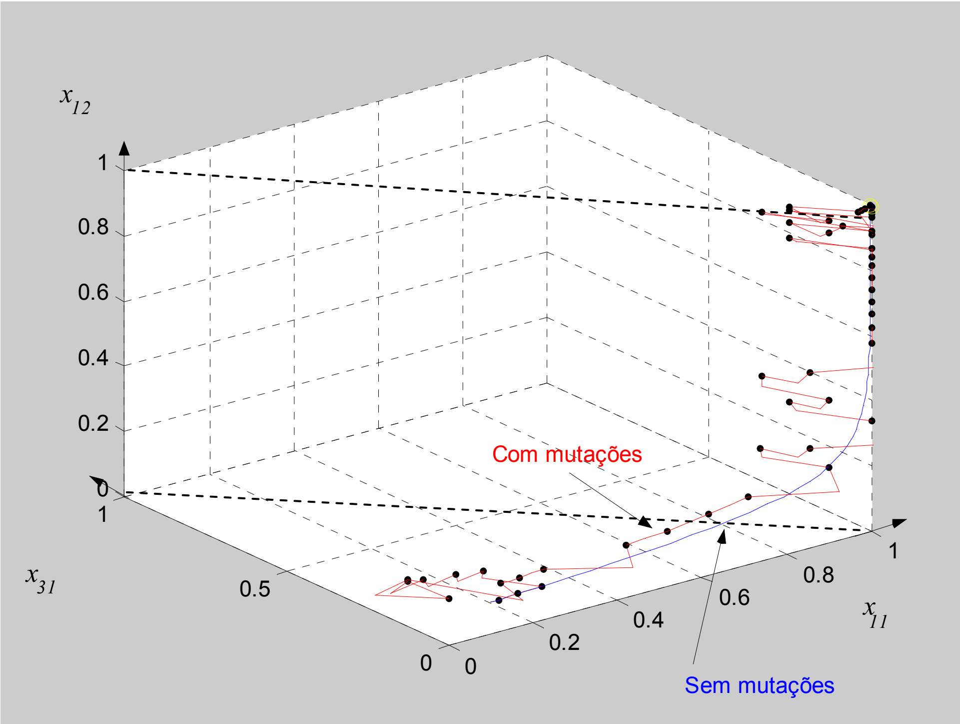


Figura 5-3 – Órbitas com mutações na mesma bacia de atração

Observemos agora, o caso de um jogo com dois equilíbrios em estratégias puras caracterizado pelas seguintes matrizes de *payoff*:

$M_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$ para os jogadores 1 e 2 respectivamente.

A composição das matrizes de *payoff*,

$$\begin{bmatrix} (0.6,0.4) & (0.3,0.2) \\ (0.4,0.1) & (0.5,0.3) \end{bmatrix},$$

indica dois equilíbrios, que são (e_1^1, e_2^1) e (e_1^2, e_2^2). Vemos através da Figura 5-4, que estes dois equilíbrios dividem o simplex de estratégias mistas em duas bacias de atração.

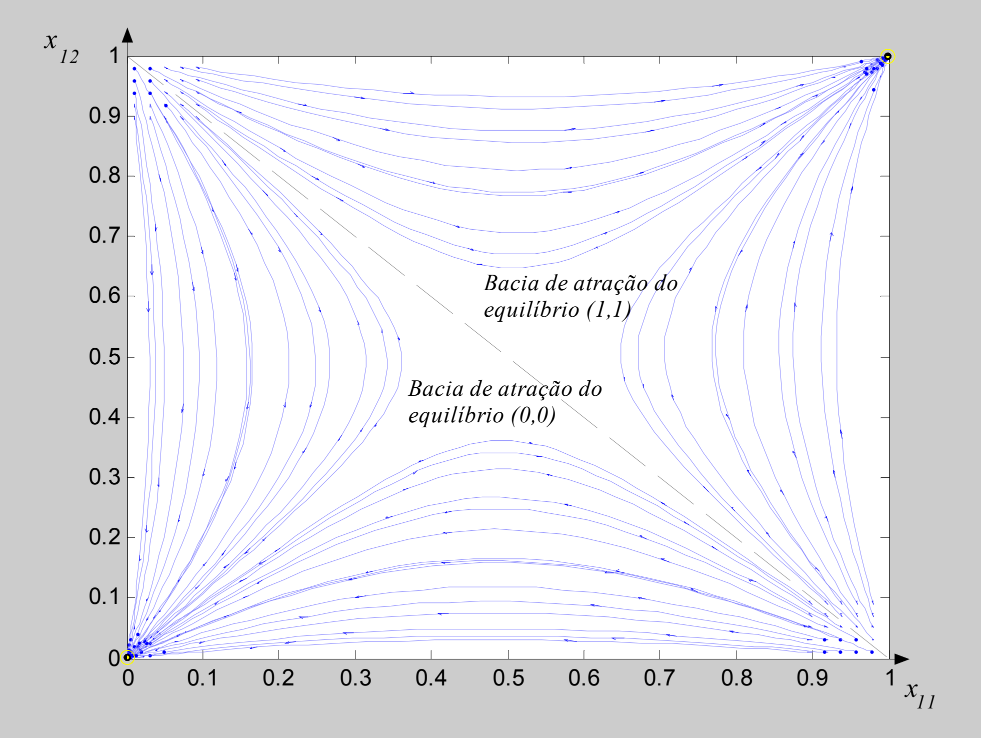


Figura 5-4 – Duas bacias de atração para os equilíbrio $\left(e_1^1, e_2^1\right)$ **e** $\left(e_1^2, e_2^2\right)$

Para alcançar os dois equilíbrios, somente com o processo de seleção, teríamos que percorrer todas as bacias de todos os equilíbrios para que os tais equilíbrios pudessem ser encontrados. Em casos de muitos jogadores, com várias estratégias cada um, isto seria bastante intensivo do ponto de vista computacional. Como meio de se iniciar órbitas em várias bacias e encontrar tais equilíbrios correspondentes, introduzimos o operador de mutação, o qual promove a convergência para os dois equilíbrios do jogo em questão, a partir de estados iniciais situados em apenas uma bacia de atração. Estas órbitas estão ilustradas na Figura 5-5. Já que a mutação é um processo estocástico existe uma probabilidade associada de se convergir para cada um dos equilíbrios.

Assim, o operador de mutação é responsável pela varredura do poliedro de estratégias mistas de modo que, a longo prazo, cria estados iniciais cujas as órbitas regidas pela dinâmica do replicador, alcancem todos os equilíbrios em estratégia puras possíveis.

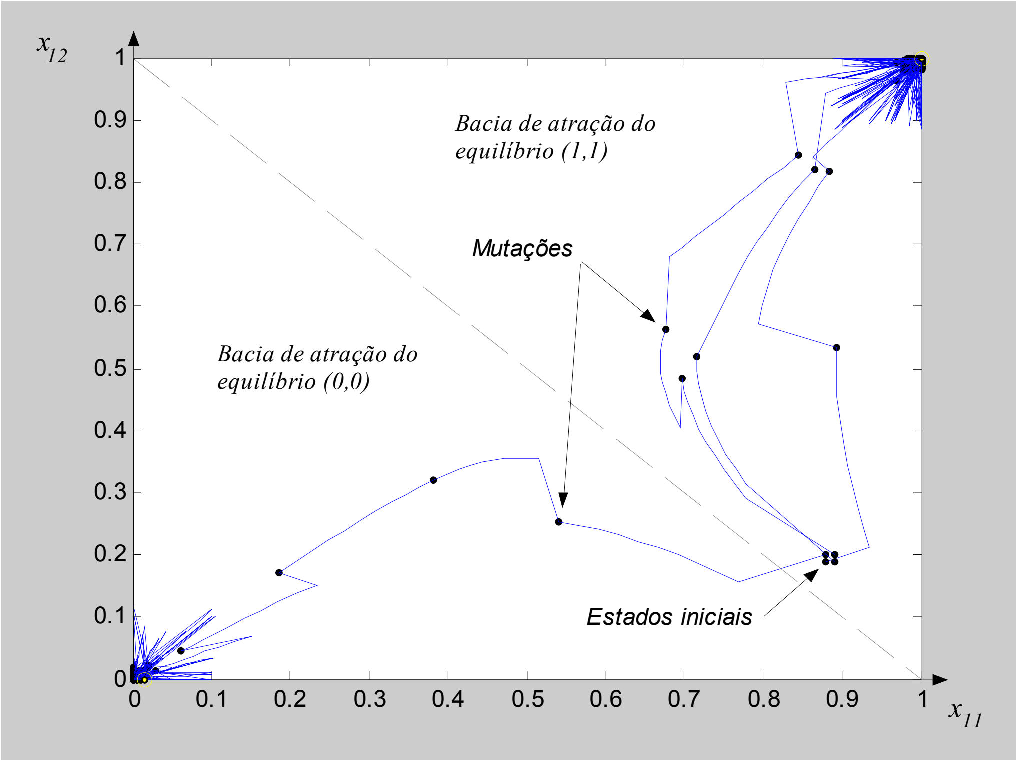


Figura 5-5 – Órbitas que mudam de bacia de atração por efeito de mutações

Por outro lado, caso seja conhecida a distribuição das estratégias dentro de uma população e a matriz de *payoff* for constante, não ocorrendo cruzamentos nem mutações, ao aplicarmos a dinâmica do replicador será possível, então, conhecer o equilíbrio para o qual a órbita convergirá. Porém se ocorrer uma intervenção no processo de seleção de modo que ele não se complete pela convergência a um equilíbrio, seja pela introdução de operadores de *crossover* ou mutação, a órbita guiada pela dinâmica do replicador sofrerá desvios no sentido de que o *payoff* médio da população não continue a mudar no sentido de se igualar ao *payoff* de algum equilíbrio. O problema é que logo após uma operação de *crossover* ou mutação, pode ocorrer uma queda brusca no *payoff* médio de uma população, de modo que mesmo que ele volte a crescer não será na forma de um processo monotônico em direção a um *payoff* de equilíbrio, mas pode, contudo, transformar-se num processo ruidoso. Neste caso, mesmo que exista um equilíbrio estrito, existe a possibilidade dele nunca ser alcançado. Por isso é importante enfatizar que cuidados devem ser tomados na implementação dos operadores de *crossover* e mutação.

Tomando tais cuidados nas freqüências dos operadores, não é complicado ver que a órbita pode convergir para um equilíbrio. Imaginemos que para um tempo *t* a população se encontre sobre uma órbita em direção a um equilíbrio *e*. À medida que se aproxima do equilíbrio, o *payoff* médio da população aumenta tendendo para o *payoff* do equilíbrio e só pára de aumentar quando o *payoff* médio da população se iguala ao *payoff* da população no equilíbrio, haja visto que sendo a dinâmica do replicador função da diferença entre o *payoff* médio da população e o *payoff* do equilíbrio, o vetor campo $\varphi(x)$ só se anulará no equilíbrio. Se uma nova estratégia for inserida na população, seja por mutação ou por *crossover*, uma nova órbita será criada, saindo da face inicial e dirigindo-se para o interior do poliedro de estratégias mistas até que a dinâmica do replicador possa levá-la para um vértice.

Para ser mais claro, admitamos que existam duas populações em jogo, cada qual com duas estratégias. Portanto podemos representar o espaço de estratégias por uma superfície bidimensional que é uma face de um poliedro tridimensional de estratégias mistas. Tal fato é possível para o conjunto das quatro estratégias dos dois jogadores, porque a proporção de uma das estratégias numa população sempre é função da outra, ou seja, se temos que a proporção da estratégia 1 na população 1 for x_{11}, a proporção da estratégia 2 na população 1 será $x_{21} = 1 - x_{11}$. Portando só precisamos, neste caso, de uma dimensão para cada população. Então, poderemos representar o simplex de estratégias mistas com apenas duas dimensões.

Quando ocorre uma mutação na população 1, uma nova estratégia é criada numa determinada proporção. Para representar esta proporção, será necessária mais uma dimensão, de modo que as proporções das três estratégias agora existentes na população 1, podem ser representadas de acordo com apenas duas variáveis x_{11} e x_{31}, pois $x_{21} = 1-x_{11}-x_{31}$. A órbita passa então, a navegar em um espaço tridimensional como vista na Figura 5-6.

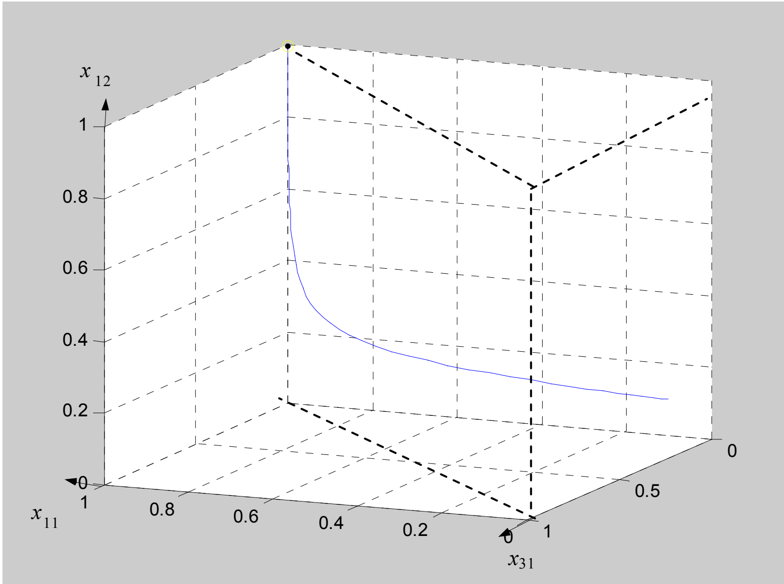


Figura 5-6 – Órbita na face original x_{11} e x_{12}

Se a estratégia original for mais apta que a estratégia mutante, a órbita retornará para a face inicial 2D do poliedro tridimensional de estratégias mistas. Observe na Figura 5-7, como a órbita, após a mutação sofre um desvio em direção ao interior do poliedro e é atraída novamente para o equilíbrio formado pela estratégia residente. Porém, caso a estratégia mutante for mais apta que as estratégias já existentes, a órbita seguirá para a face prescrita pela nova estratégia mutante.

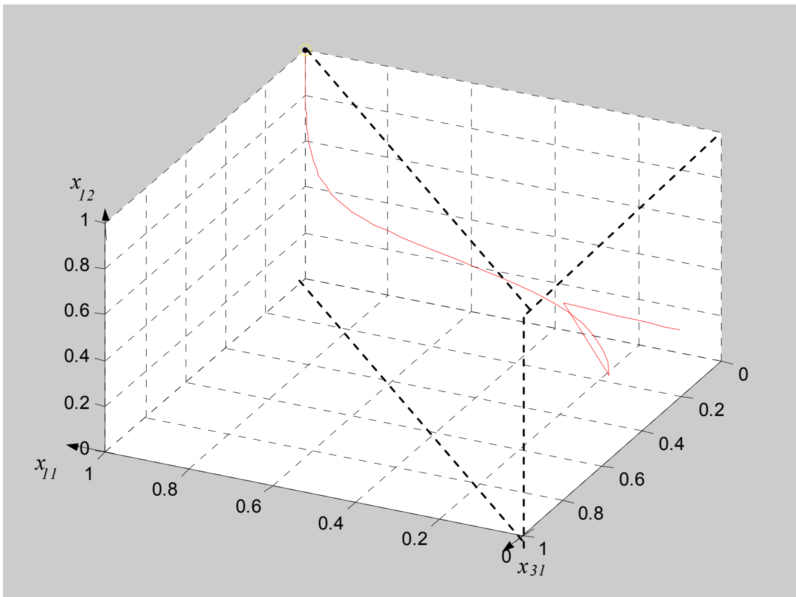


Figura 5-7 – Órbita com mutante pior que a residente.

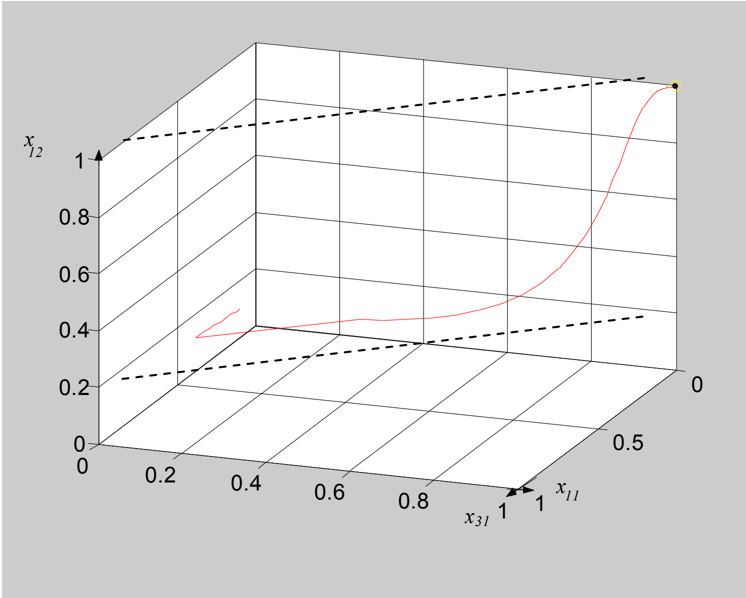


Figura 5-8 – Estratégia mutante melhor que estratégia original

Sabemos que o processo de seleção apenas privilegia as melhores estratégias dentre as estratégias já existentes na população, para uma dada distribuição e perante uma determinada situação, por isso é necessária a criação de novas estratégias para que se possa varrer todo o poliedro de estratégias mistas em busca de equilíbrios existentes.

Desde que possamos representar o operador de mutação, ao longo do processo evolutivo, como uma seqüência de Bernoulli Gaussiana, ocorrendo com uma probabilidade p_m e uma intensidade a_m e sendo a proporção dessa estratégia mutante ε_m, função de a_m, poderemos modificar a dinâmica do replicador para:

$$\dot{x}_{11}^{t} = \left[u_1(x_{11}^{t} - \varepsilon_m^{t}, w_2) - u_1(w_1^{'t}, w_2)\right](x_{11}^{t} - \varepsilon_m^{t})$$

onde $w_1^{'t} = \left[x_{11}^{t}, 1 - x_{11}^{t} - x_{31}^{t}, x_{31}^{t}\right]$

$$x_{11}^{t+1} = \dot{x}_{11}^{t} + (x_{11}^{t} + \varepsilon_m^{t})$$

A freqüência de mutação e sua intensidade não devem prejudicar o processo de evolução, por isso a intensidade a_m não pode jogar o estado da população para fora do poliedro de estratégias mistas e a freqüência não poderá impedir que a dinâmica do replicador atinja seu alvo. O modo mais fácil de fazer isso é estabelecer que só ocorrerão mutações depois de a dinâmica do replicador convergir para um equilíbrio e que a intensidade da mutação esteja restrita ao simplex de estratégias mistas, ou seja, dentro do conjunto fechado [0, 1] relativo á cada dimensão.

Como dito, se a freqüência das mutações for muito mais rápida do que o tempo necessário para a órbita atingir o equilíbrio, então ela corre o risco de ficar presa no interior do espaço de estratégias mistas, pois nunca alcançarão um vértice deste simplex antes que uma nova mutação a leve em outra direção aleatória. O fato das mutações esperarem o tempo necessário, para a que órbita alcance um equilíbrio não é absurdo, pois sendo o possível equilíbrio evolutivamente estável num jogo de multi-populações, um equilíbrio estrito e, por isso, um equilíbrio em estratégias puras, é mais eficiente percorrer apenas os vértices do poliedro.

A aplicação de recursos como *crossovers* e mutações genéticas, com mudanças nas distribuições de estratégias promovem a varredura aleatória de uma extensa gama de estados na busca pelo equilíbrio, mas não garantem a convergência para o equilíbrio mais atrator, desde que podem desviar uma órbita sem critérios transferindo-a para a bacia de atração de um outro equilíbrio menos atrator. Reduzindo-se a freqüência como citado anteriormente, para que o processo de seleção se decidisse por uma estratégia, poderíamos gerar aleatoriamente a cada final do processo de seleção novos espaços, devido a esse caráter aleatório a justificativa para o uso desses operadores genéticos seria a de revelar algumas ações e reações dos jogadores ao longo de uma competição, mas não a de otimizar estratégias. De tempos em tempos as estratégias responsáveis pelos piores equilíbrios sofreriam mutações, fazendo com que novas órbitas fossem iniciadas. Com isso cenários de concorrência seriam gerados permitindo a observação da performance dos jogadores sob as regras do jogo. Neste trabalho como o objetivo é alcançar o equilíbrio mais atrator, esses operadores do modo aleatório como são conhecidos, não serão usados.

Um terceiro fator que deve ser considerado no processo evolutivo é a influência externa sobre o jogo. Essas influências externas modificam os elementos da matriz de *payoff*, mas não modificam sua dimensão de forma que as características estudadas, como $A=\mu(x,x)-\mu(y,x)$ e $B=\mu(x,y)-\mu(y,y)$ podem ser modificadas pelos fatores externos. Lembrando que nos referimos a x como sendo a estratégia residente e a y como a estratégia mutante.

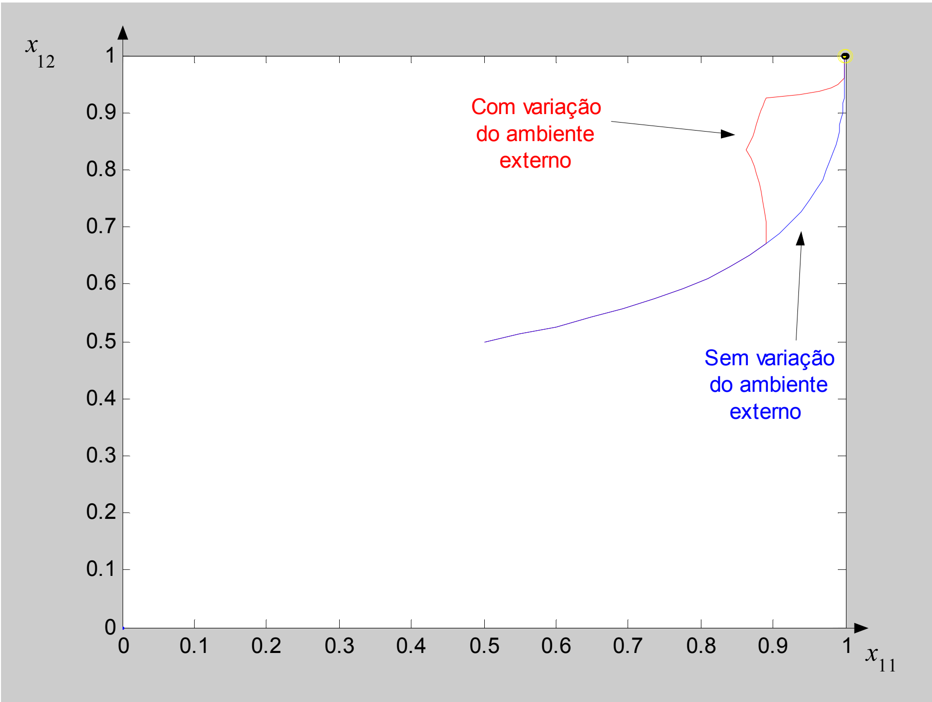


Figura 5-9 – Interferência do ambiente externo na matriz de *payoff*

5.2 Influências Externas no Processo Evolutivo

Mudanças no ambiente podem causar desvios na órbita porque ao influir nas características da matriz de *payoff* como $A=\mu(x,x)-\mu(y,x)$ podem não somente mudar os equilíbrios do jogo, Figura 5-10 para o caso em que um $A>0$ passa a ser $A<0$, como pode mudar as bacias de atração.

Por exemplo, considere inicialmente as matrizes de *payoff* para dois jogadores como,

$M_1=\begin{bmatrix}0.6 & 0.3\\0.4 & 0.5\end{bmatrix}$ e $M2=\begin{bmatrix}0.4 & 0.1\\0.2 & 0.3\end{bmatrix}$. Os dois equilíbrios em estratégias puras possíveis serão (e_1^1,e_2^1) e (e_1^2,e_2^2). Se o ambiente mudar a matriz de *payoff* do jogador 1 para $M_1^{'} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ os equilíbrios continuariam os mesmos, mas as bacias de *payoff* seriam distorcidas como se vê nas Figura 5-11 e Figura 5-12.

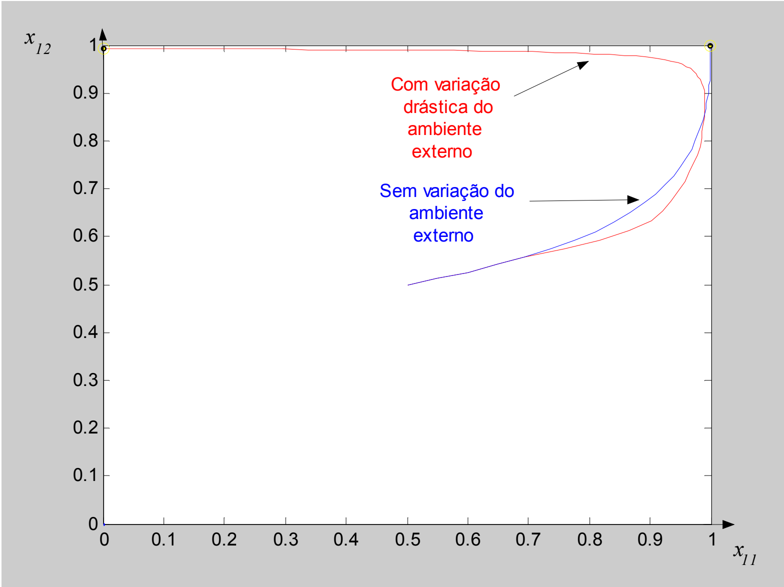
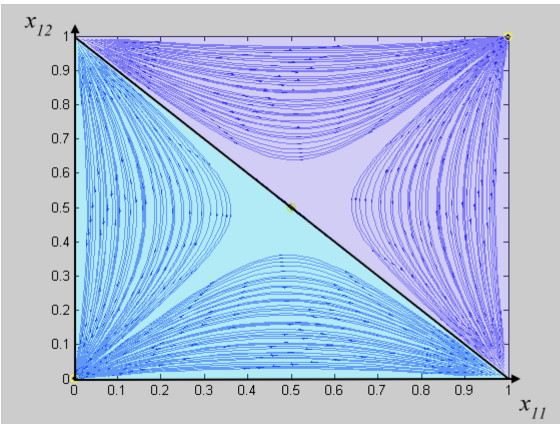


Figura 5-10 – Mudança de órbita por influência externa



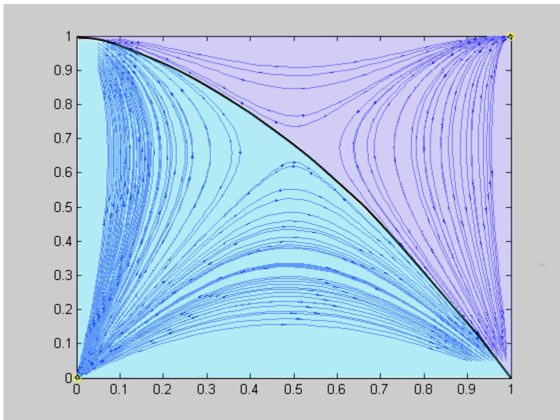


Figura 5-11 **Figura 5-12**

Efeito do ambiente externo nas bacias de atração

Assim, como a bacia de atração do equilíbrio (e_1^2, e_2^2) invade parte da bacia de atração do equilíbrio (e_1^1, e_2^1), qualquer órbita considerando inicialmente M_1 e começando na bacia de atração de (e_1^2, e_2^2) vai convergir para ele, mesmo após a transformação de M_1 para $M_1^{'}$, enquanto algumas órbitas considerando inicialmente M_1 e começando na bacia de atração de (e_1^1, e_2^1) podem passar da bacia de atração de um equilíbrio para outro com a transformação de M_1 para $M_1^{'}$. As Figura 5-13 e Figura 2-1 ilustram esta propriedade.

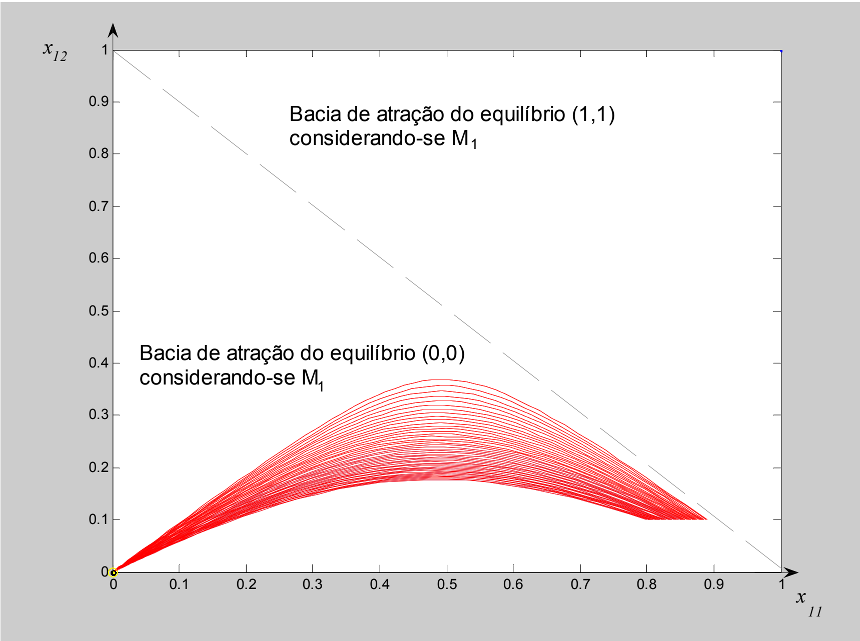


Figura 5-13 – Bacias de atração originais

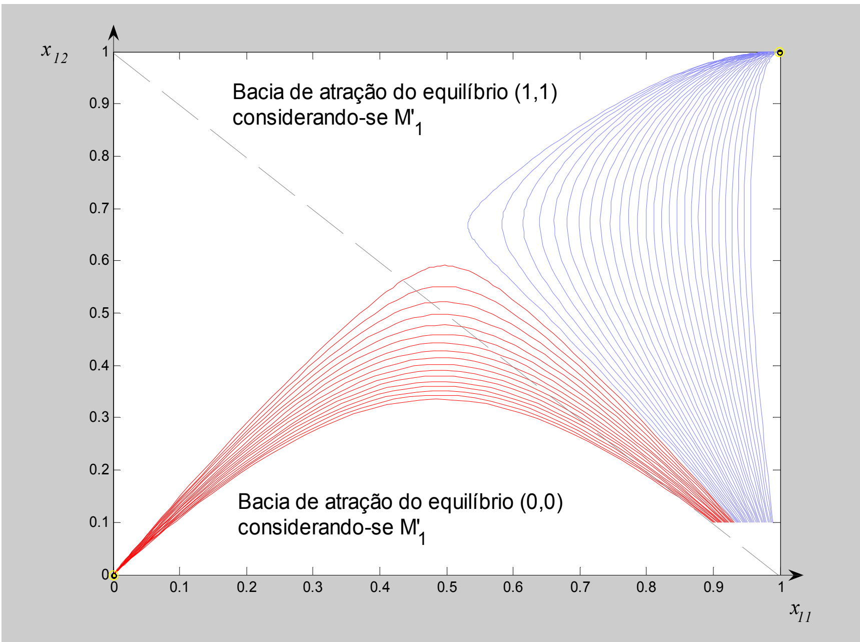


Figura 5-14 – Distorção na bacia de atração provocada por mudanças no ambiente

É intuitivo, portanto, ver que se não existem equilíbrios estritos, todos os equilíbrios existentes são evolutivamente instáveis se considerarmos todo o simplex de estratégias mistas como vizinhança para todos eles. As órbitas dependem da situação do ambiente externo que incluem além das estratégias dos outros jogadores, situações climáticas, mercadológicas etc

Caso as características da matriz de *payoff*, como *A* e *B* já descritas, se mantiverem, de modo a não restringir a bacia de *payoff* de um equilíbrio, é indicativo que a diversidade e a distribuição das estratégias na população são apropriadas para que o indivíduo seja considerado apto naquele ambiente.